

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук»

На правах рукописи

Досаев Александр Сергеевич

**Численное моделирование нелинейной динамики волн на воде  
с использованием метода конформных преобразований**

Специальность 1.6.17 —  
«Океанология»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Троицкая Юлия Игоревна

Нижний Новгород — 2026

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Численное моделирование волн на воде (обзор литературы)</b> . .	<b>12</b>
<b>Глава 2. О физическом механизме горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн</b> . . . . .	<b>19</b>
2.1 Введение . . . . .	19
2.2 Основные уравнения и приближения . . . . .	22
2.3 Численная модель . . . . .	25
2.3.1 Уравнения в конформных координатах . . . . .	25
2.3.2 Постановка численных экспериментов . . . . .	27
2.3.3 Верификация . . . . .	29
2.4 О природе горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн . . . . .	32
2.4.1 Как измерить горизонтальную асимметрию? . . . . .	32
2.4.2 Физический механизм . . . . .	36
2.5 Исследование пространства параметров . . . . .	41
2.6 Обсуждение результатов . . . . .	47
2.6.1 Зависимость асимметрии от коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения . . . . .	48
2.6.2 Взаимодействие с длинными волнами и трехмерные эффекты . . . . .	49
2.6.3 Сравнение с лабораторными экспериментами . . . . .	52
2.7 Заключение . . . . .	56
<b>Глава 3. Численное моделирование уединенных гравитационных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью</b> . . . . .	<b>58</b>
3.1 Введение . . . . .	58
3.2 Основные уравнения . . . . .	60
3.2.1 Уравнения движения в декартовых координатах . . . . .	60
3.2.2 Уравнения движения в конформных координатах . . . . .	62
3.3 Стационарные волны конечной амплитуды . . . . .	63
3.4 Численное моделирование . . . . .	69

	Стр.
3.4.1 Распад локализованного возмущения . . . . .	69
3.4.2 Взаимодействие уединенных волн . . . . .	71
3.5 Заключение . . . . .	78
<b>Глава 4. Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерных уравнений движения в конформных координатах . . . . .</b>	<b>80</b>
4.1 Введение . . . . .	80
4.2 Основные уравнения . . . . .	82
4.3 Устранение неустойчивости для почти перпендикулярных гармоник	84
4.4 Анализ устойчивости волны Стокса . . . . .	86
4.5 Заключение . . . . .	88
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>91</b>

## Введение

Для задачи изучения ветровых волн на воде, как и для геофизической гидродинамики вообще, большое значение имеет развитие эффективных численных методов, позволяющих моделировать эволюцию систем с большим числом степеней свободы, а также проводить большое число расчетов, исследуя зависимость поведения системы от параметров. Численное моделирование является важным инструментом изучения сильно нелинейной динамики волн: в отличие от хорошо развитой слабонелинейной теории, динамика поверхностных волн конечной амплитуды, описываемая точными уравнениями движения, доступна для изучения главным образом через исследование отдельных реализаций, наблюдаемых экспериментально или полученных численными методами. Численное моделирование часто способно предоставить более полную информацию о поведении системы, чем натурные или лабораторные наблюдения.

Сложности в моделировании ветрового волнения обусловлены тем, что важную роль в его динамике играет нелинейность, связывающая эволюцию волн разных масштабов; как для отдельных локальных явлений, так и в целом для развития спектра волнения существенны трехмерные эффекты; помимо эффектов, описываемых теорией потенциальных волн, на динамику различных масштабов волнения оказывают влияние генерация завихренности на свободной поверхности и взаимодействие с вертикально-неоднородным полем течений. Наконец, чтобы наиболее полно воспроизвести условия натурных наблюдений, необходимо учитывать взаимодействие волн с турбулентным ветровым потоком, влияние обрушений, захвата пузырьков воздуха и генерации брызг, а также прочие факторы. Одновременный учет в численном моделировании всех этих аспектов находится в настоящее время за пределами возможностей вычислительной техники.

Пожалуй, самый широкий круг явлений, связанных с волнами на воде, может в принципе быть воспроизведен в рамках модели, основанной на уравнениях Навье-Стокса для двухфазной жидкости (с использованием, например, метода Volume of Fluid [1]). При этом, однако, даже в двумерном случае данный подход требует больших вычислительных ресурсов, поэтому для моделирования реалистичного поля волнения с широким диапазоном масштабов волн он не применим.

Наиболее часто как в численных, так и в аналитических исследованиях волны на воде рассматриваются как потенциальное течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью — в этом случае полевые уравнения для скорости жидкости линейны, и уравнения движения могут быть сформулированы через значения потенциала на границе [2]. В двумерной задаче удобно ввести отслеживающие форму поверхности и зависящие от времени конформные координаты — это позволяет перейти к решению уравнения Лапласа в области простой формы (в нижней полуплоскости комплексной координаты); величина нормальной скорости, необходимая для задания граничных условий на поверхности воды, в таком представлении допускает эффективное вычисление с использованием быстрого преобразования Фурье [3; 4]. К преимуществам метода конформных преобразований относится также возможность описывать конфигурации с загибом свободной поверхности. В рамках этой методологии могут быть в определенной степени учтены и некоторые из упомянутых выше эффектов, важных для динамики ветровых волн.

Настоящая работа направлена на развитие точных (полностью нелинейных) методов моделирования волн на воде, основанных на использовании конформных координат. Данные методы опробуются для решения геофизических задач, находящихся за пределами существовавших ранее областей их применения:

1) *Исследование физического механизма горизонтальной асимметрии обрушающихся гравитационно-капиллярных волн.* Известно, что гребни крутых волн дециметрового диапазона генерируют “паразитную” капиллярную рябь, которая локализуется на переднем склоне; профиль дециметровой волны при этом становится горизонтально асимметричным, наклоненным вперед. Различие в крутизне переднего и заднего склонов дециметровых волн может иметь некоторое значение для дистанционного зондирования (поскольку рассеяние микроволнового излучения на капиллярной ряби зависит от угла наклона решетки капиллярных гребней), а также оказывать влияние на ветро-волновое взаимодействие. Особо примечателен тот факт, что гравитационно-капиллярные волны могут обладать горизонтальной асимметрией в том числе и в отсутствие обрушений — иными словами, волны этого диапазона демонстрируют существование физического механизма асимметрии, не связанного с обрушениями. Несмотря на определенный прогресс в накоплении экспериментальных данных, имевший место в последние десятилетия [5—7], природа данной асимметрии до сих пор не была установлена.

2) *Моделирование динамики уединенных волн на глубокой воде с завихренностью.* Хотя большая часть исследований, посвященных волнам на воде, рассматривает только потенциальные движения жидкости, в природе существенное влияние на динамику волн оказывает взаимодействие с вертикально-неоднородными течениями. Взаимодействие со сдвиговым течением меняет как дисперсионное соотношение волн, так и их нелинейные свойства — например, скорость роста модуляционной неустойчивости [8] и условия, при которых происходит обрушение [9]. Более того, присутствие сдвигового течения приводит к появлению нового типа волн, не существующего без сдвига — гравитационных солитонов на глубокой воде [10]. Простейшей системой, позволяющей воспроизвести некоторые аспекты взаимодействия волн с течением, являются волны на потоке с линейным сдвигом скорости: в двумерной задаче пространственно однородное распределение завихренности приводит к тому, что зависящая от времени компонента поля скорости является чисто потенциальной. Литература, посвященная волнам конечной амплитуды на потоке с постоянной завихренностью, затрагивает, в основном, стационарные решения, включая периодические волны и солитоны экзотической формы, распространяющиеся против направления сдвига скорости [11–16]. Относительно длинных волн, распространяющихся вдоль сдвига скорости, известно, что их слабонелинейная динамика описывается интегрируемой моделью — уравнением Бенджамина-Оно; в рамках этого уравнения существуют солитонные решения, и взаимодействия солитонов между собой являются упругими. В настоящей работе исследуется вопрос о том, в какой степени полностью нелинейные аналоги солитонов уравнения Бенджамина-Оно сохраняют свои свойства при переходе к конечным амплитудам.

3) *Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерной конформной модели.* Несмотря на то, что двумерная модель позволяет воспроизводить многие важные процессы, такие как развитие модуляционной неустойчивости и начальную фазу обрушения волн, широкий класс эффектов в ней полностью отсутствует. От двумерного моделирования нельзя ожидать правдоподобной динамики спектра волнения — эволюция случайного волнового поля принципиально трехмерна и в значительной степени управляется 4-волновыми взаимодействиями между неколлинеарными пакетами волн [17]. При этом точные трехмерные потенциальные модели, основанные на методе поверхностных интегралов, обладают невысокой производительностью и сложны в реализации [18; 19].

Квазитрехмерная модель волнения, предложенная Рубаном [20—22], является обобщением метода конформных преобразований для трехмерной постановки задачи; модель является точной для двумерных волн и использует предположение, что изменение всех полей в направлении, перпендикулярном к главному, является медленным. Для практического использования этой перспективной модели ключевым является вопрос о границах ее применимости. В частности, представляет интерес изучаемый в настоящей работе вопрос о возможности использования квазитрехмерной модели для моделирования формирования подковообразных волн — существенно трехмерного процесса.

### **Цели работы**

Цели работы включают в себя построение обобщенных моделей, основанных на методе конформных преобразований, с учетом ключевых физических эффектов, определяющих динамику мелкомасштабных волн на поверхности океана (поверхностное натяжение, ветровая генерация и вязкое затухание, взаимодействие со сдвиговым течением, трехмерные эффекты), и описание значимых для практических приложений свойств этих волн. В связи с этим в работе решаются следующие задачи:

1. Исследование процесса формирования стационарных конфигураций гравитационно-капиллярных волн, обусловленных балансом между ветровой накачкой и нелинейным затуханием. Изучение зависимости асимметрии необрушающихся волн от параметров: периода волны, скорости ветра, коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения.
2. Определение физических механизмов горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн. Сравнение влияния на асимметрию различных факторов: давления ветра, вязких напряжений, сил поверхностного натяжения, связанных с капиллярной рябью напряжений Рейнольдса.
3. Исследование свойств солитонов на потоке с постоянной завихренностью, распространяющихся вдоль направления сдвига; моделирование взаимодействия солитонов.
4. Оценка применимости квазитрехмерной конформной модели для моделирования подковообразных волн. Изучение зоны неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, в рамках приближенных уравнений движения; сравнение положения зоны и вели-

чины инкремента неустойчивости с известными результатами анализа на основе точных уравнений.

### **Научная новизна**

Научная новизна работы определяется полученными в ней оригинальными результатами:

1. На основе уравнений Дьяченко путем добавления параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания построена модель ветровых волн дециметрового диапазона.
2. Предложен физический механизм горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн; действие этого механизма продемонстрировано на основе результатов численного моделирования в рамках созданной модели.
3. Построено численное решение уравнений Эйлера в виде уединенной волны конечной амплитуды на глубокой воде с постоянной завихренностью. Исследованы свойства полученных решений, проведено моделирование взаимодействия двух уединенных волн в рамках полностью нелинейных уравнений движения.
4. Показано, что квазитрехмерная конформная модель удовлетворительно описывает процесс формирования подковообразных волн. Предложена регуляризация модели, устраняющая нефизичную зону неустойчивости для волны Стокса, и таким образом обеспечивающая корректное поведение модели при наличии возмущений, распространяющихся поперечно к главному направлению.

### **Практическая значимость**

Идентифицирован ключевой механизм горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн: это обрушения и микрообрушения, а при их отсутствии — связанные с коротковолновой рябью напряжения Рейнольдса. Данный результат является шагом к разработке модели асимметрии гравитационно-капиллярных волн для дистанционного зондирования.

Поведение солитонов на потоке с постоянной завихренностью может рассматриваться как простейшая модель нелинейной динамики внутренних волн, распространяющихся зонально на экваторе.

Установлено, что квазитрехмерная конформная модель правдоподобно воспроизводит развитие неустойчивости, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Предложена регуляризация прибли-

женных уравнений, устраняющая нефизичную неустойчивость для возмущений, распространяющихся почти перпендикулярно к главному направлению. Полученные результаты открывают новые возможности по практическому применению квазитрехмерной модели.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Численная модель, построенная на основе уравнений Дьяченко с добавлением параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания, удовлетворительно воспроизводит доступные данные прямого численного моделирования и лабораторных наблюдений для режима распространения ветровых волн дециметрового диапазона без обрушений и микрообрушений.
2. В отсутствие обрушений и микрообрушений наиболее значимым фактором, обуславливающим асимметрию стационарных конфигураций гравитационно-капиллярных волн, являются напряжения Рейнольдса, связанные с пакетом паразитной капиллярной ряби. При этом наблюдаемая в численном моделировании горизонтальная асимметрия необрушающихся волн существенно меньше значений, приводимых в литературе для лабораторных измерений при более сильных ветрах, что свидетельствует о том, что ключевым механизмом возникновения асимметрии являются обрушения и микрообрушения.
3. Солитоны на глубокой воде с постоянной завихренностью, распространяющиеся вдоль направления сдвига скорости, устойчивы при амплитудах, не превышающих критической, и могут формироваться в результате распада локализованного начального возмущения. При столкновении эти солитоны взаимодействуют почти упруго, но, в отличие от решений уравнения Бенджамина-Оно, приобретают фазовый сдвиг.
4. Предложенная регуляризация квазитрехмерной конформной модели позволяет исправить некорректное поведение этой модели, устраняя неустойчивость к коротковолновым возмущениям, распространяющимся почти перпендикулярно к направлению основной волны.
5. Квазитрехмерная модель правдоподобно описывает развитие неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Положение зоны неустойчивости и величина инкремента находятся в удовлетворительном соответствии с

результатами анализа на основе точных трехмерных уравнений движения.

### **Достоверность**

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с экспериментальными измерениями, расчетами в рамках других моделей и аналитическими результатами. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и международных журналах, докладывались на всероссийских и международных конференциях.

### **Апробация результатов**

Результаты диссертации докладывались автором на генеральных ассамблеях Европейского союза наук о Земле (Вена, Австрия, 2016, 2018, 2019, 2020, 2021 г.), на конференциях “Fluxed and Structures in Fluids” (Калининград, 2015), “Computer Simulation in Physics and Beyond” (Москва, 2017, 2018), на школе-семинаре “Волны-2019” (Москва, 2019). Значительная часть результатов была получена в ходе работ по гранту РФФИ № 18-35-00658 мол\_а.

### **Личный вклад**

Автор диссертации лично создал программные реализации всех использованных моделей, провел расчеты (численные эксперименты) и обработал результаты моделирования, принимал активное участие в интерпретации результатов. Помимо этого, в рамках исследований, описанных в Главе 2, автор принимал непосредственное участие в разработке параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания для модели на основе уравнений Дьяченко; ему также принадлежит методика оценки вклада различных факторов в наблюдаемую асимметрию необрушающихся волн. Материалы Главы 4 были получены автором полностью самостоятельно. Среди материалов Главы 3 автору принадлежат исследования характеристик стационарных волн и процесса взаимодействия солитонов. Вывод уравнений в переменных Дьяченко для волн на потоке с завихренностью принадлежит М.И. Шишиной; кроме того, она принимала участие в постановке численных экспериментов с распадом локализованного возмущения на сдвиговом течении.

### **Благодарности**

Автор благодарен своему научному руководителю Юлии Игоревне Троицкой за терпение и поддержку. Автор благодарен профессору Виктору Исаевичу Шрире, без чьего доброжелательного внимания он, вероятно, никогда не решился бы опубликовать ни одной работы.

### **Публикации**

Результаты диссертации изложены в 13 работах автора, из которых 8 — статьи в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus и входящих в перечень ВАК, 5 — работы, опубликованные в сборниках трудов конференций.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 106 страниц, включая 32 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 136 наименований.

## Глава 1. Численное моделирование волн на воде (обзор литературы)

В данной главе дается обзор истории развития методов моделирования нелинейных волн на воде в нестационарной постановке задачи.

Вероятно, первые попытки компьютерного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью были предприняты в 1960-х годах в лаборатории Лос-Аламоса: ее сотрудниками было продемонстрировано двумерное моделирование разрушения дамбы и протекания жидкости под частично открытой заслонкой в рамках уравнений Навье-Стокса [23; 24]. В этих численных экспериментах использовался метод MAC (Marker-and-Cell) — адаптация метода PIC (Particle-in-Cell) для описания движений несжимаемой жидкости, создание которой было обусловлено недостаточной эффективностью PIC в задачах с низкими числами Маха [25; 26]. В отличие от PIC, в рамках подхода MAC частицы-маркеры больше не рассматриваются как носители массы или других физических характеристик, их роль сводится к индикации наличия жидкости в ячейках эйлеровой сетки; формулировка метода становится неявной — поле давления определяется условием несжимаемости жидкости и вычисляется путем решения уравнения Пуассона. Примеры расчетов, на которых опробовался MAC, включают отражение солитона от вертикальной стенки [27], падение капли в жидкость [28], трехмерные волны в канале с волнопродуктором и вокруг препятствия [29], обрушение двумерной волны [30] и др.. В этих ранних работах, однако, речь не идет о количественном изучении нелинейной динамики; доступные в то время вычислительные мощности позволяли использовать пространственные сетки лишь из небольшого числа узлов, что позволяло только продемонстрировать способность модели воспроизводить те или иные явления на качественном уровне [31; 32].

В современных исследованиях для моделирования течений, обладающих сложной конфигурацией свободной поверхности, наиболее широко применяется метод VOF (Volume-of-Fluid) [1]. Данное семейство моделей наследует от MAC подход к решению уравнений Навье-Стокса с учетом несжимаемости жидкости (который сам по себе иногда называется методом MAC), но вместо положений частиц-маркеров хранит для каждой ячейки сетки лишь информацию о доле ее заполненности жидкостью; такое упрощение позволяет строить схемы адвекции с явным сохранением массы [33]. К сильным сторонам VOF (а также других точных

моделей, использующих методы Level set, Smoothed Particle Hydrodynamics) относится возможность описания эффектов, важных для мелкомасштабной динамики — образования брызг и захвата пузырьков воздуха, генерации завихренности на свободной поверхности. В качестве примеров, иллюстрирующих текущее состояние метода VOF и возможности современной вычислительной техники, можно привести работы по трехмерному прямому численному моделированию обрушающихся волн на глубокой воде [34] и взаимодействия волн с турбулентным ветровым потоком [35]. В обоих случаях воспроизводится лишь небольшое число пространственных и временных периодов волны, что является характерным для подобного моделирования и отражает его высокую вычислительную стоимость. В ряде задач описание всего спектра эффектов, воспроизводимых точными моделями на основе уравнений Навье-Стокса, требуется лишь для небольшой части расчетной области — такие условия реализуются, например, при рассмотрении обрушений с заранее известной локализацией или взаимодействия волн с конструкциями; в этом случае вычислительная стоимость расчетов может быть существенно снижена путем использования VOF в сопряжении с моделью на основе потенциальных уравнений Эйлера (см., например, [36—39]). Помимо соображений, связанных с производительностью, некоторыми авторами также высказываются сомнения в способности схем, используемых для интегрирования уравнений Навье-Стокса, в принципе воспроизводить тонкие эффекты нелинейного взаимодействия волн на больших временах, по причине высокой диссипативности этих схем [4; 40].

Наиболее распространенным подходом к изучению собственно волн на воде является приближение потенциального движения жидкости. Благодаря тому, что полевые уравнения для скорости в этом случае становятся линейными, состояние системы полностью описывается значениями динамических переменных на поверхности [2].

Возможно, первая полностью нелинейная модель потенциальных волн на воде описывается Уитни в статье 1971 года [41]. В этой работе задача о двумерном потенциальном течении жидкости решается с использованием зависящего от времени конформного преобразования координат, с помощью которого область течения приводится к более простой форме — свободная граница отображается на отрезок действительной оси комплексной плоскости. Уравнения Эйлера при этом переходят в уравнения движения для конформного отображения и поля скорости на границе жидкости. В задаче о динамике потенциальных

волн на воде возникновение идеи об использовании конформных отображений оказалось весьма естественным и закономерным: в дальнейшем уравнения в конформных координатах были получены еще несколько раз независимо в работах Овсянникова [42], Мейрона и соавторов [43], Чаликова [4; 44], Дьяченко и соавторов [45], и стали основой эффективных численных схем. К сожалению, в статье Уитни применение модели демонстрируется лишь на одном примере (моделируется стоячая волна в сосуде с вертикальными стенками).

Первое успешное применение потенциальной модели для воспроизведения существенно нелинейного явления (обрушения волны) описывается Лонге-Хиггинсом и Коклетом в статье 1976 года [46]. Созданная ими модель была основана на смешанном эйлерово-лагранжевом (MEL, Mixed Eulerian-Lagrangian) подходе — к этой категории относятся большинство появившихся впоследствии точных потенциальных моделей (за исключением тех, что используют конформные координаты). В рамках данного подхода точки пространственной сетки, задающей параметризацию свободной поверхности, являются лагранжевыми маркерами, а кинематическое и динамическое граничные условия используются как эволюционные уравнения для координат и значений потенциала на этих маркерах; на каждом шаге по времени решается полевое уравнение (уравнение Лапласа), чтобы по известному поверхностному распределению потенциала найти нормальную скорость жидкости. В работе используется интегральное уравнение для потенциала, следующее из теоремы Грина. Позднее модель была обобщена для случая конечной глубины [47].

Вскоре было показано, что в модели из работы [46] пространственная часть задачи может быть более эффективно решена в формулировке, основанной на теореме Коши и аналитичности комплексного потенциала  $\theta = \varphi + i\psi$  как функции комплексной координаты  $x + iy$  [48]. При описании модификации [48] особое значение придается тому, что уравнения модели записываются непосредственно в физических координатах — это позволяет включать в задачу различные эффекты, такие как взаимодействие волн с плавающими либо закрепленными телами, а также освободиться от требования периодичности движения в пространстве при моделировании волн в лотке конечной глубины. В дальнейшем эта модель применялась для решения задач о движении энергетического устройства на волнах [49], вхождении клина в воду [50], генерации и обрушении дисперсионно-сфокусированных пакетов волн в лотке с волнопродуктором [51], движении

жидкости перед буксируемым телом [52] или в присутствии полностью или частично погруженного цилиндра [53; 54].

Еще одна реализация двумерной модели, использующая теорему Коши, была создана Долдом и Перегрином [55—57]. В работе [57] детально обсуждается выбор формулировки интегрального уравнения: если применение теоремы Грина для потенциала приводит к необходимости обращения матрицы с вычислительной сложностью  $\mathcal{O}(N^3)$  для пространственной сетки из  $N$  узлов, то интегральное уравнение на основе теоремы Коши допускает более быстрое итерационное решение за  $\mathcal{O}(N^2)$  операций, и к тому же ядро этого уравнения имеет другой тип сингулярности. Для интегрирования по времени с контролем точности вычисляются производные высших порядков и используется ряд Тейлора. В работе [58] описывается модификация, позволяющая учесть взаимодействие волн с полукруглым выступом дна (для выпрямления формы дна используется конформное преобразование координат). Практика применения модели Долда-Перегрина демонстрирует ее высокую эффективность: как правило, в соответствующих работах сообщается о проведении серий вычислительных экспериментов для исследования пространства параметров. Примеры применения включают в себя моделирование обрушения солитона на конечной глубине [59], изучение динамики модуляционно-неустойчивых цугов волн [60—62] и поиск критерия обрушения волн в модулированных цугах [63; 64].

Наилучшую эффективность в двумерных задачах демонстрируют модели, использующие конформные координаты — для них вычислительная сложность шага по времени составляет  $\mathcal{O}(N \log N)$  за счет использования быстрого преобразования Фурье. Как было уже отмечено выше, разработка конформных моделей начиналась независимо несколькими разными коллективами [4; 43; 45; 65; 66]; также в более ранней работе [67] описывается конструирование конформного отображения как вспомогательный прием для решения уравнения Лапласа. Дьяченко с соавторами [68] была предложена замена зависимых переменных, позволяющая привести уравнения движения к виду, содержащему лишь кубическую нелинейность (в отсутствие сил поверхностного натяжения). Существует обобщение уравнений в конформных координатах для описания волн над дном произвольной формы [69], а также для учета эффектов слабой трехмерности [20—22]. К недостаткам метода конформных преобразований относят существенную неоднородность разрешения конформной сетки на «сильно деформированных» профилях — точки сетки «разбегаются» с острых гребней

волн [43; 57; 70]. В то же время отмечается, что такое поведение сетки, как правило, не представляет проблемы, поскольку с точки зрения вычислительных ресурсов увеличение общего числа точек обходится достаточно дешево [71]. Модели данного семейства применялись в основном для изучения нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости и моделирования волн-убийц.

Для трехмерной задачи не существует приемов, аналогичных использованию комплексного анализа в двух измерениях, поэтому все точные трехмерные потенциальные модели основаны на применении теоремы Грина. В первых трехмерных моделях, так же, как и в двумерном случае, применение метода поверхностных интегралов на сетке из  $N$  узлов приводило к необходимости обращения заполненной матрицы за не менее чем  $\mathcal{O}(N^2)$  операций (сложность  $\mathcal{O}(N^2)$  достигается при использовании итеративного алгоритма GMRES) [70; 72]. Это создавало парадоксальную ситуацию, когда при моделировании достаточно протяженных систем производительность метода, оперирующего только значениями полей на границе, оказывалась ниже, чем при использовании трехмерной сетки, заполняющей всю область течения (сложность  $\mathcal{O}(N)$  для метода конечных разностей с ленточными матрицами). Снижение вычислительной сложности до логарифмической  $\mathcal{O}(N \log N)$  могло быть достигнуто за счет ускорения вычисления поверхностных интегралов с помощью быстрого мультипольного метода, которому, как отмечается в работе [73], длительное время не уделялось достаточно внимания в силу трудоемкости реализации и отсутствия готовых программных библиотек. Впоследствии модель, использующая быстрый мультипольный метод, была создана Фочесато и Диасом [19] на основе численного лотка Грилли и соавторов [40; 74].

Альтернативой использованию быстрого мультипольного метода является подход, описанный в работах [18; 75], который также позволяет достичь логарифмической сложности вычислений. Формулировка метода во многом аналогична приближенному методу HOSM (который будет обсуждаться ниже): потенциал и возвышение поверхности рассматриваются как (однозначные) функции горизонтальных координат, и уравнения движения записываются в терминах оператора Дирихле-Неймана. Значение оператора Дирихле-Неймана, однако, вычисляется точно при помощи итерационной процедуры; из поверхностных интегралов выделяется часть, которая может быть эффективно вычислена с помощью быстрого преобразования Фурье, остаток же представляет собой свертку с быстро спадающим ядром.

Еще более высокую производительность способны предоставить слабонелинейные потенциальные модели. Помимо упрощенных уравнений (нелинейного уравнения Шредингера и его модификаций), предполагающих узкий спектр волнения, к этой категории также относятся модели, основанные на уравнениях Захарова, учитывающие взаимодействие между всеми гармониками спектра, и HOSM (High-order Spectral Method) — эквивалентная им модель в псевдоспектральной формулировке. Среди спектральных методов отметим основанную на уравнениях Захарова модель Анненкова и Шриры [76], в которой используется оригинальная схема пространственной дискретизации, позволяющая существенно снизить количество рассматриваемых динамических переменных.

Метод HOSM был предложен независимо в работах Доммермута и Юэ [77] и Уэста с соавторами [78]. Важное отличие формулировки, полученной Уэстом и др., заключается в согласовании порядка малости слагаемых, удерживаемых в разложении различных нелинейных членов, содержащих вертикальную скорость; это необходимо для сохранения в усеченных уравнениях гамильтоновой структуры [79; 80]. Элегантный вывод слабонелинейных уравнений предложен в работе Крэйга и Сулем [81], где вертикальная скорость выражается через оператор Дирихле-Неймана и приводится разложение этого оператора в ряд Тейлора по степеням функции возвышения.

Хотя HOSM, в принципе, позволяет учесть нелинейные взаимодействия сколь угодно высокого порядка, на практике, как правило, порядок нелинейности используемых уравнений ограничивается учетом 4- или 5-волновых взаимодействий. В связи с этим подвергается сомнению способность усеченных уравнений модели корректно описывать динамику коротких волн в присутствии длинных: отмечается, что сходимость ряда Тейлора для поля вертикальной скорости коротких волн в такой ситуации замедляется и небольшого числа членов разложения может быть недостаточно для достижения необходимой точности [4; 75; 82—84]. Как было показано в рамках этой дискуссии, большие «расходящиеся» слагаемые в разложении сокращаются аналитически, но возникающие в процессе численного суммирования ошибки округления оказывают заметное влияние на динамику высоких гармоник [85; 86]. Определенные ограничения присущи HOSM в силу его псевдоспектрального характера — применение быстрого преобразования Фурье диктует необходимость использования прямоугольной пространственной сетки с однородным разрешением, а также снижает параллелизм вычислений.

Тем не менее, несмотря на критику, НОСМ остается одним из немногих методов, в рамках которых возможно трехмерное фазоразрешающее моделирование непрерывного спектра волнения на протяжении сотен и тысяч периодов. Требование, чтобы возвышение было однозначной функцией горизонтальных координат, а также невысокий порядок нелинейности в применяемых схемах, не позволяют рассчитывать на достоверное моделирование очень крутых и почти обрушающихся гребней, с чем успешно справляются точные схемы. Однако, в контексте крупномасштабного моделирования, где такие гребни рано или поздно возникают, это качество модели является скорее благом, поскольку корректное описание события, локализованного в пространстве и во времени, обычно не так важно, как возможность продолжать счет после обрушения. Для параметризации обрушений может использоваться модель турбулентной вязкости [87] или более простая модель гипервязкости [88].

Данный обзор преследовал цель указать на область исследований, где применение полностью нелинейных потенциальных моделей, которому посвящена настоящая диссертация, наиболее оправдано и эффективно. Потребность в полностью нелинейных моделях возникает при изучении динамики волн большой крутизны. Точное описание нелинейных эффектов особенно важно для моделирования коротковолновой части спектра ветровых волн, хотя степень достоверности, с которой в рамках потенциальных уравнений воспроизводится динамика короткой капиллярной ряби, остается предметом исследований. Лишь потенциальные модели позволяют провести большое количество расчетов (например, для исследования пространства параметров), используя ограниченные вычислительные ресурсы.

## Глава 2. О физическом механизме горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн

### 2.1 Введение

В природе ветровые волны любой длины асимметричны как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении. Горизонтальная асимметрия проявляется в статистически большей крутизне передних склонов волн. Понимание причин и достоверное моделирование этой асимметрии для волн гравитационно-капиллярного диапазона важно для дистанционного зондирования [89; 90], поскольку рассеяние микроволнового излучения на капиллярной ряби существенно зависит от угла наклона рассеивающей поверхности, на который заметное влияние оказывает горизонтальная асимметрия. Асимметрия может служить индикатором обрушений волн [91] — процесса, влияющего на обмен газами, теплом и импульсом между океаном и атмосферой. Ветро-волновое взаимодействие также зависит от формы волновых гребней (см., например, [92; 93]), и некоторые натурные и численные эксперименты позволяют предположить, что поступление энергии к волнам при взаимодействии с ветровым потоком зависит от горизонтальной асимметрии волн, что может быть связано со срывом потока за их гребнями [94]. Таким образом, горизонтальная асимметрия волновых гребней является важной характеристикой морской поверхности, которая не может быть извлечена из спектральной плотности волнения.

В основополагающих работах Кокса и Манка [95; 96] фотографии картины солнечных бликов используются для получения общей статистики уклонов морской поверхности при ветрах различной силы; негауссовы свойства распределения вероятностей описываются коэффициентами ряда Грамма-Шарлье. Физические причины асимметрии распределения уклонов, обнаруженной в [96], обсуждаются Лонге-Хиггинсом в работе [97]. Рассматриваются два возможных объяснения: 1) асимметрия распределения вероятностей может быть обусловлена горизонтальной асимметрией индивидуальных волн, выражающейся в фазовом сдвиге связанной второй гармоники, либо 2) асимметрия распределения может объясняться простым сложением уклонов, когда пакет коротких капиллярных волн модулирован в фазе с уклоном более длинной волны. Было показано, что

ни давление ветра, ни вязкие напряжения не могут приводить к сдвигу фазы второй гармоники, достаточному для объяснения наблюдаемых величин асимметрии; версия со сложением уклонов была оценена как более правдоподобная. Однако, как отмечает Манк [98], если бы гипотеза о сложении уклонов была верна, то наблюдался бы и вклад соответствующей величины от капиллярной ряби в среднеквадратичное значение уклона, что не подтверждается натурными измерениями. Таким образом, вопрос остается открытым.

Существует два распространенных подхода к определению горизонтальной асимметрии как измеряемой величины. Первый подход подразумевает измерение геометрических характеристик индивидуальных волн, таких как положение гребня относительно двух прилегающих впадин (см., например, [99—101]). К недостаткам этого подхода относится сложность его применения для анализа длинных записей волнения, поскольку он подразумевает явное разбиение волнового поля на последовательность индивидуальных гребней и обработку каждого из них в отдельности. Второе широко используемое определение является побочным продуктом биспектрального анализа: как было замечено [102], мнимая часть биспектра может использоваться в качестве характеристики горизонтальной асимметрии волн. Соответствующий третий момент может быть вычислен непосредственно по преобразованию Гильберта профиля волнения [103]. Связь между биспектральными характеристиками волн, набегающих на мелководье, и горизонтальной асимметрией их профилей демонстрируется в работе [104]. Это же определение асимметрии применялось в экспериментальных исследованиях Лейкиным и др. [5] для коротких гравитационных волн, а также Завадским и Шемером [7] для гравитационно-капиллярных волн; при этом была получена зависимость асимметрии от скорости ветра.

Несмотря на заметный прогресс в накоплении данных, физические механизмы асимметрии волн до сих пор не были установлены. К возможным механизмам относятся обрушение волн и сильная ветровая накачка [105]. В диапазоне скоростей ветра, в котором проводились лабораторные эксперименты Лейкина и др. [5] и Завадского и Шемера [7], можно ожидать существенного влияния обрушений.

В настоящем исследовании мы ограничиваемся рассмотрением необрушающихся гравитационно-капиллярных волн. Крутые волны данного диапазона генерируют на своих гребнях коротковолновую капиллярную рябь, для которой выполняются условия фазового синхронизма [106; 107]. Рябь, трансформируясь

на течении основной волны, быстро затухает под действием вязкости, вследствие чего ей оказывается покрыта, как правило, только часть поверхности. Групповая скорость капиллярных волн превышает фазовую; поскольку фазовая скорость «паразитной» ряби равна скорости движения гребня основной волны, волновой пакет капиллярной ряби всегда располагается на переднем склоне этого гребня. Хотя используемая численная модель позволяет воспроизвести и начальную стадию обрушения, мы здесь рассматриваем только такие длины волн, где этот процесс подавляется силами поверхностного натяжения [108]. Формирование асимметричных профилей гравитационно-капиллярных волн наблюдалось в численном моделировании в работах [109] и [110], но само по себе явление асимметрии не исследовалось. Лабораторные эксперименты Колье [6], направленные на изучение механизмов диссипации генерируемых ветром гравитационно-капиллярных волн, позволили определить диапазон параметров, при которых обрушения и микрообрушения отсутствуют, и в то же время профили волн обладают выраженной асимметрией и имеют на переднем склоне характерную паразитную капиллярную рябь (см. рис. 4-6 в цитируемой статье, либо рис. 2.1 здесь). Таким образом, хотя обрушения и могут являться важным фактором, вызывающим асимметрию волн, асимметрия может наблюдаться и в отсутствие обрушений.

Цель настоящего исследования — определить механизмы горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн и изучить ее зависимость от параметров.

Точное численное моделирование сильно-нелинейных гравитационно-капиллярных волн в океане является чрезвычайно сложной задачей: для этого требуется учесть трехмерность волнового поля, модуляцию коротких волн более длинными, наличие локализованного у свободной поверхности распределения завихренности, турбулентности в воде, захват пузырьков воздуха и сложное взаимодействие с турбулентным ветром, включая генерацию спрея. В настоящее время такое моделирование находится за пределами возможностей. Существуют работы, которые затрагивают некоторые из упомянутых аспектов — например, генерацию завихренности на свободной поверхности и затухание под действием молекулярной вязкости [109; 110], взаимодействие волн с турбулентным поверхностным слоем [105]. В настоящем исследовании, направленном исключительно на изучение природы асимметрии волн, мы, в качестве первого шага, применяем максимально простой подход, позволяющий описать сущность

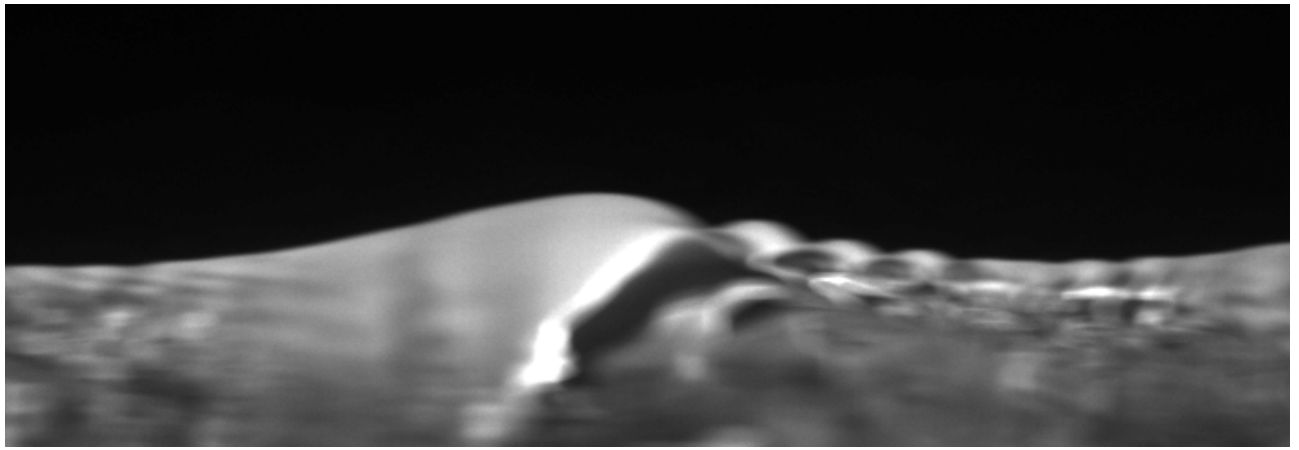


Рисунок 2.1 — Пример продольного сечения волн, наблюдаемых в ветро-волновом канале Large Air-Sea Interaction Facility в Люмини. Ветер 5 м/с дует слева направо, разгон составляет 6 м, характерная длина волны — 6 см. На фото представлен режим без обрушений («режим II» согласно классификации в работе [6]). Фото предоставлено Г. Колье.

явления: мы рассматриваем динамику нелинейных двумерных потенциальных гравитационно-капиллярных волн, приближенно описывая вязкое затухание и имитируя действие ветра. Мы проверяем эффективность нашего подхода *a posteriori*, сравнивая результаты моделирования с более точной моделью из работы [109] и решением уравнений Навье-Стокса из работы [110].

## 2.2 Основные уравнения и приближения

Настоящее исследование направлено на изучение динамики двумерных гравитационно-капиллярных волн большой крутизны. Мы рассматриваем движение жидкости постоянной плотности со свободной поверхностью, считая его потенциальным в главном порядке. Для учета эффектов вязкого затухания модель потенциального течения модифицируется в духе работ Рувинского с соавторами [111] и Лонге-Хиггинса [112].

В классической постановке задачи потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.1}$$

в двумерной области течения, ограниченной свободной поверхностью и дном. Будем использовать декартову систему координат  $(x,y)$  с осью  $x$ , совпадающей

с поверхностью жидкости в покое. Кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности  $y = \eta(x, t)$  записываются в терминах  $\varphi$  и  $\eta$  как

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + g\eta + p - T\kappa = 0, \quad (2.3)$$

$$\kappa = \frac{\eta''_{xx}}{(1 + \eta'^2_x)^{3/2}},$$

где  $p$  – внешнее давление,  $T$  – коэффициент поверхностного натяжения. Мы предполагаем, что для волн имеет место режим глубокой воды, что подразумевает граничное условие на бесконечности

$$|\nabla \varphi| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow -\infty.$$

Полная механическая энергия системы  $E$  определяется как

$$E = \int dx \int_{y < \eta(x)} dy \left( gy + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \right) + T \int ds, \quad (2.4)$$

где  $s$  – длина, измеряемая вдоль свободной поверхности. В дальнейшем мы будем считать движение системы периодическим в пространстве, и для краткости величину (2.4), рассчитанную для одного периода волны, будем называть просто «энергией».

В отличие от большинства работ, в которых при рассмотрении волн на воде давление  $p$  на поверхности принимается равным константе, мы используем слагаемое  $p$  для параметризации эффектов ветровой накачки и вязкого затухания:

$$p = p_{wind} + p_{visc}.$$

Вязкое затухание моделируется слагаемым

$$p_{visc} = -4\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \quad (2.5)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $s$  – координата, измеряемая вдоль поверхности. Точные граничные условия для вязкой жидкости включают в себя непрерывность нормальных компонент тензора напряжений, что, конечно, не может быть выполнено для потенциального течения. Однако, считая вязкость и вихревую составляющую поля скорости малыми, можно получить уравнения квази-потенциальной

теории для волн малой амплитуды [111]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + g\eta + p - T\kappa = 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial s} + 2\nu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial n \partial s^2} = 0,$$

где  $\zeta$  – вихревая часть функции тока, через которую компоненты поля скорости выражаются как

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

При линеаризации этой системы каждая из правых частей уравнений (2.6) и (2.7) отвечает ровно за половину полного декремента вязкого затухания  $-\gamma_{visc}$ ,

$$-\gamma_{visc} = \nu k^2 + \nu k^2.$$

Чтобы избежать необходимости решать уравнение для  $\zeta$  мы, следуя [111] и [112], выбираем параметризацию вязкого затухания в виде (2.5), по сути, умножая на два правую часть уравнения (2.6) и отбрасывая правую часть (2.7). Хотя справедливость этого приближения обоснована только асимптотически для волн малой амплитуды, мы используем данную параметризацию также и для волн большой крутизны. Сравнение с моделированием на основе точных уравнений Навье-Стокса показывает, что данное приближение остается уместным и для крутых волн и дает хорошее согласие с точной моделью.

Для компенсации потерь энергии за счет вязкого затухания мы вводим в модель ветровую накачку. Действие накачки, как и в большинстве моделей генерации волн ветром, моделируется распределением внешнего давления, пропорциональным уклону поверхности. Мы выбираем параметризацию, которая при малых значениях крутизны соответствует майлсовскому механизму генерации волн:

$$p_{wind} = 0.04u_*^2 \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

где  $u_*$  – скорость трения ветра [113]. Для устранения нефизичных пиков давления в окрестности вертикальных участков профиля, которые могут возникать при моделировании сильно нелинейных волн, мы, не претендуя на строгость, используем следующую параметризацию:

$$p_{wind} = 0.04u_*^2 \tanh \frac{\partial y / \partial s}{|\partial x / \partial s|}. \quad (2.8)$$

Для волн малой амплитуды она дает майлсовский инкремент [113]

$$\gamma_{wind} = 0.04u_*^2 \frac{k^2}{2\omega}.$$

Следует подчеркнуть, что мы не стремимся к достоверному моделированию ветро-волнового взаимодействия, нашей целью является лишь его имитация. Мы ожидаем, что нам удастся воспроизвести основные черты зависимости от скорости ветра, но не стремимся установить количественное соответствие между ветром и картиной волнения.

Таким образом, для описания вязких эффектов и воздействия ветра внешнее давление в динамическом граничном условии на свободной поверхности (2.3) принимается равным сумме вязкого и ветрового слагаемых

$$p = p_{wind} + p_{visc} = 0.04u_*^2 \tanh \frac{\partial y / \partial s}{|\partial x / \partial s|} - 4\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}. \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.1-2.3, 2.9) дает полное описание используемой математической модели. Хотя в динамике системы учитываются существенно непотенциальные эффекты, которые обладают ключевой важностью для изучаемых явлений, в главном порядке задача сводится к моделированию потенциального движения жидкости, что позволяет использовать развитый математический аппарат. В следующем разделе применимость данного подхода обосновывается путем сравнения с моделированием в рамках более точных и сложных моделей.

## 2.3 Численная модель

### 2.3.1 Уравнения в конформных координатах

Для эффективного решения системы уравнений (2.1-2.3, 2.9) мы используем методологию, основанную на применении конформных координат, в ее версии, предложенной Дьяченко и Захаровым [68]. Рассмотрим конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость конформной переменной  $\hat{w} = \hat{u} + i\hat{v}$ ,

$$x + iy = z(\hat{u} + i\hat{v}, t). \quad (2.10)$$

Функция  $z(\hat{w})$  полагается аналитической в нижней полуплоскости  $\hat{v} \leq 0$ , и на бесконечности должна удовлетворять

$$z_{\hat{w}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \hat{v} \rightarrow -\infty.$$

Важным свойством новой пары независимых координат  $(\hat{u}, \hat{v})$  является то, что уравнение Лапласа (2.1) для потенциала  $\varphi$  сохраняет в них свою форму:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{u}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{v}^2} = 0,$$

тогда как свободная поверхность выпрямляется, отображаясь на действительную ось  $v = 0$ :

$$x(\hat{u}, t) + i\eta(x(\hat{u}, t), t) = z(\hat{u} + i0, t).$$

В новых координатах уравнение Лапласа может легко быть решено и нормальная компонента скорости может быть найдена по поверхностному распределению потенциала. Можно показать, что на действительной оси  $v = 0$  осцилляторные компоненты действительной и мнимой частей аналитической функции  $z$  связаны преобразованием Гильберта  $\hat{H}$ :

$$y(\hat{u}) = y_0 + \hat{H}(x - \hat{u}),$$

где  $y_0$  — константа. Похожее соотношение верно и для «комплексного потенциала»  $\theta$ :

$$\theta = \varphi + i\psi, \quad \psi(\hat{u}) = \hat{H}\varphi(\hat{u}) \quad (2.11)$$

где  $\psi$  — функция тока, являющаяся гармонически сопряженной к  $\varphi$ . В конформных координатах формула для механической энергии (2.4) записывается как

$$E = \int d\hat{u} \left( \frac{1}{2}gy^2x_{\hat{u}} - \frac{1}{2}\varphi\hat{H}\varphi_{\hat{u}} + T|z_{\hat{u}}| \right). \quad (2.12)$$

Из системы (2.1-2.3) следуют эволюционные уравнения для отображения  $z$  и комплексного потенциала  $\theta$ , однако имеет смысл сделать еще один шаг и ввести замену зависимых переменных

$$R = \frac{1}{z'}, \quad V = \frac{i\theta'}{z'}, \quad (2.13)$$

которая приводит к уравнениям с улучшенной численной устойчивостью — уравнениям Дьяченко [68]:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \\ V_t &= i(UV' - R\hat{P}'(|V|^2 + 2p)) + g(R - 1) - 2TRP'(Q^*Q' - QQ^*). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по  $\hat{w}$ , звездочка — комплексное сопряжение,

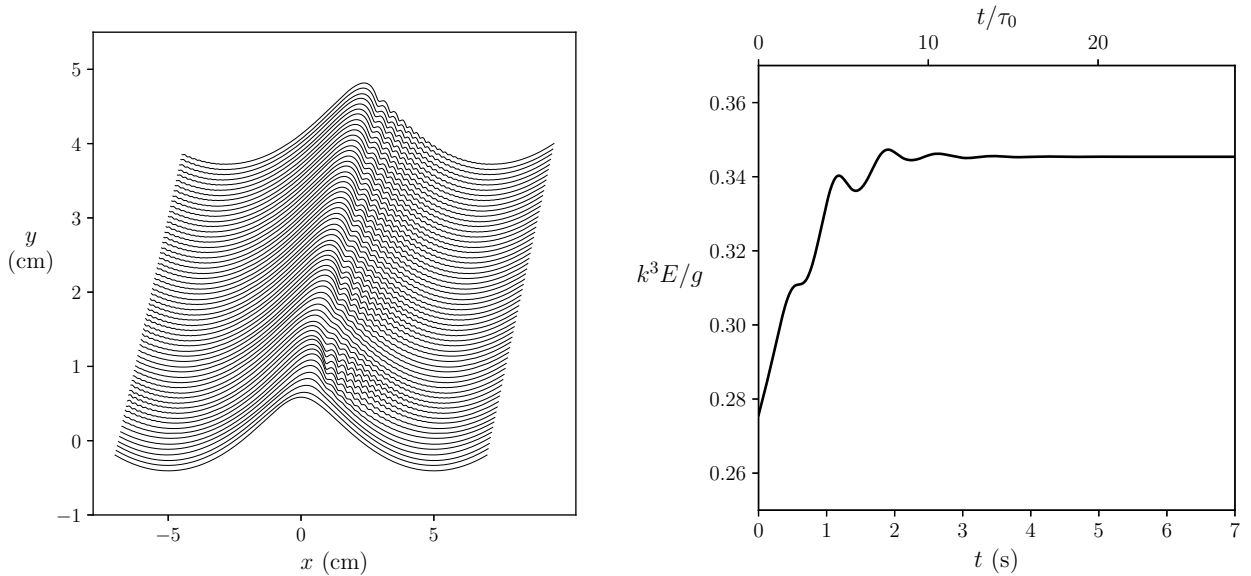
$$U = \hat{\mathcal{P}} (RV^* + R^*V), \quad \hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H}), \quad Q = \sqrt{R}.$$

Для численного интегрирования системы (2.14) в настоящей работе используется схема Дорманда-Принса 5-го порядка из семейства методов Рунге-Кутты со встроенной оценкой ошибки интегрирования. Данная численная модель (без параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания) опробовалась автором в задаче моделирования многомасштабного волнения [137] и для изучения некоторых особенностей динамики модуляционно-неустойчивых пакетов волн [138].

### 2.3.2 Постановка численных экспериментов

Существенную роль в динамике поверхностных волн дециметрового диапазона играет нелинейный механизм затухания, связанный с генерацией паразитной капиллярной ряби; в определенном диапазоне параметров этот механизм является также и доминирующим [6]. В природе, когда гравитационно-капиллярные волны распространяются под действием ветра, они быстро достигают крутизны, при которой ветровая накачка компенсируется нелинейным затуханием, т.е. существует тенденция к образованию квази-стационарной конфигурации. Во всех расчетах, где мы целенаправленно избегали режимов с обрушениями, система неизменно приходила к стационарному состоянию с паразитной рябью на переднем склоне волны, параметры которого определялись начальной длиной волны  $\lambda$  и скоростью трения ветра  $u_*$ .

В численных экспериментах начальное состояние задавалось в виде гладкой волны Стокса заданной длины, и с началом моделирования эта волна подвергалась действию ветра с заданной постоянной скоростью. Изучаемое нами стационарное состояние является аттрактором. Вопрос об условиях, при которых данный аттрактор является единственным, требует отдельного исследования. Нами было обнаружено, что в альтернативной постановке эксперимента, когда скорость ветра  $u_*$  увеличивается со временем постепенно, начиная с небольшого значения, конечная конфигурация для коротких волн ( $\lambda \sim 5$  см) оказывается иной. Это свидетельствует о неединственности аттрактора и о зависимости



а) Изменение профиля волны со временем

б) Полная механическая энергия волны (2.4)

Рисунок 2.2 — Движение изначально симметричной и гладкой волны под действием ветра; формирование асимметричного профиля с капиллярной рябью на переднем склоне. Шаг по времени между профилями 0.05 с. Параметры:  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с,  $\tau_0$  — период волны, задаваемый линейным дисперсионным соотношением.

конечного состояния от предыстории изменения скорости ветра и эволюции волны. Эта неединственность аттракторов гравитационно-капиллярных волн не была, насколько нам известно, описана ранее. Данный вопрос обсуждается более подробно в главе 2.5, но в целом его изучение выходит за рамки настоящей работы. В контексте настоящего исследования мы получили подтверждение, что для большей части обсуждаемого здесь диапазона длин волн ( $\lambda \gtrsim 6$  см) любое начальное состояние с заданным пространственным периодом развивается в одну и ту же стационарную конфигурацию. В связи с этим мы выбираем постановку эксперимента с постоянной скоростью ветра как наиболее простой вариант.

Рассмотрим характерный пример эволюции волны, заканчивающейся формированием стационарной конфигурации. На рис. 2.2а показана эволюция изначально гладкой и симметричной волны Стокса под действием ветра, на рис. 2.2б показана зависимость ее энергии (2.12) от времени. Заметно наклоненный вперед профиль волны несет на своем переднем склоне «вмороженный» пакет капиллярной ряби, что означает, что фазовая скорость ряби в точности равна скорости основной волны. Энергия ряби, которую мы грубо оцениваем как

разность между полной энергией (2.12) и тем же выражением, но с полями  $z$  и  $\varphi$ , осредненными по масштабу ряби, составляет от 15% полной энергии для 5 см волн до менее 5% для 10 см, и менее 1% для 25 см волн.

Следует заметить, что в описанной строго периодической постановке эксперимента невозможно образование волн, которые были бы длиннее начального периода. Данный важный аспект в нашем моделировании априори отличается от поведения ветровых волн с увеличением разгона. В настоящей главе мы изучаем локальные эффекты, наблюдающиеся в пределах одного пространственного периода основной волны, и не ставим перед собой задачу моделирования реалистичного многомасштабного поля волнения. Основной целью является попытка объяснить, почему волны гравитационно-капиллярного диапазона наклонены вперед, но сначала мы продемонстрируем, что приводимым результатам моделирования можно доверять.

### 2.3.3 Верификация

В данном разделе мы покажем, что результаты нашего моделирования находятся в согласии с другими работами, использующими более сложные модели с точным учетом вязких эффектов.

Во-первых, воспроизведем процесс генерации ряби крутой волной Стокса в отсутствие ветра, который моделируется в рамках полных двумерных уравнений Навье-Стокса в статье Хуна и Цая [110]. Начальные условия при этом задаются в виде волны Стокса, которая распространялась бы без изменения формы при равенстве нулю коэффициентов поверхностного натяжения и вязкости. На рис. 2.3 проведено сравнение между профилями волн из [110] и результатами нашего моделирования для тех же начальных условий. Мы наблюдали различие в пределах  $\sim 5\%$  в фазовой скорости основной волны, которое было устранено при построении графиков. Кроме того, спустя три временных периода основной волны капиллярная рябь в нашем моделировании выглядит смещенной примерно на половину своего периода относительно профилей из [110]. Возможно, причина этих расхождений — в специфическом способе параметризации вязких эффектов, применяемом в настоящей работе. В рамках точных уравнений Навье-Стокса имеет место взаимодействие волн со сдвиговым течением, которое генерируется

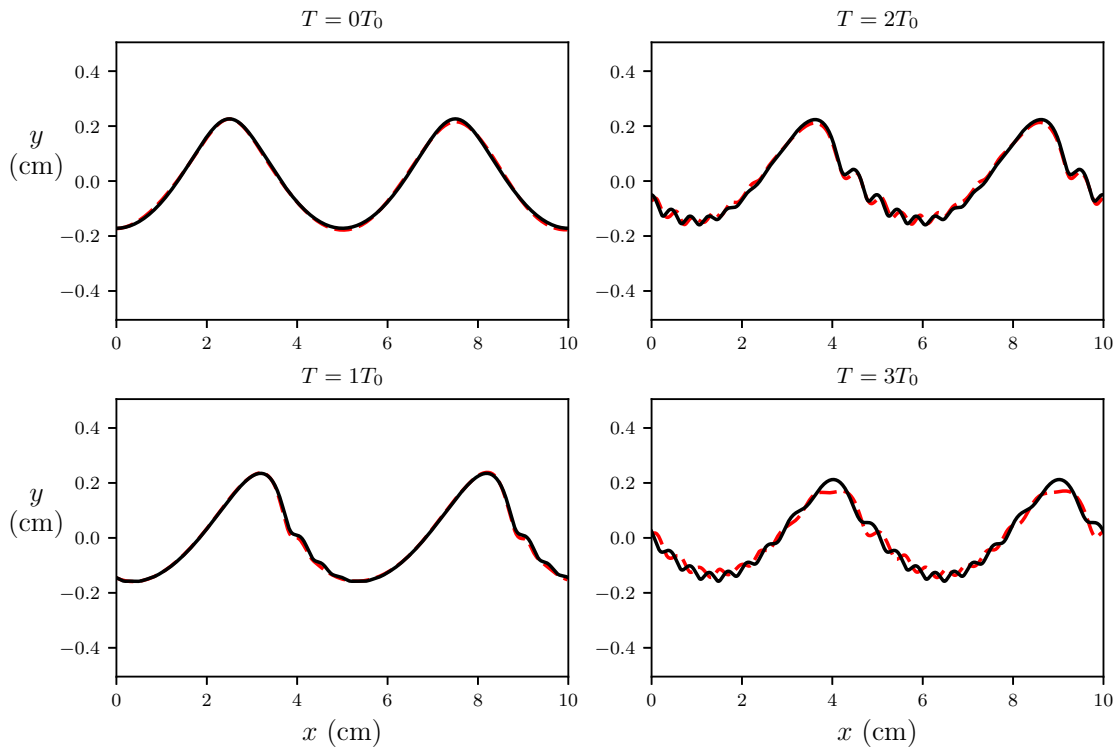


Рисунок 2.3 — Сравнение с численным моделированием на основе уравнений Навье-Стокса [110]. Движение волны, заданной изначально как волна Стокса с длиной  $\lambda = 5$  см и крутизной  $ak = 0.3$ , и подвергаемой начиная с момента времени  $t = 0$  (помимо силы тяжести) действию сил поверхностного натяжения  $T = 73 \text{ cm}^3\text{s}^{-2}$  и вязкости  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ . Решения уравнений Навье-Стокса показаны красными пунктирными линиями, результаты расчетов для модели потенциального течения — черными сплошными. При построении графиков была скомпенсирована разность фазовых скоростей  $\sim 5\%$ .

в тонком приповерхностном слое жидкости в силу действия вязкости [114; 115, §3.4]. В отличие от точного моделирования [110], наша модель не описывает данный эффект. В остальном на протяжении первых нескольких периодов, для которых проводилось сравнение, между поведением двух моделей наблюдается хорошее качественное и количественное согласие. Стоит еще раз отметить, что хотя моделирование в работе [110] точно учитывает вязкие эффекты, в нем отсутствует ветровая накачка. Следовательно, в этой постановке задачи невозможно формирование стационарных конфигураций гравитационно-капиллярных волн, поскольку любая крутая гравитационно-капиллярная волна в конечном итоге будет быстро терять энергию за счет генерации паразитной ряби.

Также сравним нашу модель с близким, но более точным подходом, использованным для нахождения стационарных профилей в статье Федорова и

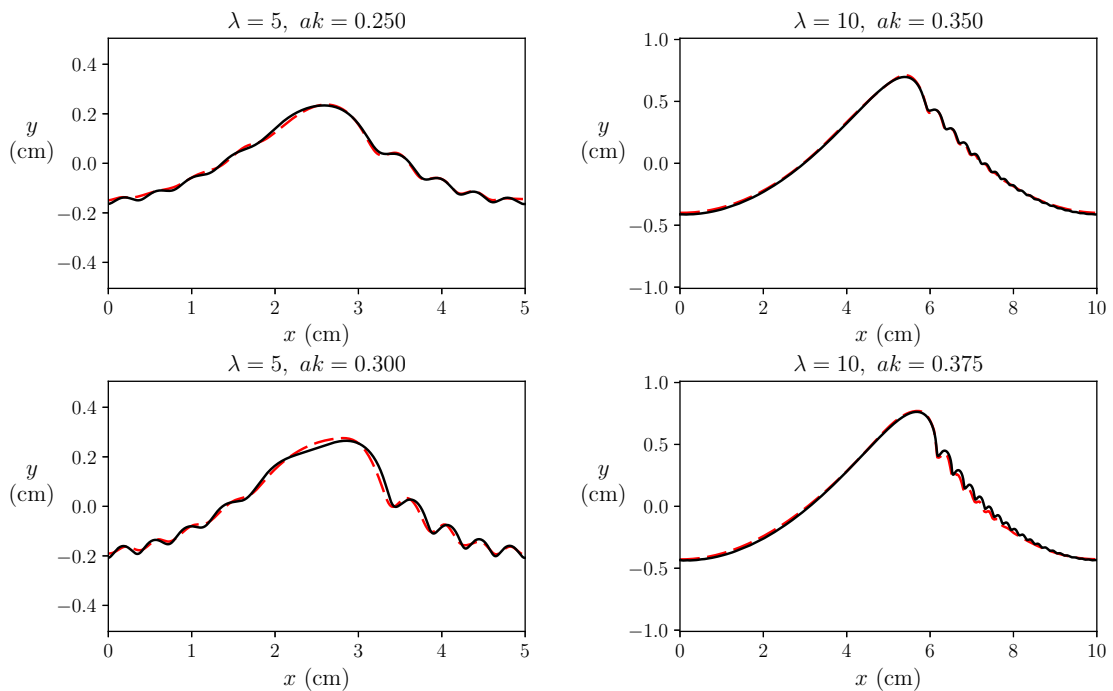


Рисунок 2.4 — Сравнение профилей стационарных волн с длиной  $\lambda = 5$  см и  $\lambda = 10$  см (черные сплошные линии) с профилями «Класса 1» из работы [109] (красные пунктирные линии). Параметры:  $T = 73 \text{ cm}^3\text{s}^{-2}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ .

Мелвилла [109]. В рамках этого подхода, как и в нашей модели, вязкие эффекты учитываются путем рассмотрения малой вихревой добавки к полю скорости, но данная завихренная добавка фигурирует в уравнениях явно. В отличие от расчетов в [109], мы не решаем стационарную задачу, но тем не менее используем похожую постановку эксперимента: мы рассматриваем развитие стационарной конфигурации из начального возмущения с заданным периодом, и для компенсации потерь энергии вследствие действия вязкости используем ветровую накачку. В рамках данного сравнения поле давления ветра (2.8) задавалось в виде одной гармонике в фазе с уклоном волны. На рис. 2.4 полученные нами профили (сплошные линии) сравниваются с профилями «первого типа» из [109] (соответствующие майлсовскому типу возбуждения, согласно используемой там классификации решений). Можно видеть, что для умеренных амплитуд профили достаточно близки друг к другу. Более высокие амплитуды не были достигнуты в нашем моделировании из-за развития неустойчивости волновых пакетов ряби и последующих микрообрушений.

Приведенные выше сравнения показывают, что используемый подход дает приемлемые результаты, хотя мы и не можем оценить величину ошибок, приносимых упрощениями в нашей модели. На настоящий момент для проведения

большого количества численных экспериментов, необходимых для исследования пространства параметров задачи, у этого подхода нет подходящих альтернатив.

## 2.4 О природе горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн

### 2.4.1 Как измерить горизонтальную асимметрию?

Нас будет интересовать горизонтальная асимметрия осредненного профиля волны, на котором рябь устранена фильтрацией коротких волн. Для определенности будем использовать фильтр Гаусса:

$$\bar{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \eta(x_1) \exp\left(-\frac{(x_1 - x)^2}{2\sigma^2}\right) dx_1. \quad (2.15)$$

В данном разделе для иллюстрации обсуждаемых определений мы будем использовать в качестве примера численное моделирование волны длиной  $\lambda = 10$  см под действием ветра с  $u_* = 20$  см/с (см. рис. 2.2).

Разделение масштабов между основной волной и паразитной рябью довольно ограничено, и уменьшается с уменьшением длины основной волны. Размер капиллярного утолщения на гребне бывает сравним по масштабу с длиной основной волны, как можно видеть на профилях для  $\lambda = 5$  см в предыдущей главе. Длина волны капиллярной ряби постепенно уменьшается при движении вдоль пакета, заполняя диапазон между размерами капиллярного утолщения и длиной самой короткой ряби, наблюдаемой у подошвы основной волны; сложно однозначно сказать, какие гармоники решения относятся к ряби, а какие — к основной волне. В связи с этим мы должны убедиться, что используемые нами определения ведут себя устойчиво по отношению к изменениям параметра сглаживания.

Существует несколько сравнительно широко используемых количественных мер асимметрии. Ниже мы приводим определения и обсуждаем поведение каждой из этих мер. На рис. 2.6 показано, с какой скоростью та или иная величина достигает насыщения при уменьшении параметра сглаживания  $\sigma$  (отношение  $\lambda/\sigma$  эквивалентно числу гармоник основной волны, сохраняемых после фильтрации).

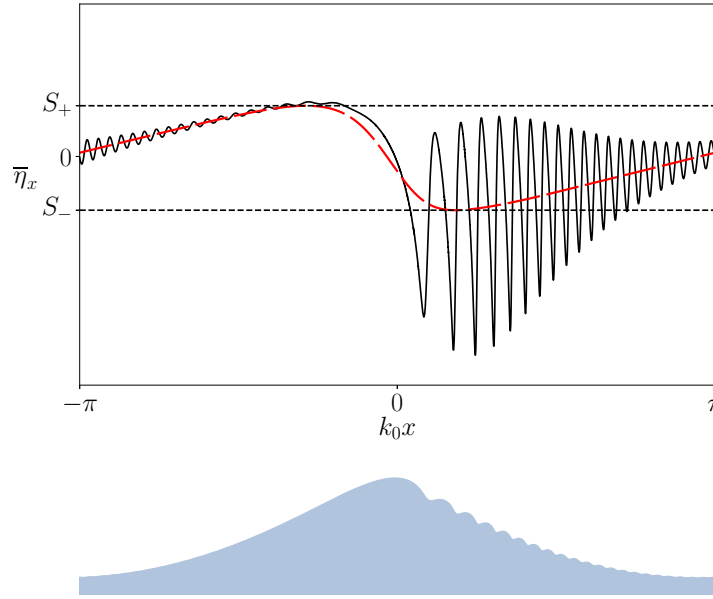


Рисунок 2.5 — Уклон точного (черная сплошная линия) и сглаженного (красный пунктир) профиля волны для стационарной конфигурации с параметрами  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с; уровни минимального и максимального осредненного уклона.

Часто в качестве меры горизонтальной асимметрии индивидуальной волны используется смещение ее гребня относительно двух прилегающих впадин; асимметрия определяется как отношение

$$\delta X = 2 \frac{l_{front} - l_{rear}}{l_{front} + l_{rear}}, \quad (2.16)$$

где  $l_{front}$  и  $l_{rear}$  — расстояние от гребня волны до передней и задней впадины, соответственно.

Еще одна возможная мера асимметрии может быть сконструирована как относительная разность между уклонами переднего и заднего склонов волны:

$$\delta S[\bar{\eta}] = \frac{|S_+| - |S_-|}{|S_+| + |S_-|}, \quad S_+ = \max_x \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}, \quad S_- = \min_x \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}, \quad (2.17)$$

(см. также иллюстрацию на рис. 2.5). Поскольку наклон осредненного профиля очень чувствителен к изменению параметров осреднения, насыщение величины  $\delta S[\bar{\eta}]$  при увеличении  $\lambda/\sigma$  происходит медленно, что затрудняет осмысленный выбор  $\sigma$ .

Для случайного поля волнения, пожалуй, наиболее полной характеристикой является плотность вероятности распределения уклонов поверхности; она используется, например, в работах [7; 98; 116—118]. Данную плотность вероятности, однако, трудно измерить в натуральных экспериментах, с связи с чем ее применение

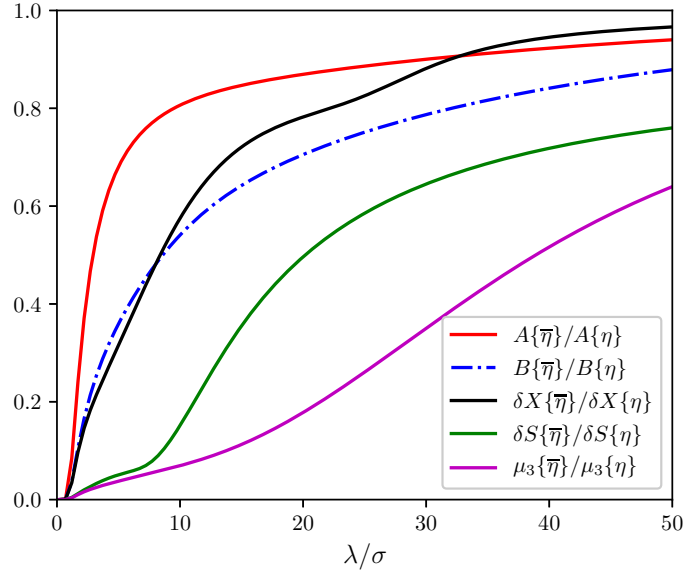


Рисунок 2.6 — Выход на насыщение различных мер асимметрии с ростом числа удерживаемых гармоник (т.е. с уменьшением параметра сглаживания  $\sigma$ ) для примера стационарной конфигурации ( $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с).

ограничено. В рамках этого подхода асимметрия характеризуется следующим третьим моментом:

$$\mu_3 = \frac{\langle \eta_x^3 \rangle}{\sqrt{\langle \eta_x^2 \rangle^3}}, \quad (2.18)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. В нашем частном случае поле волнения является стационарным и усреднение по ансамблю заменяется пространственным усреднением по одному периоду волны. Рис. 2.6 показывает что, аналогично  $\delta S$ , основной вклад в  $\mu_3$  вносят высокие гармоники. Для тестового профиля насыщение  $\mu_3$  достигается только при  $\lambda/\sigma \sim 100$ .

Методы биспектрального анализа предоставляют простую и надежную меру асимметрии. Она определяется как третий момент преобразования Гильберта от возвышения поверхности  $\hat{H}\eta$ :

$$A[\eta] = \frac{\langle (\hat{H}\eta)^3 \rangle}{\sqrt{\langle \eta^2 \rangle^3}}, \quad (2.19)$$

и в дальнейшем будет называться нами просто «асимметрией». Это определение напоминает  $\mu_3$ , с тем отличием, что производная здесь заменена преобразованием Гильберта. В (2.19) вклад каждой компоненты волнения пропорционален кубу ее амплитуды, а не крутизны, поэтому данная величина в большей степени характеризует основную волну, чем коротковолновую рябь.

Величина (2.19) может быть интерпретирована как нормированная амплитуда второй гармоники основной волны, которая в зависимости от фазы придает профилю наклон вперед или назад [102]. Если представить профиль волны  $\eta(x)$  в виде ряда

$$\eta(x) = a \cos kx + \sum_{n \geq 2} (a_n \cos nkx + b_n \sin nkx), \quad (2.20)$$

и предположить, что коэффициенты убывают как  $a^n$ , то в старших порядках

$$A[\eta] = -\frac{3b_2}{\sqrt{2}a} + \frac{6(a_3b_2 - a_2b_3)}{\sqrt{2}a^2} + \dots$$

В этой формуле мы пренебрегаем слагаемыми высших порядков из знаменателя, поскольку для потенциальных волн поправки второго и третьего порядков в  $\langle \eta^2 \rangle$  компенсируют друг друга (см. [119]). Согласно (2.19) асимметрия волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $x$  и наклоненных вперед, отрицательна. Некоторые авторы используют определение асимметрии с противоположным знаком (см., например, [7]).

Для тестового профиля, даже без применения фильтра (2.15), наибольший вклад в полную асимметрию

$$A[\eta] = \frac{1}{\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}^3} \sum_{k_1+k_2+k_3=0} (\hat{H}\eta)_{k_1} (\hat{H}\eta)_{k_2} (\hat{H}\eta)_{k_3} \quad (2.21)$$

вносят комбинации первой и второй гармоник основной волны, так что шесть слагаемых ( $|k_{1,2}| = k$ ,  $|k_3| = 2k$  и их перестановки) дают примерно 60% полной асимметрии. Вклад комбинаций с высшими гармониками ( $n > 5$ ) пренебрежимо мал.

Еще один возможный подход заключается в том, чтобы вычислить норму асимметричной части  $\eta$ , при условии, что начало координат  $x = 0$  выбрано как в (2.20):

$$B[\eta] = \frac{\|\frac{1}{2}(\eta(x) - \eta(-x))\|}{\|\eta(x)\|} = \left( \frac{\sum_n b_n^2}{a^2 + \sum_n (a_n^2 + b_n^2)} \right)^{1/2}. \quad (2.22)$$

Как можно видеть на рис. 2.6, насыщение  $B[\eta]$  происходит очень медленно, и неясно какое значение следует принять за асимметрию осредненного профиля.

Поскольку  $A[\eta]$  ведет себя более устойчиво, чем остальные меры, а также часто используется в обработке данных измерений, мы будем использовать ее как основную меру горизонтальной асимметрии поля волнения. Кроме того,

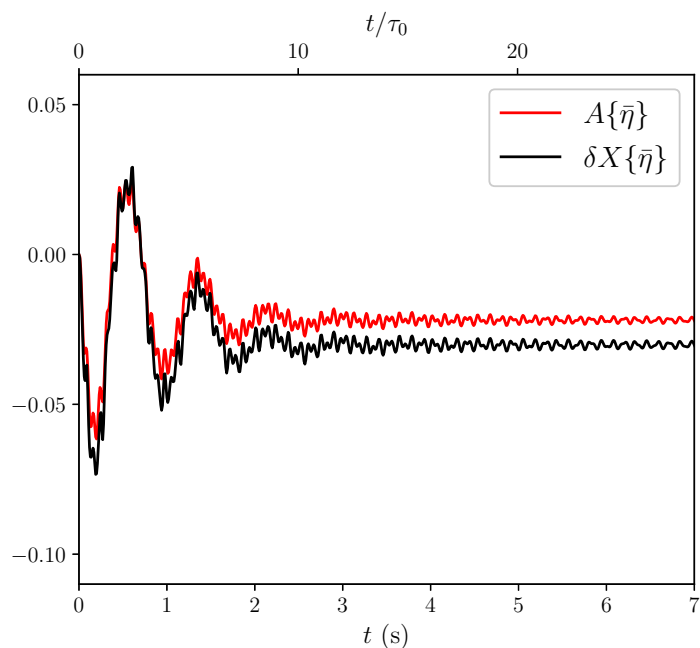


Рисунок 2.7 — Пример изменения с течением времени двух мер асимметрии:  $A$  (красная линия) и  $\delta X$  (черная линия). Параметры моделирования:  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с, параметр сглаживания  $\sigma = 2$  см.

мы будем использовать меру  $\delta X[\eta]$ , поскольку она также является широко распространенным и интуитивным определением асимметрии.

Рис. 2.7 показывает зависимость от времени величин  $\delta X[\bar{\eta}]$  и  $A[\bar{\eta}]$  в том же тестовом расчете для 10 см волны, профили которой изображены на рис. 2.2а. Можно видеть, что после нескольких колебаний достаточно большой амплитуды, во время которых асимметрия может быть как отрицательной, так и положительной, волна выходит на умеренное отрицательное значение асимметрии.

#### 2.4.2 Физический механизм

В данном разделе мы обсудим физический механизм воздействия короткой капиллярной ряби на форму основной дециметровой волны. Задаваясь вопросом о законах, которым подчиняется осредненное движение, мы должны полностью определить среднее состояние, т.е. указать, что мы имеем в виду как под осредненным профилем волны, так и под осредненным полем скорости жидкости. Если для поля возвышения  $\eta$  выбор операции осреднения (2.15) диктуется

контекстом задачи, то вопрос о среднем поле скоростей представляется более сложным. Эйлерово или лагранжево осреднение компонент скорости  $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial y$  даст в общем случае поле с завихренностью, что означает, что нам пришлось бы раскладывать потенциальное точное поле скорости на сумму завихренного среднего и завихренной осцилляторной добавки. Кроме того, полученное таким образом среднее поле скорости, вообще говоря, кинематически несовместимо с движением осредненной поверхности  $\bar{\eta}$ : например, формальное применение осреднения к кинематическому граничному условию (2.2) приводит к появлению в уравнениях «эффективной вертикальной скорости»

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} - \bar{v}_y = \delta v_y, \quad \delta v_y = - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} - \bar{v}_x \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} \right),$$

смысл которой трудно объяснить.

В настоящем исследовании мы требуем, чтобы среднее поле скорости 1) было потенциальным с такой же асимптотикой на большой глубине, как и у исходного поля, и 2) было кинематически совместимо с движением средней поверхности, т.е. удовлетворяло кинематическому граничному условию вида (2.2); оказывается, что этими двумя условиями поле определяется однозначно. В частности, если для осредненной поверхности  $\bar{\eta}$  известна конформная параметризация  $X + iY = Z(u, t)$ , то потенциал  $\Phi$  соответствующего среднего поля скорости может быть найден из кинематического граничного условия, записанного в конформных координатах [45]:

$$Y_t X_u - X_t Y_u = -\hat{N}\Phi_u. \quad (2.23)$$

Для определяемого таким образом среднего состояния  $(\bar{\eta}, \Phi)$  можно записать уравнения, которые аналогичны обычным уравнениям движения жидкости со свободной поверхностью (2.2), (2.3):

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + g\bar{\eta} - T\bar{\kappa} + \bar{p} + \delta p = 0. \quad (2.25)$$

Здесь кинематическое граничное условие (2.24) удовлетворяется по построению поля  $\Phi$ , а динамическое граничное условие (2.25) можно считать определением  $\delta p$ . В стационарном случае ( $\eta_t = 0$ ,  $\varphi_t = 0$ ), примером которого является стационарная конфигурация гравитационно-капиллярной волны, рассматриваемая в

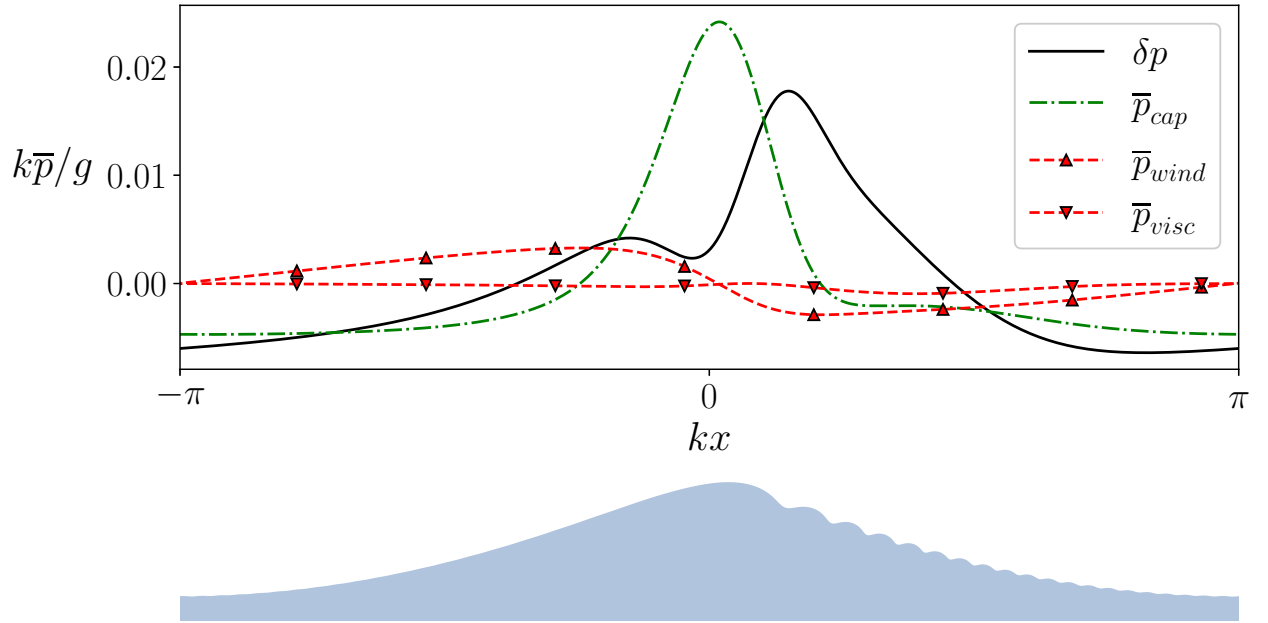


Рисунок 2.8 — Слагаемые в осредненном уравнении (2.25): эффективное давление  $\delta p$ , капиллярное  $\bar{p}_{cap} = -T\bar{\kappa}$ , ветровое  $\bar{p}_{wind}$  и вязкое  $\bar{p}_{visc}$  давление. Все величины рассчитаны для примера стационарной конфигурации  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с, параметр осреднения  $\sigma = 0.2\lambda$ .

связанной с волной системе отсчета, поле «эффективного давления»  $\delta p$  получает простое выражение

$$\delta p = \frac{1}{2} \left( |\nabla \varphi|^2 - |\nabla \Phi|^2 \right) \quad (2.26)$$

и может быть интерпретировано как напряжения Рейнольдса, связанные с короткими волнами.

На рис. 2.8 изображено распределение  $\delta p$ , а также ветрового  $\bar{p}_{wind}$ , капиллярного  $-T\bar{\kappa}$  и вязкого  $\bar{p}_{visc}$  слагаемых в осредненном уравнении (2.25) для примера тестовой стационарной конфигурации  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 20$  см/с. Как можно видеть, «эффективное давление»  $\delta p$  распределено асимметрично и имеет выраженный максимум, расположенный на переднем склоне основной волны.

Чтобы ответить на главный вопрос настоящей главы — почему гравитационно-капиллярные волны наклонены вперед? — мы предлагаем простейшую модель, связывающую между собой отдельные компоненты самосогласованных полей возвышения и внешнего давления.

Рассмотрим конфигурацию с умеренной крутизной основной волны, когда кривизна гребня не слишком велика и гребень не генерирует интенсивной ряби, так что для поддержания баланса энергии не требуется сильной ветровой накачки. Такая волна будет близка к симметричной волне Стокса; ее профиль можно

представить как сумму основной волны  $\cos kx$  с набором связанных гармоник  $\cos nkx$ , которые делают гребень заостренным, и малой добавки, обусловленной действием ветра, вязкости и поверхностного натяжения. Эта малая добавка включает в себя, помимо пакета коротковолновой ряби, асимметричные поправки к среднему профилю, в том числе асимметричную вторую гармонику  $\sin 2kx$ . В первом приближении будем считать, что поле давления ветра и положение пакета капиллярной ряби задаются главным образом симметричной частью профиля волны. Тогда асимметричную поправку к среднему профилю можно оценить как линейный отклик на приложенное внешнее давление

$$p = \delta p + \bar{p}_{wind} + \bar{p}_{visc} - T\bar{\kappa}. \quad (2.27)$$

В рамках линейного приближения мы можем определить и вклад в асимметрию каждого слагаемого этой суммы по отдельности. Чтобы достичь максимального упрощения, мы пренебрежем полем скорости основной волны и будем считать, что внешнее давление приложено к поверхности однородного потока, имеющего скорость  $v_x = -c$ . Известно, что синусоидальное распределение давления  $p(x) = p' \sin k'x$ , приложенное к поверхности однородного потока, генерирует на его поверхности волну [120, §270]

$$\eta(x) = \frac{p' \sin k'x}{c^2 k' - g - T k'^2}. \quad (2.28)$$

Как было показано в §2.4.1, особый интерес для нас представляет вторая гармоника профиля. Фазовая скорость волны дециметрового диапазона  $c$  всегда больше линейной фазовой скорости вдвое более короткой волны  $\sqrt{g/2k + 2Tk}$ , поэтому при  $k' = 2k$  возвышение поверхности (2.28), обусловленное внешним давлением, имеет тот же знак, что и приложенное давление. В соответствии с (2.28), каждому слагаемому  $p_i(x)$  суммы (2.27) мы приписываем вклад в амплитуду асимметричной второй гармоники  $\sin 2kx$  профиля  $\eta(x)$ , равный

$$\eta_{2,i} = \frac{p_{2,i}}{2c^2 k - g - 4Tk^2}, \quad p_{2,i} = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} p_i(x) \sin 2kx \, dx, \quad (2.29)$$

где начало отсчета  $x = 0$  выбирается так, чтобы соответствовать нулевой фазе основной гармоники волны.

Согласно (2.29), если внешнее давление  $p$  локализовано на переднем склоне волны близко к ее гребню, то профиль волны будет наклонен вперед, что

соответствует отрицательному знаку асимметрии (2.19). Именно такая локализация обеспечивается распределением напряжений Рейнольдса  $\delta p$ , которые дают наибольший вклад в асимметричную вторую гармонику давления. Таким образом, предсказания данной упрощенной модели согласуются со знаком асимметрии, который наблюдается в лабораторных экспериментах и нашем моделировании. Мы получили качественную модель эффекта; количественное сравнение с результатами моделирования будет приведено в следующем разделе.

Помимо деформации осредненного профиля, связанной с действием «эффективного давления»  $\delta p$ , имеет смысл также рассмотреть более простой, чисто геометрический эффект: некоторый вклад во вторую гармонику профиля создается и капиллярным утолщением на гребне волны. Согласно [120, §271], первый гребень цуга капиллярной ряби, возбуждаемой локализованным источником, смещен выше по течению относительно центра этого источника (в данном случае – относительно гребня основной волны). Течение основной волны трансформирует рябь таким образом, что амплитуда и ширина последующих гребней быстро спадает, поэтому первый гребень является самым крупным в пакете. Вклад этого гребня в асимметричную вторую гармонику мы будем оценивать как

$$\eta_{2bulb} = \frac{2}{\lambda} \int_{-d}^d \eta(x) \sin 2kx \, dx, \quad (2.30)$$

где  $x = d$  соответствует первой впадине капиллярной ряби, считая от гребня основной волны. Можно ожидать, что вклад капиллярной «бульбы» в асимметрию будет существенен для коротких волн с длиной  $\lambda < 10$  см, для которых длина основной волны и характерные масштабы «бульбы» становятся близки.

Асимметричная конфигурация волны с пакетом капиллярной ряби на переднем склоне чувствительна к изменению параметров основной волны, которые, в свою очередь, зависят от внешних параметров (скорость ветра и разгон), а также коэффициентов поверхностного натяжения и вязкости. В следующем разделе мы исследуем пространство параметров задачи, чтобы получить лучшее понимание физики процесса и сформулировать предположения для дистанционного зондирования.

## 2.5 Исследование пространства параметров

В данном разделе мы исследуем зависимость свойств гравитационно-капиллярных волн от длины основной волны  $\lambda$  и скорости трения ветра  $u_*$ , или, учитывая весьма искусственный характер нашей параметризации ветровой накачки, крутизны волны  $ak$ . Мы определяем амплитуду волны  $a$  для заданного профиля  $\eta(x)$  как половину ее высоты от подошвы до гребня:

$$a = \frac{h}{2}, \quad h = \max_x \bar{\eta} - \min_x \bar{\eta}.$$

Параметр осреднения фильтра Гаусса (2.15) устанавливается равным  $\sigma = \lambda/5$ .

В наших численных экспериментах исследовался диапазон длин волн от 5 до 25 см. Для заданной  $\lambda$  нижняя граница значений  $u_*$ , при которых существует нетривиальная стационарная конфигурация, определяется балансом между ветровой накачкой и вязким затуханием  $\gamma_{wind} + \gamma_{visc} = 0$ . Верхняя граница диапазона  $u_*$ , который мы смогли исследовать, определялась неустойчивостью пакета ряби, развитие которой приводило к локальному увеличению амплитуды ряби и заканчивалось самопересечением свободной поверхности. Эти границы показаны на рис. 2.9, где также отмечены области пространства параметров, в которых осцилляции волны вокруг стационарного состояния затухали менее, чем за 10, либо более, чем за 100 периодов основной волны. Чтобы исключить влияние начальных условий, мы определяем это «время затухания» как отрезок времени  $t_{osc} = t_{0.5} - t_{0.1}$  между моментами  $t_{0.5}$  и  $t_{0.1}$ , когда амплитуда колебаний асимметрии составляет, соответственно, 0.5 и 0.1 от ее конечного значения (см. пример на рис. 2.10).

Как показало моделирование, конечная стационарная конфигурация может зависеть не только от значения параметров  $(\lambda, u_*)$ , но также и от предыстории изменения скорости ветра. Помимо основного варианта эксперимента с постоянной скоростью ветра мы изучили также альтернативную постановку, в которой  $u_*$  увеличивается до конечного значения небольшими шагами (по 0.5 см/с), и между шагами выдерживается достаточно большой промежуток времени, чтобы могли затухнуть осцилляции профиля. На рис. 2.11 показаны примеры стационарных конфигураций 5 см волн, полученных в основной и альтернативной постановках; профили заметно отличаются друг от друга и имеют разные величины асимметрии. Сравнение параметров профилей, полученных в этих двух

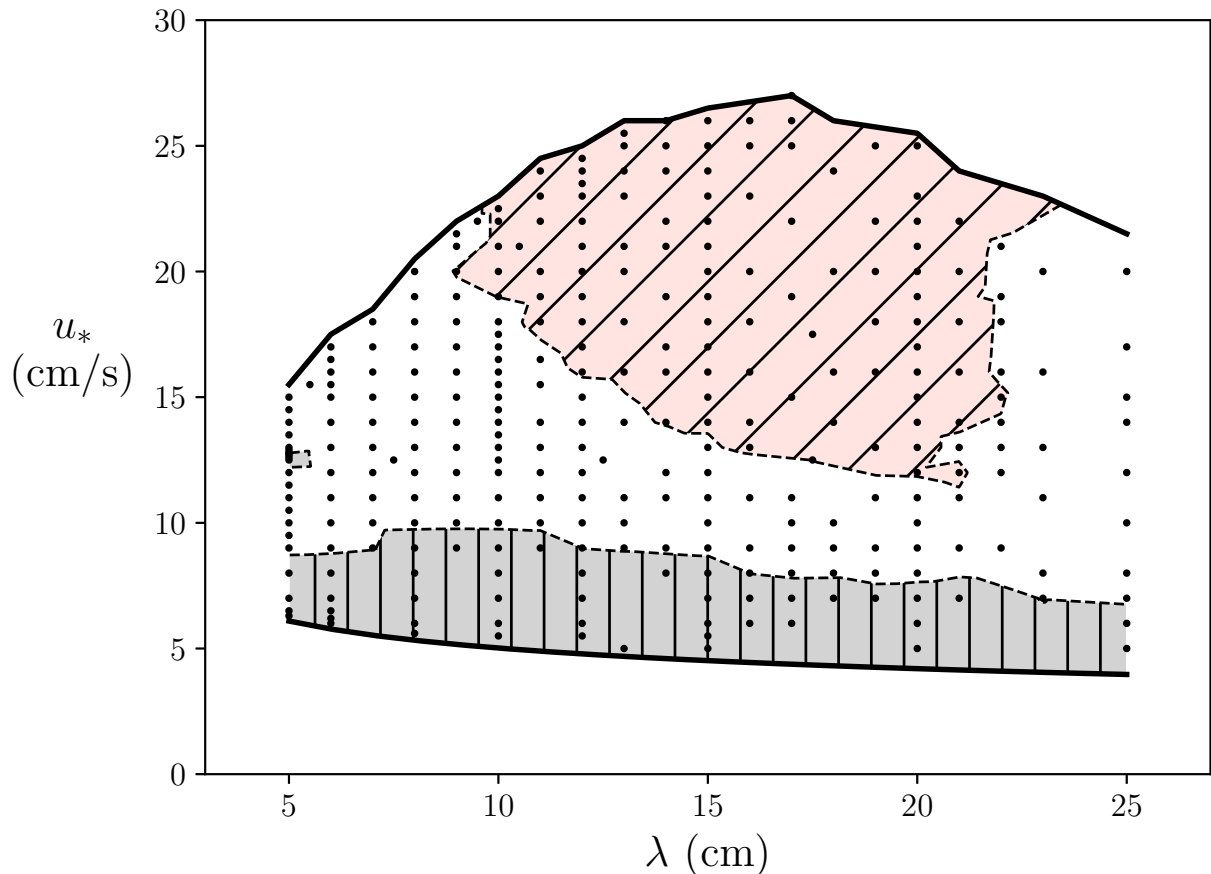


Рисунок 2.9 — Пространство параметров задачи. Нижняя граница изучаемой области определяется балансом между ветровой накачкой и вязким затуханием для линейных волн; верхняя граница – неустойчивостью пакетов капиллярной ряби. Штриховкой отмечены области, где стационарная конфигурация достигалась менее, чем за 10 (косая штриховка), или более, чем за 100 (прямая штриховка) линейных периодов.

постановках эксперимента, проводится на рис. 2.12. Для 5 см волн профили совпадают вплоть до точки  $u_* \approx 12.7$  см/с, где кривая, соответствующая постоянной ветровой накачке, резко отклоняется от гладкой зависимости, соответствующей постепенному увеличению скорости ветра. Эти результаты свидетельствуют о том, что равновесная конфигурация для данной точки  $(\lambda, u_*)$  не всегда является единственной. Это существенно новое явление, которое требует отдельного изучения. Здесь мы лишь отметим, что область неединственности ограничена короткими волнами  $\lambda < 6$  см. Как показывает рис. 2.12, бифуркация не наблюдается для 6 см и более длинных волн, и таким образом для большей части обсуждаемого диапазона длин волн конечная конфигурация единственным образом определяется точкой в пространстве параметров  $(\lambda, u_*)$ . Следует

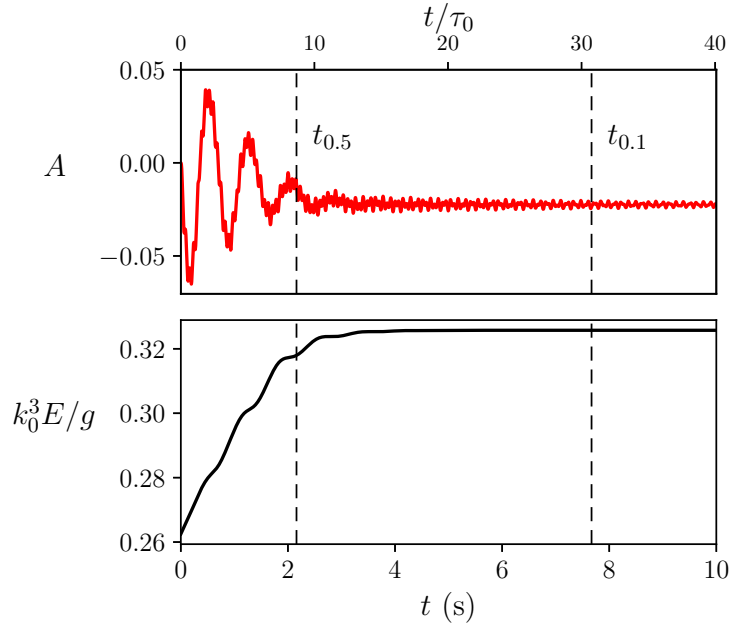


Рисунок 2.10 — Изменение во времени асимметрии  $A$  и энергии волны для случая  $\lambda = 10$  см,  $u_* = 15.0$  см/с. Вертикальными линиями отмечены моменты времени  $t_{0.5}$  и  $t_{0.1}$ , когда осцилляции асимметрии снижаются до 0.5 или 0.1 от итогового стационарного значения.

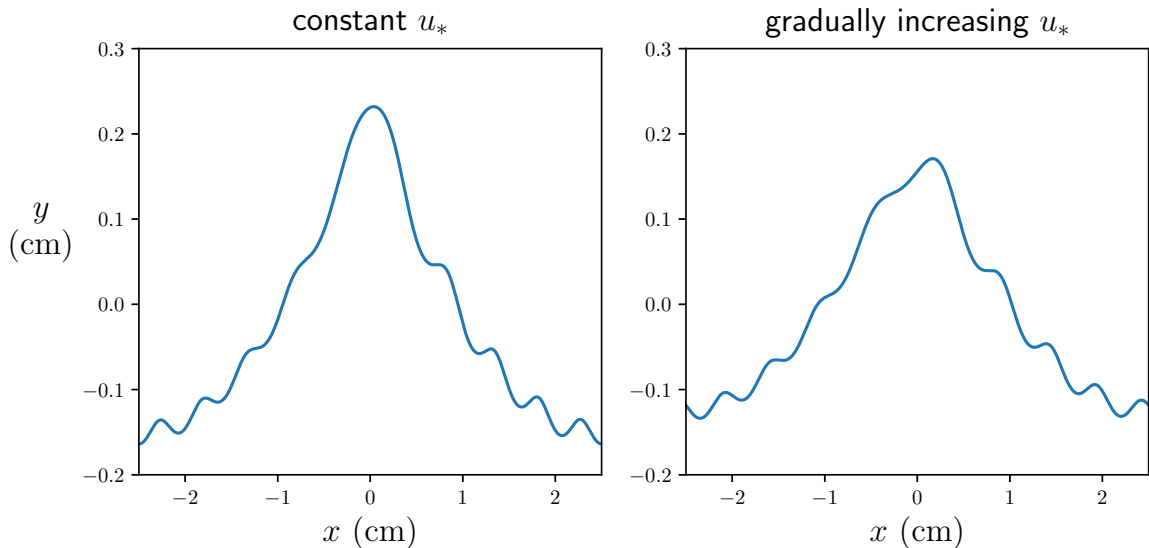


Рисунок 2.11 — Неединственность стационарной конфигурации для коротких гравитационно-капиллярных волн. Слева — конфигурация, достигаемая при постоянном значении ветровой накачки, справа — при постепенном усилении накачки с небольшого начального уровня. Параметры:  $\lambda = 5$  см,  $u_* = 13.5$  см/с.

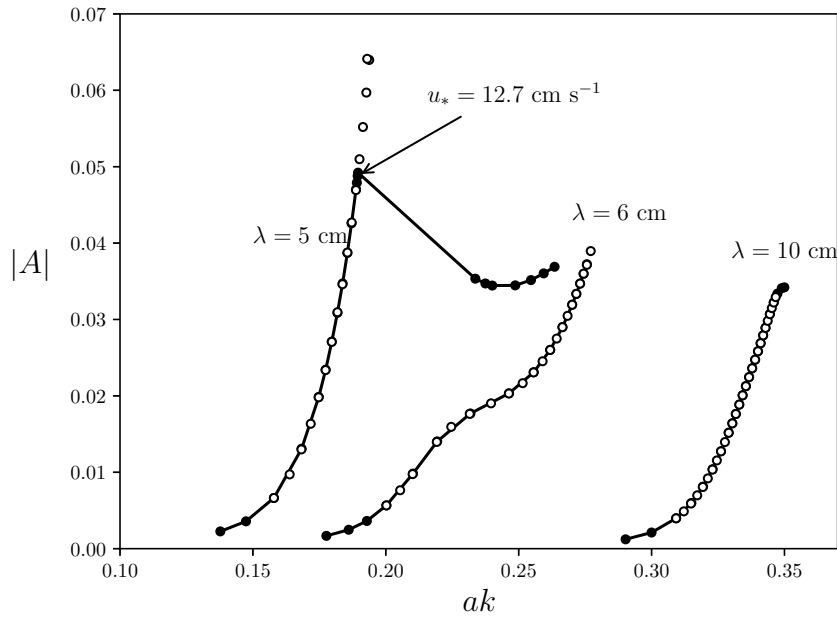


Рисунок 2.12 — Асимметрия профилей, полученных в расчетах с постоянной ветровой накачкой (линии с черными маркерами) и с постепенным усилением накачки (белые маркеры). Длины волн:  $\lambda = 5, 6, 10$  см.

подчеркнуть, что неединственность стационарной конфигурации для коротких волн  $\lambda < 6$  см была обнаружена в рамках строго периодической постановки задачи, и неизвестно, является ли этот эффект грубым. Более того, поскольку в ветровом волнении строго периодические структуры не наблюдаются, остается неясным при какой постановке лабораторного эксперимента и каким образом эта неединственность может себя проявить.

На рис. 2.13, 2.14 показано как асимметрия зависит от крутизны при различных значениях длины волны. Эти зависимости могут быть параметризованы как

$$|A(\lambda, ak)| = \begin{cases} 0, & \text{if } ak \leq a_0k \\ m^4(\lambda) \left( \frac{ak}{a_0(\lambda)k} - 1 \right)^4, & \text{if } ak > a_0k \end{cases}$$

Аппроксимирующие кривые, полученные методом наименьших квадратов (для 5 и 6 см волн использовались только нижние сегменты графиков), построены на рис. 2.13, 2.14 пунктирными линиями.

На рис. 2.15 показана зависимость асимметрии от скорости трения ветра  $u_*$  при различных длинах волн; за исключением случая очень коротких (5 см) волн, асимметрия волн разной длины растет почти одинаковым образом.

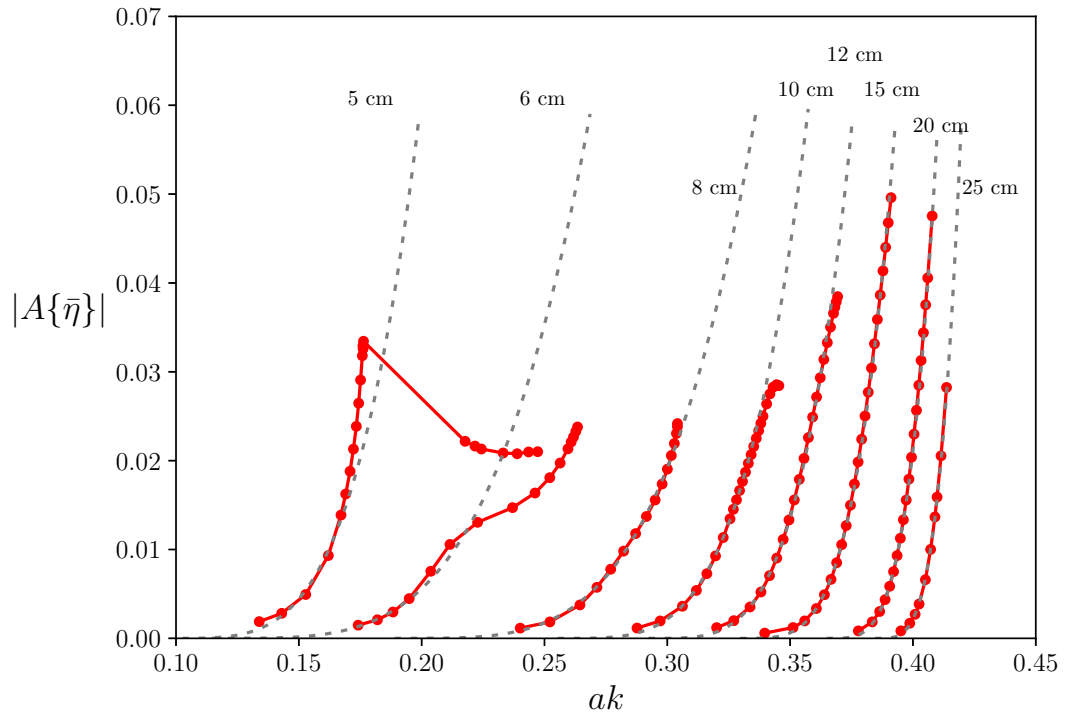


Рисунок 2.13 — Зависимость асимметрии профиля волны от крутизны (сплотные линии с маркерами) при различных значениях длины волны, и соответствующие аппроксимирующие кривые (пунктирные линии).

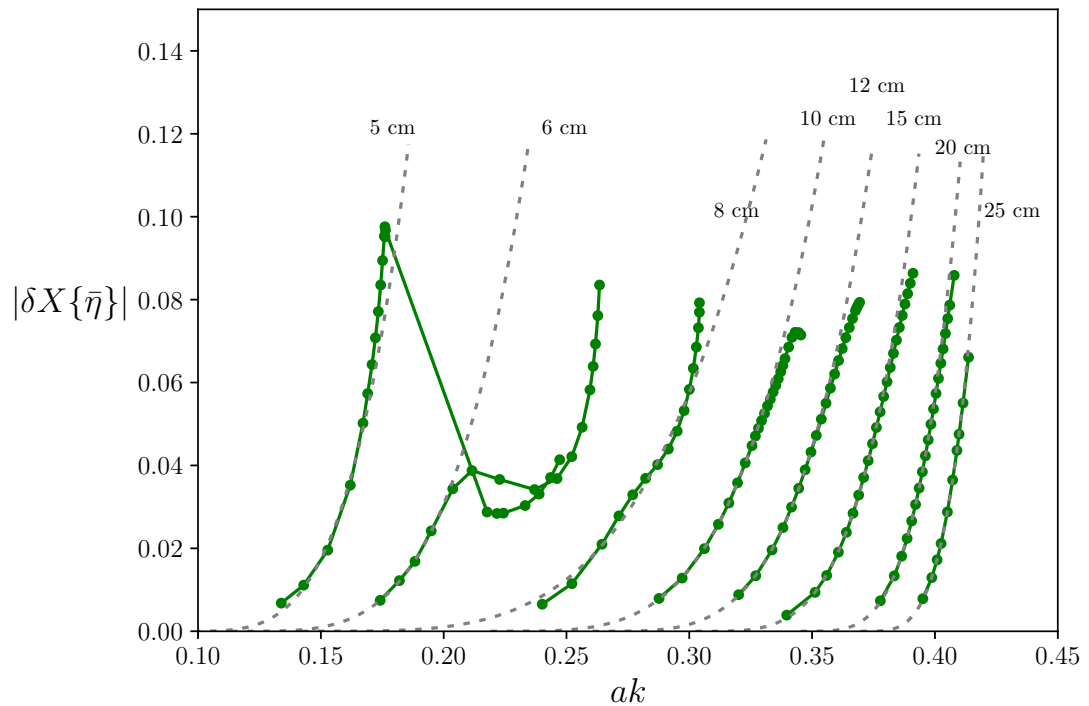


Рисунок 2.14 — Зависимость альтернативной меры асимметрии профиля волны  $\delta X$  от крутизны. Обозначения как на рис. 2.13.

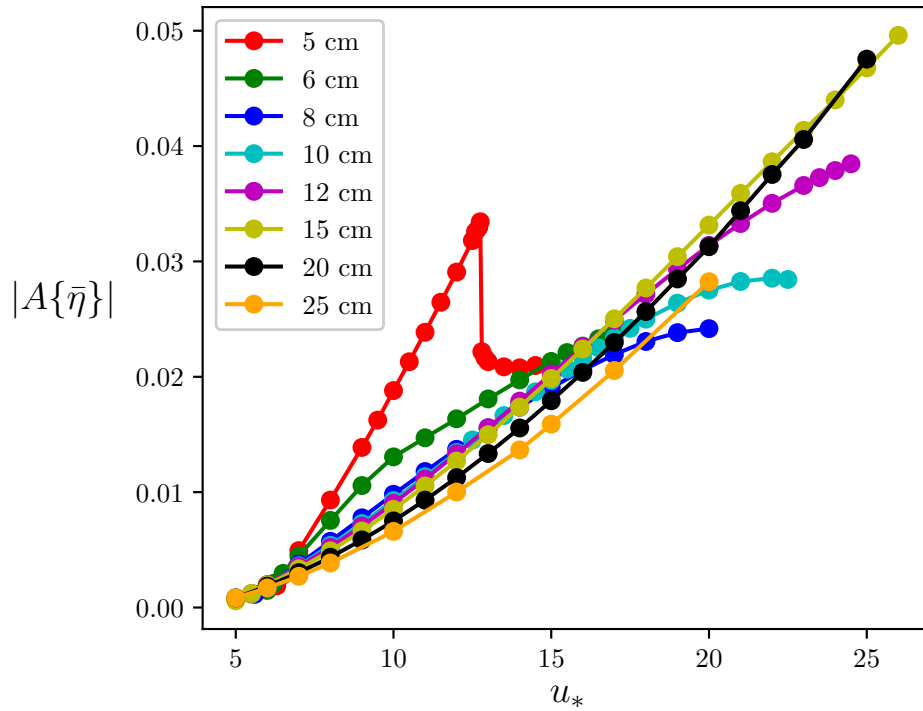


Рисунок 2.15 — Зависимость асимметрии волн от скорости трения ветра  $u_*$  для различных значений длины волны.

Наконец, мы можем сравнить наблюдаемые в расчетах амплитуды асимметричных вторых гармоник

$$\eta_2 = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \bar{\eta}(x) \sin 2kx \, dx, \quad (2.31)$$

где  $x = 0$  соответствует нулю фазы основной гармоники, с нашими оценками (2.29) и (2.30). Как показывает рис. 2.16, для 10 см волн суммарный вклад различных факторов с хорошей точностью предсказывает величину второй гармоники, и несколько переоценивает ее для более коротких волн. Отклонение в меньшую сторону нашей оценки по сравнению с действительными значениями для более длинных 15 и 20 см волн может объясняться тем, что упрощенная оценка (2.29) не учитывает неоднородность поля скоростей основной волны. Паразитная рябь, генерируемая длинными волнами, сильно локализована на их гребнях, где локальная скорость среднего течения (в связанной с волной системе отсчета) несколько меньше фазовой скорости волны  $c$ ; уменьшение скорости течения в оценке (2.29) приводит к увеличению ожидаемой величины  $\eta_2$ .

Описанные в данном разделе результаты позволяют предположить, что конфигурации, близкие к стационарным, должны чаще встречаться у волн с длиной

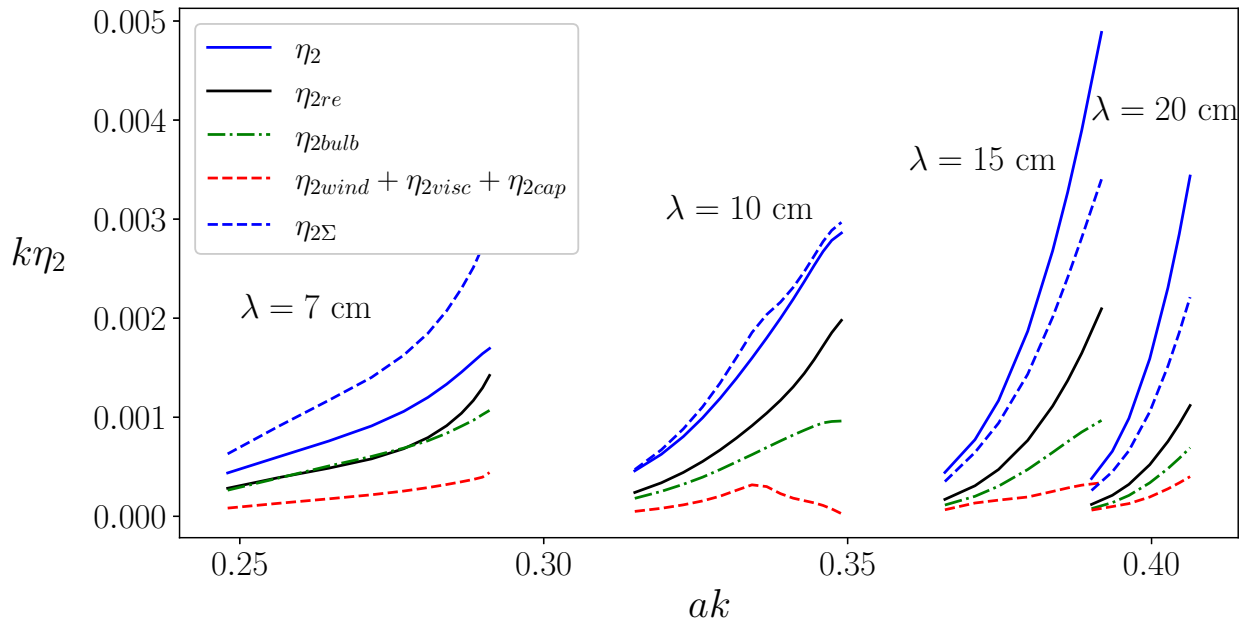


Рисунок 2.16 — Амплитуда второй гармоники  $\eta_2$  стационарных профилей как функция крутизны  $ak$  при разных значениях длины волны  $\lambda$ : наблюдаемые значения (синяя сплошная линия), оценки (2.29) для напряжений Рейнольдса (черная сплошная линия) и для суммы прочих компонент внешнего давления (красный пунктир), оценка (2.30) для вклада капиллярной «бульбы» (зеленый штрихпунктир), оценка суммарного вклада различных механизмов (синий пунктир).

10-20 см, поскольку в этом диапазоне время их формирования относительно мало. И наоборот, формирование стационарных структур у коротких волн должно встречаться реже, поскольку требует десятков периодов.

## 2.6 Обсуждение результатов

В данном разделе мы обсудим ключевые предположения, лежащие в основе настоящего исследования, а также проанализируем его результаты в контексте имеющихся экспериментальных данных и сформулируем выводы, которые следуют из сравнения численного моделирования с лабораторными экспериментами.

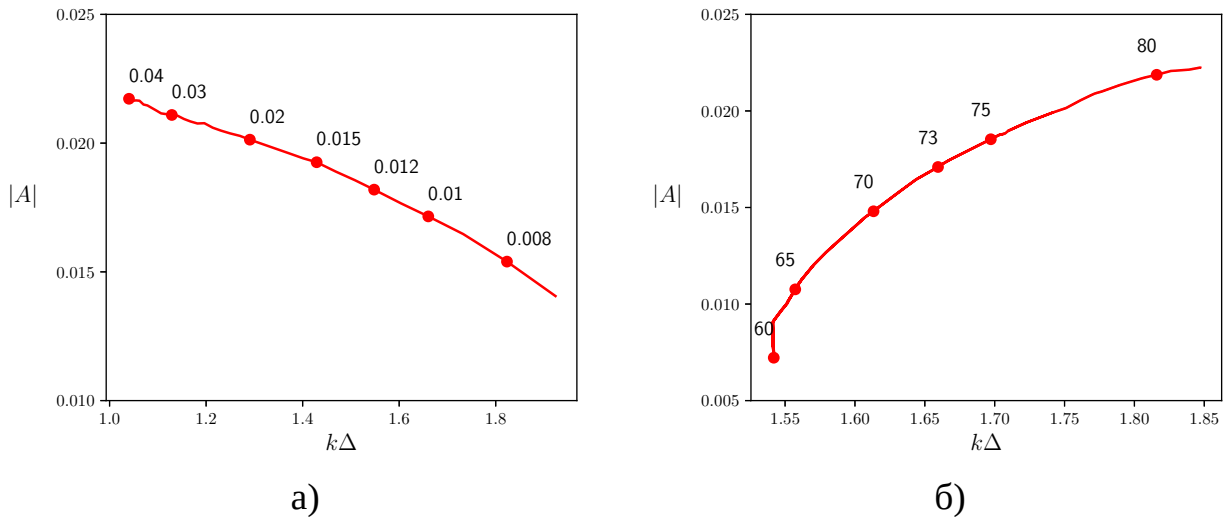


Рисунок 2.17 — Асимметрия профиля волны и ширина пакета капиллярной ряби как функции коэффициента вязкости (слева) и коэффициента поверхностного натяжения (справа). Длина волны  $\lambda = 10$  см, величина ветровой накачки подстраивалась для сохранения постоянной крутизны волны  $ak = 0.33$ . Для каждого маркера указано значение коэффициента вязкости в  $\text{см}^2\text{с}^{-1}$  (слева) либо поверхностного натяжения в  $\text{см}^3\text{с}^{-2}$  (справа).

### 2.6.1 Зависимость асимметрии от коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения

Помимо зависимости от скорости ветра, которая обсуждалась в предыдущем разделе и проиллюстрирована рис. 2.15, характеристики гравитационно-капиллярных волн с паразитной рябью также определяются вязкостью воды  $\nu$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $T$ . В предыдущих разделах эти параметры считались постоянными ( $\nu = 0.01 \text{ см}^2\text{с}^{-1}$  и  $T = 73 \text{ см}^3\text{с}^{-2}$ ), однако в природе они могут изменяться в широких диапазонах. Чтобы получить представление о чувствительности результатов к изменению этих параметров мы провели две серии расчетов, в которых изменялось значение  $\nu$  либо  $T$ , при фиксированной длине волны ( $\lambda = 10$  см). Для каждого значения  $\nu$  или  $T$  скорость трения ветра  $u_*$  в соответствующем эксперименте выбиралась таким образом, чтобы получаемая в результате крутизна стационарной конфигурации оставалась одной и той же ( $ak = 0.33$ ). Для интерпретации полученных результатов полезно обратить внимание на длину пакета ряби  $\Delta$ , которую мы определяем как ширину распределения эффективного давления  $\delta p$  на уровне

половины от его максимального значения. На рис. 2.17а показана зависимость асимметрии волны от вязкости  $\nu$  (при  $T = 73 \text{ см}^3\text{с}^{-2}$ ), на рис. 2.17б – от коэффициента поверхностного натяжения  $T$  (при  $\nu = 0.01 \text{ см}^2\text{с}^{-1}$ ). Поскольку вязкое затухание сильнее действует на короткие волны, изменение  $\nu$  проявляется в изменении амплитуды и локализации пакета паразитной ряби на склоне основной волны. С увеличением вязкости ширина пакета  $\Delta$  уменьшается, т.е. распределение эффективного давления становится более локализованным. В то же время уменьшается и амплитуда ряби, что приводит к уменьшению эффективного давления; в итоге неясно, должно ли увеличение вязкости привести к увеличению или к уменьшению асимметрии. Как можно видеть, вопреки ожиданиям, асимметрия с увеличением вязкости растет, т.е. степень локализации пакета ряби оказывается более важным фактором.

Несколько другая картина наблюдается при изменении коэффициента поверхностного натяжения. С увеличением  $T$  происходит увеличение капиллярного масштаба  $\sqrt{T/g}$  и, соответственно, увеличение характерной длины капиллярной ряби. С точки зрения фазового синхронизма между основной волной и рябью, динамика волны с большим  $T$  подобна динамике волны меньшей длины; как свидетельствуют данные, полученные в предыдущем разделе, при одинаковой крутизне более короткие волны обладают большей асимметрией.

### 2.6.2 Взаимодействие с длинными волнами и трехмерные эффекты

Постановка наших численных экспериментов содержит в себе три важных допущения: 1) движение является строго двумерным, 2) система строго периодична в пространстве, в спектре нет более длинных волн, 3) отсутствуют обрушения и микрообрушения. В морских условиях гравитационно-капиллярные волны всегда трехмерны и, как правило, относятся к высокочастотному хвосту характерного спектра волнения. В настоящий момент точное численное моделирование трехмерного многомасштабного волнения с разрешением капиллярных масштабов и точным учетом нелинейности технически недостижимо. Мы, однако, можем попытаться грубо оценить степень влияния этих факторов.

Используемое нами предположение о строгой периодичности движения в пространстве является серьезным ограничением. Оно полностью исключает

из рассмотрения групповые эффекты, которые, как известно, сильно влияют на мгновенную асимметрию волны: гребни наклоняются вперед и назад по мере прохождения через огибающую группы [101]. Каков вклад этих существенных колебаний на средние значения асимметрии по ансамблю — неизвестно, данный вопрос ранее не изучался. Также гравитационно-капиллярные волны в океане почти всегда модулируются более длинными гравитационными волнами. Чтобы составить представление о влиянии длинных волн на асимметрию, мы провели моделирование цуга дециметровых волн Стокса на поверхности длиной (10 м) волны с реалистичной крутизной ( $ak = 0.09$ ). Начальные распределения амплитуды и волнового числа гравитационно-капиллярных волн таковы, что поток волнового действия и локальная частота постоянны на протяжении всего профиля длинной волны. Таким образом, амплитуда и волновое число в каждой точке пространства совпадают с теми, которые имел бы цуг, пришедший туда из некоторой фиксированной точки, деформируясь полем скорости длинной волны, но не подвергаясь действию ветра или вязкому затуханию. Такой выбор начальных условий позволяет отсрочить момент фокусировки гравитационно-капиллярных волн и их последующее обрушение.

Нас будут интересовать локальные значения асимметрии в узком окне, ширина которого много меньше длины гравитационной волны. Применяя определение (2.19) непосредственно к профилю гравитационно-капиллярных волн на длинной волне, мы получили бы очень малые значения повсюду, кроме окрестностей точек, где возвышение длинной волны обращается в ноль, поскольку знаменатель содержит среднеквадратичное значение полного возвышения  $\eta$ . Более информативной характеристикой в данном случае является асимметрия коротких волн, получаемая при вычитании профиля длинной волны перед вычислением (2.19). Изменение поля асимметрии на протяжении 10 секунд моделирования показано в видео: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.696>; характерное распределение асимметрии, наблюдавшееся в расчете, приведено также на рис. 2.18.

Более продолжительное моделирование нами не проводилось. Как показывает это весьма ограниченное исследование, влияние длинных волн на асимметрию имеет принципиальное значение и должно приниматься во внимание. Присутствие длинных волн приводит к сложной динамике с большими изменениями асимметрии; ключевая особенность периодической задачи, позволившая значительно упростить наш анализ — образование стационарных

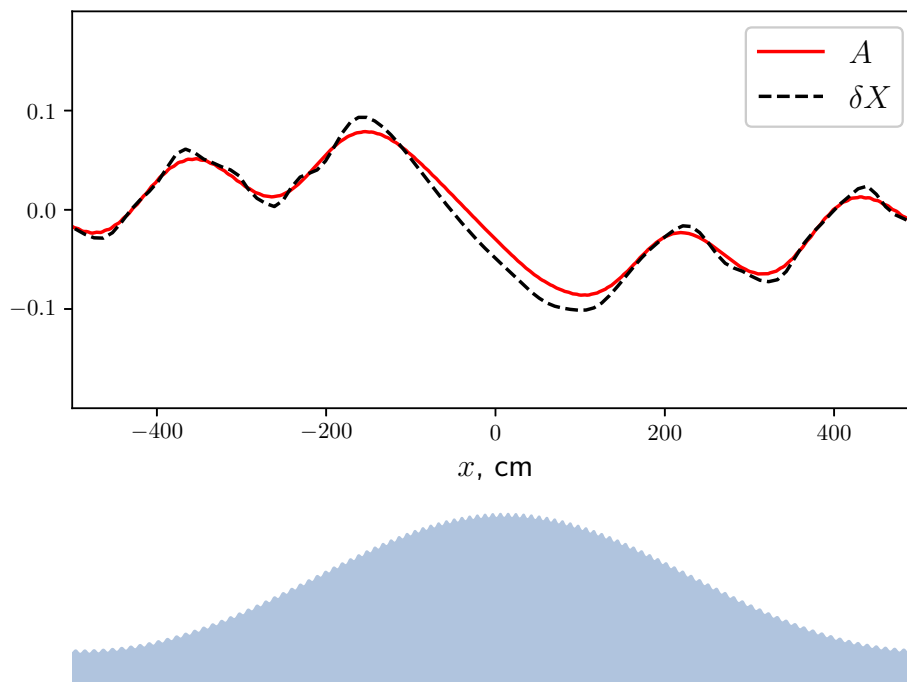


Рисунок 2.18 — Распределение асимметрии дециметровых волн на длинной волне.

конфигураций гравитационно-капиллярных волн — в данном случае уже не имеет места. Возможное (но непроверенное) объяснение наблюдаемой картины заключается в том, что длинные волны, проходя через цуг гравитационно-капиллярных волн, разрушают баланс между их первой и второй гармониками, в результате чего гребни начинают колебаться назад и вперед. Это напоминает поведение волн в группе, когда гребни осциллируют по мере прохождения через огибающую пакета [101]. Данный вопрос определенно требует отдельного изучения.

Не учитываемые нами трехмерные эффекты также могут иметь существенное влияние, поскольку трехмерные волны могут достигать большей крутизны, не обрушаясь, и, следовательно, могут иметь большую асимметрию. На настоящий момент вклад трехмерных эффектов неизвестен. Известно, однако, что в отсутствие длинных волн ветровые гравитационно-капиллярные волны дециметрового диапазона образуют характерные ромбические структуры, состоящие из двух косых волн, распространяющихся под углами  $\pm\theta$  к направлению ветра, с характерными значениями  $\theta$  порядка  $\approx 30^\circ$  [121]. Условие синхронизма при генерации ряби косыми волнами выбирает более короткие длины волн. Было бы интересно распространить наш анализ на трехмерный случай, но мы ожидаем, что отличия будут иметь количественный, а не качественный характер.

Неучтенные эффекты обрушений и микрообрушений имеют, предположительно, определяющее значение для асимметрии в области параметров за пределами применимости нашей модели. Ниже мы кратко обсудим доступные лабораторные данные и те выводы, которые мы можем из них сделать.

### 2.6.3 Сравнение с лабораторными экспериментами

Для сравнения наших результатов с лабораторным моделированием мы используем данные, представленные в работах Колье [6], Лейкина и др. [5], Завадского и Шемера [7]. Доступные экспериментальные данные вместе с результатами наших численных расчетов приведены на рис. 2.19, где показана зависимость асимметрии  $A$  от длины основной волны при различных умеренных скоростях ветра. Стоит еще раз подчеркнуть, что большая часть экспериментальных измерений была проведена при ветрах, намного более сильных, чем в нашем моделировании. В работах [5] и [7] приводятся значения асимметрии, измеренные в соответствии с определением (2.19) (определение в [7] отличается знаком). Измерения [5] проводились на разгонах от 8 до 20.9 м, в [7] – от 1.2 до 3.4 м.

При самых низких значениях ветровой накачки  $u_* = 27$  см/с, исследованных в экспериментах Лейкина и др. [5] (см. Таблицу 1 в их статье), абсолютные значения асимметрии для 22.4 см волн более чем в два раза превышают характерные значения для 20-25 см волн в нашем моделировании, тогда как наблюдаемая средняя крутизна  $ak \approx 0.17$  существенно ниже, чем порог генерации ряби для той же длины волны в наших данных ( $a_0k \sim 0.35$ ). Здесь следует отметить что, во-первых, в нашей модели не учитывается влияние дрейфовых течений, которые существенно влияют на дисперсионное соотношение на рассматриваемых масштабах; непосредственное сравнение нашего моделирования и измерений [5] затруднительно без измерений скорости дрейфа. Во-вторых, то, что средняя крутизна оказывается ниже порога генерации ряби, не означает, что все гребни волн являются докритическими; это скорее указывает, что генерация паразитной ряби имеет перемежающийся характер и капиллярные волны встречаются только на некоторых из гребней.

Завадский и Шемер [7] не приводят частоты или длины волн спектральных пиков для своих экспериментов. Длины волн, отображаемые на рис. 2.19, соот-

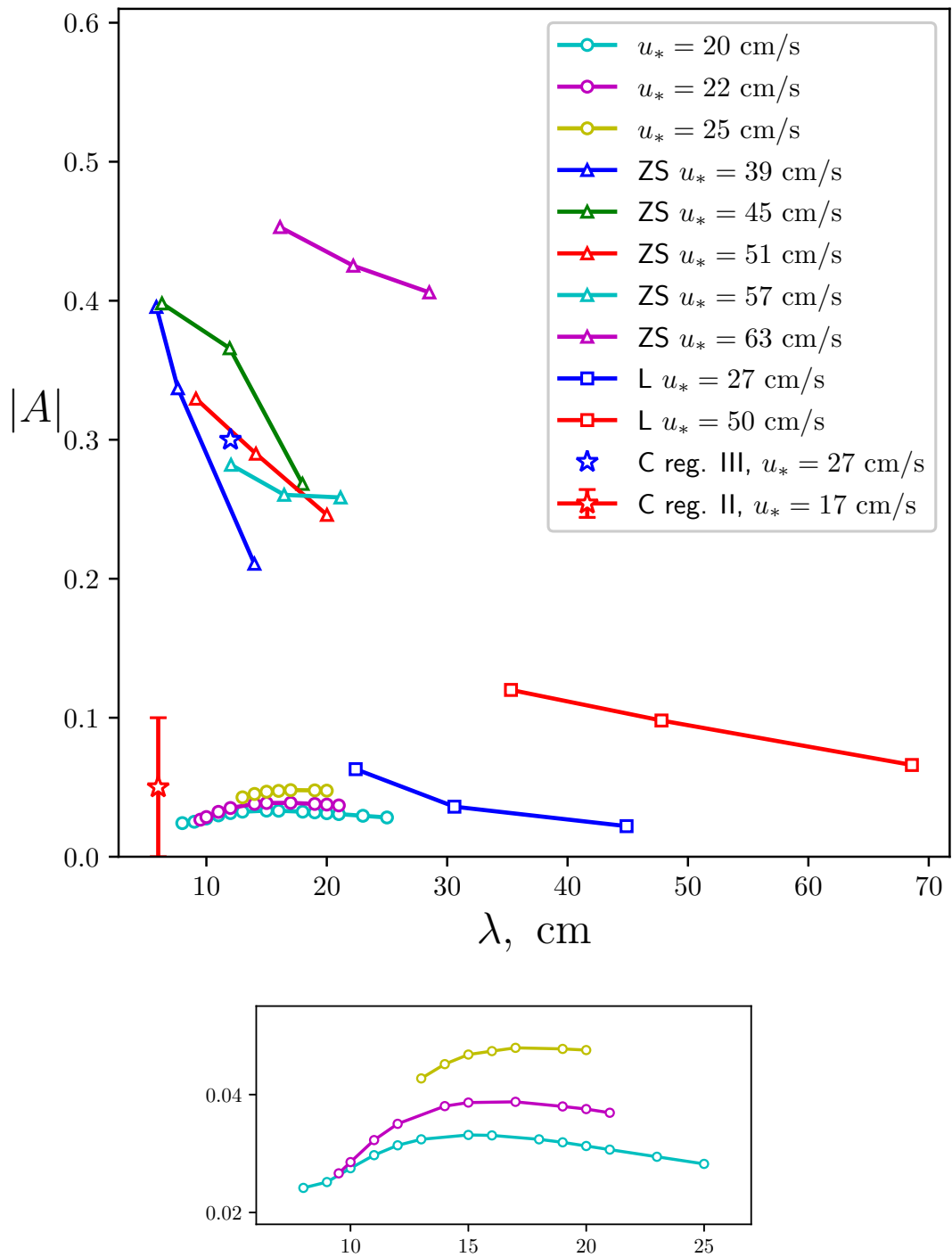


Рисунок 2.19 — Сравнение результатов численного моделирования (линии с круглыми маркерами) с экспериментальными наблюдениями из работ [5] (линии с квадратными маркерами, выбраны только точки с  $u_* < 80$  см/с), [6] (звездочки) и [7] (линии с треугольными маркерами).

ветствуют пиковым частотам спектра возвышения на их рис. 1 с доплеровской поправкой согласно их формуле (2). Приводимые значения асимметрии  $|A| \sim 0.3$  почти на порядок величины превышают значения, получаемые в нашем моделировании ( $|A| \sim 0.05$ ), при этом крутизны волн относительно малы ( $ak \sim 0.2$ ).

При том, что может быть некорректным прямое сравнение между параметром  $u_*$  в нашей параметризации ветровой накачки (2.8) и истинной скоростью трения ветра, следует обратить внимание на существенное расхождение в диапазонах  $u_*$  между лабораторными экспериментами и моделированием: в экспериментах  $u_*$  значительно выше ( $u_* > 35$  см/с в [7] и  $u_* > 27$  см/с в [5]), чем порог, до которого возможно образование стационарных конфигураций в нашем моделировании.

В статье Колье [6] записи возвышения поверхности гравитационно-капиллярных волн анализируются с точки зрения доминирующего механизма диссипации. Из выделяемых режимов волнения два представляют особый интерес в контексте настоящей работы: «режим II», который определяется как режим без обрушений и микрообрушений, и «режим III», в котором происходят микрообрушения, но нет обрушений. В статье не рассчитываются значения асимметрии, но приводится несколько реализаций профилей волн, что позволяет нам оценить асимметрию  $A$  в каждом режиме как среднее значение по этим реализациям. Полученные значения показаны на графике звездочками: красный маркер соответствует режиму II, голубой – режиму III. Сравнение результатов нашего моделирования со значениями асимметрии профилей волн в режимах II и III из [6] (рис. 4 и 5 в этой статье) приводит к ключевому выводу относительно природы расхождений между нашей моделью и лабораторными экспериментами. В режиме II без обрушений и микрообрушений, наблюдаемом на разгоне 6 м при скорости ветра 5 м/с, основная волна имеет длину  $\lambda \sim 6$  см и затухает преимущественно за счет генерации паразитной ряби. Для пяти профилей, приведенных в статье, максимальное абсолютное значение асимметрии составило  $\max |A[\bar{\eta}]| \approx 0.1$  (при параметре осреднения  $\sigma = 1$  см) и среднее арифметическое пяти значений равно  $-0.05$ . Именно это среднее арифметическое мы принимаем за значение асимметрии для данного режима и отмечаем на рис. 2.19 маркером. На графике также показан разброс значений  $A$  в индивидуальных реализациях для режима II. Отметим, что во всех экспериментах поле волнения является случайным, а форма волн —

нестационарной. В нашем моделировании асимметрия необрушающихся 6 см волн в стационарной конфигурации составляет до  $A \approx -0.02$ , хотя абсолютные значения  $|A|$  могут достигать до 0.1 в процессе установления (конкретные значения зависят от начальной амплитуды волны Стокса). Учитывая большой разброс экспериментальных данных мы можем заключить, что в этом режиме предсказания нашей модели удовлетворительно согласуются с экспериментом.

В режиме III, согласно классификации работы [6], наблюдаемом на разгоне 6 м при скорости ветра 7 м/с, характерная длина основной волны составляет  $\lambda \sim 12$  см и затухание происходит за счет микрообрушений и генерации ряби, причем роль первых преобладает. Максимальное абсолютное значение асимметрии в приведенных реализациях не превышает  $\max |A[\bar{\eta}]| \approx 0.6$ , среднее арифметическое значение равно  $-0.3$ . В нашем моделировании стационарные профили необрушающихся 12 см волн имеют асимметрию до  $A \approx -0.04$ , абсолютные значения в процессе установления лишь немногим больше и составляют до 0.05. Обращает на себя внимание то, что в экспериментах профили имеют намного большую асимметрию при крутизне  $ak \approx 0.3$ , близкой к порогу генерации ряби  $a_0k$  в нашем моделировании. Мы подчеркиваем, что наша модель не предполагает описание данного режима.

Таким образом, наблюдается качественное, и, как минимум, по порядку величины, согласие с данными для режима II из статьи Колье [6], т.е. для режима, в котором полностью отсутствуют обрушения и микрообрушения. При этом даже в режиме с умеренными микрообрушениями (режим III) наблюдаются существенные различия между моделированием и наблюдениями. В моделировании, как показано на рис. (2.15), асимметрия увеличивается почти линейно с ростом  $u_*$  (несмотря на некоторые признаки насыщения для коротких волн  $\lambda < 10$  см). Можно ожидать, что более высокие значения асимметрии могут достигаться при дальнейшем увеличении  $u_*$ , хотя соответствующий режим, характеризующийся неустойчивостью ряби, ее обрушениями и захватом пузырьков воздуха — т.е. наличием микрообрушений, на настоящий момент не может быть смоделирован.

В результате мы можем предположить, что главный фактор, которым обусловлены высокие значения асимметрии гравитационно-капиллярных волн, наблюдаемые в режиме III в работе [6], а также в работах [5] и [7], и который не учтен в нашей модели — это микрообрушения. Для более длинных волн также может быть важно наличие обрушений. Учет микрообрушений и обрушений в рамках нашей модели является весьма нетривиальной задачей. Также

для достижения количественного согласия с экспериментами необходим учет поверхностного сдвигового течения, которое по-разному влияет на рябь и на гравитационно-капиллярные волны, и неоднородность которого в лабораторном канале приводит к кинематическим искажениям спектрального пика.

В целом, для разработки модели асимметрии, которая была бы полезной для дистанционного зондирования и понимания механизмов ветро-волнового взаимодействия, требуется решить еще множество вопросов. В рамках данного обсуждения мы смогли определить ключевые механизмы (т.е. обрушения и микрообрушения), что в первую очередь требуется для надежного моделирования.

Обсуждаемые результаты касались главным образом волн на чистой поверхности воды без пленок поверхностно-активных веществ. Присутствие пленок биологического или минерального происхождения распространено в природе, оно может привести к качественному изменению картины, что требует отдельного исследования.

## 2.7 Заключение

Главным результатом настоящей главы является выявление физического механизма асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн. В рамках квази-потенциальной двумерной модели было показано, что в присутствии умеренного ветра произвольное начальное возмущение в гравитационно-капиллярном диапазоне развивается в характерную стационарную конфигурацию — наклоненную вперед волну с пакетом паразитной капиллярной ряби на переднем склоне. Поскольку в большинстве случаев произвольное начальное возмущение быстро приходит к стационарной конфигурации, мы сосредоточились на изучении волн постоянной формы, что безусловно является сильным упрощением. Мы использовали два различных определения асимметрии: 1) определение через амплитуду второй гармоники, широко применяемое при статистическом описании случайных волновых полей, и 2) определение через сдвиг гребня волны относительно соседних впадин, используемое при изучении профилей индивидуальных волн; моделирование показало, что обе эти величины зависят от характеристик волны сходным образом. Чтобы объяснить, почему волны наклонены вперед, мы проанализировали влияние, которое пакет капил-

лярной ряби оказывает на осредненный профиль волны. В первом приближении мы пренебрегли взаимодействием между пакетом ряби и основной волной, и оценили линейный отклик спокойной воды на движущееся распределение давления. Даже такая упрощенная модель позволяет добиться хорошего согласия с моделированием. Оценивая роль различных факторов, имеющих вклад в асимметрию, мы пришли к выводу, что важнейшим из них являются напряжения Рейнольдса, связанные с пакетом паразитной ряби.

Приведенные результаты были опубликованы в статье [139] и докладывались на Генеральной ассамблее Европейского союза наук о Земле [140] и международной конференции Computer Simulation in Physics and Beyond 2018 [141].

## Глава 3. Численное моделирование уединенных гравитационных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью

### 3.1 Введение

Волны в океане и во внутренних водоемах часто распространяются на фоне вертикально-неоднородных течений, возникающих под действием ветра или в результате трения о дно. Взаимодействие со сдвиговым течением существенно влияет на динамику волн [9], изменяя не только их дисперсионное соотношение, но и нелинейные свойства — например, скорость роста модуляционной неустойчивости [8] или условия, при которых происходит обрушение [122]. В частности, как демонстрируется в заметке Шриры [10] в рамках теории возмущений, на сдвиговых течениях существует особый тип уединенных волн, отсутствующий на глубокой воде без сдвига.

Особым частным случаем, когда описание волн на сдвиговом течении заметно упрощается, является чисто двумерное движение с постоянной завихренностью: как следует из теоремы Кельвина о циркуляции, все возмущения поля скорости при этом являются чисто потенциальными. Периодические и уединенные стационарные волны в такой постановке задачи исследовались численно во множестве работ [11; 12; 123] с использованием метода поверхностных интегралов; детальное исследование пространства параметров Ванден-Бруком продемонстрировало существование неизвестных ранее семейств решений [13; 14]. (См. также недавние исследования периодических волн С. Дьяченко и Хур [15; 16] с использованием техники конформных преобразований.)

В данной главе рассматриваются волны на глубокой воде с постоянной завихренностью, распространяющиеся в направлении сдвига (что в наших обозначениях соответствует отрицательному знаку завихренности, см. раздел 3.2). Такие волны в длинноволновом пределе обладают слабой дисперсией, и при малых амплитудах их эволюция описывается уравнением Бенджамина-Оно (БО) [10]; данное уравнение является интегрируемым и имеет устойчивые солитонные решения; солитоны взаимодействуют между собой упруго и при столкновении не получают фазовых сдвигов [124; 125]. Наша цель заключается в том, чтобы исследовать поведение уединенных волн конечной амплитуды и попытаться отве-

титель на вопрос в какой степени они сохраняют свойства своих слабонелинейных аналогов. В отличие от упомянутых выше работ, также исследующих волны конечной амплитуды, мы не ограничиваемся изучением стационарных решений. Мы используем эволюционные уравнения движения и моделируем формирование уединенных волн из локализованного возмущения (что также подтверждает устойчивость наблюдаемых волн), а также взаимодействие двух уединенных волн.

Численное моделирование проводится в рамках точных уравнений движения (уравнений Эйлера). Уравнения движения в конформных координатах для волн с постоянной завихренностью над дном произвольной формы были получены Рубаном [126], и независимо Чхве для случая плоского дна [127]. Мы используем несколько отличающуюся формулировку, применяя для зависимых переменных замену Дьяченко [68] для повышения численной устойчивости системы; соответствующие уравнения были получены в работе [142].

Большое значение для моделирования уединенных волн имеет недавнее развитие метода конформных отображений, связанное с использованием вспомогательных конформных координат с адаптивным разрешением. Танакой [128] была предложена замена независимых переменных, позволяющая увеличить пространственное разрешение конформной сетки в окрестности выбранной точки (например, на гребне волны). Адаптивные конформные координаты использовались для изучения линейной устойчивости гравитационных волн [128; 129], включая волны с постоянной завихренностью [130], и для получения профилей почти предельной амплитуды в некоторых из упомянутых работ по стационарным волнам [15; 16]. Подробное исследование, проведенное Лушниковым и соавторами [131], показало, что преобразование Гильберта может вычисляться на адаптивной сетке с такой же эффективностью, как и на исходной равномерной сетке; таким образом, применение адаптивных координат очень естественным образом сочетается с хорошо известной конформной методологией. В данном исследовании мы используем адаптивные координаты для более эффективного вычисления профилей стационарных волн. Не представляет сложности переход к адаптивным координатам и в эволюционных уравнениях, однако для практического применения в нестационарном моделировании желательно найти обобщение этого подхода, которое позволило бы разрешать две и более заостренных особенности профиля, а также разработать надежную стратегию для динамической подстройки разрешения с течением времени.

## 3.2 Основные уравнения

### 3.2.1 Уравнения движения в декартовых координатах

Рассмотрим двумерное движение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Пусть ось  $x$  совпадает с поверхностью жидкости в покое, а ось  $y$  направлена вертикально вверх; для описания движения жидкости введем функцию тока  $\Psi$ , через которую компоненты поля скорости выражаются как

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Для волн, распространяющихся на фоне сдвигового течения с однородным распределением завихренности ( $\omega = -\Delta \Psi = \text{const}$ ) функция тока может быть разложена в сумму

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{\omega y^2}{2} + \psi(x, y, t),$$

где первое слагаемое, соответствующее завихренной составляющей поля скорости, не зависит от времени, а возмущение  $\psi$  удовлетворяет условию  $\Delta \psi = 0$ .

Гармонически сопряженное к функции  $\psi$ , которое мы обозначим  $\varphi$ , определяется условиями Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

и является потенциалом для возмущения поля скорости, задаваемого функцией тока  $\psi$ :

$$v_x = -\omega y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Из функций  $\varphi$  и  $\psi$  может быть составлен “комплексный потенциал”  $\theta = \varphi + i\psi$ , являющийся аналитической функцией комплексной переменной  $z = x + iy$  в области, занятой жидкостью.

На свободной поверхности  $y = f(x, t)$  должны удовлетворяться кинематическое и динамическое граничные условия:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( -\omega f + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi - \omega y \mathbf{x}_0|^2 + \omega \psi - \frac{\omega^2 y^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gy = 0, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{x}_0$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $x$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $p_a$  — давление на свободной поверхности. Внутри области течения  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.3)$$

Мы в данной работе рассматриваем только волны на глубокой воде, что соответствует граничному условию на бесконечности

$$|\nabla\varphi| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow -\infty. \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.1)–(3.4) эквивалентна точным уравнениям Эйлера и полностью определяет динамику системы.

Для волн малой амплитуды система (3.1)–(3.4) дает следующее дисперсионное соотношение:

$$c^2k - \omega c - g = 0, \quad (3.5)$$

где  $k$  — волновое число,  $c$  — фазовая скорость волн. Параметры  $g$  и  $\omega$  имеют лишь одну комбинацию с размерностью длины:

$$\lambda_g = g/\omega^2,$$

которая, таким образом, является естественным пространственным масштабом для рассматриваемой задачи. Согласно (3.5), длинные волны ( $k\lambda_g \ll 1$ ), распространяющиеся в направлении сдвига (т.е. в положительном направлении оси  $x$ , если  $\omega < 0$ ) обладают слабой дисперсией:

$$c \approx \frac{g}{|\omega|} - \frac{gk}{|\omega|^3} = c_0(1 - k\lambda_g), \quad (3.6)$$

где  $c_0 = g/|\omega|$  — предельная фазовая скорость для длинных волн малой амплитуды. Слабонелинейная динамика длинных волн в этом случае может быть описана уравнением Бенджамина-Оно [10]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) f - \omega f \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{g^2}{\omega^3} \hat{H} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (3.7)$$

где  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта:

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\chi) d\chi}{\chi - x}.$$

### 3.2.2 Уравнения движения в конформных координатах

Рассмотрим (зависящее от времени) конформное отображение нижней полуплоскости комплексной переменной  $\zeta = \xi + i\eta$  на область течения

$$x + iy = z(\zeta, t) = \xi + i\eta + \tilde{x}(\xi, \eta, t) + i\tilde{y}(\xi, \eta, t).$$

Свободная поверхность  $y = f(x, t)$  при этом является образом действительной оси  $\eta = 0$ .

Возникающая параметризация свободной поверхности особенно удобна тем, что в новых координатах  $(\xi, \eta)$  функции  $\varphi$  и  $\psi$  остаются гармоническими, и при этом их значения на свободной поверхности  $\eta = 0$  связаны между собой преобразованием Гильберта:

$$\psi(\xi, \dots) = \hat{H}\varphi(\xi, \dots).$$

В конформных координатах граничные условия (3.1) и (3.2) на свободной поверхности  $\eta = 0$  записываются как [127]

$$x_\xi y_t - x_t y_\xi = -\hat{H}\varphi_\xi + \omega y y_\xi, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t + \varphi_\xi \hat{H} \left[ \frac{-\psi_\xi + \omega y y_\xi}{J} \right] - \frac{\omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi + \\ + \frac{\varphi_\xi^2 - \psi_\xi^2}{2J} + \omega \psi + \frac{p_a}{\rho} + gy = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $J = |z_\xi|^2$ . Данные уравнения также можно переписать в терминах аналитических функций  $z$  и  $\theta$ :

$$z_t = iUz' \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \theta_t = iU\theta' - (1 + i\hat{H}) \left( \frac{|\theta'|^2}{2|z'|^2} - \omega y \operatorname{Re} \frac{\theta'}{z'} + \frac{p_a}{\rho} \right) + \\ + i\omega\theta + ig(z - \xi), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где штрих обозначает дифференцирование по комплексной переменной  $\zeta$ , и

$$U = (1 + i\hat{H}) \left[ \frac{-\psi_\xi + \omega y y_\xi}{J} \right].$$

Для целей численного моделирования уравнения (3.10) и (3.11) удобно переписать в форме, обладающей лучшей численной устойчивостью, используя

замену зависимых переменных

$$R = \frac{1}{z'}, \quad V = \frac{i\theta'}{z'}. \quad (3.12)$$

Это приводит к системе уравнений [132]:

$$R_t = i(UR' - U'R) \quad (3.13)$$

$$V_t = i \left( UV' - R\hat{P}'(|V|^2 - 2\omega \operatorname{Im} z \operatorname{Im} V + \frac{2p_a}{\rho}) \right) + g(R - 1) + i\omega V, \quad (3.14)$$

где  $\hat{P} = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})$ , и

$$U = \hat{P}(RV^* + R^*V - 2\omega \operatorname{Im} z \operatorname{Im} R).$$

При  $\omega = 0$  система (3.13) и (3.14) переходит в уравнения Дьяченко [68]. В дальнейшем внешнее давление  $p_a$  будем принимать равным нулю.

### 3.3 Стационарные волны конечной амплитуды

В данном разделе обсуждаются периодические стационарные решения точных уравнений движения и их отличия от слабонелинейной модели БО. Наш интерес к периодическим решениям в контексте исследования уединенных волн обусловлен тем, что солитоны уравнения БО являются алгебраическими с хвостами, спадающими как  $f \sim x^{-2}$ ; как следствие, они не могут быть с необходимой точностью представлены на периодической сетке, которую использует наша численная схема, основанная на быстром преобразовании Фурье. По этой причине мы вынуждены ограничить исследование периодическими решениями, приближаясь к уединенным волнам через увеличение пространственного периода.

Периодическое решение уравнения БО имеет вид [133]

$$f(x,t) = f_0 + \frac{akd}{4i} \left( \operatorname{ctg} \frac{k}{2}(x - ct - id) - \operatorname{ctg} \frac{k}{2}(x - ct + id) \right), \quad (3.15)$$

где  $k = 2\pi/L$  — волновое число, и параметры удовлетворяют

$$ad = 4\lambda_g^2, \quad (3.16)$$

$$c = c_0 + |\omega|f_0 + \frac{|\omega|a}{4}kd \operatorname{cth} kd.$$

Гребень волны становится все более локализованным по мере роста амплитуды волны  $a$ , и в пределе  $kd \rightarrow 0$  профиль становится Лоренцевым:

$$f(x,t) = \frac{a}{1 + (x - ct)^2/d^2}, \quad (3.17)$$

$$c = c_0 + \frac{|\omega|a}{4}. \quad (3.18)$$

Чтобы получить уравнение для точного профиля стационарной волны в конформных координатах будем искать решение системы (3.8)–(3.9) в виде

$$y = y(\xi - ct), \quad x = \xi + \tilde{x}(\xi - ct), \quad \varphi = \tilde{\varphi}(\xi - ct) - gb_0t.$$

Подстановка в (3.8) дает

$$(c + \omega y)y_\xi = \hat{H}\varphi_\xi. \quad (3.19)$$

Используя (3.19), мы исключаем потенциал  $\varphi$  из (3.9) и получаем уравнение для профиля волны  $z(\xi)$ :

$$gy - gb_0 = \frac{c^2}{2} - \frac{\left(c + \omega(yx_\xi + \hat{H}(yy_\xi))\right)^2}{2J}. \quad (3.20)$$

Уравнения движения (3.1)–(3.4) содержат лишь два параметра —  $g$  и  $\omega$ , и ровно два параметра мы можем исключить за счет выбора единиц измерения длины и времени. Безразмерная форма уравнений, получаемая переходом к безразмерным переменным

$$X = x/\lambda_g, \quad Y = y/\lambda_g, \quad \Xi = \xi/\lambda_g, \quad T = |\omega|t$$

не содержит никаких параметров среды, поэтому для движений системы при разных  $(g, \omega)$  существует закон подобия. Следовательно, профили стационарных волн, при  $\omega < 0$  удовлетворяющие безразмерному уравнению

$$Y + \frac{1}{2J} \left( C - YX_\Xi - \hat{H}(YY_\Xi) \right)^2 = \text{const},$$

являются универсальными и зависят лишь от безразмерной фазовой скорости  $C = c/c_0$  и периода  $\Lambda = L/\lambda_g$ . Уединенные волны, которые можно считать предельным случаем стационарных волн с бесконечной длиной, образуют однопараметрическое семейство решений и все их безразмерные параметры

(например, высота  $h/\lambda_g$  или фазовая скорость  $c/c_0$ ) могут быть найдены как функция одного выбранного параметра.

Будем искать решение (3.20) численно в виде разложения

$$z(\zeta) - \zeta = z_0 + \sum_n a_n \frac{k d_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{k}{2} (\zeta - i d_n). \quad (3.21)$$

где константа  $z_0 = i y_0$  выбирается таким образом, чтобы средний уровень воды оставался неизменным:

$$\int y x_\xi d\xi = 0.$$

Если все  $d_n > 0$ , то  $z(\zeta)$  имеет полюса лишь в верхней полуплоскости, и является аналитической в области течения  $\operatorname{Im} \zeta < 0$ . Для заданной фазовой скорости  $c$  мы ищем оптимальный набор параметров  $\{a_n, d_n\}$  путем минимизации невязки уравнения стационарной волны (3.20):

$$r(a_1, \dots, d_1, \dots) = gy + \frac{\left(c + \omega(yx_\xi + \hat{H}(yy_\xi))\right)^2}{2J} - \frac{c^2}{2},$$

$$\int |r|^2 du \rightarrow \min.$$

Мы используем быстрое преобразование Фурье для вычисления производных и преобразования Гильберта. Число точек сетки, необходимое для точного вычисления невязки, может быть заметно снижено путем использования адаптивных конформных координат [131] и повышения пространственного разрешения сетки в окрестности гребня волны. Адаптивная сетка является однородной по вспомогательной координате  $q$ :

$$\frac{\xi}{2} = \operatorname{arctg} \left( \alpha \operatorname{tg} \frac{q}{2} \right).$$

Преобразование Гильберта, вычисленное по координате  $q$ , отличается от такового по координате  $\xi$  лишь на постоянное слагаемое, которое может быть найдено из условия, что среднее значение преобразования по соответствующей координате равно нулю. После получения профиля волны (3.21) соответствующее ему поле скорости восстанавливается из уравнения (3.19). Данное стационарное решение, выраженное в форме зависимостей  $z(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , может быть также преобразовано к представлению Дьяченко (3.12), которое и будет использоваться в разделе 3.4 при конструировании начальных условий для нестационарного моделирования.

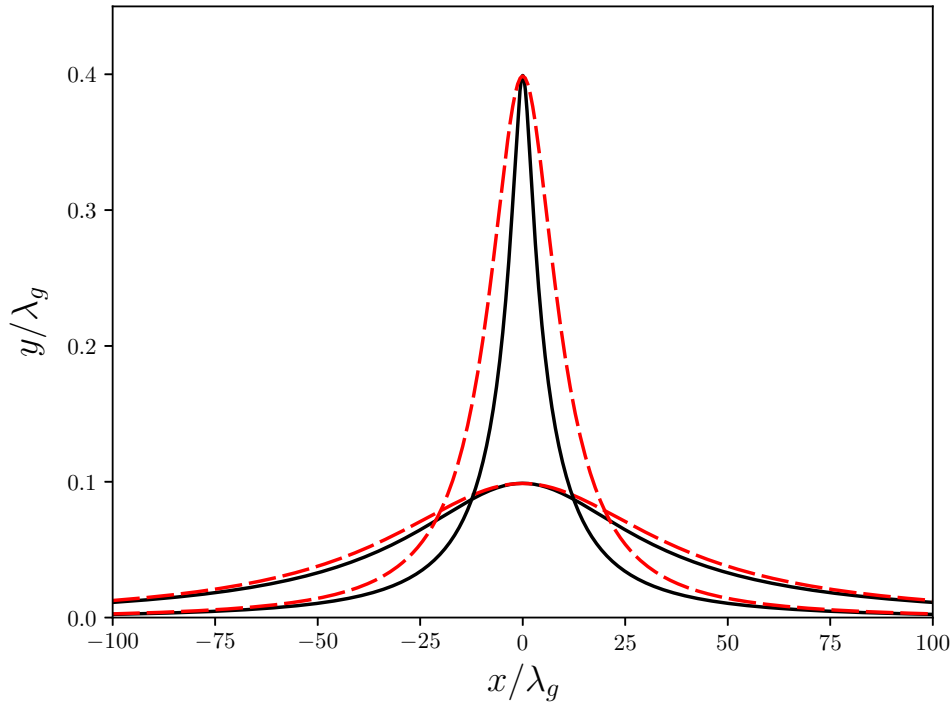


Рисунок 3.1 — Стационарные решения точных уравнений (сплошные линии) и решения уравнения БО той же высоты (пунктирные линии). Высота волн  $h = 0.1\lambda_g, 0.4\lambda_g$ , период  $L = 10^4\lambda_g$ .

Используя описанный несложный метод, задавая пространственный период  $L$  и изменяя фазовую скорость  $c$ , мы можем получить волны любой высоты вплоть до точки экстремума фазовой скорости, который для длинных волн  $L > 10^3\lambda_g$  находится примерно на уровне  $h \approx 0.55\lambda_g$ . Высота волны здесь определена как

$$h = \max_x f - \min_x f = \max_{\xi} y - \min_{\xi} y.$$

Как правило, нам было достаточно менее 10 слагаемых в разложении 3.21 для получения наилучшего приближения для профиля волны; дальнейшая минимизация невязки была затруднена из-за погрешности ее вычисления в рамках арифметики двойной точности IEEE 754. Рассматриваемый диапазон амплитуд содержит и максимум энергии волны (см. ниже), что означает, что лишь часть диапазона соответствует устойчивым решениям. В рамках настоящей работы, основной целью которой является исследование взаимодействия уединенных волн, интерес для нас представляют только устойчивые стационарные решения.

На рис. 3.1 показаны примеры профилей стационарных волн с высотами  $h = 0.1\lambda_g, 0.4\lambda_g$  и длиной  $L = 10^4\lambda_g$ , а также периодические решения

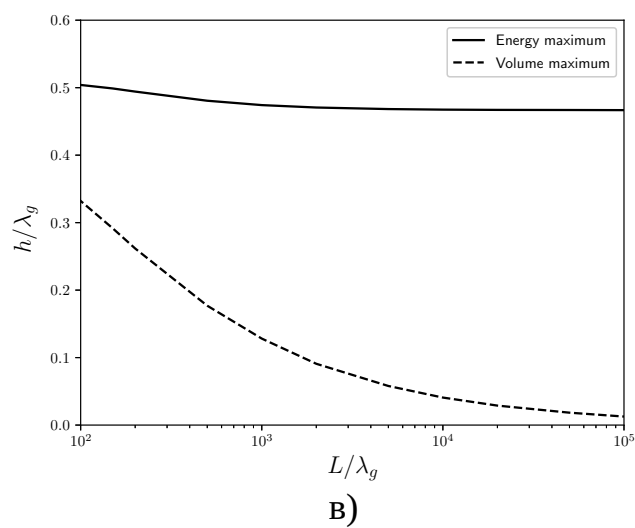
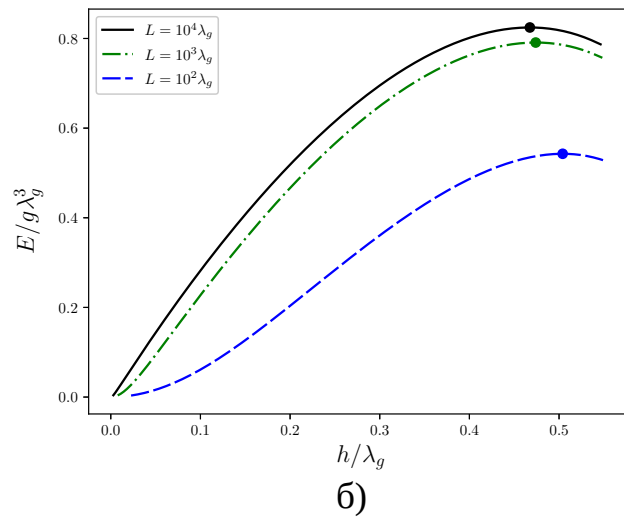
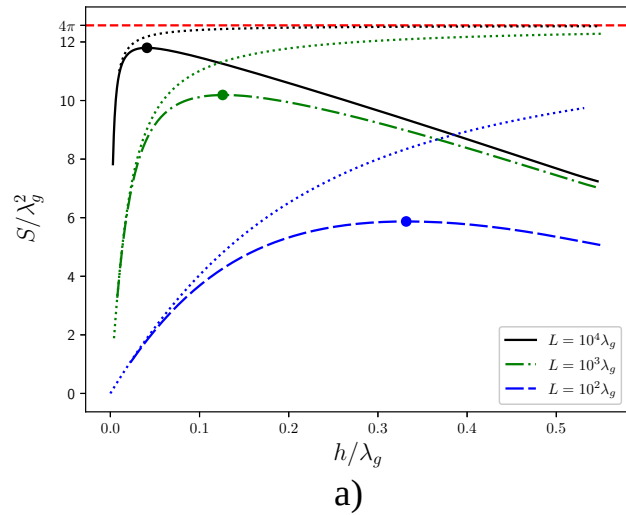


Рисунок 3.2 — Зависимость (а) объема профиля и (б) энергии от высоты волны; линиями из точек показан объем для решений уравнения БО, маркерами отмечены максимумы объема и энергии для точных решений.  
(в) Положение максимумов объема и энергии в зависимости от периода волны.

уравнения БО с теми же параметрами. Эти длинные волны уже обладают заметным сходством с солитонами, поскольку ширина их гребней, измеренная на половине высоты, составляет менее 0.01 величины пространственного периода. Также можно видеть, что хотя полученный для  $h = 0.1\lambda_g$  профиль очень близок к решению уравнения БО, гребни более высоких волн становятся заметно более узкими и острыми по сравнению со своими слабонелинейными аналогами, при том, что асимптотики решений на больших расстояниях от гребня остаются близкими.

Чтобы лучше проиллюстрировать данное наблюдение, введем характеристику “объема” профиля волны, которую определим как

$$S = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx - L \min_x f(x)$$

Согласно (3.16), объем солитонов БО (а также очень длинных периодических волн) не зависит от их высоты и равен  $S_{BO} = 4\pi\lambda_g^2$ . Объем профиля  $S$  как функция высоты волны  $h$  для различных значений периода  $L$  построен на рис. 3.2а; график показывает, что решения точных уравнений не только имеют иную форму гребней, но также и их объем ведет себя иначе, спадая при больших амплитудах.

Определим энергию волны  $E$  как избыток механической энергии, связанной с присутствием волны:

$$E = \frac{g}{2} \int y^2 x_\xi d\xi - \frac{1}{2} \int \varphi \hat{H} \varphi_\xi d\xi + \frac{\omega^2}{6} \int y^3 x_\xi d\xi + \omega \int \varphi y y_\xi d\xi. \quad (3.22)$$

Энергия как функция высоты волны построена на рис. 3.2б. Можно видеть, что существует (зависящее от периода  $L$ ) критическое значение высоты, при котором энергия имеет максимум; более высокие волны неустойчивы — это существенное отличие от солитонов уравнения БО, которые устойчивы для всех значений амплитуды. Данная (супергармоническая) неустойчивость волн на постоянном сдвиге исследуется в статье Мурасигэ и Чхве [130]. Положения максимумов энергии и объема как функции длины волны  $L$  приведены на рис. 3.2в; как следует из графика, с увеличением периода  $L$  критическая высота приближается к значению  $h \approx 0.467\lambda_g$ .

### 3.4 Численное моделирование

В данном разделе приводятся результаты моделирования динамики уединенных волн, включая их формирование из начального возмущения и взаимодействие двух волн. Моделирование системы (3.1)–(3.4) проводилось путем численного интегрирования уравнений движения в конформных координатах (3.13) и (3.14) с периодическими граничными условиями с использованием схемы Дорманда-Принса 5-го порядка из семейства методов Рунге-Кутты со встроенной оценкой ошибки интегрирования.

#### 3.4.1 Распад локализованного возмущения

Чтобы наблюдать образование уединенных волн из начального возмущения, мы задавали начальные условия в виде Лоренцева импульса

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2/d^2} W(x), \quad W(x) = \cos^2 \frac{\pi x}{L}, \quad (3.23)$$

где оконная функция  $W(x)$  используется для сглаживания скачка производных на краях глобального периода. Высота  $a$  и полуширина на полувысоте  $d$  импульса изменялись независимо, не будучи обязательно связанными соотношением (3.16). Распределение скорости в начальных условиях задавалось согласно (3.19), где  $c$  вычислялось по формуле (3.18) для солитона той же высоты  $a$ . Во всех численных экспериментах глобальный пространственный период  $L = 10^4 \lambda_g$  как минимум в  $10^2$  раз превышал начальную ширину импульса  $d$ .

В результате распада импульсов (3.23) с различными параметрами наблюдалось образование одной или нескольких уединенных волн, а также пакетов осцилляторных волн. Пример такого процесса изображен на рис. 3.3; в этом случае распад импульса с шириной, более чем в 3 раза превышающей ширину солитона БО такой же высоты, привел к формированию нескольких уединенных волн. Рис. 3.4 показывает, как характеристики сформировавшихся волн зависят от параметров начального возмущения. Интересной особенностью данных результатов является то, что распад возмущений с параметрами, удовлетворяющими (3.16), для широкого диапазона начальных амплитуд приводит к появлению

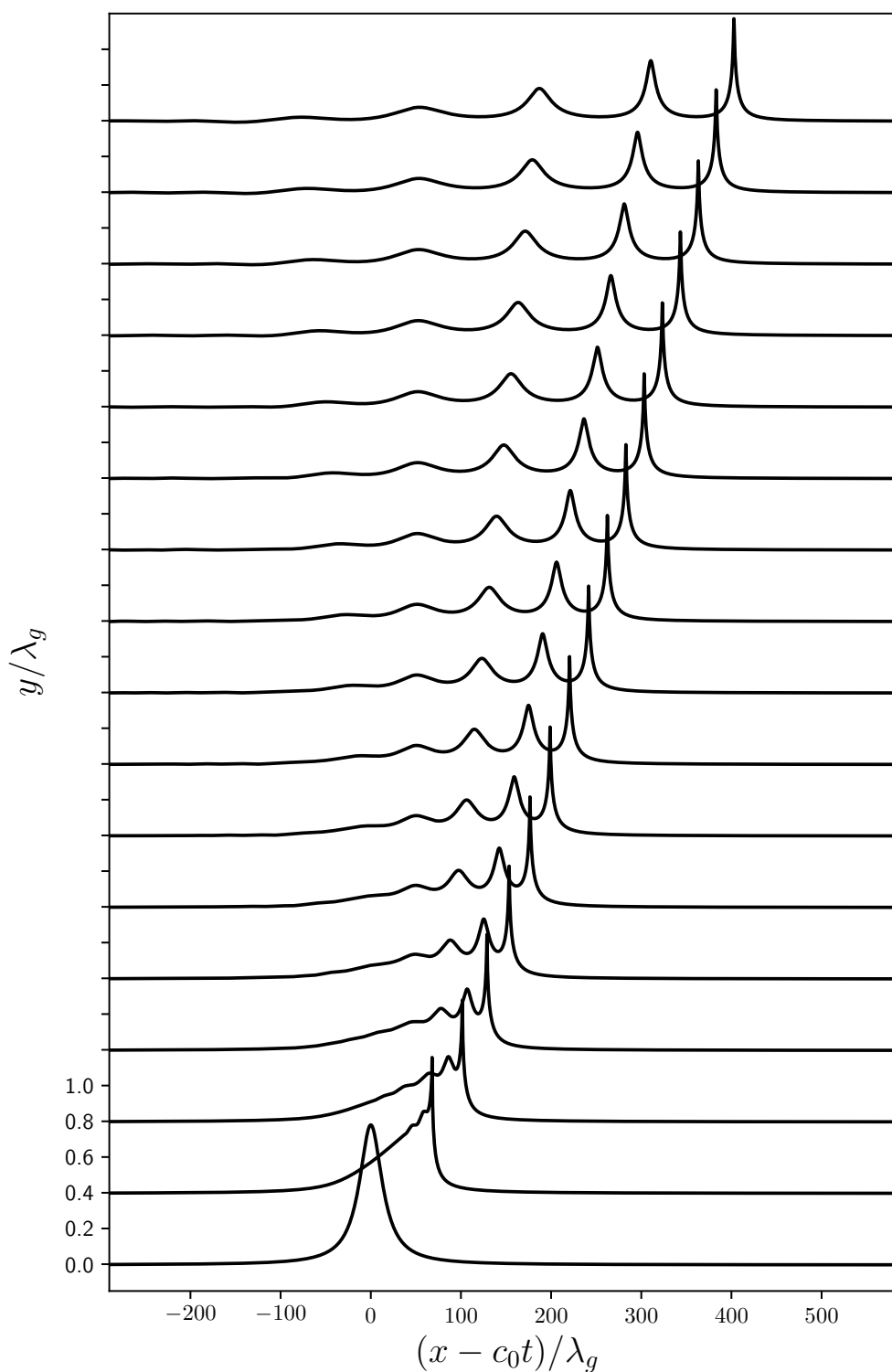


Рисунок 3.3 — Распад Лоренцева импульса с высотой  $a = 0.78\lambda_g$  и шириной  $d = 15.3\lambda_g$ , сопровождающийся образованием трех уединенных волн; глобальный период  $L = 10^4\lambda_g$ , шаг по времени между снимками профиля  $|\omega|\Delta t = 186$ , профили расположены снизу вверх в порядке возрастания времени.

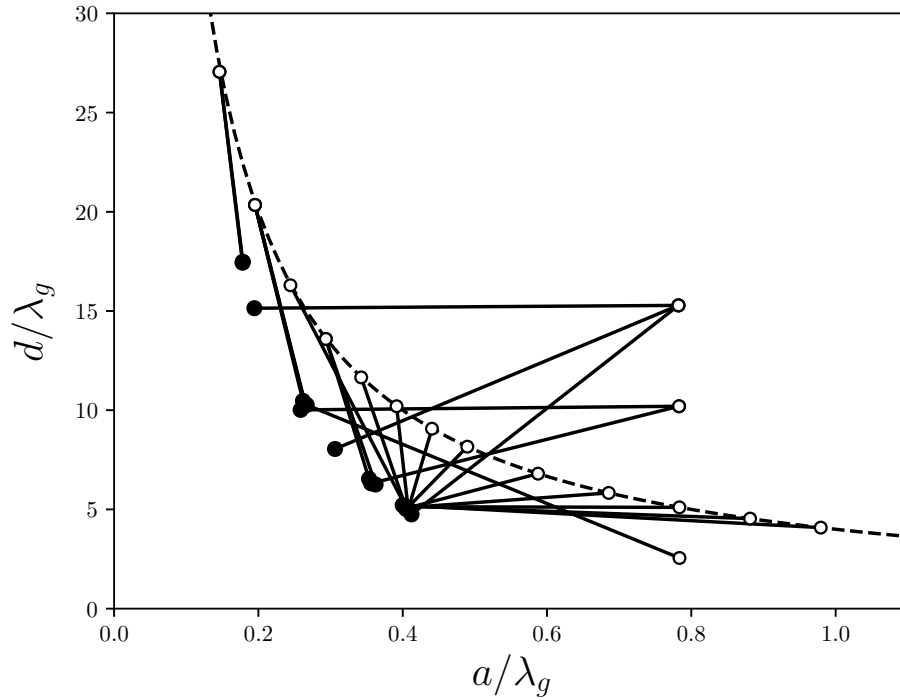
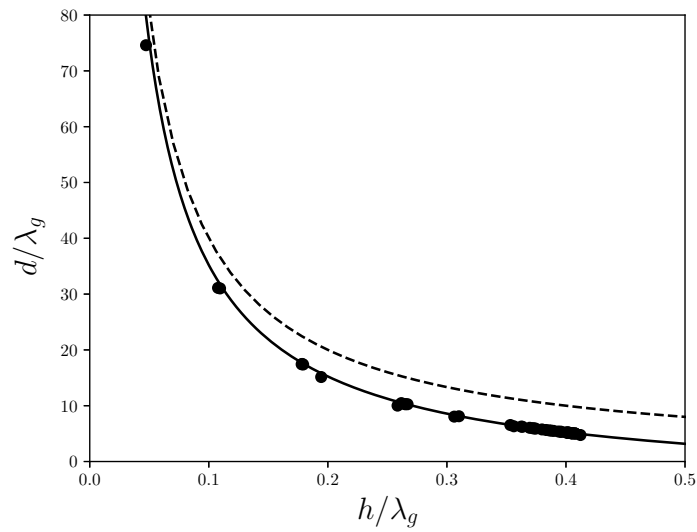


Рисунок 3.4 — Параметры Лоренцевых импульсов ( $a$  и  $d$ , белые маркеры) и характеристики уединенных волн, сформировавшихся в результате их распада (высота  $h$  и половинная ширина на уровне половины высоты  $d$ , черные маркеры). Ребра показывают связь между начальными условиями и продуктами распада. Пунктирная линия соответствует уравнению (3.16).

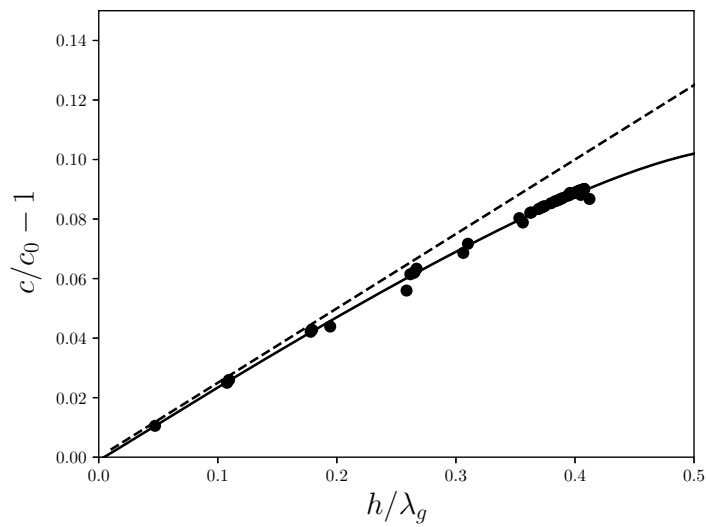
уединенных волн, амплитуды которых концентрируется в окрестности  $0.42\lambda_g$ , что несколько ниже критического значения, при котором волны становятся неустойчивыми. Объем нашего исследования пространства параметров не позволяет судить о том, является ли данное поведение общим для более широкого класса начальных условий. На рис. 3.5 построены полуширина  $d$  и фазовая скорость  $c$  сформировавшихся уединенных волн как функции высоты  $h$ ; как показывают данные графики, параметры волн находятся в соответствии с зависимостями для стационарных волн, полученными в разделе 3.3.

### 3.4.2 Взаимодействие уединенных волн

Чтобы приготовить начальные условия с двумя уединенными волнами на заданных позициях  $\{x_{0n}\}$ , мы комбинируем профили индивидуальных волн,

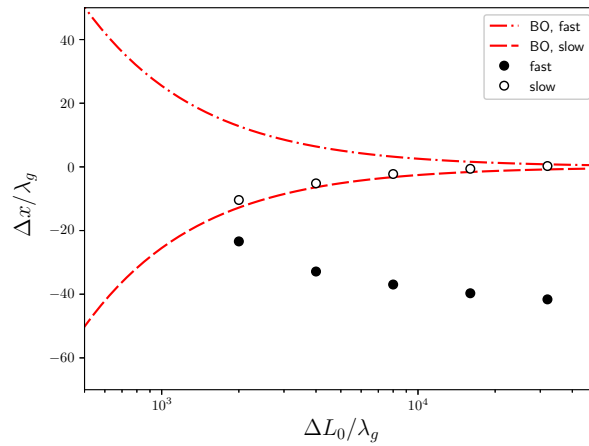


а)

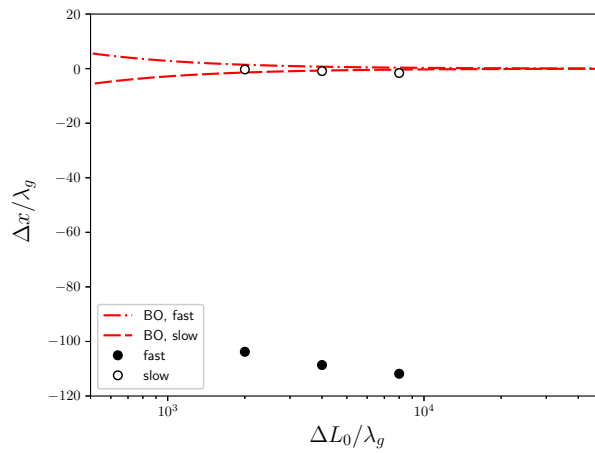


б)

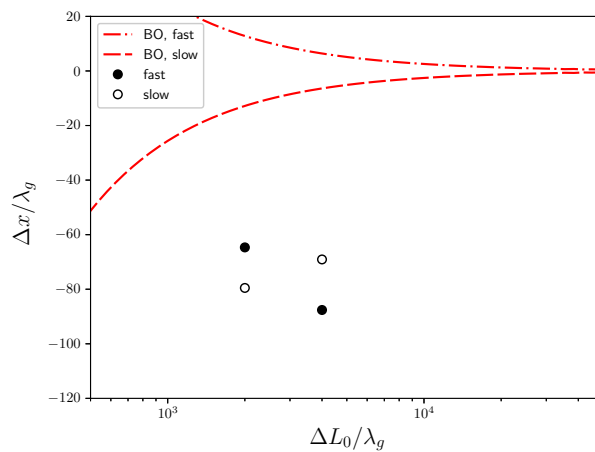
Рисунок 3.5 — Характеристики уединенных волн как функции высоты  $h$ : (а) половинная ширина на уровне половины высоты; (б) фазовая скорость. Маркеры соответствуют уединенным волнами, сформировавшимся в результате распада начального возмущения, сплошные линии — решениям точных уравнений (с пространственным периодом  $L = 10^4\lambda_g$ ), пунктирные линии — солитонам уравнения БО.



а)



б)



в)

Рисунок 3.6 — Фазовые сдвиги уединенных волн как функции начального расстояния. Параметры: (а)  $h_1 = 0.15\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.05\lambda_g$ , (б)  $h_1 = 0.40\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.10\lambda_g$ , (в)  $h_1 = 0.40\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.30\lambda_g$ .

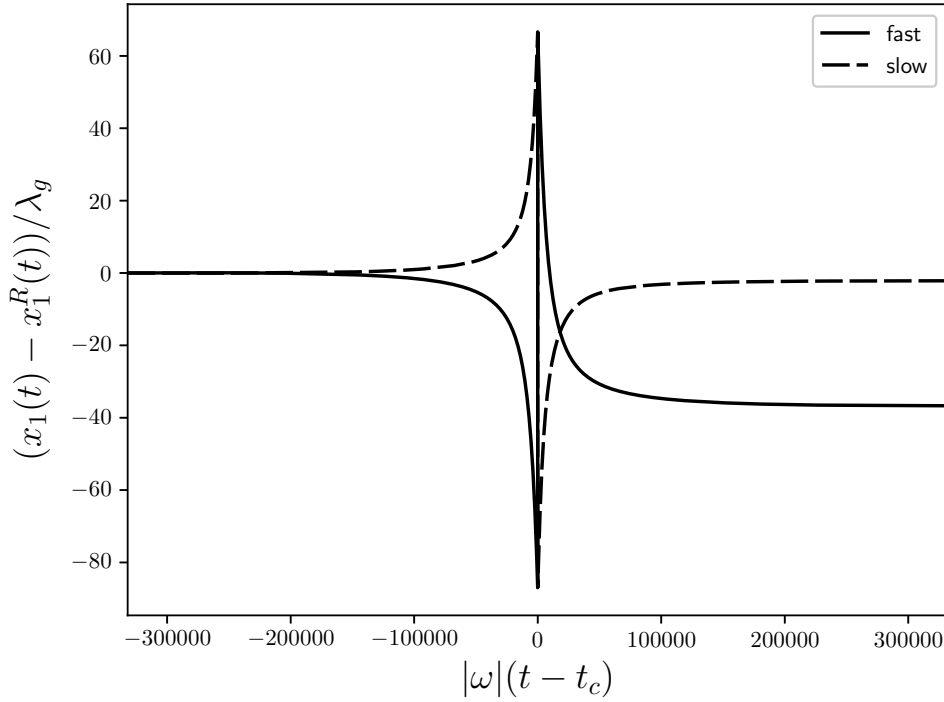


Рисунок 3.7 — Накопление фазового сдвига быстрой (сплошная линия) и медленной (пунктирная линия) волны в процессе взаимодействия. Параметры:

$$h_1 = 0.15, h_2 = 0.05, \delta L_0 = 8000\lambda_g, L = 50 \cdot 10^3\lambda_g$$

соответствующие заданным фазовым скоростям  $\{\tilde{c}_n\}$ , согласно

$$\begin{aligned} R(\xi) &= 1 + \sum_{n=1,2} (R_n(\xi - x_{0n}) - 1), \\ V(\xi) &= \sum_{n=1,2} V_n(\xi - x_{0n}). \end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $R_n, V_n$  — стационарные решения, полученные в разделе 3.3, в представлении Дьяченко (3.12). На фазовые скорости волн на сдвиговом потоке, помимо параметров собственно этих волн, оказывает влияние и уровень воды. В нашей постановке задачи, где средний уровень воды держится равным нулю как для стационарных периодических волн, так и для их суперпозиции (3.24), наблюдаемые фазовые скорости пары гребней будут слегка отличаться от значений  $\{\tilde{c}_n\}$ , и будут примерно равны  $c_{1,2} \approx \tilde{c}_{1,2} + \omega S_{2,1}/L$ , где  $S_{1,2}$  — объемы профилей соответствующих волн.

Поскольку индивидуальные стационарные волны имеют медленно спадающие степенные хвосты, мы в нашей модели не имеем возможности начать моделирование с состояния, в котором взаимодействие волн заведомо пренебрежимо мало. Как следствие, мы должны изучать вопрос о том, как результаты

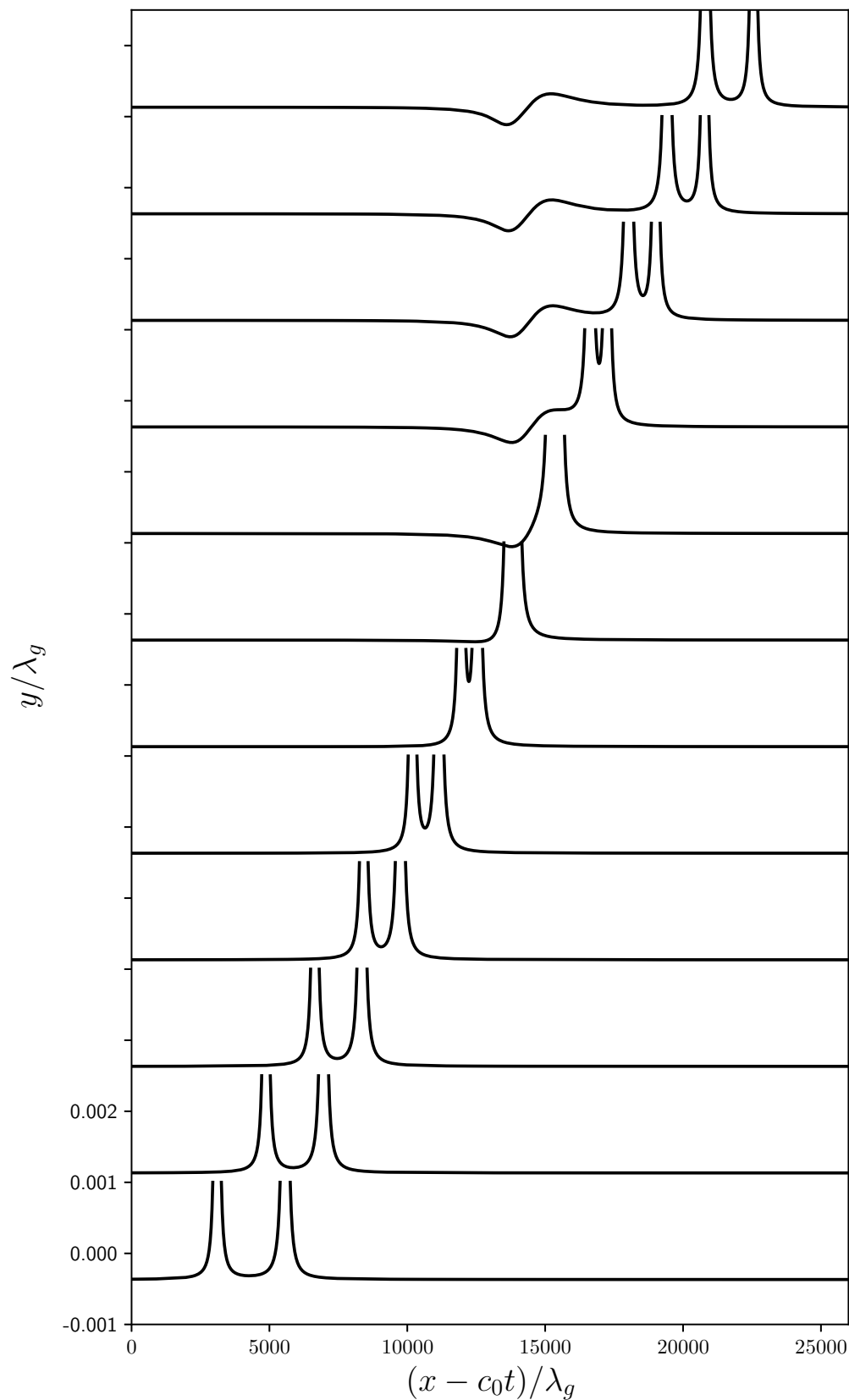


Рисунок 3.8 — Формирование возмущения на свободной поверхности после столкновения двух уединенных волн. Параметры:  $h_1 = 0.4\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.3\lambda_g$ ,  $\Delta L_0 = 4000\lambda_g$ , шаг по времени между снимками профиля  $|\omega|\Delta t = 2 \cdot 10^4$ , профили расположены снизу вверх в порядке возрастания времени.

$h_1$	$h_2$	$\Delta L_0$	$L$	$\Delta L_{min}$	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$h'_1$	$h'_2$
0.1501	0.0500	$2 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	151.97	-23.41	-10.40	0.1501	0.0497
0.1500	0.0500	$4 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	152.84	-32.87	-5.18	0.1500	0.0499
0.1500	0.0500	$8 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	153.06	-36.96	-2.24	0.1500	0.0499
0.1500	0.0500	$16 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	153.11	-39.70	-0.60	0.1500	0.0499
0.1500	0.0500	$32 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	153.13	-41.62	0.27	0.1500	0.0499
0.4000	0.1000	$2 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	58.48	-103.79	-0.30	0.4027	0.0966
0.4000	0.1000	$4 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	58.56	-108.63	-0.90	0.4028	0.0978
0.4000	0.1000	$8 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	58.58	-111.84	-1.61	0.4028	0.0980
0.4000	0.3000	$2 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	242.42	-64.67	-79.53	0.4004	0.2998
0.4000	0.3000	$4 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	243.87	-87.61	-69.08	0.4003	0.2998

Таблица 1 — Результаты численного моделирования: параметры начальных условий (глобальный период  $L$ , начальное расстояние между гребнями  $\Delta L_0$ ), амплитуды волн до ( $h_{1,2}$  при  $t = 0$ ) и после столкновения ( $h'_{1,2}$  при  $t = 2t_c$ ), минимальное расстояние между гребнями в процессе взаимодействия  $\Delta L_{min}$ , фазовые сдвиги  $\Delta x_{1,2}$ . Все величины указаны в единицах  $\lambda_g$ .

взаимодействия уединенных волн зависят от начального расстояния между их гребнями  $\Delta L_0 = x_{02} - x_{01}$ .

Мы рассматриваем только волны, распространяющиеся в направлении сдвига, поэтому столкновение между ними возможно лишь когда более высокая и быстрая волна догоняет более низкую и медленную. Ниже мы будем использовать индекс  $n = 1$  для обозначения более быстрой волны и  $n = 2$  для более медленной. Мы исследуем три набора амплитуд: 1) две низких волны:  $h_1 = 0.15\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.05\lambda_g$ , 2) одна волна высокая, вторая – низкая:  $h_1 = 0.40\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.10\lambda_g$ , и 3) две высоких волны:  $h_1 = 0.40\lambda_g$ ,  $h_2 = 0.30\lambda_g$ . Для каждой пары амплитуд было выполнено несколько численных экспериментов с различающимися глобальными периодами  $L$  и начальными расстояниями между волнами  $\Delta L_0$ . Каждый эксперимент начинался в момент времени  $t = 0$  с начальными условиями (3.24) и продолжался до момента  $t = 2t_c$ , где  $t_c = \Delta L_0 / (c_1 - c_2)$  — ожидаемое время столкновения. Мы требовали, чтобы  $L$  и  $\Delta L_0$  удовлетворяли

$$\frac{2\Delta L_0}{c_1 - c_2} < \frac{L}{c_1 - c_0},$$

чтобы до конца эксперимента (т.е. до момента, когда волны снова разойдутся на расстояние  $\Delta L_0$ ) более быстрая волна не встретилась с артефактами, которые, воз-

можно, были возбуждены в момент  $t = 0$  “искусственной” суперпозицией (3.24). Результаты численных экспериментов, включающие в себя фазовые сдвиги и амплитуды уединенных волн после столкновения, приведены в Таблице 1.

Во всех трех рассмотренных конфигурациях наблюдался обменный сценарий взаимодействия. В случае, когда амплитуда второй волны достаточно мала, становится возможным также и обгон; мы наблюдали такое поведение, например, для пары амплитуд  $h_1 = 0.35\lambda_g$  и  $h_2 = 0.02\lambda_g$ . Мы не исследовали обгонный сценарий в больших деталях.

Особого внимания требует способ измерения фазового сдвига, поскольку даже малые отклонения в используемых значениях фазовой скорости приводят на длинных временных интервалах к большой неточности в получаемых значениях. Необходимо также принять во внимание возможность того, что скорость уединенной волны после столкновения будет несколько отличаться от начальной скорости из-за неупругости взаимодействия. Учитывая это, мы принимаем следующее определение для фазового сдвига, использующее реальные наблюдаемые скорости гребня на концах траектории:

$$\Delta x_n = [x_n(2t_c) - x_n(0)] - [\dot{x}_n(0) + \dot{x}_n(2t_c)] t_c \quad (3.25)$$

где  $x_n(t)$  — наблюдаемая траектория  $n$ -ой волны (определяемая как положение локального максимума возвышения),  $\dot{x}_n(t)$  — ее скорость. Это эквивалентно измерению позиции гребня относительно референсной траектории

$$x_n^R(t) = \begin{cases} x_n(0) + \dot{x}_n(0)t, & 0 \leq t \leq t_c \\ x_n(0) + \dot{x}_n(0)t_c + \dot{x}_n(2t_c)(t - t_c), & t_c < t \leq 2t_c \end{cases} \quad (3.26)$$

т.е.  $\Delta x_n = x_n(2t_c) - x_n^R(2t_c)$ .

Данное определение фазового сдвига (3.25), использующее лишь конечный фрагмент траектории в окрестности точки столкновения, в действительности дает ненулевые значения даже для двухсолитонного решения уравнения БО (но, разумеется, “кажущиеся” фазовые сдвиги солитонов БО исчезают с увеличением времени наблюдения). Причина главным образом в том, что в момент столкновения более быстрый солитон “прыгает” вперед, обмениваясь положением с более медленным солитоном (а более медленный при этом “прыгает” назад). На рис. 3.6 приведены фазовые сдвиги, наблюдаемые в численных экспериментах при различных начальных расстояниях между волнами  $\Delta L_0$ ; для сравнения

построены и кажущиеся фазовые сдвиги солитонов БО, измеренные по двухсолитонному решению при заданном начальном расстоянии  $\Delta L_0$ . Как показывают графики, в первой (две низких волны) и во второй (одна волна высокая, вторая низкая) сериях экспериментов фазовые сдвиги более медленной уединенной волны близки к кажущимся сдвигам медленного солитона в двухсолитонном решении БО, приближаясь (в первом случае) или оставаясь в окрестности нуля (во втором случае) при увеличении  $\Delta L_0$ . В то же время, сдвиги быстрой волны растут по абсолютному значению, приближаясь к постоянным отрицательным уровням. Рис. 3.7 показывает типичный пример того, как изменяется с течением времени положение более быстрой и более медленной волн относительно соответствующих референсных траекторий (3.26); можно видеть, что фазовый сдвиг быстрой волны накапливается в течении некоторого времени после столкновения, оставаясь затем почти неизменным до конца эксперимента.

К сожалению, мы имели возможность провести лишь два численных эксперимента для третьей пары амплитуд (две высоких волны), поскольку эти расчеты требовали намного больше вычислительных ресурсов. Тем не менее, по данным на рис. 3.6в уже можно сказать, что в этом случае поведение как быстрой, так и медленной волны заметно отличается от поведения солитонов БО.

Наконец, на рис. 3.8 показано, как в результате столкновения двух уединенных волн формируется небольшое возмущение на поверхности воды, что указывает на неупругий характер их взаимодействия. В этом заключается еще одно отличие от двухсолитонного решения БО, которое в любой момент времени может быть представлено в виде суммы двух полюсов. В то же время, как указано в Таблице 1, во всех наших численных экспериментах амплитуды уединенных волн после столкновения оказываются очень близки к начальным амплитудам, из чего мы можем заключить, что взаимодействие является почти упругим.

### 3.5 Заключение

Существование солитонов на глубокой воде со сдвиговым течением, распространяющихся в направлении сдвига, было продемонстрировано ранее (см. [10]) в пределе больших длин волн (т.е. слабой дисперсии) и малых амплитуд. Оставался непроясненным вопрос о том, сохраняют ли солитоны свои свойства

при уменьшении ширины гребня и переходе к большим амплитудам. Результаты численного моделирования, представленные в настоящей работе, показывают, что полностью нелинейные уравнения движения также допускают существование устойчивых уединенных волн, хотя и существует критическое значение высоты, начиная с которого волны теряют устойчивость. Численное моделирование столкновений уединенных волн предоставляет свидетельства того, что в рамках точных уравнений движения, в отличие от уравнения БО, уединенные волны в результате взаимодействия получают фазовый сдвиг. Несмотря на то, что при столкновениях наблюдается генерация осцилляторных волн, амплитуды участвующих уединенных волн остаются близкими к их начальным значениям; это может означать, что взаимодействие волн является почти упругим и могут существовать интегрируемые модели этого процесса за рамками применимости уравнения БО.

В нашем исследовании мы предполагаем, что для волн имеет место режим глубокой воды. Если мы рассматриваем волны длины  $L$  с локализованными гребнями на потоке конечной глубины  $D$ , то условия режима глубокой воды для них требуют, чтобы масштаб  $\lambda_g$ , связанный с завихренностью  $\omega$ , был много меньше глубины воды, т.е.  $\lambda_g = g/\omega^2 \ll L < 2D$ . Величина завихренности должна быть достаточной, чтобы обеспечивать требуемое разделение масштабов между  $\lambda_g$  и  $D$ . Здесь мы учитываем существование критической высоты волны и, соответственно, минимальной ширины ее гребня, которая составляет порядка нескольких  $\lambda_g$ ; чтобы гребень волны был локализован на малой части ее периода, длина волны должна быть много больше  $\lambda_g$ . Условие  $\lambda_g \ll D$  может быть слишком жестким, чтобы ему удовлетворяли волны на воде, поскольку требует нереалистично больших значений завихренности. Примером геофизического процесса, где удовлетворить данному условию может быть легче, являются внутренние волны, распространяющиеся зонально на экваторе; в этом случае наличие завихренности обусловлено вращением Земли, а эффективное ускорение свободного падения  $g^*$  существенно уменьшается. В контексте геофизических применений наши расчеты могут рассматриваться как простейшая модель, направленная на изучение данного специфического класса волновых движений.

Приведенные результаты были опубликованы в статье [143] и докладывались на Генеральной ассамблее Европейского союза наук о Земле [144; 145] и международной конференции Computer Simulation in Physics and Beyond 2017 [146].

## Глава 4. Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерных уравнений движения в конформных координатах

### 4.1 Введение

Многие характерные особенности динамики волн на воде могут быть объяснены в рамках модели потенциального течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Потенциальное течение представляет собой объект, удобный как для аналитического изучения, так и для численного моделирования, поскольку его движение описывается интегро-дифференциальными уравнениями на границе жидкости, что позволяет снизить размерность задачи.

Для численного моделирования двумерных потенциальных волн широко применяется метод конформных преобразований. В конформных координатах уравнения движения записываются таким образом (см., например, [3]), что вычислительная сложность нахождения соответствующих правых частей на пространственной сетке из  $N$  узлов определяется сложностью быстрого преобразования Фурье  $\mathcal{O}(N \log N)$ . К преимуществам подхода относится также возможность описывать конфигурации с загибом свободной поверхности (когда возвышение не является однозначной функцией горизонтальной координаты) — кроме очевидного примера обрушающихся волн, такая ситуация также возможна и для необрушающихся волн гравитационно-капиллярного диапазона [109]. Обзор истории метода и подробная библиография могут быть найдены в работе [4].

Для моделирования трехмерных волн на основе точных уравнений движения может применяться метод поверхностных интегралов [18; 19], который, однако, сложен в реализации и обладает невысокой производительностью. Еще один подход к точному моделированию потенциальных волн подразумевает решение уравнения Лапласа для потенциала на трехмерной сетке [134], при этом требуя, чтобы свободная поверхность не имела загибов.

Квазитрехмерная модель волнения, предложенная В.П. Рубаном [20], представляет собой обобщение метода конформных преобразований для трехмерных потенциальных течений. Как и полностью нелинейные двумерные модели, она не накладывает ограничений на крутизну волн, однако использует приближение узкой направленности спектра волнения. Конформные координаты вводятся в

вертикальной плоскости, содержащей «главное» направление распространения волн; в перпендикулярном к этой плоскости направлении изменение всех полей считается медленным. Теория возмущений в общей формулировке для волн над дном произвольной формы, а также частный случай волн на глубокой воде, описаны в статье [20]. В работах [21; 22] модель применяется для изучения влияния трехмерных эффектов на процесс образования волн-убийц. В тех же работах предлагаются варианты регуляризации приближенных уравнений, позволяющие получить корректное дисперсионное соотношение для линейных волн, распространяющихся под любым углом.

Представляет интерес вопрос о границах применимости модели Рубана. Соответствующая теория возмущений использует малый параметр  $\varepsilon = (l_x/l_q)^2 \ll 1$ , где  $l_x, l_q$  — характерные масштабы длины по главному и поперечному направлениям соответственно. Учет уже первых поправок по  $\varepsilon$  приводит к уравнениям, которые довольно громоздки и сложны для анализа, что затрудняет оценку точности приближения. Какие трехмерные эффекты сохранены в приближенных уравнениях? Может ли в рамках модели быть описана динамика существенно трехмерного процесса образования подковообразных волн [135]?

В настоящей работе для ответа на эти вопросы сделана попытка в рамках приближенных уравнений модели Рубана воспроизвести анализ устойчивости волны Стокса по отношению к трехмерным возмущениям, описанный в статье Маклина [136]. Исследуется зона неустойчивости, связанная с 5-волновыми взаимодействиями, проводится сравнение значений инкремента с точными значениями из [136]. Показано, что развитие неустойчивости приводит к генерации подковообразных структур.

Для практического применения важно, чтобы квазитрехмерная модель вела себя устойчиво при наличии возмущений, распространяющихся под большими углами к главному направлению, даже если мы не претендуем на корректное описание их динамики. В данной работе предлагается модификация модели, устраняющая нефизичную зону неустойчивости для возмущений, распространяющихся почти перпендикулярно к основной волне.

## 4.2 Основные уравнения

Рассмотрим задачу о потенциальном течении несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Будем использовать декартову систему координат  $(x, q, y)$ , где ось  $y$  направлена вверх. Уравнения движения для потенциала скорости  $\varphi(x, q, y, t)$  и свободной поверхности  $y = \eta(x, q, t)$  записываются как

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0, \\ \eta_t + \eta_x\varphi_x + \eta_q\varphi_q - \varphi_y &= 0 \quad (\text{при } y = \eta), \\ \varphi_t + g\eta + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 &= 0 \quad (\text{при } y = \eta).\end{aligned}$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Ограничимся случаем глубокой воды:

$$|\nabla\varphi| \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty.$$

Свободная поверхность может быть выпрямлена переходом от пары декартовых координат  $(x, y)$  к конформным координатам  $(u, v)$ . Разумеется, соответствующее конформное отображение будет зависеть от оставшейся координаты  $q$ :

$$x + iy = Z(u + iv, q, t),$$

где функция  $Z$  является аналитической в нижней полуплоскости комплексной переменной  $u + iv$ . Свободная поверхность при этом является образом действительной оси  $v = 0$ :

$$Z(u + i0, q, t) = x(u, q, t) + i\eta(x(u, q, t), q, t).$$

При таком описании состояние системы определяется значениями потенциала на свободной поверхности  $\psi = \varphi|_{y=\eta}$  и отображением  $Z$ . В работе [20] приводится вывод эволюционных уравнений для неканонической пары переменных  $Z$  и  $\psi$  из принципа наименьшего действия с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{g}{2} \int \eta^2 dx dq + \mathcal{K},$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int dx dq \int_{-\infty}^{\eta} (\varphi_x^2 + \varphi_q^2 + \varphi_y^2) dy$$

— функционал кинетической энергии. Следующие соотношения выполняются точно:

$$Z_t = iZ_u(1 + i\hat{H}) \left[ \frac{\delta\mathcal{K}/\delta\psi}{|Z_u|^2} \right] \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_t = & -g \operatorname{Im} Z - \psi_u \hat{H} \left[ \frac{\delta\mathcal{K}/\delta\psi}{|Z_u|^2} \right] + \\ & + \operatorname{Im} \left\{ (1 - i\hat{H}) [2(\delta\mathcal{K}/\delta Z)Z_u + (\delta\mathcal{K}/\delta\psi)\psi_u] \right\} / |Z_u|^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта.

Трудность заключается в том, что в трехмерной задаче не известно компактного выражения для  $\mathcal{K}$  в переменных  $Z$  и  $\psi$ . В рамках подхода [20]  $\mathcal{K}$  приближенно представляется суммой известной двумерной части (точной при  $\partial_q = 0$ ) и трехмерных поправок  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2} \int \psi \hat{H} \psi_u \, du \, dq + \mathcal{F}$$

Учет поправок первого порядка по малому параметру  $\varepsilon$  дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{i}{8} \int (Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u) \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} \, du \, dq + \\ & + \frac{i}{16} \int \left\{ [(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)^2 / Z_u] \hat{E} \overline{(Z - u)} - \right. \\ & \left. - (Z - u) \hat{E} \overline{[(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)^2 / Z_u]} \right\} \, du \, dq, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где функция  $\Psi$  определяется на свободной поверхности как  $\Psi(u) = (1 + i\hat{H})\psi(u)$ , выражения для операторов  $\hat{G}$ ,  $\hat{E}$  будут приведены ниже. Вариационные производные из (4.1)-(4.2) выражаются как

$$\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\psi} = -\hat{H}\psi_u + 2 \operatorname{Re} \left[ (1 - i\hat{H}) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Psi} \right], \quad \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta Z} = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Z},$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Psi} = & \frac{i}{8} Z_q \partial_u \left[ \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} + (\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u) \hat{E} \overline{(Z - u)} \right] \\ & - \frac{i}{8} Z_u \partial_q \left[ \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} + (\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u) \hat{E} \overline{(Z - u)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Z} = & -\frac{i}{8} \Psi_q \partial_u \left[ \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} + (\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u) \hat{E} \overline{(Z - u)} \right] \\ & + \frac{i}{8} \Psi_u \partial_q \left[ \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} + (\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u) \hat{E} \overline{(Z - u)} \right] \\ & + \frac{i}{16} \left[ \partial_u [(\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u)^2 \hat{E} \overline{(Z - u)}] - \hat{E} \overline{(\Psi_q - Z_q \Psi_u / Z_u)^2 Z_u} \right]. \end{aligned}$$

В оригинальных уравнениях [20], получаемых по теории возмущений,

$$\hat{G} = \partial_u^{-1}, \quad \hat{E} = 1.$$

Для линейных волн это дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = g|k| \left( 1 + \frac{m^2}{2k^2} \right), \quad (4.4)$$

где  $k, m$  — компоненты волнового вектора по осям  $x$  и  $q$ . Для устранения нефизической особенности в окрестности прямой  $k = 0$  в работах [21; 22] предлагаются различные варианты регуляризации, дающие правильное дисперсионное соотношение на всей плоскости волновых векторов:

$$\omega^2(k, m) = g\sqrt{k^2 + m^2}. \quad (4.5)$$

Таким образом, регуляризация обеспечивает, в том числе, правильное положение резонансных кривых для нелинейных взаимодействий. В настоящей работе мы будем использовать вариант

$$G(k, m) = \frac{-2i}{\sqrt{m^2 + k^2 + |k|}}, \quad E(k, m) = \frac{2|k|}{\sqrt{m^2 + k^2 + |k|}}. \quad (4.6)$$

### 4.3 Устранение неустойчивости для почти перпендикулярных гармоник

Нас будет интересовать способность приближенных уравнений описывать формирование подковообразных структур на поперечно модулированных волнах большой крутизны. На практике проследить развитие этого процесса, используя уравнения модели Рубана в том виде, в котором они приводятся в оригинальных работах, не удастся — после определенного момента счет оказывается невозможно продолжать из-за интенсивной генерации поперечной ряби. Пример профиля волны с развивающейся рябью приведен на рис. 4.1.

В рамках регуляризованных уравнений с модифицированными коэффициентами  $G, E$  (4.6) волна Стокса оказывается неустойчивой к коротковолновым поперечным возмущениям, и для больших волновых чисел  $m$  возмущения инкремент растет как  $\gamma_{k, m} \sim |m|$ . Данная нефизическая неустойчивость связана с кубическими слагаемыми в трехмерной части функции Гамильтона (4.3)

$$\frac{i}{16} \int \left\{ \Psi_q^2 \hat{E} \overline{(Z - u)} - (Z - u) \hat{E} \overline{\Psi_q^2} \right\} du dq.$$

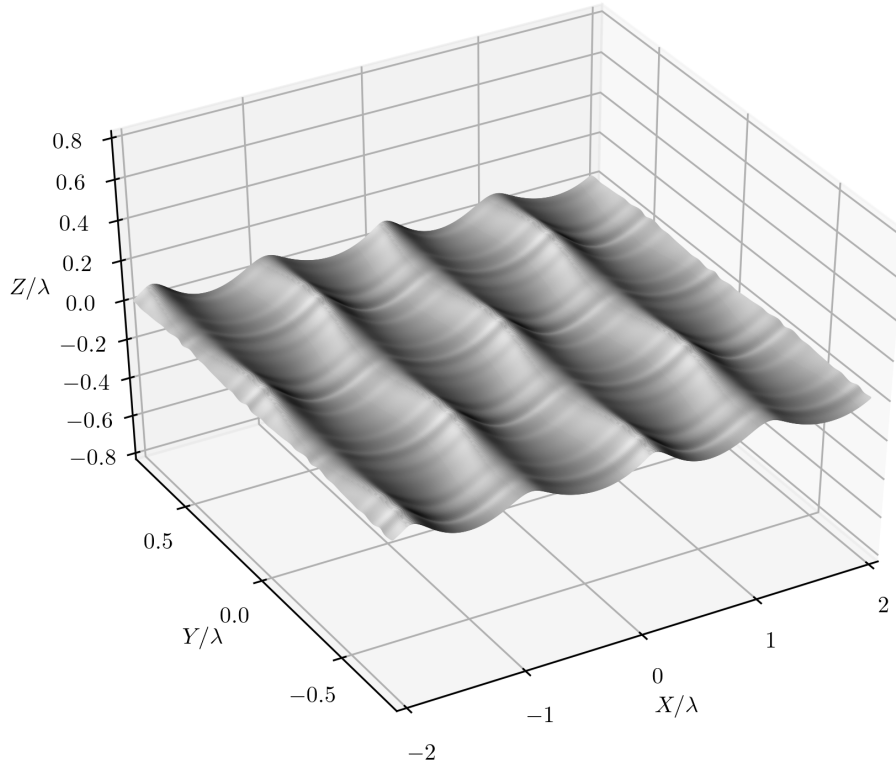


Рисунок 4.1 — Генерация поперечной ряби на волне Стокса в результате развития нефизической неустойчивости квазитрехмерной модели. Начальная крутизна волны Стокса  $ak = 0.33$ .

Неустойчивость проявляется только в модели с регуляризацией, что, однако, обусловлено не выбором вида оператора  $\hat{E}$  (при условии, что  $E(k,0) = 1$ ), а скорее переходом от искаженного дисперсионного соотношения (4.4) к правильному (4.5). Неустойчивы только гармоники с продольным волновым числом  $k < k_0$ , где  $k_0$  — волновое число волны Стокса; это объясняется тем, что для прочих возмущений соответствующие квадратичные слагаемые в  $\delta\mathcal{K}/\delta\psi$  отсекаются оператором  $(1 - i\hat{H})$ .

Для устранения неустойчивости предлагается следующая модификация функционала  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} = & \frac{i}{8} \int (Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u) \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} du dq + \\ & + \frac{i}{16} \int \left\{ [(\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u))^2 / Z_u] \hat{E} \overline{(Z - u)} - \right. \\ & \left. - (Z - u) \hat{E} \overline{[(\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u))^2 / Z_u]} \right\} du dq, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где оператор  $\hat{M}$  маскирует компоненты спектра, близкие к оси  $q$ :

$$M(k, m) = 1 - \left| \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right|^p.$$

Выбор степени  $p$  определяется необходимостью перекрытия маской зоны неустойчивости; в настоящей работе принято  $p = 32$ . Вариационные производные от функционала (4.7) равны

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Psi} &= \frac{i}{8} Z_q \partial_u \left[ \hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \hat{M} \left( [\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)/Z_u] \hat{E}(\overline{Z - u}) \right) \right] \\ &\quad - \frac{i}{8} Z_u \partial_q \left[ \hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \hat{M} \left( [\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)/Z_u] \hat{E}(\overline{Z - u}) \right) \right] \\ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta Z} &= -\frac{i}{8} \Psi_q \partial_u \left[ \hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \hat{M} \left( [\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)/Z_u] \hat{E}(\overline{Z - u}) \right) \right] \\ &\quad + \frac{i}{8} \Psi_u \partial_q \left[ \hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \hat{M} \left( [\hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)/Z_u] \hat{E}(\overline{Z - u}) \right) \right] \\ &\quad + \frac{i}{16} \left\{ \partial_u \left[ \left( \hat{M}(\Psi_q - Z_q \Psi_u/Z_u) \right)^2 \hat{E}(\overline{Z - u})/Z_u^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \overline{\hat{E} \left( \hat{M}(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u/Z_u) \right)^2 / Z_u} \right\}. \end{aligned}$$

В следующем разделе будет продемонстрировано, что описанная модификация устраняет обсуждаемую неустойчивость.

#### 4.4 Анализ устойчивости волны Стокса

Рассмотрим задачу об устойчивости волны Стокса конечной амплитуды, распространяющейся вдоль оси  $x$ , по отношению к малым трехмерным возмущениям. Система уравнений (4.1)-(4.2) довольно громоздка, что осложняет ее аналитическое исследование, поэтому мы будем исследовать ее численно как абстрактное эволюционное уравнение

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$$

для вектора состояния

$$\mathbf{X} = \{ \text{Re } Z_{km}; \text{Im } Z_{km}; \text{Re } \psi_{km}; \text{Im } \psi_{km} \},$$

компоненты которого определяют амплитуды гармоник  $Z$  и  $\psi$  в конформных координатах.

Для нахождения точного профиля волны Стокса в конформных координатах используется система уравнений из работы [3], которая решается при помощи

итерационной процедуры. Будем работать в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью волны Стокса; тогда соответствующий волне Стокса вектор состояния  $\mathbf{X}_0$  является стационарным решением:

$$f(\mathbf{X}_0) = 0.$$

Линеаризуя уравнения движения в окрестности  $\mathbf{X}_0$

$$\dot{\mathbf{X}}_p = f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_p) \approx \hat{A}\mathbf{X}_p, \quad (4.8)$$

и решая задачу о собственных значениях матрицы  $\hat{A}$ , мы можем найти собственные моды волны Стокса. Компоненты матрицы оцениваются численно путем вычисления  $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_p)$  для различных малых приращений  $\mathbf{X}_p$ . Из трансляционной симметрии уравнений (4.1)-(4.2) следует, что отличными от нуля могут быть только те матричные элементы  $\hat{A}$ , которые соответствуют взаимодействию гармоник с волновыми числами

$$k = nk_0 \pm \Delta k, \quad m = \pm \Delta m, \quad (4.9)$$

для некоторых фиксированных  $\Delta k, \Delta m$ . Здесь  $k_0$  — волновое число волны Стокса,  $n$  — целое число.

Решение задачи на собственные значения матрицы  $\hat{A}$  дает набор собственных чисел  $\gamma_i$  и собственных векторов  $\mathbf{X}_i$ . Собственные вектора с  $\text{Re } \gamma > 0$  соответствуют неустойчивым модам. Чтобы сопоставить моде  $\mathbf{X}_i$  определенный волновой вектор, амплитуды гармоник конформного отображения  $Z_{km}$  пересчитываются в амплитуды гармоник возвышения  $\eta_{km}$  в декартовых координатах  $(x, q)$ , и выбирается волновой вектор гармоники с наибольшей амплитудой  $\eta_{km}$ . Пересчет в декартовы координаты необходим потому, что при большой крутизне волны Стокса искажения, вносимые конформным преобразованием, делают получаемую картину зон неустойчивости сложной для интерпретации.

На рис. 4.2 показаны зоны неустойчивости на плоскости волновых векторов для волны Стокса с крутизной  $ak_0 = 0.3$ . Для сравнения изображены также резонансные кривые

$$\omega(k_1, m_1) + \omega(k_2, m_2) = n\omega(k_0, 0), \quad k_1 + k_2 = nk_0, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad n = 2, 3.$$

Рис. 4.2a показывает результаты анализа для оригинальной модели, рис. 4.2б — для модификации (4.7). Можно видеть, что в оригинальной модели волна

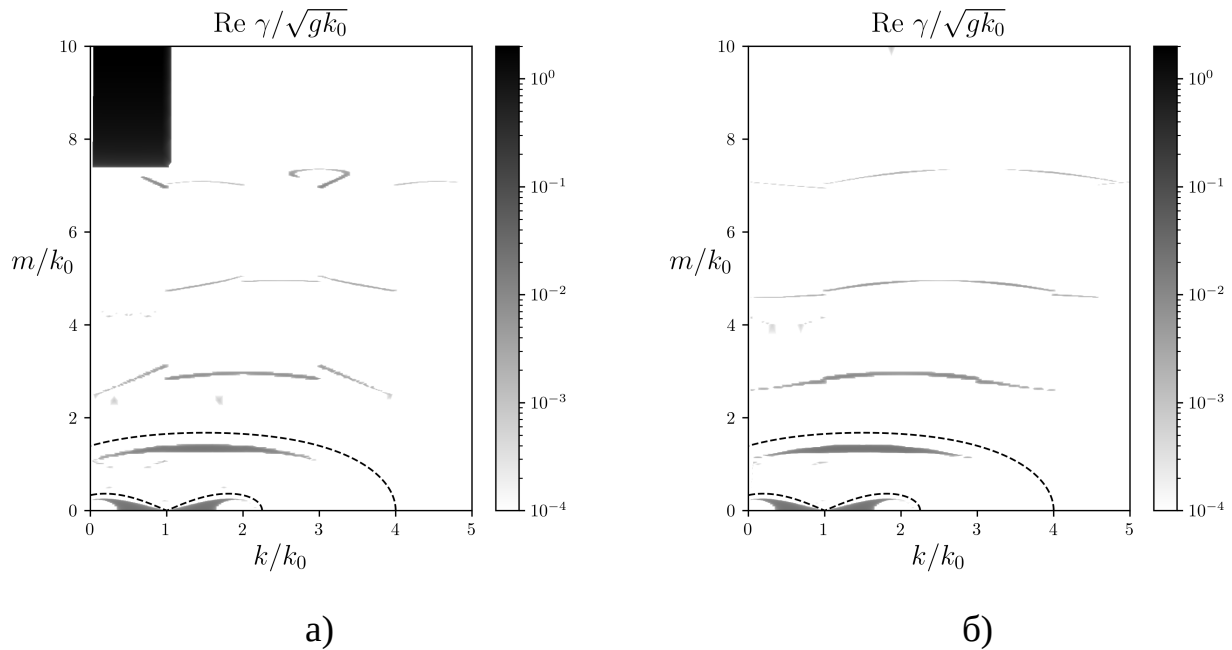


Рисунок 4.2 — Зоны неустойчивости на плоскости волновых векторов возмущений, рассчитанные в рамках а) оригинальной и б) модифицированной модели. Крутизна волны Стокса  $ak_0 = 0.3$ . Пунктиром изображены резонансные кривые, соответствующие 4- и 5-волновым взаимодействиям.

Стокса обладает нефизичной зоной неустойчивости в окрестности оси  $q$ , которая устраняется модификацией.

Качественно положение и форма зон неустойчивости хорошо согласуются с результатами [136]. Количественное сравнение для инкремента и поперечного волнового числа наиболее неустойчивой моды в зоне, соответствующей 5-волновым взаимодействиям, проведено на рис. 4.3 и рис. 4.4 соответственно. Полученные результаты позволяют рассчитывать на удовлетворительное описание квазитрехмерной моделью процесса формирования подковообразных волн. На рис. 4.5 показаны подковообразные структуры, развивающиеся на волне Стокса из малого возмущения в ходе численного моделирования с использованием модифицированных (4.7) уравнений.

## 4.5 Заключение

В настоящей главе исследовалась способность квазитрехмерной конформной модели воспроизводить существенно трехмерные эффекты, такие как форми-

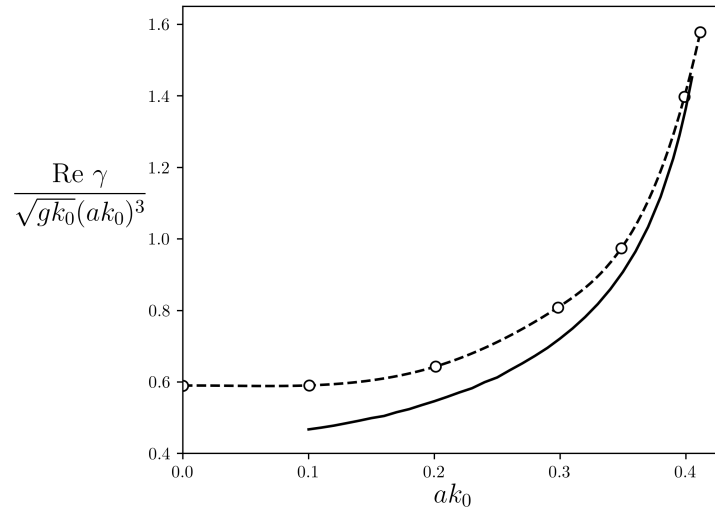


Рисунок 4.3 — Максимальный инкремент 5-волновой неустойчивости в зависимости от крутизны волны Стокса. Сплошная линия — результаты расчета в рамках квазитрехмерной модели, белые маркеры и пунктир — данные из работы [136].

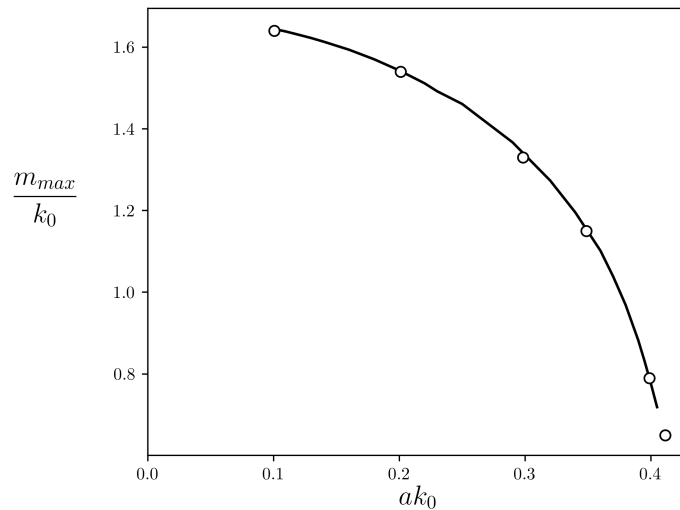


Рисунок 4.4 — Положение максимума инкремента в зоне 5-волновой неустойчивости в зависимости от крутизны волны Стокса. Сплошная линия — результаты расчета в рамках квазитрехмерной модели. Белые маркеры — данные из работы [136].

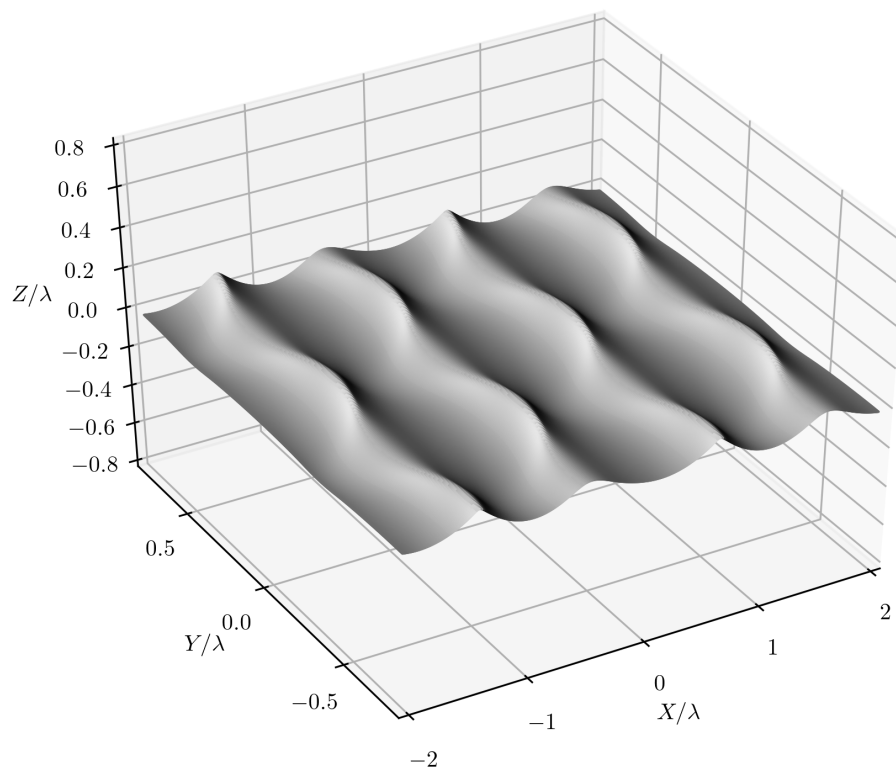


Рисунок 4.5 — Подковообразные структуры на волне Стокса с начальной крутизной  $ak = 0.33$ .

рование подковообразных волн. Описана модификация функционала Гамильтона модели, ослабляющая трехволновые взаимодействия для гармоник, почти перпендикулярных к основному направлению, и направленная на обеспечение более устойчивого поведения системы при моделировании конфигураций, не удовлетворяющих условию узкой направленности спектра. В рамках оригинальной модели Рубана и предложенной ее регуляризации проведен анализ устойчивости волны Стокса. Форма и положение зон неустойчивости хорошо согласуются с результатами расчетов Маклина [136] на основе исходных уравнений гидродинамики, наблюдаемые значения максимума инкремента близки к точным значениям.

Приведенные результаты были опубликованы в статье [147] и докладывались на Генеральной ассамблее Европейского союза наук о Земле [148; 149], а также на Школе-семинаре «Волны-2019».

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Предложена численная модель ветровых волн на воде, основанная на уравнениях движения для двумерного потенциального течения в конформных координатах с добавлением параметризаций ключевых для динамики волн дециметрового диапазона эффектов: ветровой накачки и вязкого затухания. Показано, что модель удовлетворительно воспроизводит результаты прямого численного моделирования гравитационно-капиллярных волн в рамках уравнений Навье-Стокса и в рамках квази-потенциальной модели с явным учетом завихренной поправки к полю скорости.
2. Предложен физический механизм, объясняющий горизонтальную асимметрию стационарных конфигураций необрушающихся гравитационно-капиллярных волн. Показано, что наибольший вклад в асимметрию дают напряжения Рейнольдса, связанные с «паразитной» капиллярной рябью; для коротких волн значимый вклад в асимметрию вносит также капиллярное утолщение на гребне волны.
3. Построено численное решение уравнений Эйлера в виде уединенной волны конечной амплитуды (солитона) на глубокой воде с постоянной завихренностью для случая, когда волна распространяется вдоль направления сдвига скорости. Определены качественные и количественные отличия построенных решений полностью нелинейных уравнений гидродинамики от известных слабонелинейных аналогов (солитонов уравнения Бенджамина-Оно). Продемонстрирована устойчивость построенных солитонов при амплитудах, не превышающих критической.
4. Изучен процесс столкновения построенных солитонов на потоке с постоянной завихренностью. Показано, что взаимодействие солитонов является почти упругим, но после столкновения солитоны приобретают фазовый сдвиг.
5. Предложена регуляризация квазитрехмерной модели в конформных переменных, которая позволяет значительно улучшить качество воспроизведения картины трехмерных неустойчивостей нелинейных волн, в том числе исключает физически неверную неустойчивость для коротко-

волновых возмущений, распространяющихся почти перпендикулярно к направлению основной волны.

6. Показано, что квазитрехмерная модель в конформных координатах правдоподобно описывает развитие неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Положение зоны неустойчивости и величина инкремента для волн большой крутизны удовлетворительно согласуется с результатами анализа на основе точных трехмерных уравнений движения.

## Список литературы

1. *Hirt C., Nichols B.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. — 1981. — Т. 39, № 1. — С. 201—225.
2. *Tsai W.-T., Yue D. K.* Computation of nonlinear free-surface flows // *Annual review of fluid mechanics*. — 1996. — Т. 28, № 1. — С. 249—278.
3. *Dyachenko A. I., Zakharov V. E., Kuznetsov E. A.* Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid // *Plasma Physics Reports*. — 1996. — Т. 22, № 10. — С. 829—840.
4. *Chalikov D. V.* Numerical modeling of sea waves. — Springer, 2016.
5. *Leykin I., Donelan M., Mellen R., McLaughlin D.* Asymmetry of wind waves studied in a laboratory tank // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 1995. — Т. 2, № 3/4. — С. 280—289.
6. *Caulliez G.* Dissipation regimes for short wind waves // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2013. — Т. 118, № 2. — С. 672—684.
7. *Zavadsky A., Shemer L.* Investigation of statistical parameters of the evolving wind wave field using a laser slope gauge // *Physics of Fluids*. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 056602.
8. *Thomas R., Kharif C., Manna M.* A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity // *Physics of Fluids*. — 2012. — Т. 24, № 12. — С. 127102.
9. *Peregrine D.* Interaction of water waves and currents // *Advances in Applied Mechanics*. Т. 16. — Elsevier, 1976. — С. 9—117.
10. *Shrira V.* Nonlinear waves at the surface of a liquid layer with a constant vorticity // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Т. 286. — 1986. — С. 1332—1336.
11. *Simmen J. A., Saffman P.* Steady deep-water waves on a linear shear current // *Studies in Applied Mathematics*. — 1985. — Т. 73, № 1. — С. 35—57.
12. *Da Silva A. T., Peregrine D.* Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1988. — Т. 195. — С. 281—302.

13. *Vanden-Broeck J.-M.* Steep solitary waves in water of finite depth with constant vorticity // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1994. — T. 274. — C. 339—348.
14. *Vanden-Broeck J.-M.* Periodic waves with constant vorticity in water of infinite depth // *IMA Journal of Applied Mathematics*. — 1996. — T. 56, № 3. — C. 207—217.
15. *Dyachenko S. A., Hur V. M.* Stokes waves with constant vorticity: I. numerical computation // *Studies in Applied Mathematics*. — 2019. — T. 142, № 2. — C. 162—189.
16. *Dyachenko S. A., Hur V. M.* Stokes waves with constant vorticity: folds, gaps and fluid bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2019. — T. 878. — C. 502—521.
17. *Komen G. J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S., Janssen P.* Dynamics and modelling of ocean waves. — 1996.
18. *Clamond D., Grue J.* A fast method for fully nonlinear water-wave computations // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — T. 447. — C. 337—355.
19. *Fochesato C., Dias F.* A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2006. — T. 462, № 2073. — C. 2715—2735.
20. *Ruban V. P.* Quasiplanar steep water waves // *Physical Review E*. — 2005. — T. 71, № 5. — C. 055303.
21. *Ruban V. P., Dreher J.* Numerical modeling of quasiplanar giant water waves // *Physical Review E*. — 2005. — T. 72, № 6. — C. 066303.
22. *Ruban V. P.* Conformal variables in the numerical simulations of long-crested rogue waves // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2010. — T. 185, № 1. — C. 17—33.
23. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *The physics of fluids*. — 1965. — T. 8, № 12. — C. 2182—2189.
24. *Harlow F. H., Shannon J. P., Welch J. E.* Liquid waves by computer // *Science*. — 1965. — T. 149, № 3688. — C. 1092—1093.
25. *Harlow F. H.* PIC and its progeny // *Computer Physics Communications*. — 1988. — T. 48, № 1. — C. 1—10.

26. *Harlow F. H.* Fluid dynamics in group T-3 Los Alamos national laboratory:(LA-UR-03-3852) // *Journal of Computational Physics*. — 2004. — T. 195, № 2. — C. 414—433.
27. *Chan R. K.-C., Street R. L.* A computer study of finite-amplitude water waves // *Journal of computational physics*. — 1970. — T. 6, № 1. — C. 68—94.
28. *Nichols B., Hirt C.* Improved free surface boundary conditions for numerical incompressible-flow calculations // *Journal of computational physics*. — 1971. — T. 8, № 3. — C. 434—448.
29. *Nichols B., Hirt C.* Calculating three-dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures // *Journal of Computational Physics*. — 1973. — T. 12, № 2. — C. 234—246.
30. *Miyata H.* Finite-difference simulation of breaking waves // *Journal of Computational Physics*. — 1986. — T. 65, № 1. — C. 179—214.
31. *Miyata H., Kanai A., Kawamura T., Park J.-C.* Numerical simulation of three-dimensional breaking waves // *Journal of marine science and technology*. — 1996. — T. 1. — C. 183—197.
32. *Floryan J., Rasmussen H.* Numerical methods for viscous flows with moving boundaries // *Applied Mechanics Reviews*. — 1989. — T. 42, № 12. — C. 323—341.
33. *Lin P., Liu P.-F.* Free surface tracking methods and their applications to wave hydrodynamics // *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. — 1999. — C. 213—240.
34. *Mostert W., Popinet S., Deike L.* High-resolution direct simulation of deep water breaking waves: transition to turbulence, bubbles and droplets production // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2022. — T. 942. — A27.
35. *Wu J., Popinet S., Deike L.* Revisiting wind wave growth with fully coupled direct numerical simulations // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2022. — T. 951. — A18.
36. *Paulsen B. T., Bredmose H., Bingham H. B.* An efficient domain decomposition strategy for wave loads on surface piercing circular cylinders // *Coastal Engineering*. — 2014. — T. 86. — C. 57—76.

37. *Lu X., Chandar D. D. J., Chen Y., Lou J.* An overlapping domain decomposition based near-far field coupling method for wave structure interaction simulations // *Coastal Engineering*. — 2017. — Т. 126. — С. 37—50.
38. *Khait A., Ma Z.* On an eddy viscosity model for energetic deep-water surface gravity wave breaking // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2021. — Т. 929. — А29.
39. *Landesman P., Harris J. C., Peyrard C., Benoit M.* Wave–structure interaction by a two–way coupling between a fully nonlinear potential flow model and a Navier–Stokes solver // *Ocean Engineering*. — 2024. — Т. 308. — С. 118209.
40. *Grilli S. T., Guyenne P., Dias F.* A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2001. — Т. 35, № 7. — С. 829—867.
41. *Whitney A. K.* The numerical solution of unsteady free surface flows by conformal mapping // *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics: September 15–19, 1970 University of California, Berkeley*. — Springer. Springer Berlin Heidelberg, 1971. — С. 458—462.
42. *Овсянников Л.* К обоснованию теории мелкой воды // *Динамика сплошной среды*. — 1973. — № 15. — С. 104—125.
43. *Meiron D. I., Orszag S. A., Israeli M.* Applications of numerical conformal mapping // *Journal of Computational Physics*. — 1981. — Т. 40, № 2. — С. 345—360.
44. *Chalikov D. V., Sheinin D.* Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics : тех. отч. / NOAA/NCEP/OMB. — 1996.
45. *Dyachenko A. I., Kuznetsov E. A., Spector M., Zakharov V. E.* Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // *Physics Letters A*. — 1996. — Т. 221, № 1/2. — С. 73—79.
46. *Longuet-Higgins M. S., Cokelet E.* The deformation of steep surface waves on water-I. A numerical method of computation // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1976. — Т. 350, № 1660. — С. 1—26.

47. *New A., McIver P., Peregrine D.* Computations of overturning waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1985. — T. 150. — C. 233—251.
48. *Vinje T., Brevig P.* Numerical simulation of breaking waves // *Advances in Water resources*. — 1981. — T. 4, № 2. — C. 77—82.
49. *Greenhow M., Vinje T., Brevig P., Taylor J.* A theoretical and experimental study of the capsize of Salter's duck in extreme waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1982. — T. 118. — C. 221—239.
50. *Greenhow M.* Wedge entry into initially calm water // *Applied Ocean Research*. — 1987. — T. 9, № 4. — C. 214—223.
51. *Dommermuth D. G., Yue D. K., Lin W., Rapp R., Chan E., Melville W.* Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1988. — T. 189. — C. 423—442.
52. *Grosenbaugh M. A., Yeung R. W.* Nonlinear free-surface flow at a two-dimensional bow // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1989. — T. 209. — C. 57—75.
53. *Greenhow M.* A complex variable method for the floating-body boundary-value problem // *Journal of computational and applied mathematics*. — 1993. — T. 46, № 1/2. — C. 115—128.
54. *Greenhow M., Moyo S.* Water entry and exit of horizontal circular cylinders // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1997. — T. 355, № 1724. — C. 551—563.
55. *Dold J., Peregrine D.* Steep Unsteady Water Waves: an Efficient Computational Scheme // — 1984. — C. 955—967.
56. *Dold J., Peregrine D.* An Efficient Boundary-Integral Method for Steep Unsteady Water Waves // *Numerical Methods for Fluid Dynamics II*. — Oxford University Press, 1986. — C. 671—679.
57. *Dold J.* An efficient surface-integral algorithm applied to unsteady gravity waves // *Journal of Computational Physics*. — 1992. — T. 103, № 1. — C. 90—115.
58. *Cooker M., Peregrine D., Vidal C., Dold J.* The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — T. 215. — C. 1—22.

59. *Tanaka M., Dold J., Lewy M., Peregrine D.* Instability and breaking of a solitary wave // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1987. — T. 185. — C. 235—248.
60. *Dold J., Peregrine D.* Water-Wave Modulation // 20th Intl. Conf. on Coastal Engineering, Taipei. — 1986. — C. 163—175.
61. *Tanaka M.* Maximum amplitude of modulated wavetrain // *Wave Motion*. — 1990. — T. 12, № 6. — C. 559—568.
62. *Henderson K. L., Peregrine D. H., Dold J. W.* Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation // *Wave motion*. — 1999. — T. 29, № 4. — C. 341—361.
63. *Banner M. L., Tian X.* On the determination of the onset of breaking for modulating surface gravity water waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1998. — T. 367. — C. 107—137.
64. *Song J.-B., Banner M. L.* On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part I: Unforced irrotational wave groups // *Journal of Physical Oceanography*. — 2002. — T. 32, № 9. — C. 2541—2558.
65. *Tanveer S.* Singularities in water waves and Rayleigh–Taylor instability // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. — 1991. — T. 435, № 1893. — C. 137—158.
66. *Tanveer S.* Singularities in the classical Rayleigh–Taylor flow: formation and subsequent motion // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. — 1993. — T. 441, № 1913. — C. 501—525.
67. *Fornberg B.* A numerical method for conformal mappings // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1980. — T. 1, № 3. — C. 386—400.
68. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. — 2002. — T. 21, № 3. — C. 283—291.
69. *Ruban V.* Water waves over a strongly undulating bottom // *Physical Review E*. — 2004. — T. 70, № 6. — C. 066302.
70. *Dias F., Bridges T. J.* The numerical computation of freely propagating time-dependent irrotational water waves // *Fluid Dynamics Research*. — 2006. — T. 38, № 12. — C. 803—830.

71. *Chalikov D., Sheinin D.* Modeling extreme waves based on equations of potential flow with a free surface // *Journal of Computational Physics*. — 2005. — T. 210, № 1. — C. 247—273.
72. *Mei C. C., Stiassnie M. A., Yue D. K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. — World Scientific, 2005.
73. *Nishimura N.* Fast multipole accelerated boundary integral equation methods // *Applied mechanics reviews*. — 2002. — T. 55, № 4. — C. 299—324.
74. *Grilli S. T., Dias F., Guyenne P., Fochesato C., Enet F.* Progress in fully nonlinear potential flow modeling of 3D extreme ocean waves // *Advances in numerical simulation of nonlinear water waves*. — 2010. — C. 75—128.
75. *Fructus D., Clamond D., Grue J., Kristiansen Ø.* An efficient model for three-dimensional surface wave simulations: Part I: Free space problems // *Journal of computational physics*. — 2005. — T. 205, № 2. — C. 665—685.
76. *Annenkov S. Y., Shrira V. I.* Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — T. 449. — C. 341—371.
77. *Dommermuth D. G., Yue D. K.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1987. — T. 184. — C. 267—288.
78. *West B. J., Brueckner K. A., Janda R. S., Milder D. M., Milton R. L.* A new numerical method for surface hydrodynamics // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1987. — T. 92, № C11. — C. 11803—11824.
79. *Tanaka M.* A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation // *Fluid Dynamics Research*. — 2001. — T. 28, № 1. — C. 41.
80. *Clamond D., Francius M., Grue J., Kharif C.* Long time interaction of envelope solitons and freak wave formations // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. — 2006. — T. 25, № 5. — C. 536—553.
81. *Craig W., Sulem C.* Numerical simulation of gravity waves // *Journal of Computational Physics*. — 1993. — T. 108, № 1. — C. 73—83.

82. *Holliday D.* On nonlinear interactions in a spectrum of inviscid gravity–capillary surface waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1977. — T. 83, № 4. — C. 737–749.
83. *Milder D. M.* The effects of truncation on surface-wave Hamiltonians // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — T. 217. — C. 249–262.
84. *Zhang J., Hong K., Yue D. K.* Effects of wavelength ratio on wave modelling // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1993. — T. 248. — C. 107–127.
85. *Brueckner K. A., West B. J.* Vindication of mode-coupled descriptions of multiple-scale water wave fields // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1988. — T. 196. — C. 585–592.
86. *Pan Y., Liu Y., Yue D. K.* On high-order perturbation expansion for the study of long–short wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — T. 846. — C. 902–915.
87. *Tian Z., Choi W.* Evolution of deep-water waves under wind forcing and wave breaking effects: Numerical simulations and experimental assessment // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. — 2013. — T. 41. — C. 11–22.
88. *Slunyaev A., Kokorina A.* Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem // *Water Waves*. — 2020. — T. 2, № 2. — C. 243–262.
89. *Valenzuela G.* Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves—A review // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1978. — T. 13, № 1–4. — C. 61–85.
90. *Chapron B., Kerbaol V., Vandemark D., Elfouhaily T.* Importance of peakedness in sea surface slope measurements and applications // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2000. — T. 105, № C7. — C. 17195–17202.
91. *Chapron B., Vandemark D., Elfouhaily T.* On the skewness of the sea slope probability distribution // *Gas Transfer at Water Surfaces*. — 2002. — T. 127. — C. 59–63.
92. *Jeffreys H.* On the formation of water waves by wind // *Proceedings of the Royal Society of London A*. — 1925. — T. 107, № 742. — C. 189–206.
93. *Csanady G.* Air-sea momentum transfer by means of short-crested wavelets // *Journal of Physical Oceanography*. — 1985. — T. 15, № 11. — C. 1486–1501.

94. *Agnon Y., Babanin A., Young I., Chalikov D.* Fine scale inhomogeneity of wind-wave energy input, skewness, and asymmetry // *Geophysical Research Letters*. — 2005. — T. 32, № 12. — C. L12603.
95. *Cox C., Munk W.* Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter // *JOSA*. — 1954. — T. 44, № 11. — C. 838—850.
96. *Cox C., Munk W.* Slopes of the sea surface deduced from photographs of sun glitter // *Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography*. — 1956. — T. 6, № 9. — C. 401—488.
97. *Longuet-Higgins M.* On the skewness of sea-surface slopes // *Journal of Physical Oceanography*. — 1982. — T. 12, № 11. — C. 1283—1291.
98. *Munk W.* An inconvenient sea truth: Spread, steepness, and skewness of surface slopes // *Annual review of marine science*. — 2009. — T. 1. — C. 377—415.
99. *Bailey R., Jones I., Toba Y.* The steepness and shape of wind waves // *Journal of the Oceanographical Society of Japan*. — 1991. — T. 47, № 6. — C. 249—264.
100. *Babanin A., Chalikov D., Young I., Savelyev I.* Numerical and laboratory investigation of breaking of steep two-dimensional waves in deep water // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2010. — T. 644. — C. 433—463.
101. *Banner M., Barthelemy X., Fedele F., Allis M., Benetazzo A., Dias F., Peirson W.* Linking reduced breaking crest speeds to unsteady nonlinear water wave group behavior // *Physical Review Letters*. — 2014. — T. 112, № 11. — C. 114502.
102. *Masuda A., Kuo Y.-Y.* A note on the imaginary part of bispectra // *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*. — 1981. — T. 28, № 3. — C. 213—222.
103. *Elgar S.* Relationships involving third moments and bispectra of a harmonic process // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal processing*. — 1987. — T. 35, № 12. — C. 1725—1726.
104. *Elgar S., Guza R.* Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1985. — T. 161. — C. 425—448.
105. *Fedorov A., Melville W.* A model of strongly forced wind waves // *Journal of Physical Oceanography*. — 2009. — T. 39, № 10. — C. 2502—2522.
106. *Munk W. H.* High frequency spectrum of ocean waves // *J. Mar. Res.* — 1955. — T. 14, № 4. — C. 302—314.

107. *Longuet-Higgins M.* Parasitic capillary waves: a direct calculation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1995. — T. 301. — C. 79—107.
108. *Duncan J.* Spilling breakers // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2001. — T. 33, № 1. — C. 519—547.
109. *Fedorov A. V., Melville W. K.* Nonlinear gravity–capillary waves with forcing and dissipation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1998. — T. 354. — C. 1—42.
110. *Hung L.-P., Tsai W.-T.* The formation of parasitic capillary ripples on gravity–capillary waves and the underlying vortical structures // *Journal of Physical Oceanography*. — 2009. — T. 39, № 2. — C. 263—289.
111. *Ruvinsky K. D., Feldstein F. I., Freidman G. I.* Numerical simulations of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravity–capillary waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1991. — T. 230. — C. 339—353.
112. *Longuet-Higgins M.* Theory of weakly damped Stokes waves: a new formulation and its physical interpretation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1992. — T. 235. — C. 319—324.
113. *Plant W. J.* A relationship between wind stress and wave slope // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1982. — T. 87, № C3. — C. 1961—1967.
114. *Longuet-Higgins M. S.* Mass transport in water waves // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1953. — T. 245, № 903. — C. 535—581.
115. *Phillips O. M.* *The dynamics of the upper ocean*. — Cambridge university press, 1966.
116. *Liu Y., Yan X.-H., Liu W., Hwang P.* The probability density function of ocean surface slopes and its effects on radar backscatter // *Journal of Physical Oceanography*. — 1997. — T. 27, № 5. — C. 782—797.
117. *Álvarez-Borrego J., Martín-Atienza B.* Some statistical properties of surface slopes via remote sensing using variable reflection angle considering a non-Gaussian probability density function // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. — 2013. — T. 10, № 2. — C. 246—250.
118. *Caulliez G., Guérin C.-A.* Higher-order statistical analysis of short wind wave fields // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2012. — T. 117. — C. C06002.

119. *Janssen P.* On some consequences of the canonical transformation in the Hamiltonian theory of water waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2009. — T. 637. — C. 1—44.
120. *Lamb H.* *Hydrodynamics*. — Cambridge university press, 1975.
121. *Caulliez G., Collard F.* Three-dimensional evolution of wind waves from gravity-capillary to short gravity range // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. — 1999. — T. 18, № 3. — C. 389—402. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754699800363> ; Three-Dimensional Aspects of Air-Sea Interaction.
122. *Banner M. L., Phillips O.* On the incipient breaking of small scale waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1974. — T. 65, № 4. — C. 647—656.
123. *Pullin D., Grimshaw R.* Finite-amplitude solitary waves at the interface between two homogeneous fluids // *The Physics of Fluids*. — 1988. — T. 31, № 12. — C. 3550—3559.
124. *Matsuno Y.* Exact multi-soliton solution for nonlinear waves in a stratified fluid of finite depth // *Physics Letters A*. — 1979. — T. 74, № 3/4. — C. 233—235.
125. *Matsuno Y.* Interaction of the Benjamin-Ono solitons // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1980. — T. 13, № 5. — C. 1519.
126. *Ruban V.* Explicit equations for two-dimensional water waves with constant vorticity // *Physical Review E*. — 2008. — T. 77, № 3. — C. 037302.
127. *Choi W.* Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2009. — T. 80, № 1. — C. 29—36.
128. *Tanaka M.* The stability of steep gravity waves // *Journal of the Physical Society of Japan*. — 1983. — T. 52, № 9. — C. 3047—3055.
129. *Longuet-Higgins M., Tanaka M.* On the crest instabilities of steep surface waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1997. — T. 336. — C. 51—68.
130. *Murashige S., Choi W.* Stability analysis of deep-water waves on a linear shear current using unsteady conformal mapping // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2020. — T. 885. — A41.

131. *Lushnikov P. M., Dyachenko S. A., A. Silantyev D.* New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 2017. — T. 473, № 2202. — C. 20170198.
132. *Dosaev A. S., Troitskaya Y. I., Shishina M. I.* Simulation of surface gravity waves in the Dyachenko variables on the free boundary of flow with constant vorticity // *Fluid Dynamics.* — 2017. — T. 52, № 1. — C. 58—70.
133. *Benjamin T. B.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1967. — T. 29, № 3. — C. 559—592.
134. *Chalikov D., Babanin A. V., Sanina E.* Numerical modeling of 3D fully nonlinear potential periodic waves // *Ocean dynamics.* — 2014. — T. 64, № 10. — C. 1469—1486.
135. *Su M.-Y.* Three-dimensional deep-water waves. Part 1. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1982. — T. 124. — C. 73—108.
136. *McLean J. W.* Instabilities of finite-amplitude water waves // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1982. — T. 114. — C. 315—330.

**Публикации автора по теме диссертации**

137. Салин М., Досаев А., Коньков А., Салин Б. Численное моделирование брэгговского рассеяния звука на поверхностном волнении при различных значениях параметра Рэлея // Акустический журнал. — 2014. — Т. 60, № 4. — С. 413.
138. Slunyaev A., Dosaev A. On the incomplete recurrence of modulationally unstable deep-water surface gravity waves // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 66. — P. 167—182.
139. Dosaev A., Troitskaya Y. I., Shrira V. I. On the physical mechanism of front-back asymmetry of non-breaking gravity-capillary waves // Journal of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 906.
140. Dosaev A., Troitskaya Y. I., Shrira V. I. On the physical mechanism of front-back asymmetry of nonlinear gravity-capillary waves // Geophysical Research Abstracts. Vol. 18. — 2016. — EGU2016-5177—2.
141. Dosaev A. S., Troitskaya Y. I. Numerical simulation of two- and three-dimensional gravity-capillary waves // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1163. — IOP Publishing. 2019. — P. 012063.
142. Досаев А., Троицкая Ю., Шишина М. Моделирование в переменных Дьяченко поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока с постоянной завихренностью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2017. — № 1. — С. 62—73.
143. Dosaev A., Shishina M., Troitskaya Y. I. Numerical simulation of solitary gravity waves on deep water with constant vorticity // Physics of Fluids. — 2022. — Vol. 34, no. 9. — P. 092101.
144. Dosaev A., Shishina M., Troitskaya Y. Numerical simulation of solitary gravity waves on deep water with constant vorticity // Geophysical Research Abstracts. Vol. 20. — 2018. — EGU2018—9847.
145. Dosaev A., Shishina M., Troitskaya Y. Stability of solitary waves on deep water with constant vorticity // Geophysical Research Abstracts. — 2021. — EGU21—10197.

146. *Dosaev A. S., Shishina M. I., Troitskaya Y. I.* Numerical simulation of solitary waves on deep water with constant vorticity // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 955. — IOP Publishing. 2018. — P. 012018.
147. *Досаев А. С.* Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерных уравнений движения // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. — 2020. — Т. 56, № 5. — С. 561—566.
148. *Dosaev A., Troitskaya Y.* Numerical simulation of three-dimensional gravity-capillary waves // *Geophysical Research Abstracts*. Vol. 21. — 2019. — EGU2019—8228.
149. *Dosaev A., Troitskaya Y.* Quasi-three-dimensional simulation of crescent-shaped waves // *Geophysical Research Abstracts*. — 2020. — EGU2020—8767.