

На правах рукописи



МАСЛЕННИКОВ Олег Владимирович

**КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ОБУЧАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ
АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

1.3.4 – радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук» (г. Нижний Новгород)

Научный консультант: **Некоркин Владимир Исаакович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом нелинейной динамики ИПФ РАН

Официальные оппоненты: **Храмов Александр Евгеньевич**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского Института прикладного искусственного интеллекта и цифровых решений, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Стрелкова Галина Ивановна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики Института физики Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Казаков Алексей Олегович, доктор физико-математических наук, профессор факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук

Защита состоится «22» июня 2026 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.238.01 в Институте прикладной физики РАН (603951, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ИПФ РАН: www.ipfran.ru.

Автореферат разослан «11» мая 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук



Э. Б. Абубакиров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Предмет исследования и актуальность темы

Основы теории нелинейных колебаний, заложенные в пионерских работах школы Мандельштама и Андронова, установили методологический фундамент описания автоколебательных систем через анализ фазового пространства, бифуркаций и устойчивости. Этот подход позволил успешно изучить эффекты синхронизации, формирование волновых структур и пространственно-временной хаос в системах с фиксированной архитектурой связей. Однако современные задачи всё чаще требуют решения обратной проблемы – *синтеза* динамических систем с заданными функциональными свойствами. Наиболее остро эта проблема проявилась в двух направлениях, исторически развивавшихся на пересечении с теорией колебаний: вычислительной нейронауке и машинном обучении.

Вычислительная нейронаука с самого начала опиралась на аппарат нелинейной динамики. Модель Ходжкина – Хаксли [1] связала электрофизиологию нейрона с этим формализмом, продемонстрировав, что генерация потенциала действия представляет собой релаксационные колебания в быстро-медленной системе. Последующие работы [2–4] систематизировали связь между бифуркационной структурой нейронных моделей и паттернами их активности. На сетевом уровне были исследованы механизмы синхронизации [5–8], формирования пространственно-временных паттернов [9, 10] и динамика переходных процессов [11, 12]. К настоящему времени язык нелинейной динамики – аттракторы, бифуркации, устойчивость многообразий – стал стандартным инструментом *анализа* нейронных систем, однако вопрос о том, как целенаправленно *сконструировать* сеть с требуемой динамикой, оставался за рамками этого подхода.

Именно эту задачу – формирование желаемого поведения путём настройки параметров – взяло на себя машинное обучение, развивавшееся из иных методологических предпосылок. Модель ассоциативной памяти Хопфилда [13] установила связь между нейронными сетями и статистической физикой: сеть интерпретируется как система, релаксирующая к минимумам энергетической функции, что позволило применить методы статистической физики [12, 14, 15] для анализа свойств аттракторного ландшафта. Алгоритм обратного распространения ошибки [16] и методы обучения с подкреплением [17, 18] открыли возможность целенаправленного формирования сложного поведения в сетях, а концепция резервуарных вычислений [19–22] показала, что хаотическая динамика [12] сама по себе может служить вычислительным ресурсом. Присуждение Нобелевской премии по физике 2024 года Дж. Хопфилду и Дж. Хинтону [23] подчеркнуло, что искусственные нейронные сети представляют собой сложные системы,

поведение которых определяется принципами нелинейной динамики и статистической физики.

Тем не менее между описанными направлениями сохраняется концептуальный разрыв. Теория нелинейных колебаний предоставляет инструментарий для *анализа* – описания аттракторов, бифуркаций, устойчивости в системах с фиксированной архитектурой, но не даёт рецептов для *синтеза* – конструирования сети с заданными свойствами. Методы машинного обучения, напротив, решают задачу синтеза, настраивая параметры сети для выполнения конкретной функции, однако действуют как «чёрный ящик», не раскрывая физических принципов сформированных вычислительных механизмов. Открытым остаётся центральный вопрос: *каким образом алгоритм обучения трансформирует фазовое пространство многомерной динамической системы, формируя аттракторные структуры и траектории, необходимые для реализации вычислений?*

Ответ на этот вопрос имеет два практических направления.

Во-первых, рекуррентные нейронные сети, обученные на когнитивных задачах [24, 25], всё шире используются как модели для изучения принципов работы биологических нейронных систем [26–28]: выявление динамических механизмов, спонтанно возникающих в обученных сетях, позволяет формулировать проверяемые гипотезы о нейронных основах принятия решений [29, 30], рабочей памяти и пространственной навигации [31, 32].

Во-вторых, понимание того, как обучение формирует функциональную динамику, непосредственно относится к задаче построения объяснимого искусственного интеллекта [33] – переходу от феноменологического описания («сеть решает задачу») к механистическому объяснению («сеть решает задачу посредством определенных динамических структур»).

Настоящая работа направлена на преодоление указанного разрыва путём развития радиофизического подхода к теории обучаемых нейронных сетей. Обучение рассматривается не как абстрактная оптимизационная процедура, а как управляемый процесс формирования функциональной коллективной динамики – создания аттракторов, модификации их бассейнов притяжения, формирования каналов переходной динамики. Такой взгляд превращает обучение в предмет физического исследования, допускающий качественное и количественное описание в терминах теории нелинейных колебаний.

Актуальность работы определяется необходимостью построения этой связи. Установление закономерностей, связывающих динамику элементов, архитектуру сети и её функциональные свойства, является нерешённой задачей, имеющей значение как для понимания принципов работы биологических нейронных систем, так и для развития методов анализа и проектирования искусственных нейронных сетей.

Цель и задачи работы

Целью диссертационной работы является установление динамических механизмов, посредством которых нелинейные сети активных элементов приобретают функциональные свойства, и установление связей между структурой фазового пространства, топологией сети, характером обучения и эффективностью выполнения целевых задач.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Установить бифуркационные механизмы хаотических бёрстовых колебаний в дискретных быстро-медленных системах, доказать существование быстро-медленных аттракторов и получить аналитические оценки их хаотичности.

2. Исследовать управляемость переходного хаоса периодической модуляцией параметра, получить аналитические приближения для времени продолжения хаотической динамики.

3. Установить зависимости нелокальной («бассейновой») устойчивости синхронизации бёрстов от топологии, параметров связей и динамики индивидуальных осцилляторов.

4. Выявить механизмы функциональных переключений в адаптивных сетях, разработать формализм гиперсетевого описания. Исследовать перенос доменной структуры в мультиплексных адаптивных сетях.

5. Раскрыть аттракторный и переходный механизмы формирования функциональности при обучении считывающего слоя, установить спектральные закономерности обученных матриц связей.

6. Сформулировать принцип вычислительного соответствия, разработать топологические и геометрические методы описания вычислительных режимов, реализовать физический резервуар.

7. Исследовать самоорганизацию аттракторов и популяционной специализации при настройке всех параметров сети, выявить механизмы принятия решений, интеграции и многозадачного выполнения.

8. Провести систематическое сравнение структур фазового пространства, формируемых обучением с подкреплением и обучением с учителем при идентичных задачах.

Научная новизна

Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми:

1. Впервые предложен и теоретически обоснован механизм возникновения хаотических бёрстовых колебаний в быстро-медленных системах с дискретным временем, основанный на граничном кризисе хаотического аттрактора в быстрой подсистеме.

2. Впервые для сетей хаотических активных элементов показано, что архитектура «малого мира» обеспечивает максимальную нелокальную («бассейновую») устойчивость режима синхронизации. Введён и применён концептуальный аппарат «гиперсети» для описания динамики в адаптивных сетях.

3. Обнаружен и исследован механизм выполнения вычислений в хаотических рекуррентных сетях, основанный на формировании в процессе обучения управляемых непритягивающих переходных траекторий, детерминированно активируемых внешним стимулом.

4. Впервые установлено, что парадигма обучения является определяющим фактором для формируемой функциональной динамики: обучение с подкреплением, в отличие от обучения с учителем, способствует спонтанному возникновению нетривиальной структуры фазового пространства, содержащего как неподвижные точки, так и квазипериодические аттракторы.

5. Впервые продемонстрировано, что обучение стандартной рекуррентной сети на когнитивных задачах приводит к спонтанной самоорганизации как функциональной архитектуры (разделение на специализированные популяции), так и динамического ландшафта (формирование точечных, линейных и кольцевых аттракторов), воспроизводящих ключевые принципы организации нейронных сетей мозга.

6. Впервые для анализа спайковой активности обученных нейронных сетей применён аппарат топологического анализа данных и показано, что различные вычислительные функции соответствуют уникальным топологическим характеристикам коллективной динамики.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в развитии теории нелинейной динамики сложных, адаптивных и обучаемых систем. Полученные результаты вносят вклад в понимание фундаментальных принципов вычислений в распределённых системах, устанавливая связь между методами машинного обучения и физическими механизмами формирования функциональных динамических режимов. Установленные закономерности возникновения различных типов аттракторов в обучаемых сетях открывают новое направление в теории синтеза многомерных динамических систем с заданными свойствами.

Практическая значимость результатов связана с их потенциальным применением при разработке новых вычислительных архитектур и алгоритмов, в частности в области нейроморфных вычислений. Установленные закономерности спонтанного формирования функциональных

модулей и структурированного аттракторного ландшафта закладывают физическую основу для разработки новых подходов к созданию адаптивных и автономных интеллектуальных систем. Разработанные подходы к анализу многомерной динамики обучаемых сетей представляют собой новый инструментарий для исследователей в области как искусственных, так и биологических нейронных систем. Эти методы позволяют переходить от феноменологического описания работы нейросетевых моделей к выявлению лежащих в их основе динамических механизмов, что имеет прямое отношение к актуальной задаче построения объяснимого искусственного интеллекта.

Методология и методы исследования

Работа основана на сочетании аналитических методов теории нелинейных колебаний и бифуркаций, численного моделирования многомерных динамических систем на высокопроизводительных вычислительных кластерах, а также методов машинного обучения (обучение с учителем и обучение с подкреплением). Для анализа результатов применялись современные подходы, включая методы статистического анализа, теории сложных сетей и топологического анализа данных.

Положения, выносимые на защиту

1. В классе дискретных быстро-медленных систем с хаотической быстрой подсистемой формируется нетривиальный аттрактор, реализующий колебательный режим с чередованием медленных регулярных и быстрых хаотических движений.

2. Периодическая модуляция управляющего параметра нелинейного отображения в закритической области, где хаотический аттрактор разрушен в результате граничного кризиса, но сохраняется непритягивающее хаотическое множество, приводит к качественно различным режимам затухания переходного хаоса: экспоненциальному при низких и высоких частотах модуляции и осциллирующему при промежуточных частотах.

3. Нелокальная робастность синхронизации хаотических бёрстовых колебаний в сетях нелинейных осцилляторов, измеряемая так называемой «бассейновой» устойчивостью, оптимальна для топологии «малого мира» и немонотонно зависит от вероятности перестройки связей, их плотности, силы связи и параметров динамики элементов.

4. В адаптивной сети спайковых осцилляторов с событийной перестройкой структуры связей возникает множество метастабильных кластерных состояний, переходы между которыми описываются

формализмом гиперсети. В автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по графу метастабильных кластерных конфигураций, а при приложении постоянного стимулирующего воздействия к одному из элементов траектория сходится к стимул-специфичному воспроизводимому циклу кластерных переключений.

5. В резервуарных сетях (нелинейных сетях с фиксированными рекуррентными связями) с обратной связью обучение линейного выходного сумматора приводит к формированию в спектре эффективной матрицы связей спектральных выбросов (собственных значений, выходящих за пределы спектрального круга исходной случайной матрицы), определяющих доминирующие моды аттрактора сети в отсутствие внешнего сигнала. Для стимул-индуцированных задач та же архитектура сохраняет хаотический фон и реализует вычисления на детерминированных метастабильных траекториях, активируемых внешними воздействиями.

6. Эффективность решения задачи резервуарной сетью определяется соответствием между топологией и геометрией внутреннего представления в пространстве состояний и скрытой структурой задачи. Для задачи детектирования фазовой когерентности с циклической скрытой переменной осцилляторные активные элементы обеспечивают существенное преимущество в минимальном размере сети благодаря формированию геометрически неискажённого циклического представления.

7. Различие между резервуарными сетями с фиксированными рекуррентными связями и полностью обучаемыми рекуррентными сетями с специализированными «вентильными» механизмами заключается в качественном изменении структур фазового пространства. Полное обучение специализированных рекуррентных сетей формирует компактные низкоразмерные представления с глобальным разделением контекстов задачи, тогда как фиксированный резервуар использует высокоразмерное представление с перекрывающимися областями различных контекстов, что ограничивает его эффективность на задачах, требующих длительного хранения информации.

8. В полностью обучаемых рекуррентных сетях (нелинейных сетях активных элементов с настройкой всех или основных весовых параметров) тип решаемой задачи определяет структуру фазового пространства и функциональную самоорганизацию популяций элементов. Для задач выбора формируются дискретные аттракторы и конкурирующие популяции с архитектурой взаимного подавления; для задач интеграции непрерывных переменных – непрерывное кольцевое аттракторное многообразие с разделением на подсистему хранения и подсистему управления; для режима выполнения нескольких целевых функций – кластерная организация

с функционально специализированными группами элементов и переключаемыми метастабильными состояниями в фазовом пространстве.

9. Способ обучения нелинейной сети является одним из параметров, определяющих качественную структуру её фазового пространства. При сопоставлении обучения с подкреплением и обучения с учителем на идентичных задачах контекстно-зависимого принятия решений при сопоставимой точности обучение с подкреплением формирует структуры фазового пространства, сочетающие устойчивые неподвижные точки с квазипериодическими аттракторами, и порождает конкурирующие популяции элементов с приблизительно равной численностью. Обучение с учителем преимущественно сводит динамику к неподвижным точкам и порождает популяции с существенно различающейся численностью.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью математических постановок задач, применением апробированных аналитических и численных методов, согласованностью результатов, полученных различными методами, а также сравнением с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах отделения нелинейной динамики и оптики ИПФ РАН, а также представлялись автором на всероссийских и международных конференциях, в том числе на International Conference on Nonlinear Maps 2015 (Дублин, Ирландия), 2017 (Нижний Новгород, Россия), XIII International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015 (Родос, Греция), XVII Научной школе “Нелинейные волны – 2016” (Нижний Новгород, Россия), International Conference “Shilnikov Workshop” 2016, 2022 (Нижний Новгород, Россия), XI Международной школе-конференции “Хаос – 2016” (Саратов, Россия), XXXVII International Conference “Dynamics Days Europe” 2017 (Сегед, Венгрия), V Международном симпозиуме “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics NWP–2017” (Москва – Санкт-Петербург, Россия), XXI CHAOS International Conference 2018 (Рим, Италия), Международной конференции “Динамические системы в науке и технологиях” DSST-2018 (Алушта, Россия), International School in Computational and Theoretical Models in Neuroscience “ContamiNeuro 2019” (Венеция, Италия), X International Conference on Complex Networks “CompleNet 2019” (Таррагона, Испания), XV International Conference “Dynamical Systems – Theory and Applications” DSTA 2019 (Лодзь, Польша), NENGO summer school on large-scale brain modelling

and neuromorphic computing 2019 (Ватерлоо, Канада), International Conference “Dynamics Days Digital” 2020 (онлайн), I Online Conference on Nonlinear Dynamics and Complexity 2020 (онлайн), I Национальном Конгрессе по когнитивным исследованиям, искусственному интеллекту и нейроинформатике 2020 (онлайн), International Conference Volga Neuroscience Meeting 2021 (Нижний Новгород, Россия), Международном научном форуме “Балтийский форум: Нейронауки, искусственный интеллект и сложные системы” 2022, 2023 (Калининград, Россия), Международной научно-технической конференции “Нейроинформатика-2022” (Долгопрудный, Россия), International Conference “Dynamics Days US 2022” (онлайн), Международной конференции по искусственному интеллекту OpenTalks.AI 2023 (Ереван, Армения), Российском форуме “Микроэлектроника 2023” (Сочи, Россия), XXXIII Annual Computational Neuroscience Meeting CNS 2024 (Натал, Бразилия), XXVI Харитоновских тематических научных чтениях “Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах - 2025” (Саров, Россия), VI International Conference on Mathematics of Neuroscience and AI 2025 (Сплит, Хорватия), International Joint Conference on Neural Networks IJCNN 2025 (Рим, Италия), XXXIV Annual Computational Neuroscience Meeting CNS 2025 (Флоренция, Италия), VII Международном симпозиуме “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics NWP 2025” (Москва – Санкт-Петербург, Россия).

Личный вклад автора

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично или при его определяющем участии. Личный вклад автора состоит в постановке задач, разработке математических моделей, проведении аналитических и численных исследований, анализе и интерпретации результатов, подготовке публикаций по теме диссертации.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 376 страниц, включая 95 иллюстраций. Список литературы содержит 229 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена исследованию хаотических колебаний и переходных процессов в нелинейных активных элементах – базовых объектах теории нелинейных колебаний, определяющих динамические режимы сетей, которые являются предметом последующих глав. Глава содержит четыре раздела: описание моделей активных элементов и единого аппарата их динамического анализа; теорию хаотических бёрстовых колебаний в дискретных быстро-медленных системах; исследование управляемости переходного хаоса периодической модуляцией параметра. Результаты главы опубликованы в работах [A1–A4].

В **разделе 1.1** приводится описание моделей активных элементов, используемых на протяжении всей диссертации. Исследование динамических механизмов формирования функциональных свойств в нелинейных сетях требует использования моделей различного уровня детализации – от импульсных генераторов с физически интерпретируемыми переменными до абстрактных рекуррентных ячеек с вентильными механизмами. В диссертации используются одиннадцать моделей, разделяемых на две группы. К моделям с физической интерпретацией переменных относятся: дискретная быстро-медленная модель Курбажа – Некоркина (КН), пороговые модели с непрерывным временем «накопление-сброс» (*leaky integrate-and-fire*, LIF) и адаптивный экспоненциальный нейрон (*adaptive exponential*, AdEx), система ФитцХью – Нагумо (ФХН), осцилляторы Стюарта – Ландау и Баутина, фазовый осциллятор Курамото. Переменные этих моделей имеют смысл напряжения, тока, комплексной амплитуды или фазы колебаний. К абстрактным (редуцированным) моделям относятся: частотная (*rate*) рекуррентная нейронная сеть (*recurrent neural network*, RNN), сеть эхо-состояний (*echo-state network*, ESN), так называемые вентильные рекуррентные ячейки GRU (*gated recurrent unit*) и LSTM (*long short-term memory*). Переменные последних – абстрактные активации, параметры – весовые матрицы. Модели обеих групп связаны предельными переходами: усреднение по популяции (LIF, AdEx → *rate*), дискретизация с добавлением разрыва (ФХН → КН), переход к нормальной форме (ФХН → Стюарта – Ландау → Курамото), добавление вентильных механизмов (RNN → GRU, LSTM). Все модели принадлежат единому семейству нелинейных динамических систем и описываются общим аппаратом: фазовое пространство, аттракторы, бифуркации, показатели Ляпунова, области или «бассейны» притяжения.

Раздел 1.2 посвящён исследованию хаотических бёрстовых колебаний в дискретных быстро-медленных системах. Исследован новый тип релаксационных колебаний в дискретных отображениях с разделением временных масштабов, в которых хаотическая динамика реализуется непосредственно на быстром временном масштабе. Рассматривается класс двумерных быстро-медленных отображений

$$x_{n+1} = x_n + P(x_n) - y_n, \quad y_{n+1} = y_n + \varepsilon Q(x_n), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

где x – быстрая переменная, y – медленная, $P(x)$ – кусочно-непрерывная нелинейная функция, $Q(x) \in C^1, Q'(x) > 0$. При $\varepsilon = 0$ выделяется быстрая подсистема – одномерное отображение $x_{n+1} = x_n + P(x_n) - y^0$, в котором $y^0 = \text{const}$ играет роль параметра.

Сформулированы условия на быструю подсистему, при выполнении которых для различных значений параметра y^0 реализуются: единственная устойчивая неподвижная точка (фаза покоя), сосуществование неподвижной точки и притягивающего инвариантного интервала с хаотической динамикой внутри (область бистабильности), единственный притягивающий инвариантный интервал (фаза активности). Единственная неподвижная точка O полной системы расположена в области бистабильности быстрой подсистемы и неустойчива.

Доказано существование инвариантной области B в фазовом пространстве системы при достаточно малых ε : $F(B) \subset B$. Граница B строится из боковых сторон, определяемых границами инвариантного интервала быстрой подсистемы, и верхней и нижней двухзвенных ломаных. Наличие инвариантной области и неустойчивой неподвижной точки внутри B гарантирует существование нетривиального аттрактора $\mathcal{A} \subset B$.

Качественная структура движений на аттракторе определяется квазистатическим прохождением медленной переменной y через последовательность бифуркаций быстрой подсистемы: медленный дрейф вдоль устойчивой ветви (участок покоя), срыв при исчезновении устойчивого равновесия, быстрые хаотические колебания внутри инвариантного интервала (бёрст), граничный кризис и возврат в покой.

Получена аналитическая оценка старшего показателя Ляпунова аттрактора полной системы:

$$\lambda_1 \approx \kappa \cdot \bar{\lambda}_{\text{fast}}, \quad (2)$$

где $\bar{\lambda}_{\text{fast}}$ – средний показатель Ляпунова хаотического аттрактора быстрой подсистемы, $\kappa \in (0,1)$ – коэффициент заполнения, равный отношению средней длительности хаотического участка к периоду колебаний. Оценка устанавливает, что хаотические свойства быстро-медленного аттрактора наследуются от хаотического аттрактора быстрой подсистемы.

Общий механизм проиллюстрирован на модели Курбажа – Некоркина – двумерном отображении с кубической нелинейностью и пороговым разрывом, являющемся частным случаем рассматриваемого класса. Для этой модели в явном виде получены координаты неподвижных точек, границы инвариантного интервала, построена инвариантная область и выполнена верификация аналитической оценки. Установлены гладкие зависимости периода T , длительности активного участка T_{act} и числа импульсов в пачке N_{spb} от параметров ε и J . Гладкость этих характеристик свидетельствует о структурной устойчивости хаотического аттрактора.

Раздел 1.3 посвящён исследованию управляемости переходного хаоса – нерегулярной динамики конечной длительности на непритягивающем хаотическом множестве – посредством периодического внешнего воздействия. Объектом исследования является одномерное отображение лоренцевского типа $x_{n+1} = x_n + F_H(x_n) - \gamma$, совпадающее с быстрой подсистемой модели Курбажа – Некоркина. При $\gamma < \gamma_{cr}$ система обладает хаотическим аттрактором; при $\gamma = \gamma_{cr}$ происходит граничный кризис — аттрактор разрушается, но в фазовом пространстве сохраняется непритягивающее хаотическое множество. Траектории проводят в его окрестности конечное время τ , после чего притягиваются к устойчивому равновесию.

Вводится периодическая модуляция управляющего параметра: $\gamma_n = \gamma_{cr} + \delta + A \sin(\omega n)$, где δ – средняя отстройка от кризиса, A – амплитуда, ω – частота. Получено аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики – доли траекторий $P(n)$, остающихся в хаотической области к моменту n :

$$P(n) \approx \exp\left(-\alpha \left[\delta n + \frac{A}{\omega} (1 - \cos(\omega n))\right]\right), \quad (3)$$

где α – коэффициент, определяемый линейной зависимостью мгновенной скорости выхода от параметра: $\kappa(\gamma) = \alpha(\gamma - \gamma_{cr})$. Формула явно разделяет два вклада: монотонный ($\alpha\delta n$), определяемый средней отстройкой, и осциллирующий $\alpha A/\omega(1 - \cos \omega n)$, определяемый параметрами модуляции.

Установлены качественно различные режимы убывания вероятности выживания: при низких частотах модуляции – экспоненциальное убывание со скоростью $\alpha\delta$; при высоких – экспоненциальное убывание с увеличенной эффективной скоростью; при промежуточных – немонотонное убывание с чередованием участков ускоренного и замедленного выхода. Показано, что в отличие от случая монотонно нарастающего параметра, при котором возможна лишь задержка выхода с непритягивающего множества, периодическая модуляция допускает как ускорение, так и замедление процесса выхода из хаотической области (рис. 1, а).

Построена карта времён жизни переходного хаоса $\tau(A, \omega)$ (рис. 1, б), имеющая мозаичную структуру с компактными областями минимальных τ (ускоренный выход) и обширными областями, где времена жизни в среднем превышают статическое значение более чем в 4 раза. Границы между областями имеют фрактальный характер. Исследована структура непритягивающего хаотического множества в пространстве состояний (x, γ) . Обнаружена иерархия щелей выхода — прообразов основной щели вблизи точки разрыва нелинейности, — определяющая статистику времён жизни переходного хаоса.

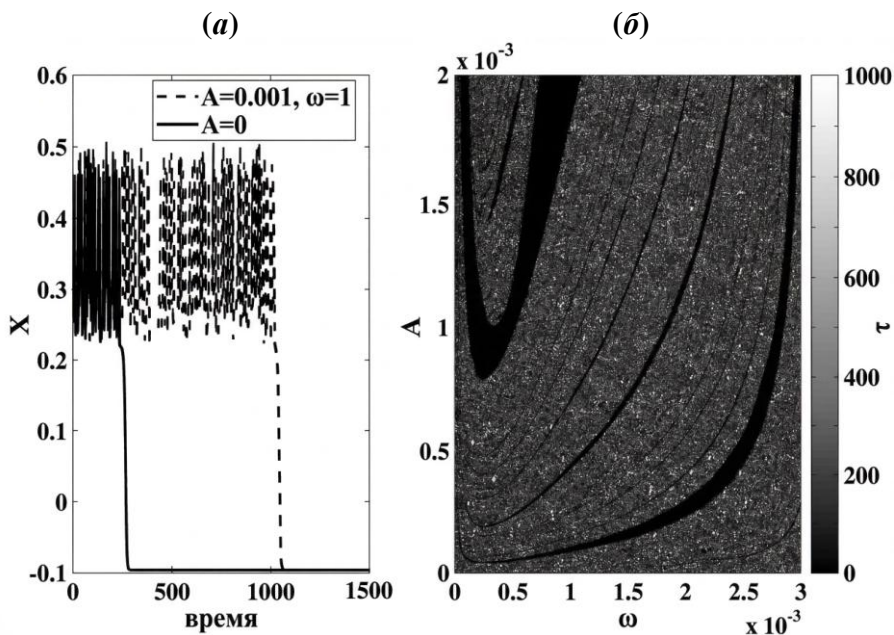


Рис. 1. Замедление процесса выхода из хаотической области (пунктирная кривая) с помощью модуляции управляющего параметра по сравнению со статическим случаем (сплошная кривая) (а). Карта времён жизни переходного хаоса в зависимости от параметров модуляции (б)

В разделе 1.4 приведены выводы по первой главе.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию коллективной динамики в нелинейных сетях активных элементов с фиксированной, адаптивной и многослойной архитектурой связей. Установлены закономерности, связывающие топологию сети, параметры связей и динамику элементов со свойствами коллективных режимов. Глава организована как последовательное продвижение от фиксированной топологии и стационарного режима (синхронизация бёрстов) через адаптивную топологию и переходную динамику (метастабильные последовательности) к многослойной архитектуре и пространственной самоорганизации (доменные структуры и пространственный хаос). Результаты опубликованы в [A5–A11].

В разделе 2.1 исследована синхронизация хаотических бёрстовых колебаний в сетях дискретных быстро-медленных осцилляторов Курбажа – Некоркина с топологией типа «малый мир». Динамика i -го узла описывается системой (1) с диффузионной связью по быстрой переменной:

$$I_{i,n} = \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N G_{ij} (x_{j,n} - x_{i,n}), \quad (4)$$

где c – сила связи, G_{ij} – матрица смежности графа Уоттса – Строгаца с параметром перестройки P_{rew} . Осцилляторы неидентичны: параметры возбудимости J_i распределены гауссовски со средним J_0 и отклонением δ_j . Нелокальная робастность синхронного режима характеризуется «бассейновой» устойчивостью – долей случайных начальных условий и реализаций графа, из которых система достигает синхронного состояния: $S_B = M_s/M$, где M_s – число реализаций с параметром синхронизации бёрстов $\sigma > \sigma_{\text{th}}$. Параметр σ определяется как отношение суммарного времени одновременного пребывания всех осцилляторов в активной фазе к суммарной длительности активных фаз, усреднённой по всем узлам.

Центральный результат раздела состоит в том, что архитектура «малого мира» обеспечивает максимальную бассейновую устойчивость синхронизации бёрстов. Зависимость $S_B(P_{\text{rew}})$ немонотонна: при малых P_{rew} (регулярная решётка) S_B близка к нулю; в промежуточной области S_B достигает максимума; при $P_{\text{rew}} \rightarrow 1$ (случайный граф) S_B убывает приблизительно линейно. Существенное отличие от ранее исследованного случая осцилляторов Рёсслера состоит в том, что убывание S_B при увеличении случайности не экспоненциально, а линейно, и существуют широкие интервалы P_{rew} с максимальной S_B . Бассейновая устойчивость немонотонна также по плотности связей k , силе связи c , параметру быстрой подсистемы ϵ и параметру возбудимости J_0 . Для каждого параметра существует оптимальное значение, при превышении которого S_B убывает. Физический механизм немонотонности по k и c состоит в том, что при чрезмерно сильной связи член взаимодействия искажает форму бёрстовых колебаний, сокращая длительность одновременного пребывания осцилляторов в активной фазе.

Установлена нетривиальная корреляция между бассейновой устойчивостью и внутренней структурой бёрстов одиночного элемента. Локальные максимумы $S_B(J_0)$ расположены вблизи тех значений J_0 , при которых наиболее вероятное число спайков в бёрсте N_{spb}^* скачкообразно увеличивается на единицу. Появление нового спайка в бёрсте удлиняет активную фазу, что увеличивает вероятность совпадения активных фаз различных осцилляторов и тем самым расширяет бассейн притяжения синхронного режима. На плоскости параметров (ϵ, J_0) границы между областями с различными N_{spb}^* коррелируют с локальными максимумами S_B . Неоднородность параметров δ_j монотонно уменьшает S_B : согласованность динамических свойств элементов является необходимым условием высокой нелокальной устойчивости коллективного режима. Анализ распределений плотности вероятности в фазовой плоскости усреднённых по сети траекторий позволяет предсказать, приведёт ли данная топология к высокой или низкой S_B : компактное структурированное распределение коррелирует с высокой бассейновой устойчивостью, а размытое – с низкой.

В разделе 2.2 исследована коэволюция динамики и структуры связей в адаптивной сети из $N = 5$ спайковых осцилляторов Курбажа – Некоркина с подавляющими (ингибиторными) направленными связями и событийной перестройкой топологии. Элементы сети находятся в подпороговом режиме и генерируют хаотические бёрсты по механизму постингибиторного восстановления. Структура ингибиторных связей обеспечивает трёхшаговый циклический кластер: попеременную активацию групп узлов (i_1, i_2) , (i_3, i_4) , i_5 . Полное число различных кластерных конфигураций для 5 узлов равно 30. Интегральная переменная q накапливает среднюю активность сети; при достижении порога происходит событийная перестройка топологии – обмен ролями двух узлов из смежных активных кластеров. Новая структура связей сохраняет тип кластерного взаимодействия, но изменяет состав кластеров.

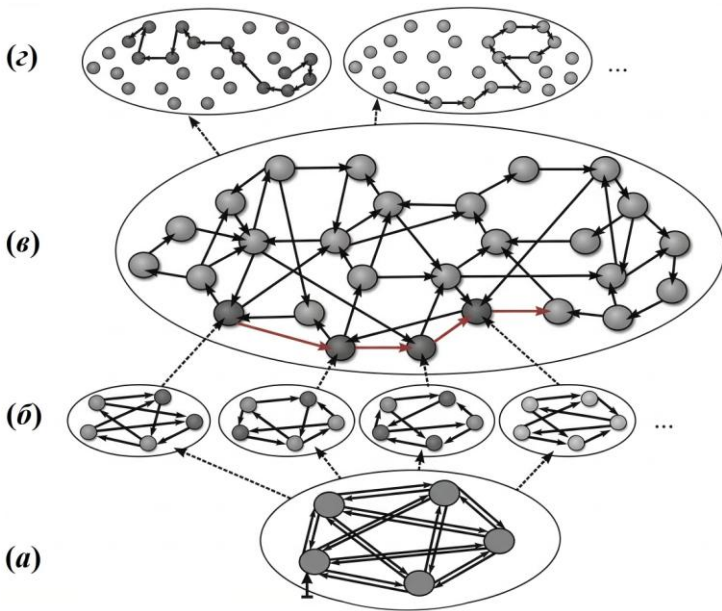


Рис. 2. Схема гиперсетевого описания: на нижнем уровне сеть активных элементов (а). Выше – последовательное переключение кластерных конфигураций в результате коэволюции сети (б). Гиперсеть – множество всех возможных конфигураций в виде направленного графа переходов (в) и примеры случайного и стимул-индуцированного переключения между кластерными состояниями (г)

Введён формализм гиперсети – ориентированного графа переходов между метастабильными кластерными состояниями (рис. 2). Узлы гиперсети – 30 кластерных конфигураций; направленные рёбра – наблюдаемые переходы,

иницируемые событиями перестройки. Гиперсетевое описание обеспечивает переход от микродинамики осцилляторов к дискретной «карте функциональной динамики». В автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по гиперсети: хаотическая природа микродинамики определяет выбор ветви эволюции в момент каждой перестройки.

Основной результат раздела состоит в обнаружении качественной смены поведения при введении постоянного внешнего воздействия на один из узлов сети. Стимул нарушает симметрию сети, фиксируя единственный вариант перестройки в каждом кластерном состоянии. В редуцированной гиперсети каждый узел имеет ровно одно исходящее ребро, и все траектории сходятся к стимул-специфичному периодическому циклу длины шесть. Стимулы, приложенные к различным узлам, порождают различные шестициклы – сеть способна генерировать стимул-специфичные воспроизводимые последовательности кластерных переключений. Результаты подтверждены аппаратной реализацией на ПЛИС Xilinx Artix-7 с временными масштабами, сопоставимыми с нейронными (длительность спайка $\approx 0,5\text{--}1$ мс, бёрст ≈ 25 мс). Экспериментальные осциллограммы воспроизводят теоретически предсказанные последовательности кластерных состояний как в автономном режиме (случайное блуждание), так и при стимуляции (детерминированный цикл).

В разделе 2.3 исследованы механизмы самоорганизованного формирования пространственно-неоднородных коллективных режимов в сетях осцилляторов Стюарта – Ландау и Баутина. Получены три группы результатов.

Первая группа результатов касается иерархического подавления в неоднородных сетях. В безмасштабных сетях осцилляторов Стюарта – Ландау с корреляцией «степень–частота» ($\omega_j = k_j$, $\lambda_j = \lambda_0$) и «степень–амплитуда» ($\lambda_j = k_j$, $\omega_j = \omega_0$) обнаружено иерархическое подавление колебаний при увеличении силы связи K . Формируются три домена с качественно различной динамикой: подавленные элементы с положительным средним отклонением, подавленные с отрицательным и осциллирующие. Порядок перехода осцилляторов в домены с подавленной динамикой определяется корреляцией: при «степень–частота» первыми подавляются высокочастотные (высокостепенные) узлы, при «степень–амплитуда» – высокоамплитудные.

Вторая группа результатов относится к переносу доменной структуры в мультиплексных сетях. В двухслойной мультиплексной сети осцилляторов Стюарта – Ландау с адаптивным неоднородным и неадаптивным однородным слоями обнаружен двухстадийный процесс переноса. При малых межслоевых связях S домены формируются только в адаптивном слое. При увеличении S выше критического значения трёхдоменная структура «отпечатывается» на

изначально однородный неадаптивный слой без первичной неоднородности его параметров. Механизм «отпечатывания» демонстрирует возможность передачи динамического «шаблона» между подсистемами.

Третья группа результатов посвящена пространственному хаосу в кольцах и цепочках бистабильных осцилляторов Баутина. Стационарные амплитуды удовлетворяют разностному уравнению, которое сводится к двумерному отображению типа Эно. Доказано, что при достаточно слабой связи это отображение обладает геометрической подковкой Смейла. Замкнутое гиперболическое множество эквивалентно сдвигу Бернулли с двумя символами, что порождает экспоненциально растущее с размером кольца N число устойчивых неоднородных периодических решений – пространственный хаос в распределении амплитуд. Устойчивость неоднородных решений доказана методом дисков Гершгорина: все собственные значения матриц Якоби для амплитудных и фазовых возмущений лежат в левой полуплоскости. Градиентная структура амплитудных уравнений гарантирует сходимость к одному из устойчивых равновесий. При численном моделировании с начальными условиями на устойчивом предельном цикле и случайными фазами наблюдается характерный сценарий: с увеличением силы связи отдельные элементы случайно переходят в подавленное состояние, формируя пространственно-неоднородную картину осциллирующих и подавленных доменов. Частотная неоднородность приводит к формированию частотных кластеров; распределения размеров осциллирующих кластеров аппроксимируются степенными зависимостями.

В разделе 2.4 обсуждаются результаты второй главы.

Третья глава диссертации посвящена обратной задаче – целенаправленной настройке параметров нелинейной сети для реализации заданной функции. Обучение трактуется как управляемая деформация фазового пространства, формирующая аттракторные структуры и переходные траектории, необходимые для реализации функциональных свойств. Глава содержит шесть разделов: генерация пространственно-временных паттернов и спектральный механизм формирования аттракторов в резервуарах с обратной связью; вычисления на непритягивающих переходных траекториях, индуцируемых стимулом; топологический и геометрический анализ представлений с формулировкой принципа вычислительного соответствия; экспериментальная реализация физического резервуара на цепочке генераторов ФитцХью – Нагумо; сопоставление фиксированных резервуаров и полностью обучаемых рекуррентных архитектур. Результаты опубликованы в [A12–A24].

В разделе 3.1 исследована генерация пространственно-временных паттернов в резервуарных сетях – нелинейных рекуррентных сетях с фиксированными внутренними связями и обучаемым выходным линейным сумматором. Резервуар состоит из M частотных элементов, автономная динамика которых описывается системой $\tau \dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^M A_{ij} \tanh(x_j)$, где $A = [A_{ij}]$ – фиксированная случайная матрица с параметром силы связи g . При $g > 1$ система находится в режиме динамического хаоса. Обратная связь от выходов к резервуару замыкает контур автогенерации, и эффективная матрица связей принимает вид $\Omega = A + UW^T$, где U – фиксированная матрица обратной связи, W – обучаемая матрица считывающего слоя. Обучение методом FORCE (рекурсивный метод наименьших квадратов) эквивалентно управляемой низкоранговой деформации эффективной матрицы Ω .

Проведён систематический анализ пространства параметров (τ, ω) для двух типов элементов – непрерывных частотных нейронов и дискретных спайковых отображений Курбажа – Некоркина. Установлено, что эффективность обучения максимальна при согласовании внутреннего временного масштаба элементов с периодом целевого сигнала: $\tau_{\text{opt}} \sim 1/\omega$. При успешном обучении проекции многомерных фазовых траекторий на парциальные фазовые плоскости отдельных элементов образуют замкнутые предельные кривые, свидетельствующие о формировании аттрактора. При неуспешном обучении – незамкнутые дрейфующие кривые, указывающие на отсутствие устойчивого режима. Обучение только выходного сумматора приводит к глубокой перестройке коллективной активности резервуара: формированию антифазных кластеров в однородном случае и волноподобных структур при увеличении неоднородности параметров элементов, расширяющей частотный базис ансамбля.

Установлен спектральный механизм формирования автономных аттракторов. После успешного обучения в спектре эффективной матрицы Ω появляются выбросы – собственные значения, покидающие круг спектра исходной случайной матрицы A . Число выбросов коррелирует со сложностью целевого паттерна: наименьшее для бегущих волн, наибольшее для химерных состояний. По-разному инициализированные сети, обученные на одном паттерне, приводят к одинаковым выбросам, что свидетельствует об инвариантности спектральной структуры. На микроскопическом уровне обнаружен компенсаторный механизм: дисперсия обученных весов убывает с ростом дисперсии активности элементов.

В разделе 3.2 исследован альтернативный механизм – вычисления на непритягивающих переходных траекториях, индуцируемых внешним

стимулом. В рамках единой резервуарной архитектуры систематически сопоставлены три задачи возрастающей сложности: автономная генерация последовательностей, дискриминация входных импульсов и переключение между последовательностями. Для задачи автономной генерации обучение формирует устойчивый предельный цикл (старший показатель Ляпунова $\lambda_1 = 0$); см. рис. 3, а, где маркерами показаны моменты пиков активности выходных элементов. Для задачи дискриминации входных импульсов обучение не подавляет хаос ($\lambda_1 > 0$), а формирует в фазовом пространстве метастабильные области (серые кривые на рис. 3, б), активируемые внешними стимулами. Роль периодических коротких импульсов – регуляризация хаотической динамики: стимулы выталкивают траекторию на детерминированные переходные маршруты. Стимуляция лишь 5% элементов с наибольшими выходными весами достаточна для воспроизведения целевого отклика, что свидетельствует о формировании функционально специализированных групп. Для задачи переключения между последовательностями наблюдается промежуточная ситуация: автономный режим – предельный цикл, не совпадающий с целевыми паттернами; стимулы выталкивают траекторию в метастабильные области, соответствующие конкретным целевым последовательностям.

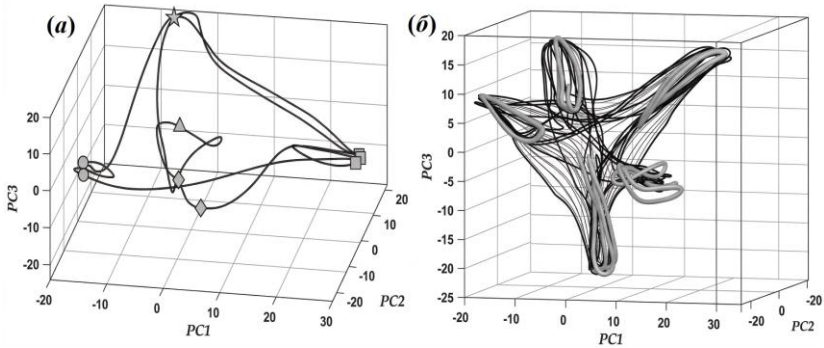


Рис. 3. Проекция в пространство трёх главных компонент многомерной динамики обученной резервуарной сети задач (а) автономной генерации последовательностей (аттракторный механизм) и (б) дискриминации входных стимулов (переходный механизм)

В разделе 3.3 введены топологические и геометрические характеристики представлений и сформулирован принцип вычислительного соответствия. На канонической задаче детекции фазовой когерентности с циклической скрытой переменной ($\phi \in S^1$) сопоставлены три типа резервуаров с различными активными элементами: частотный (ESN), спайковый (LIF) и

осцилляторный (Курамото). Установлено, что осцилляторный резервуар обеспечивает четырёхкратное преимущество по минимальному размеру сети N^* , необходимому для достижения 95% точности классификации ($N^* \approx 20$ против ≈ 80 у частотного и ≈ 150 у спайкового со статическим считыванием). Анализ на основе методов алгебраической топологии показал, что осцилляторный и частотный резервуары формируют многообразия с выраженным одномерным циклом, тогда как статическое представление спайкового резервуара не содержит устойчивой циклической структуры. Наличие цикла – необходимое, но не достаточное условие высокой точности. Ключевое различие обнаруживается при геометрическом анализе: осцилляторный резервуар формирует циклическое многообразие с линейной координатной структурой, тогда как у частотного резервуара геометрия искажена. Обнаружен и разрешён парадокс спайкового резервуара: при динамическом считывании (объединение состояний за несколько моментов времени) спайковый резервуар формирует представление с наиболее выраженным циклом и практически идеальным восстановлением фазы.

В разделе 3.4 реализован физический резервуар на основе цепочки из 16 связанных возбудимых генераторов ФитцХью – Нагумо. Каждый генератор представляет собой быстро-медленную систему с кубической нелинейностью, работающую в возбудимом режиме; соседние узлы связаны резистивной (диффузионной) связью, что позволяет дискретному массиву генераторов функционировать как одномерная активная среда. Входной сигнал кодируется частотой периодических импульсов и подаётся на граничные элементы цепочки; два встречных волновых фронта взаимодействуют внутри активной среды, порождая широкополосный спектр комбинационных частот, – характерный признак нелинейного смешивания, усиленного волновыми взаимодействиями в пространственно-протяжённой цепочке. Разработана методология «томографии» ядра – спектрально-метрический анализ эмпирической матрицы ядра при контролируемых вариациях параметров, включающий три инструмента: эффективную размерность (число значимых вычислительных мод при заданном масштабе регуляризации), центрированное выравнивание ядра (мера согласованности структуры пространства признаков с конкретной задачей классификации) и относительную ёмкость (доля степеней свободы, сохраняемая при уменьшении числа считывающих узлов). Дополнение вектора признаков характеристиками синхронизации между узлами увеличивает эффективную размерность пространства признаков и повышает точность классификации. Это означает, что коллективная динамика, обусловленная связью между генераторами, несёт информацию о входном воздействии, недоступную в локальных спектрах отдельных узлов. Иерархический квадратичный

сумматор, явно учитывающий взаимодействия второго порядка между доминирующими динамическими модами, достиг точности 0,831 на задаче «шахматная доска» 8×8 . Продемонстрирован принцип «измерить один раз – использовать многократно»: однократно измеренная карта откликов цепочки успешно применена к различным задачам, включая реальные акустические данные из корпуса гласных Хилленбранда (точность 0,963 на паре гласных).

В разделе 3.5 проведено систематическое сопоставление фиксированного резервуара (ESN) и полностью обучаемых рекуррентных сетей (GRU, LSTM) на задаче контекстно-зависимой интеграции, требующей одновременно долговременного хранения накопленного сигнала и мгновенного переключения (сброса) режимов работы. Обнаружен фундаментальный разрыв производительности, нарастающий с увеличением горизонта памяти: ошибка ESN возрастает от 0,991 при $T = 20$ до 4,435 при $T = 200$, тогда как ошибка GRU – лишь до 2,258. Анализ структуры фазового пространства скрытых состояний выявил два качественно различных организационных принципа. Обученная сеть GRU разделяет контексты «интеграция» и «сброс» в глобально непересекающиеся области, тогда как в фиксированном резервуаре ESN основные области для обоих контекстов в значительной степени перекрываются, что непосредственно объясняет деградацию эффективности. Спектральный анализ обученной линейной рекуррентной сети показал формирование единственной моды с $|\lambda| \approx 1$ для реализации накопления сигнала при сжимающих остальных модах ($|\lambda| < 1$). На границе эффективности GRU достигает низкой ошибки ($MSE \approx 0,35\text{--}0,42$) при компактном представлении ($ID \approx 5\text{--}6,5$), тогда как ESN характеризуется высокой ошибкой ($MSE \approx 1,56$) при умеренно высокоразмерном представлении ($ID \approx 15,6$). Обучаемая ESN без вентильных механизмов снижает ошибку, но ценой увеличения размерности до $ID \approx 26$.

В разделе 3.6 приведены выводы по третьей главе.

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию механизмов формирования функциональной динамики в полностью обучаемых рекуррентных сетях – нелинейных сетях активных элементов, в которых все параметры (входные, рекуррентные и выходные веса) настраиваются в процессе обучения. Полная настройка параметров означает, что обучение деформирует структуру фазового пространства целиком: перемещает неподвижные точки, создаёт и уничтожает аттракторы, перестраивает бассейны притяжения и формирует каналы переходов между режимами. Глава содержит пять разделов: бинарный выбор, интеграция непрерывных переменных, многозадачное переключение режимов и сопоставление обучения с учителем и обучения с подкреплением. Результаты опубликованы в [A25–A32].

В разделе 4.1 исследовано формирование бистабильного аттракторного ландшафта и популяционной специализации при обучении нелинейной сети задаче двухальтернативного выбора. Рассмотрены два типа элементов: частотные элементы с кусочно-линейной функцией активации $ReLU(x) = \max(0, x)$ и спайковые LIF-элементы с пороговым механизмом генерации. Для моделирования задачи сравнения двух последовательных стимулов с задержкой рассматривается рекуррентная сеть из элементов с динамикой: $\tau dr/dt = -r + ReLU(Wr + Ux + br)$, где $W \in R^{N \times N}$ – матрица рекуррентных весов, U – матрица входных весов. Обучение проводилось методом стохастического градиентного спуска, настраивались все весовые параметры. Отдельные элементы обученной сети демонстрируют смешанную селективность – зависимость отклика одновременно от нескольких параметров задачи (величины стимула, фазы испытания, принятого решения), качественно согласующуюся с данными о нейронах префронтальной коры приматов. Метод разъединённых главных компонент позволяет разложить многомерную активность на низкоразмерные подпространства, каждое из которых отражает отдельный аспект задачи: стимул-зависимая компонента разделяет траектории по величине стимула, компонента решения — по знаку разности стимулов.

В фазовом пространстве сетей обучение формирует непрерывное семейство устойчивых неподвижных точек L_0 , параметризованное разностью входных сигналов $\Delta x = x_2 - x_1$. Точка $O(\Delta x = 0)$ разделяет L_0 на две области, соответствующие двум альтернативам. Эта структура – непрерывное семейство устойчивых состояний – качественно отличается от классических моделей с двумя изолированными аттракторами: линия L_0 кодирует не только знак решения, но и степень уверенности. Существенным следствием обучения является возникновение функциональной специализации элементов: группа A_1 вносит максимальный положительный вклад в первый выход, группа A_2 подавляет его и вносит максимальный положительный вклад во второй выход, группа A_0 – наибольшая, участвующая во внутренней динамике. Группы A_1 и A_2 связаны взаимно подавляющими рекуррентными связями, реализующая механизм «победитель получает всё». Эта модульная структура не задавалась заранее, а возникла в процессе обучения.

В разделе 4.2 исследована самоорганизация непрерывного аттракторного многообразия – так называемого кольцевого аттрактора – при обучении нелинейной сети задаче интегрирования сигнала скорости для оценки угловой координаты $x_t = \left(\int_0^t v_\tau dt \right) \bmod 2\pi$. Рекуррентная сеть из активных элементов с функцией активации $ReLU(x)$ разделена на выходную и входную популяции. Матрица рекуррентных весов декомпозируется на четыре блока: W_{oo} , W_{io} , W_{oi} , W_{ii} ; все блоки обучаются без ограничений. В ходе обучения

блок W_{oo} формирует кольцеобразную структуру связей с характерным профилем «мексиканская шляпа» на окружности: сильные положительные веса вдоль главной диагонали с периодическими граничными условиями и более слабые отрицательные вдали от диагонали. Этот профиль возникает исключительно из цели обучения.

Обнаружено самоорганизованное разделение функций: выходная популяция образует так называемый кольцевой аттрактор – модуль памяти, поддерживающий длительное представление интегрированной координаты в виде локализованного «бугра» активности; входная популяция формирует блок управления с затухающей динамикой, преобразующий сигнал скорости в направленные команды. Анализ прямого управляющего сигнала $W_{oi} h_t^i$ при сортировке выходных элементов по пиковой скорости отклика показал высокоорганизованную диагональную структуру – топографически упорядоченное направленное воздействие. Показано, что обратный путь W_{io} отвечает за динамическую стабилизацию, а не за управление. Установлена критическая роль пространственного согласования: случайная перестановка порядка элементов внутри выходной популяции – единственное изменение, не затрагивающее значения весов, – полностью нарушает решение задачи.

В разделе 4.3 исследовано формирование кластерной организации и переключаемых функциональных подпространств при обучении спайковой сети из адаптивных экспоненциальных элементов (AdEx) шести типам когнитивных задач (всего 12 задач): принятие решения (DM1, DM2), контекстное принятие решения (CtxDM1, CtxDM2), сравнение стимулов с задержкой (Rom1, 2) и др. Динамика элементов описывается системой с медленной переменной адаптации. Обучение проводилось методом обратного распространения ошибки во времени с суррогатными градиентами. После обучения обнаружена отчётливая кластерная организация (см. рис. 4): группа функционально специализированных элементов (преимущественно активных при конкретных задачах) и группа смешанной селективности (активность распределена по задачам равномерно).

Различные типы задач реализуются через различные динамические структуры. Для задач принятия решения формируются дискретные аттракторы: траектории расходятся в зависимости от входного стимула и сходятся к состояниям, соответствующим одному из двух альтернативных решений. Для задачи сравнения стимулов с задержкой между ними ключевую роль играет медленное многообразие переменных адаптации: информация о первом стимуле кодируется позицией на линии метастабильных состояний. Сети без адаптации (LIF) существенно уступают в производительности: например, точность на задаче сравнения стимулов с задержкой составляет $\approx 0,65$ для LIF против $\approx 0,95$ для AdEx. Медленная переменная адаптации реализует динамическую память – экспоненциально взвешенную историю мембранного потенциала.

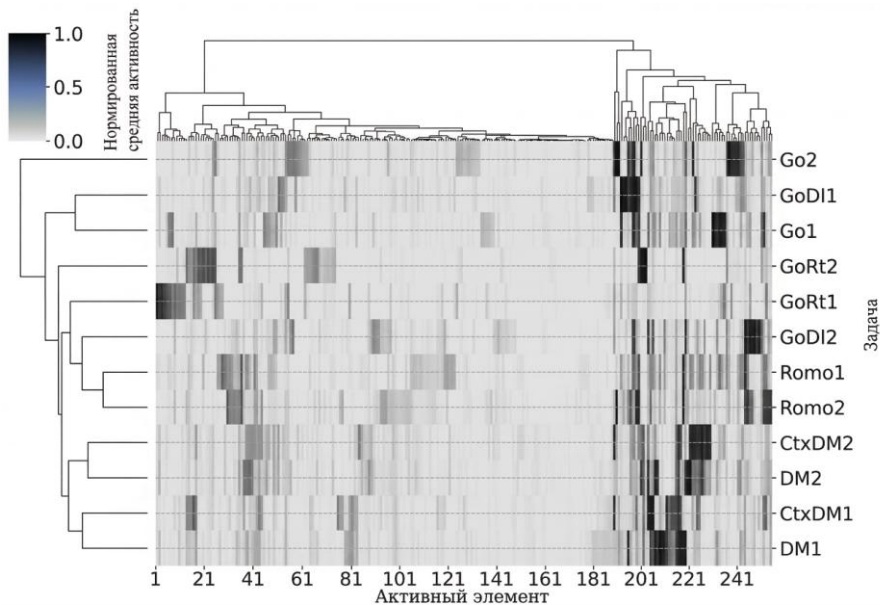


Рис. 4. Кластерная организация спайковой сети после обучения шести типам целевых задач. Оттенками серого показана нормированная средняя активность каждого элемента сети при выполнении каждой из 12 задач

В разделе 4.4 исследовано влияние парадигмы обучения на структуру фазового пространства при решении задачи контекстно-зависимого принятия решений. Сети обучались на одной и той же задаче с идентичной архитектурой (ReLU-сеть, $N = 250$ элементов) и идентичными начальными условиями. При обучении с учителем (SL) минимизировалась кросс-энтропия; при обучении с подкреплением (RL) максимизировалось кумулятивное вознаграждение методом проксимального обновления стратегии (*proximal policy optimization*, PPO). Для каждого условия обучен ансамбль сетей. Разработана методология анализа: классификация аттракторов через собственные числа подматрицы активных элементов; популяционный анализ методом сравнения с эталонными профилями; информационно-теоретическая валидация через взаимную информацию.

Установлено, что обе парадигмы обучения достигают сопоставимой точности ($> 95\%$), однако формируют качественно различные структуры фазового пространства. В RL-обученных сетях доля квазипериодических аттракторов составляет 30–60%, особенно для неоднозначных стимулов с низкой когерентностью. В SL-обученных сетях подавляющее большинство

решений представляет собой устойчивые неподвижные точки: доля квазипериодических аттракторов менее 10 %. Данный эффект существенно зависит от ширины инициализации весов δ : большая δ значительно усиливает распространённость осцилляторной динамики в RL-сетях, но практически не влияет на SL-сети. Квазипериодическая динамика в RL-сетях организована в гибридную вычислительную архитектуру: решения представлены устойчивыми неподвижными точками, а входные данные кодируются внутри низкоразмерной подобласти фазового пространства с квазипериодической динамикой. Определяющей характеристикой RL-решения является формирование конкурирующих популяций G_+ и G_- приблизительно равного размера $|G_+|/|G_-| \approx 1$, тогда как в SL-сетях популяции существенно несбалансированы. Скачок производительности при обучении с подкреплением совпадает с возникновением бистабильности.

В разделе 4.5 обсуждаются результаты четвертой главы.

В заключении сформулированы результаты, полученные в ходе работы над диссертацией.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Описан новый тип релаксационных колебаний в дискретных быстро-медленных системах, в которых хаотическая динамика реализуется непосредственно на быстром временном масштабе. Сформулированы структурные условия на быструю подсистему, при выполнении которых в полной системе возникает аттрактор с чередованием участков медленных регулярных и быстрых хаотических движений. Доказано существование инвариантной области в фазовом пространстве и получена аналитическая оценка старшего показателя Ляпунова через коэффициент заполнения и показатель Ляпунова хаотического аттрактора быстрой подсистемы, показывающая, что хаотические свойства полной системы наследуются от быстрой подсистемы.

2. Исследовано влияние периодической модуляции управляющего параметра на переходный хаос в отображении лоренцевского типа. Получено аналитическое приближение для вероятности выживания в квазистационарном подходе, явно разделяющее монотонный и осциллирующий вклады. Установлены три качественно различных режима: экспоненциальное убывание при низких и высоких частотах модуляции и осциллирующее немонотонное убывание при промежуточных частотах. Показано, что периодическая модуляция, в отличие от монотонного изменения параметра,

допускает как ускорение, так и замедление выхода из хаотической области. Построена карта времён жизни переходного хаоса в пространстве параметров модуляции, обнаруживающая мозаичную структуру с фрактальными границами.

3. Введена классификация моделей активных элементов, используемых на протяжении всей диссертации, установлена иерархия предельных переходов между ними и введена единая терминология динамического анализа, обеспечивающая единый язык описания для всех последующих глав.

4. Проведено систематическое исследование бассейновой устойчивости синхронизации пачечных колебаний в сетях типа «малый мир». Показана немонотонная зависимость бассейновой устойчивости от всех исследованных параметров – топологии, силы связи, плотности связей и параметров динамики элементов. Максимум достигается в области топологии «малого мира», что указывает на существование оптимального соотношения между регулярными и случайными свойствами структуры сети. Установлена корреляция между экстремумами бассейновой устойчивости и границами ступенчатой зависимости числа спайков в пачке, отражающая связь между внутренней структурой колебаний одиночного элемента и глобальной синхронизируемостью сети.

5. Предложена модель адаптивной сети спайковых осцилляторов с событийной перестройкой топологии, порождающая множество метастабильных кластерных состояний. Введён формализм гиперсети – ориентированного графа переходов между кластерными состояниями, обеспечивающий переход от микродинамики осцилляторов к дискретному описанию функциональной динамики. Показано, что в автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по гиперсети, а при приложении стимула траектория детерминируется и сходится к стимул-специфичной воспроизводимой последовательности. Результаты подтверждены аппаратной реализацией на программируемой логической интегральной схеме.

6. В гетерогенных сетях осцилляторов и мультиплексных адаптивных сетях обнаружены механизмы самоорганизованного формирования доменных структур – пространственно-неоднородных коллективных режимов, возникающих без явной оптимизации параметров. Установлены три различных механизма их возникновения: корреляция между структурными и динамическими характеристиками элементов, межслоевая адаптивная связь с переносом доменной структуры на изначально однородный слой и внутренняя бистабильность элементов, приводящая к пространственному хаосу.

7. Установлен спектральный механизм формирования автономных аттракторов при обучении резервуарных сетей методом FORCE: обучение выходного сумматора создаёт спектральные выбросы эффективной матрицы связей – собственные значения, покидающие круг сплошного спектра, – которые определяют доминирующие моды аттрактора. Число выбросов коррелирует со сложностью целевого паттерна, а их структура инвариантна относительно конкретной инициализации сети. Установлен принцип согласования временных масштабов: эффективность обучения максимальна при согласовании внутреннего масштаба элементов с характерным периодом целевого сигнала.

8. Показано, что в рамках той же резервуарной архитектуры для стимулированных задач обучение не подавляет хаос, а формирует в хаотическом фазовом пространстве детерминированные метастабильные маршруты, активируемые внешними импульсами. Тип задачи определяет тип формируемого динамического объекта: предельный цикл для автономной генерации, метастабильные маршруты для дискриминации входов или их сочетание для переключения между последовательностями.

9. Сформулирован и количественно подтверждён принцип вычислительного соответствия, связывающий эффективность решения задачи с топологией и геометрией представления в пространстве состояний резервуара. На задаче детекции фазовой когерентности систематически сопоставлены три физически различных субстрата – частотный, спайковый и осцилляторный. Установлено преимущество осцилляторного субстрата и обнаружен парадокс спайкового резервуара: статическое считывание не воспроизводит циклическую топологию задачи, тогда как динамическое считывание формирует представление с наиболее выраженной циклической структурой. Реализован экспериментальный электронный резервуар на цепочке связанных возбудимых генераторов ФитцХью – Нагумо с разработанной методологией томографии ядра для диагностики вычислительной ёмкости физического субстрата.

10. Систематическое сопоставление фиксированных резервуаров и полносвязно обучаемых рекуррентных сетей на задаче контекстно-зависимой интеграции установило качественное различие структур фазового пространства: полное обучение формирует компактные низкоразмерные представления с глобальным разделением контекстов, недостижимым при фиксированной архитектуре. Разрыв производительности нарастает с увеличением горизонта памяти задачи, устанавливая фундаментальное ограничение фиксированной архитектуры.

11. Показано, что принятие решений в задаче двухальтернативного выбора реализуется через формирование аттракторной структуры и

эмерджентную популяционную специализацию. В спайковых сетях обучение формирует непрерывное семейство устойчивых неподвижных точек, параметрически зависящее от разности входных сигналов. Элементы сети спонтанно разделяются на функциональные группы с положительными внутригрупповыми и отрицательными межгрупповыми связями, реализуя механизм «победитель получает всё» через рекуррентное усиление и взаимное подавление. Модульная структура не задаётся заранее, а возникает исключительно в процессе обучения. Метод разъединённых главных компонент позволяет выделить низкоразмерные подпространства популяционной активности, связанные с конкретными аспектами задачи.

12. Обучение задаче интеграции непрерывных переменных приводит к самоорганизации кольцевого аттрактора и модульной архитектуры сети: выходная субпопуляция формирует кольцевой аттрактор для хранения угловой переменной, входная – блок управления с затухающей динамикой. Установлена критическая роль пространственного согласования между входным кодом и структурой аттрактора: нарушение этого согласования при сохранении значений весов полностью уничтожает функцию интегрирования. Многозадачное обучение спонтанно порождает кластерную организацию с переключаемыми функциональными подпространствами, причём различные задачи реализуются через различные динамические структуры – дискретные аттракторы для задач выбора, линии аттракторов для рабочей памяти, непрерывные многообразия для аналогового выхода.

13. Установлено, что парадигма обучения является одним из параметров, определяющих качественную структуру фазового пространства. Систематическое сопоставление обучения с подкреплением и обучения с учителем на идентичных контекстно-зависимых задачах при сопоставимой точности выявило принципиальные различия: обучение с подкреплением формирует гибридные аттракторные архитектуры, сочетающие неподвижные точки с квазипериодическими аттракторами, и сбалансированные функциональные популяции с архитектурой связей «победитель получает всё»; обучение с учителем преимущественно сводит динамику к неподвижным точкам и порождает несбалансированные ансамбли. Поведенческая эквивалентность – одинаковая точность выполнения задачи – не подразумевает механистической эквивалентности: за одинаковым внешним результатом скрываются качественно различные внутренние динамические стратегии.

СТАТЬИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

A1. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Attractors of relaxation discrete-time systems with chaotic dynamics on a fast time scale // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 27, № 7. — P. 073104.

A2. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I., Kurths J. Transient chaos in the Lorenz-type map with periodic forcing // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, № 3. — P. 033107.

A3. Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Шапин Д. С., Некоркин В. И. Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 5–58.

A4. Klinshov V. V., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Jittering regimes of two spiking oscillators with delayed coupling // *Applied Mathematics and Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 1, № 1. — P. 197–206.

A5. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I., Kurths J. Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, № 4. — P. 042803.

A6. Franović I., Maslennikov O. V., Bačić I., Nekorkin V. I. Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 96, № 1. — P. 012226.

A7. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети // *Успехи физических наук*. — 2017. — Т. 187, № 7. — С. 753–764.

A8. Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2017. — Vol. 375, № 2096. — P. 20160288.

A9. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Hierarchical transitions in multiplex adaptive networks of oscillatory units // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, № 12. — P. 121101.

A10. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Effects of structure-dynamics correlation on hierarchical transitions in heterogeneous oscillatory networks // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2019. — Vol. 227, № 10–11. — P. 1221–1230.

A11. Emelianova A. A., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Disordered quenching in arrays of coupled Bautin oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, № 6. — P. 063110.

A12. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, № 10. — P. 103126.

A13. Пугавко М. М., Масленников О. В., Некоркин В. И. Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2020. — Т. 28, № 1. — С. 77–89.

A14. Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Binary classification via spatiotemporal dynamics in reservoir computing rings of FitzHugh – Nagumo neurons // The European Physical Journal Special Topics. — 2025. — Vol. 234. — P. 4033–4041.

A15. Emelianova A. A., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Higher-order interactions, adaptivity, and phase transitions in a novel reservoir computing model // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2025. — Vol. 35. — P. 103110.

A16. Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2020. — Vol. 90. — P. 105399.

A17. Maslennikov O. V., Gao C., Nekorkin V. I. Internal dynamics of recurrent neural networks trained to generate complex spatiotemporal patterns // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2023. — Vol. 33, № 9. — P. 093125.

A18. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Stimulus-induced sequential activity in supervisory trained recurrent networks of firing rate neurons // Nonlinear Dynamics. — 2020. — Vol. 101. — P. 1093–1103.

A19. Maslennikov O. V., Perc M., Nekorkin V. I. Topological features of spike trains in recurrent spiking neural networks that are trained to generate spatiotemporal patterns // Frontiers in Computational Neuroscience. — 2024. — Vol. 18. — P. 1363514.

A20. Teng M., Wang Y., Gao C., Dmitrichev A. S., Kasatkin D. V., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Similarity-smooth graph contrastive learning for community detection in adaptive oscillatory networks // Chaos, Solitons & Fractals. — 2025. — Vol. 200. — P. 116937.

A21. Maslennikov O. V. Topological and geometrical signatures of computation in rate, spiking, and oscillatory neural reservoirs // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2025. — Vol. 35, № 12. — P. 121106.

A22. Goryunov O., Maslennikov O., Kiselev M., Klinshov V. Understanding the training dynamics of CoLaNET by its simplified model // Chaos, Solitons & Fractals. — 2026. — Vol. 203. — P. 117663.

A23. Maslennikov O. V. Geometry and efficiency of learned and reservoir recurrent dynamics in context-dependent integration–switching // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2026. — Vol. 36, № 1. — P. 012345.

A24. Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Classification via forced spatiotemporal dynamics: an electronic FitzHugh–Nagumo chain as a physical kernel // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2026. — Vol. 22, № 2. — DOI: 10.20537/nd260305.

A25. Масленников О. В., Пугавко М. М., Щапин Д. С., Некоркин В. И. Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей // *Успехи физических наук*. — 2022. — Т. 192, № 10. — С. 1089–1109.

A26. Пугавко М. М., Масленников О. В., Некоркин В. И. Динамика рекуррентной спайковой нейронной сети в задаче двухальтернативного выбора // *Известия вузов. Радиофизика*. — 2021. — Т. 64, № 10. — С. 817–832.

A27. Кононов Р. А., Масленников О. В., Некоркин В. И. Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2025. — Т. 33, № 2. — С. 249–265.

A28. Масленников О. В. Динамика искусственной рекуррентной нейронной сети в задаче моделирования когнитивной функции // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2021. — Т. 29, № 5. — С. 799–811.

A29. Klinshov V. V., Kovalchuk A. V., Soloviev I. A., Maslennikov O. V., Franović I., Nekorkin V. I. Extending dynamic memory of spiking neuron networks // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2024. — Vol. 182. — P. 114850.

A30. Ivanov D. A., Larionov D. A., Maslennikov O. V., Voevodin V. V. Neural network compression for reinforcement learning tasks // *Scientific Reports*. — 2025. — Vol. 15, № 1. — P. 9718.

A31. Kononov R. A., Tiselko V. A., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Population coding and self-organized ring attractors in recurrent neural networks for continuous variable integration // *Frontiers in Network Physiology*. — 2025. — Vol. 5. — P. 1693772.

A32. Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks // *Scientific Reports*. — 2023. — Vol. 13, № 1. — P. 3997.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of Physiology*. — 1952. — Vol. 117, № 4. — P. 500.
2. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. — 1961. — Vol. 1, № 6. — P. 445–466.
3. Rinzel J., Ermentrout G. B. Analysis of neural excitability and oscillations // *Methods in Neuronal Modeling*. — 1998. — Vol. 2. — P. 251–292.
4. Izhikevich E. M. *Dynamical systems in neuroscience*. — Cambridge: MIT Press, 2007. — 441 p.
5. Ermentrout B., Terman D. M. *Mathematical foundations of neuroscience*. — New York: Springer, 2010. — Vol. 35. — 422 p.
6. Synchronization in complex networks / A. Arenas [et al.] // *Physics Reports*. — 2008. — Vol. 469, № 3. — P. 93–153.
7. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks // *Nature*. — 1998. — Vol. 393, № 6684. — P. 440–442.
8. Strogatz S. H. Exploring complex networks // *Nature*. — 2001. — Vol. 410, № 6825. — P. 268–276.
9. Nekorkin V. I., Velarde M. G. *Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos*. — Berlin: Springer, 2002. — 357 p.
10. Dynamical principles in neuroscience / M. I. Rabinovich [et al.] // *Reviews of Modern Physics*. — 2006. — Vol. 78, № 4. — P. 1213–1265.
11. Rabinovich M., Huerta R., Laurent G. Transient dynamics for neural processing // *Science*. — 2008. — Vol. 321, № 5885. — P. 48–50.
12. Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.-J. Chaos in random neural networks // *Physical Review Letters*. — 1988. — Vol. 61, № 3. — P. 259–262.
13. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1982. — Vol. 79, № 8. — P. 2554–2558.
14. Amit D. J., Gutfreund H., Sompolinsky H. Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks // *Physical Review Letters*. — 1985. — Vol. 55, № 14. — P. 1530.
15. Rajan K., Abbott L. F. Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 97, № 18. — P. 188104.
16. Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J. Learning representations by back-propagating errors // *Nature*. — 1986. — Vol. 323, № 6088. — P. 533–536.
17. Sutton R. S., Barto A. G. *Reinforcement Learning: An Introduction*. — 2nd ed. — Cambridge: MIT Press, 2018. — 526 p.
18. Song H. F., Yang G. R., Wang X.-J. Reward-based training of recurrent neural networks for cognitive and value-based tasks // *eLife*. — 2017. — Vol. 6. — P. e21492.

19. Jaeger H. The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks: GMD Report / German National Research Center for Information Technology. — 2001. — № 148. — 43 p.
20. Maass W., Natschläger T., Markram H. Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations // *Neural Computation*. — 2002. — Vol. 14, № 11. — P. 2531–2560.
21. Sussillo D., Abbott L. F. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // *Neuron*. — 2009. — Vol. 63, № 4. — P. 544–557.
22. Lukoševičius M., Jaeger H. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training // *Computer Science Review*. — 2009. — Vol. 3, № 3. — P. 127–149.
23. The Nobel Prize in Physics 2024: John J. Hopfield and Geoffrey E. Hinton / The Royal Swedish Academy of Sciences. — 2024. — URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2024/summary/>.
24. Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex / V. Mante [et al.] // *Nature*. — 2013. — Vol. 503, № 7474. — P. 78–84.
25. Task representations in neural networks trained to perform many cognitive tasks / G. R. Yang [et al.] // *Nature Neuroscience*. — 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 297–306.
26. Sussillo D., Barak O. Opening the black box: low-dimensional dynamics in high-dimensional recurrent neural networks // *Neural Computation*. — 2013. — Vol. 25, № 3. — P. 626–649.
27. Barak O. Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // *Current Opinion in Neurobiology*. — 2017. — Vol. 46. — P. 1–6.
28. Computation through neural population dynamics / S. Vyas [et al.] // *Annual Review of Neuroscience*. — 2020. — Vol. 43. — P. 249–275.
29. Wang X.-J. Probabilistic decision making by slow reverberation in cortical circuits // *Neuron*. — 2002. — Vol. 36, № 5. — P. 955–968.
30. Gold J. I., Shadlen M. N. The neural basis of decision making // *Annual Review of Neuroscience*. — 2007. — Vol. 30. — P. 535–574.
31. Burak Y., Fiete I. R. Accurate path integration in continuous attractor network models of grid cells // *PLoS Computational Biology*. — 2009. — Vol. 5, № 2. — P. e1000291.
32. Ring attractor dynamics in the *Drosophila* central brain / S. S. Kim [et al.] // *Science*. — 2017. — Vol. 356, № 6340. — P. 849–853.
33. A deep learning framework for neuroscience / B. A. Richards [et al.] // *Nature Neuroscience*. — 2019. — Vol. 22, № 11. — P. 1761–1770.

МАСЛЕННИКОВ Олег Владимирович

**КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ОБУЧАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ
АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Автореферат

Подписано к печати 16.03.2026 г.
Формат 60×90 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 2,25.
Тираж 100 экз. Заказ № 05(2026).

Отпечатано в типографии Института прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова РАН,
603951, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, 46