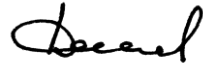


На правах рукописи



ДОСАЕВ Александр Сергеевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ВОЛН НА ВОДЕ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА
КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

1.6.17 – океанология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук» (г. Нижний Новгород).

Научный руководитель: **Троицкая Юлия Игоревна**,
доктор физико-математических наук,
ФИЦ ИПФ им. А.В. Гапонова-Грехова РАН

Официальные
оппоненты: **Шамин Роман Вячеславович**,
доктор физико-математических наук,
Государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
городской университет управления
Правительства Москвы»,
заведующий кафедрой информационных
технологий и математики

Носов Михаил Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное обра-
зовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова»,
заведующий отделением геофизики
Физического факультета

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки «Институт океанологии
им. П. П. Ширшова Российской академии наук»
(г. Москва)


Защита состоится 15 июня 2026 г. в 14 часов на заседании диссертационного
совета 24.1.238.03 при ИПФ РАН по адресу: 603951, г. Нижний Новгород,
ул. Ульянова, 46.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПФ РАН:
www.ipfran.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения,
просьба направлять по адресу: 603951, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46,
ученому секретарю диссертационного совета 24.1.238.03.

Автореферат разослан 4 мая 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук



А. И. Малеханов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Для задачи изучения ветровых волн на воде, как и для геофизической гидродинамики вообще, большое значение имеет развитие эффективных численных методов, позволяющих моделировать эволюцию систем с большим числом степеней свободы, а также проводить большое число расчетов, исследуя зависимость поведения системы от параметров. Численное моделирование является важным инструментом изучения сильно нелинейной динамики волн: в отличие от хорошо развитой слабонелинейной теории, динамика поверхностных волн конечной амплитуды, описываемая точными уравнениями движения, доступна для изучения главным образом через исследование отдельных реализаций, наблюдаемых экспериментально или полученных численными методами. Численное моделирование часто способно предоставить более полную информацию о поведении системы, чем натурные или лабораторные наблюдения.

Сложности в моделировании ветрового волнения обусловлены тем, что важную роль в его динамике играет нелинейность, связывающая эволюцию волн разных масштабов; как для отдельных локальных явлений, так и в целом для развития спектра волнения существенны трехмерные эффекты; помимо эффектов, описываемых теорией потенциальных волн, на динамику различных масштабов волнения оказывают влияние генерация завихренности на свободной поверхности и взаимодействие с вертикально-неоднородным полем течений. Наконец, чтобы наиболее полно воспроизвести условия натуральных наблюдений, необходимо учитывать взаимодействие волн с турбулентным ветровым потоком, влияние обрушений, захвата пузырьков воздуха и генерации брызг, а также прочие факторы. Одновременный учет в численном моделировании всех этих аспектов находится в настоящее время за пределами возможностей вычислительной техники.

Пожалуй, самый широкий круг явлений, связанных с волнами на воде, может в принципе быть воспроизведен в рамках модели, основанной на уравнениях Навье – Стокса для двухфазной жидкости (с использованием, например, метода *Volume of Fluid* [1]). При этом, однако, даже в двумерном случае данный подход требует больших вычислительных ресурсов, поэтому для моделирования реалистичного поля волнения с широким диапазоном масштабов волн он не применим.

Наиболее часто как в численных, так и в аналитических исследованиях волны на воде рассматриваются как потенциальное течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью – в этом случае полевые уравнения для скорости жидкости линейны, и уравнения движения могут быть сформулированы через значения потенциала на границе [2]. В двумерной задаче удобно ввести отслеживающие форму поверхности и зависящие от

времени конформные координаты – это позволяет перейти к решению уравнения Лапласа в области простой формы (в нижней полуплоскости комплексной координаты); величина нормальной скорости, необходимая для задания граничных условий на поверхности воды, в таком представлении допускает эффективное вычисление с использованием быстрого преобразования Фурье [3; 4]. К преимуществам метода конформных преобразований относится также возможность описывать конфигурации с загибом свободной поверхности. В рамках этой методологии могут быть в определенной степени учтены и некоторые из упомянутых выше эффектов, важных для динамики ветровых волн.

Настоящая работа направлена на развитие точных (полностью нелинейных) методов моделирования волн на воде, основанных на использовании конформных координат. Данные методы опробуются для решения геофизических задач, находящихся за пределами существовавших ранее областей их применения:

1) *Исследование физического механизма горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн.* Известно, что гребни крутых волн дециметрового диапазона генерируют «паразитную» капиллярную рябь, которая локализуется на переднем склоне; профиль дециметровой волны при этом становится горизонтально асимметричным, наклоненным вперед. Различие в крутизне переднего и заднего склонов дециметровых волн может иметь некоторое значение для дистанционного зондирования (поскольку рассеяние микроволнового излучения на капиллярной ряби зависит от угла наклона решетки капиллярных гребней), а также оказывать влияние на ветро-волновое взаимодействие. Особо примечателен тот факт, что гравитационно-капиллярные волны могут обладать горизонтальной асимметрией в том числе и в отсутствие обрушений – иными словами, волны этого диапазона демонстрируют существование физического механизма асимметрии, не связанного с обрушениями. Несмотря на определенный прогресс в накоплении экспериментальных данных, имевший место в последние десятилетия [5–7], природа данной асимметрии до сих пор не была установлена.

2) *Моделирование динамики уединенных волн на глубокой воде с завихренностью.* Хотя большая часть исследований, посвященных волнам на воде, рассматривает только потенциальные движения жидкости, в природе существенное влияние на динамику волн оказывает взаимодействие с вертикально-неоднородными течениями. Взаимодействие со сдвиговым течением меняет как дисперсионное соотношение волн, так и их нелинейные свойства – например, скорость роста модуляционной неустойчивости [8] и условия, при которых происходит обрушение [9]. Более того, присутствие сдвигового течения приводит к появлению нового типа волн, не существующего без сдвига, – гравитационных солитонов на глубокой воде

[10]. Простейшей системой, позволяющей воспроизвести некоторые аспекты взаимодействия волн с течением, являются волны на потоке с линейным сдвигом скорости: в двумерной задаче пространственно однородное распределение завихренности приводит к тому, что зависящая от времени компонента поля скорости является чисто потенциальной. Литература, посвященная волнам конечной амплитуды на потоке с постоянной завихренностью, затрагивает в основном стационарные решения, включая периодические волны и солитоны экзотической формы, распространяющиеся против направления сдвига скорости [11–16]. Относительно длинных волн, распространяющихся вдоль сдвига скорости, известно, что их слабонелинейная динамика описывается интегрируемой моделью – уравнением Бенджамина – Оно; в рамках этого уравнения существуют солитонные решения, и взаимодействия солитонов между собой являются упругими. В настоящей работе исследуется вопрос о том, в какой степени полностью нелинейные аналоги солитонов уравнения Бенджамина – Оно сохраняют свои свойства при переходе к конечным амплитудам.

3) *Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерной конформной модели.* Несмотря на то, что двумерная модель позволяет воспроизводить многие важные процессы, такие как развитие модуляционной неустойчивости и начальную фазу обрушения волн, широкий класс эффектов в ней полностью отсутствует. От двумерного моделирования нельзя ожидать правдоподобной динамики спектра волнения – эволюция случайного волнового поля принципиально трехмерна и в значительной степени управляется 4-волновыми взаимодействиями между неколлинеарными пакетами волн [17]. При этом точные трехмерные потенциальные модели, основанные на методе поверхностных интегралов, обладают невысокой производительностью и сложны в реализации [18; 19]. Квазитрехмерная модель волнения, предложенная Рубаном [20–22], является обобщением метода конформных преобразований для трехмерной постановки задачи; модель является точной для двумерных волн и использует предположение, что изменение всех полей в направлении, перпендикулярном к главному, является медленным. Для практического использования этой перспективной модели ключевым является вопрос о границах ее применимости. В частности, представляет интерес изучаемый в настоящей работе вопрос о возможности использования квазитрехмерной модели для моделирования формирования подковообразных волн – существенно трехмерного процесса.

Цели работы

Цели работы включают в себя построение обобщенных моделей, основанных на методе конформных преобразований, с учетом ключевых физических эффектов, определяющих динамику мелкомасштабных волн на поверхности океана (поверхностное натяжение, ветровая генерация и вязкое

затухание, взаимодействие со сдвиговым течением, трехмерные эффекты), и описание значимых для практических приложений свойств этих волн. В связи с этим в работе решаются следующие задачи:

1. Исследование процесса формирования стационарных конфигураций гравитационно-капиллярных волн, обусловленных балансом между ветровой накачкой и нелинейным затуханием. Изучение зависимости асимметрии необрушающихся волн от параметров: периода волны, скорости ветра, коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения.

2. Определение физических механизмов горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн. Сравнение влияния на асимметрию различных факторов: давления ветра, вязких напряжений, сил поверхностного натяжения, связанных с капиллярной рябью напряжений Рейнольдса.

3. Исследование свойств солитонов на потоке с постоянной завихренностью, распространяющихся вдоль направления сдвига; моделирование взаимодействия солитонов.

4. Оценка применимости квазитрехмерной конформной модели для моделирования подковообразных волн. Изучение зоны неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, в рамках приближенных уравнений движения; сравнение положения зоны и величины инкремента неустойчивости с известными результатами анализа на основе точных уравнений.

Научная новизна

Научная новизна работы определяется полученными в ней оригинальными результатами:

1. На основе уравнений Дьяченко путем добавления параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания построена модель ветровых волн дециметрового диапазона.

2. Предложен физический механизм горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн; действие этого механизма продемонстрировано на основе результатов численного моделирования в рамках созданной модели.

3. Построено численное решение уравнений Эйлера в виде уединенной волны конечной амплитуды на глубокой воде с постоянной завихренностью. Исследованы свойства полученных решений, проведено моделирование взаимодействия двух уединенных волн в рамках полностью нелинейных уравнений движения.

4. Показано, что квазитрехмерная конформная модель удовлетворительно описывает процесс формирования подковообразных волн. Предложена регуляризация модели, устраняющая нефизичную зону неустойчивости для волны Стокса, и таким образом обеспечивающая

корректное поведение модели при наличии возмущений, распространяющихся поперечно к главному направлению.

Практическая значимость

Идентифицирован ключевой механизм горизонтальной асимметрии гравитационно-капиллярных волн: это обрушения и микрообрушения, а при их отсутствии – связанные с коротковолновой рябью напряжения Рейнольдса. Данный результат является шагом к разработке модели асимметрии гравитационно-капиллярных волн для дистанционного зондирования.

Поведение солитонов на потоке с постоянной завихренностью может рассматриваться как простейшая модель нелинейной динамики внутренних волн, распространяющихся зонально на экваторе.

Установлено, что квазитрехмерная конформная модель правдоподобно воспроизводит развитие неустойчивости, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Предложена регуляризация приближенных уравнений, устраняющая нефизичную неустойчивость для возмущений, распространяющихся почти перпендикулярно к главному направлению. Полученные результаты открывают новые возможности по практическому применению квазитрехмерной модели.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Численная модель, построенная на основе уравнений Дьяченко с добавлением параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания, удовлетворительно воспроизводит доступные данные прямого численного моделирования и лабораторных наблюдений для режима распространения ветровых волн дециметрового диапазона без обрушений и микрообрушений.

2. В отсутствие обрушений и микрообрушений наиболее значимым фактором, обуславливающим асимметрию стационарных конфигураций гравитационно-капиллярных волн, являются напряжения Рейнольдса, связанные с пакетом паразитной капиллярной ряби. При этом наблюдаемая в численном моделировании горизонтальная асимметрия необрушающихся волн существенно меньше значений, приводимых в литературе для лабораторных измерений при более сильных ветрах, что свидетельствует о том, что ключевым механизмом возникновения асимметрии являются обрушения и микрообрушения.

3. Солитоны на глубокой воде с постоянной завихренностью, распространяющиеся вдоль направления сдвига скорости, устойчивы при амплитудах, не превышающих критической, и могут формироваться в результате распада локализованного начального возмущения. При столкновении эти солитоны взаимодействуют почти упруго, но, в отличие от решений уравнения Бенджамина – Оно, приобретают фазовый сдвиг.

4. Предложенная регуляризация квазитрехмерной конформной модели позволяет исправить некорректное поведение этой модели, устраняя неустойчивость к коротковолновым возмущениям, распространяющимся почти перпендикулярно к направлению основной волны.

5. Квазитрехмерная модель правдоподобно описывает развитие неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Положение зоны неустойчивости и величина инкремента находятся в удовлетворительном соответствии с результатами анализа на основе точных трехмерных уравнений движения.

Достоверность

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с экспериментальными измерениями, расчетами в рамках других моделей и аналитическими результатами. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и международных журналах, докладывались на всероссийских и международных конференциях.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на генеральных ассамблеях Европейского союза наук о Земле (Вена, Австрия, 2016, 2018, 2019, 2020, 2021 гг.), на конференциях “Fluxed and Structures in Fluids” (Калининград, 2015), “Computer Simulation in Physics and Beyond” (Москва, 2017, 2018), на школе-семинаре «Волны-2019» (Москва, 2019). Значительная часть результатов была получена в ходе работ по гранту РФФИ № 18-35-00658 мол_а.

Личный вклад

Автор диссертации лично создал программные реализации всех использованных моделей, провел расчеты (численные эксперименты) и обработал результаты моделирования, принимал активное участие в интерпретации результатов. Помимо этого, в рамках исследований, описанных в Главе 2, автор принимал непосредственное участие в разработке параметризаций ветровой накачки и вязкого затухания для модели на основе уравнений Дьяченко; ему также принадлежит методика оценки вклада различных факторов в наблюдаемую асимметрию необрушающихся волн. Материалы Главы 4 были получены автором полностью самостоятельно. Среди материалов Главы 3 автору принадлежат исследования характеристик стационарных волн и процесса взаимодействия солитонов. Вывод уравнений в переменных Дьяченко для волн на потоке с завихренностью принадлежит М. И. Шишиной; кроме того, она принимала участие в постановке численных экспериментов с распадом локализованного возмущения на сдвиговом течении.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю Юлии Игоревне Троицкой за терпение и поддержку. Автор благодарен профессору Виктору Исаевичу Шпире, без чьего доброжелательного внимания он, вероятно, никогда не решился бы опубликовать ни одной работы.

Публикации

Результаты диссертации изложены в 13 работах автора, из которых 8 – статьи в периодических научных журналах, индексируемых *Web of Science* и *Scopus* и входящих в перечень ВАК, 5 – работы, опубликованные в сборниках трудов конференций.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность работы, формулируются ее цели, кратко излагается содержание диссертации.

Первая глава содержит обзор литературы, который ставит своей целью обозначить место, занимаемое методом конформных преобразований среди прочих методов моделирования волн на воде. Преимуществом полностью нелинейных методов по сравнению со слабонелинейным описанием является способность корректно воспроизводить поведение волн большой крутизны и взаимодействие волн различных масштабов, что особенно важно для моделирования дециметровой и более коротковолновых компонент ветрового волнения. Моделирование на основе уравнений Навье – Стокса, хотя и способно воспроизвести более широкий по сравнению с потенциальными моделями набор важных для мелкомасштабной динамики эффектов (как правило, связанных с изменением топологии занимаемой жидкостью области), сопряжено с заметно более высокими вычислительными затратами. Современная практика применения таких моделей сводится к расчетам, в которых либо область моделирования ограничена небольшим числом периодов основной волны, либо модель, основанная на уравнениях Навье – Стокса, используется в сопряжении с потенциальной моделью. Среди семейства потенциальных моделей конформные модели выделяются высокой производительностью и простотой реализации.

Во **второй главе** («О физическом механизме горизонтальной асимметрии необрушающихся гравитационно-капиллярных волн») описывается применение модели, основанной на уравнениях в конформных координатах (в формулировке Дьяченко), к изучению динамики волн дециметрового диапазона. Эта часть работы посвящена исследованию устойчивых конфигураций гравитационно-капиллярных волн, которые формируются под действием ветровой накачки; в ней обсуждается влияние различных факторов на форму осредненного профиля волны и изучается зависимость асимметрии

профиля от параметров (длины волны, скорости ветра, коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения). Во введении к главе (§ 2.1) отмечается значение горизонтальной асимметрии как характеристики волнового поля, важной для интерпретации данных дистанционного зондирования и являющейся индикатором геофизических процессов, влияющих на обмен газами, теплом и импульсом между атмосферой и океаном. Приводится обзор работ, сообщающих о натуральных и лабораторных измерениях асимметрии.

В § 2.2 формулируются используемые в численной модели приближения и параметризации. В главном порядке движение жидкости считается потенциальным: $v = \nabla\varphi$, в толще жидкости выполняется условие несжимаемости $\Delta\varphi = 0$, на свободной поверхности $y = \eta(x, t)$ выполняются кинематическое и динамическое граничные условия:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + g\eta + p - T\kappa = 0 \quad (2)$$

где p – внешнее давление, κ и T – кривизна поверхности и коэффициент поверхностного натяжения. Эффекты вязкого затухания учитываются в духе квазипотенциальной теории Рувинского с соавторами [23] – для этого в уравнения движения вводится слагаемое, которое можно считать добавкой к внешнему давлению на свободной поверхности:

$$p_{visc} = -4\nu \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}, \quad (3)$$

где ν – кинематическая вязкость, s – длина, измеряемая вдоль свободной поверхности. Включение этого слагаемого позволяет воспроизвести для линейных волн правильный декремент вязкого затухания $-\gamma_{visc} = 2\nu k^2$.

Для компенсации потерь энергии за счет вязкого затухания в модель была введена ветровая накачка. Действие накачки, как и в большинстве моделей генерации волн ветром, моделируется распределением внешнего давления, пропорциональным уклону поверхности. Выбранная параметризация при малых значениях крутизны соответствует майлсовскому механизму генерации волн:

$$p_{wind} = 0,04u^2 \tanh \frac{\partial y/\partial s}{|\partial x/\partial s|}, \quad (4)$$

где u – скорость трения ветра. Для волн малой амплитуды она дает майлсовский инкремент $\gamma_{wind} = 0.04u^2 k^2/2\omega$ [24].

В § 2.3 описывается схема численных экспериментов, результаты моделирования верифицируются по данным расчетов в рамках более точных моделей, приводимым в литературе. Одной из особенностей волн дециметрового диапазона является то, что в их динамике важную роль играет нелинейный механизм затухания, связанный с генерацией «паразитной» капиллярной ряби. Сами капиллярные волны быстро теряют энергию под действием молекулярной вязкости. Мощность, уносимая капиллярной рябью,

возрастает по мере увеличения крутизны основной волны (как следствие заострения ее гребня); при достижении баланса между ветровой накачкой и нелинейным затуханием возможно формирование стационарной конфигурации – волны постоянной формы с «замороженным» на переднем склоне пакетом капиллярной ряби, распространяющейся с постоянной фазовой скоростью. В численных экспериментах моделировалось формирование этих стационарных конфигураций из изначально гладкой волны Стокса; во всех расчетах размер области моделирования составлял один пространственный период волны.

Для верификации результатов, получаемых с использованием потенциальной модели с параметризациями (3)–(4), в рамках этой модели были воспроизведены численные эксперименты, описанные в работах Хуна и Цая [25] (генерация ряби волной Стокса в отсутствие ветра, точная модель на основе уравнений Навье – Стокса) и Федорова и Мелвилла [26] (стационарные профили гравитационно-капиллярных волн с накачкой внешним давлением, потенциальная модель с явным учетом малой завихренной добавки к полю скорости). В ходе этих расчетов было обнаружено, что часть профилей с большими значениями крутизны, полученных Федоровым и Мелвиллом в стационарной постановке задачи, являются неустойчивыми и не могут быть сформированы самопроизвольно в нестационарном моделировании.

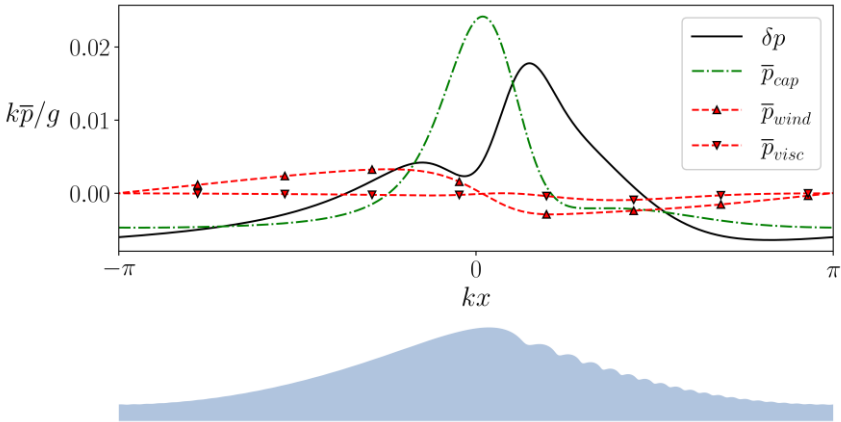


Рис. 1. Слагаемые в осредненном уравнении (7): эффективное давление δp , капиллярное $p_{cap} = -T \kappa$, ветровое p_{wind} и вязкое p_{visc} давление. Все величины рассчитаны для примера стационарной конфигурации $\lambda = 10$ см, $u_* = 20$ см/с, параметр осреднения $\sigma = 0,2\lambda$

В § 2.4 исследуется влияние различных факторов на осредненный профиль волны и обсуждаются физические причины возникновения его горизонтальной асимметрии. В качестве меры асимметрии используется третий момент функции возвышения

$$A\{\eta\} = \langle (\hat{H}\eta)^3 \rangle / \sqrt{\langle \eta^2 \rangle^3}, \quad (5)$$

где \hat{H} – преобразование Гильберта, угловые скобки означают осреднение по ансамблю или, в контексте данной задачи, просто интеграл по периоду волны. Будучи выраженной через амплитуды гармоник, эта величина в старшем порядке пропорциональна нормированной амплитуде асимметричной второй гармоники ($\sin 2kx$):

$$\eta(x) = a \cos kx + \sum_{n \geq 2} (a_n \cos nkx + b_n \sin nkx), A\{\eta\} \approx -\frac{3b_2}{\sqrt{2}a}. \quad (6)$$

Таким образом, асимметрия (5) характеризует главным образом форму основной волны и мало зависит от формы коротковолновой ряби, что является одним из преимуществ данного определения.

Предметом изучения в данной главе являются именно осредненные профили волн, на которых рябь устранена фильтрацией высоких гармоник. Для определенности выбирается Гауссов фильтр с масштабом осреднения $\sigma = \lambda/5$. Задаваясь вопросом о законах, которым подчиняется осредненное движение, мы должны полностью определить среднее состояние, т. е. указать, что имеется в виду как под осредненным профилем волны, так и под осредненным полем скорости жидкости. Если для поля возвышения η выбор операции осреднения диктуется контекстом задачи, то вопрос о среднем поле скоростей представляется более сложным. Эйлерово или лагранжево осреднение компонент скорости даст в общем случае поле с завихренностью, что означает, что потенциальное точное поле скорости пришлось бы раскладывать на сумму завихренного среднего и завихренной осцилляторной добавки. Кроме того, полученное таким образом среднее поле скорости, вообще говоря, кинематически несовместимо с движением осредненной поверхности η .

В настоящем исследовании требуется, чтобы среднее поле скорости 1) было потенциальным с такой же асимптотикой на большой глубине, как и у исходного поля, и 2) было кинематически совместимо с движением средней поверхности, т. е. удовлетворяло кинематическому ГУ вида (1); оказывается, что этими двумя условиями поле определяется однозначно. Для определяемого таким образом среднего состояния $(\bar{\eta}, \bar{\Phi})$ можно записать уравнения, которые аналогичны обычным уравнениям движения жидкости со свободной поверхностью (1), (2):

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \bar{\Phi}|^2 + g\bar{\eta} - T\bar{\kappa} + \bar{p} + \delta p = 0. \quad (8)$$

Здесь кинематическое граничное условие (6) удовлетворяется по построению поля $\bar{\Phi}$, а динамическое граничное условие (7) можно считать определением δp . В стационарном случае ($\eta_t = 0, \varphi_t = 0$), примером которого является стационарная конфигурация гравитационно-капиллярной волны, рассматриваемая в связанной с волной системе отсчета, поле «эффektivного

давления» δp получает простое выражение

$$\delta p = \frac{1}{2} \left(|\nabla\varphi|^2 - |\nabla\Phi|^2 \right) \quad (9)$$

и может быть интерпретировано как напряжения Рейнольдса, связанные с короткими волнами. На рис. 1 показан пример распределения δp и некоторых других слагаемых осредненного уравнения (7).

Для ответа на главный вопрос – почему гравитационно-капиллярные волны наклонены вперед? – предлагается простейшая модель, связывающая между собой отдельные компоненты самосогласованных полей возвышения и внешнего давления. В первом приближении можно считать, что поле давления ветра и положение пакета капиллярной ряби задаются главным образом симметричной составляющей профиля волны. Тогда асимметричную поправку к среднему профилю можно оценить как линейный отклик на приложенное внешнее давление

Чтобы достичь максимального упрощения, мы пренебрегаем полем скорости основной волны, считая, что внешнее давление приложено к поверхности однородного потока, имеющего скорость $v_x = -c$. Особый интерес представляет вторая гармоника профиля, которая в основном и делает его асимметричным. В соответствии с работой [27, § 270], каждому слагаемому $p_i(x)$ суммы (9) приписывается вклад в амплитуду асимметричной второй гармоники $\sin 2kx$ профиля $\eta(x)$, равный

$$\eta_{2,i} = \frac{p_{2,i}}{2c^2k - g - 4Tk^2}, p_{2,i} = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} p_i(x) \sin 2kx dx, \quad (10)$$

где начало отсчета $x = 0$ выбирается так, чтобы соответствовать нулевой фазе основной гармоники волны. Согласно (10), если внешнее давление p локализовано на переднем склоне волны близко к ее гребню, то профиль волны будет наклонен вперед, что соответствует отрицательному знаку асимметрии (5). Именно такая локализация обеспечивается распределением напряжений Рейнольдса δp , которые дают наибольший вклад в асимметричную вторую гармонику давления. Помимо деформации осредненного профиля, связанной с действием «эффективного давления» δp , рассматривается также более простой, чисто геометрический эффект: некоторый вклад во вторую гармонику профиля создается и капиллярным утолщением на гребне волны. Этот вклад оценивается как

$$\eta_{2bulb} = \frac{2}{\lambda} \int_{-d}^d \eta(x) \sin 2kx dx, \quad (11)$$

где $x = d$ соответствует первой впадине капиллярной ряби, считая от гребня основной волны. Можно ожидать, что вклад капиллярной «бульбы» в асимметрию будет существенен для коротких волн с длиной $\lambda < 10$ см, для которых длина основной волны и характерные масштабы «бульбы» становятся близки.

В § 2.5 проводится исследование пространства параметров и проверяется справедливость оценок, предложенных в § 2.4. В численных экспериментах исследовался диапазон длин волн от 5 до 25 см. Для заданной λ нижняя граница u_* , при которых существует нетривиальная стационарная конфигурация, определяется балансом между накачкой и затуханием $\gamma_{wind} + \gamma_{visc} = 0$. Верхняя граница u_* определялась неустойчивостью пакета капиллярных волн, развитие которой приводило к локальному увеличению амплитуды ряби и заканчивалось самопересечением свободной поверхности. Эти границы отмечены на рис. 2. Расчеты показали, что для коротких волн ($\lambda = 5$ см) конечная конфигурация может зависеть от предистории изменения скорости ветра, т. е. стационарная конфигурация не является единственной. Для более длинных волн $\lambda = 6$ см подобная неединственность не была обнаружена. Сравнение результатов моделирования с оценками (10) и (11) показывает, что суммарный вклад упомянутых в § 2.4 факторов с хорошей точностью предсказывает амплитуду асимметричной второй гармоники для волн длиннее 10 см (рис. 3). Количественное согласие для 15 и 20 см волн может быть далее улучшено путем учета в формуле (10) замедления потока жидкости на гребне волны.

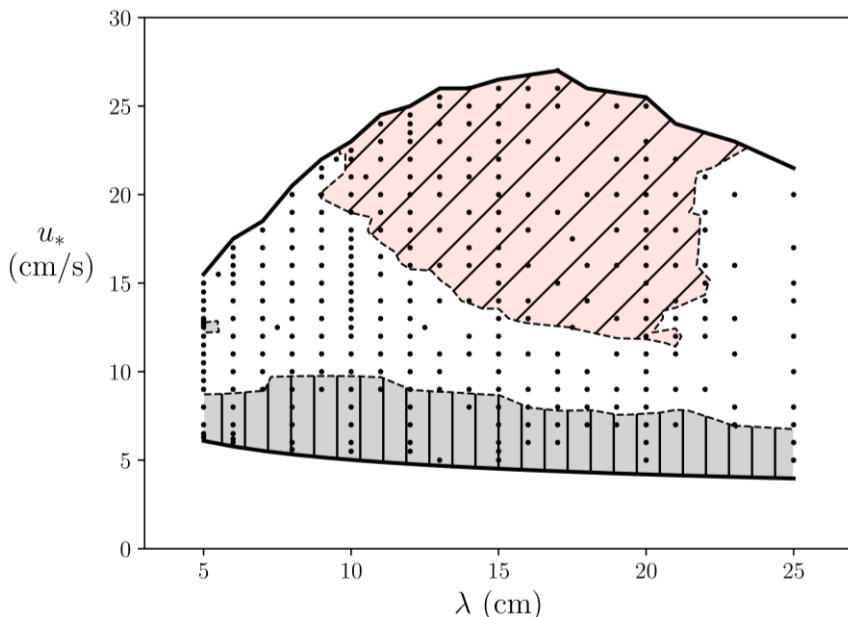


Рис. 2. Пространство параметров задачи о стационарных конфигурациях гравитационно-капиллярных волн. Штриховкой отмечены области, где стационарная конфигурация достигалась менее, чем за 10 (косая штриховка), или более, чем за 100 (прямая штриховка) линейных периодов

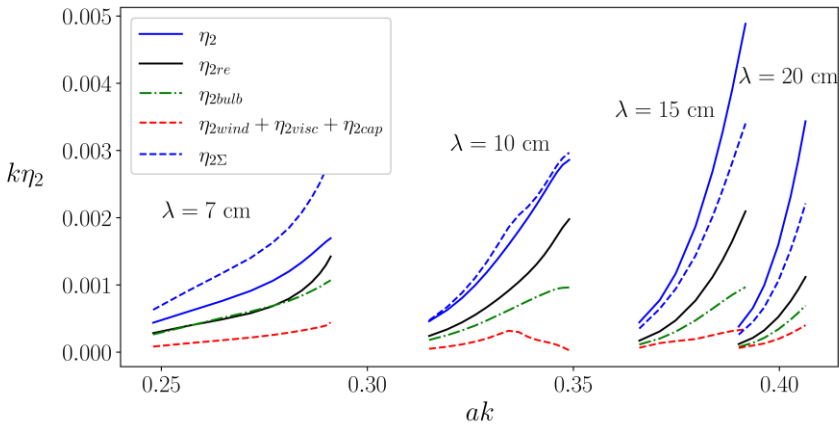


Рис. 3. Амплитуда второй гармоники η_2 стационарных профилей как функция крутизны ak при разных значениях длины волны λ : наблюдаемые значения (синяя сплошная линия), оценка вклада напряжений Рейнольдса (10) (черная сплошная линия) и суммы прочих компонент давления (красный пунктир), оценка вклада капиллярной «бульбы» (11) (зеленый штрихпунктир), суммарный вклад всех механизмов (синий пунктир)

В § 2.6 обсуждается влияние неучтенных в настоящем исследовании факторов, исследуется чувствительность результатов моделирования к изменению коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения, а также проводится сравнение с доступными данными экспериментальных измерений асимметрии. Отмечается, что принятое предположение о строгой периодичности движения в пространстве является серьезным ограничением. В условиях реалистичного морского волнения модуляция гравитационно-капиллярных волн и их взаимодействие с более длинными волнами может нарушать баланс между старшими гармониками и препятствовать формированию стационарных конфигураций.

Наблюдаемые в численном моделировании значения асимметрии сопоставляются на рис. 4 с данными лабораторных экспериментов, приводимыми в работах [5, 7]. Обращает на себя внимание то, что в экспериментах Завадского и Шемера [7] асимметрия 10–20 см волн оказывается почти на порядок выше значений, полученных в настоящей работе. На природу этого расхождения проливает свет статья Колье [6], в которой записи волнения анализируются с точки зрения доминирующего механизма диссипации. Параметры волнения, наблюдаемые Завадским и Шемером, близки к таковым для «режима III» по классификации Колье – данный режим характеризуется присутствием микрообрушений. Результаты же численного моделирования согласуются с наблюдениями для «режима II», в котором микрообрушения отсутствуют. Как следствие этого, можно

предположить, что ключевым фактором, обуславливающим высокие значения асимметрии в режиме III, являются микрообрушения; для более длинных волн также может быть важно наличие обрушений. В отсутствие обрушений и микрообрушений асимметрия дециметровых волн обусловлена главным образом действием напряжений Рейнольдса (8).

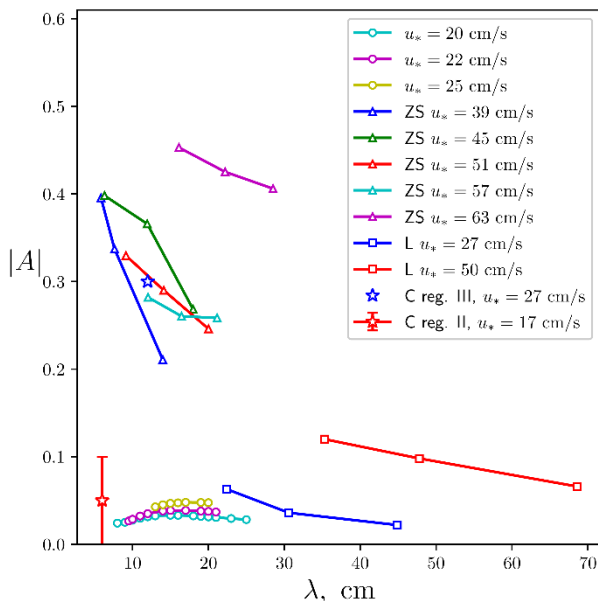


Рис. 4. Сравнение результатов численного моделирования (линии с круглыми маркерами) с экспериментальными наблюдениями из работ Лейкина и др. [5] (линии с квадратными маркерами, выбраны только точки с $u_* < 80$ см/с), Колье [6] (звездочки) и Завадского и Шемера [7] (линии с треугольными маркерами)

В заключении к главе (§ 2.7) формулируются основные выводы. Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [A1–A3].

В третьей главе (Численное моделирование уединенных гравитационных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью) изучаются свойства и характер взаимодействия между собой солитонов конечной амплитуды. Во введении к главе § 3.1 приводится обзор литературы, посвященной исследованиям волн с постоянной завихренностью, и указывается на существование интегрируемой модели – уравнения Бенджамина – Оно (БО) – для слабодиспергирующих волн, распространяющихся вдоль сдвига скорости. Именно солитоны, распространяющиеся вдоль направления сдвига, и являются предметом

изучения в данной главе. В § 3.2 приводятся уравнения движения системы в декартовых и в конформных координатах. Для численного моделирования используются уравнения в переменных Дьяченко.

Раздел § 3.3 посвящен исследованию периодических стационарных решений. Интерес к периодическим решениям в контексте данной главы обусловлен тем, что солитоны с медленно спадающими степенными хвостами, каковыми являются солитоны БО, не могут быть эффективно и с априори гарантированной точностью представлены на равномерной периодической координатной сетке, которая используется в конформной модели. По этой причине свойства солитонов приходится исследовать через изучение свойств периодических решений, устремляя период к бесконечности. Гребни длинных волн, действительно, оказываются локализованными на малой части периода и напоминают солитоны. Поскольку уравнения движения содержат лишь два параметра – ускорение свободного падения g и завихренность ω – они могут быть полностью обезразмерены путем выбора масштабов по координатам и по времени. Естественным пространственным масштабом задачи является $\lambda_g = g/\omega^2$. В безразмерных координатах периодические волны представляют собой двухпараметрическое, а солитоны – однопараметрическое семейство решений.

Изучение стационарных решений показывает, что для длинных волн существует зависящая от длины волны критическая амплитуда, при которой достигается максимум энергии волны (рис. 5); с увеличением длины волны эта амплитуда приближается к $h \approx 0,467\lambda_g$. Как следствие, все волны с высотой, превышающей критическую, являются неустойчивыми. Для изучения столкновений солитонов представляют интерес только устойчивые решения.

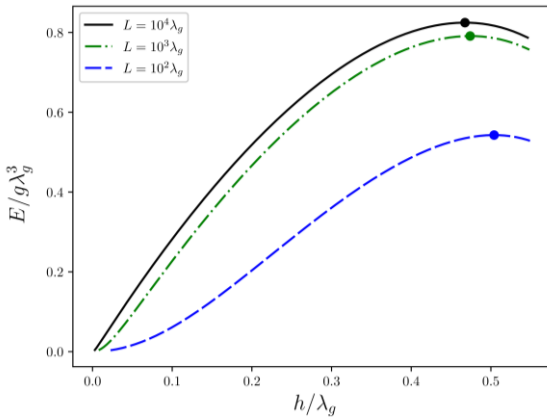


Рис. 5. Зависимость энергии от высоты волны для волн с постоянной завихренностью при разных значениях периода L

В § 3.4 приводятся результаты нестационарного численного моделирования. В первой серии численных экспериментов моделируется формирование солитонов при распаде локализованного возмущения. Демонстрируется, что параметры рожденных солитонов согласуются с параметрами полученных в § 3.3 стационарных решений.

Вторая серия экспериментов посвящена исследованию парных столкновений солитонов. Начальные условия в этих расчетах конструировались из профилей одиночных стационарных волн. Поскольку солитоны имеют степенные хвосты и взаимодействуют между собой на больших расстояниях, не представляется возможным начать расчет из положения, когда взаимодействие заведомо пренебрежимо мало; отсюда вытекает необходимость исследовать зависимость результатов столкновений от начального расстояния ΔL_0 между солитонами. Длительность расчетов по времени составляла $2t_c$, где $t_c = \Delta L_0 / (c_1 - c_2)$ – прогнозируемое время до столкновения, $c_{1,2}$ – фазовые скорости солитонов в отсутствие взаимодействия. Чтобы иметь возможность сравнивать результаты расчетов с двухсолитонным решением БО, мы определяем «кажущийся» (т. е. измеренный на конечных временах наблюдения) сдвиг фазы:

$$\Delta x_n = [x_n(2t_c) - x_n(0)] - [\dot{x}_n(0) + \dot{x}_n(2t_c)]t_c \quad (12)$$

где $x_n(t)$ – наблюдаемая траектория n -й волны (определяемая как положение локального максимума возвышения), $\dot{x}_n(t)$ – ее скорость. Этот «кажущийся» сдвиг фазы отличен от нуля в том числе и для двухсолитонных решений уравнения БО, и лишь стремится к нулю (в рамках уравнения БО) при $t_c \rightarrow \infty$.

Результаты измерения сдвигов фазы представлены на рис. 6. Всего было исследовано три набора амплитуд, для каждого из них было выполнено несколько численных экспериментов с различающимися глобальными периодами L и начальными расстояниями ΔL_0 . Во всех случаях реализовывался обменный сценарий взаимодействия. Как показывают расчеты, поведение солитонов небольшой амплитуды ($h \sim 0,1\lambda_g$) оказывается близко к предсказаниям БО, тогда как более высокие солитоны получают в результате столкновения фазовые сдвиги. Амплитуды изменяются незначительно, что говорит о почти упругом характере взаимодействия.

В заключении в главе (§ 3.5) перечисляются полученные результаты. Обращается внимание на то, что для волн на воде может быть нереалистичным требование, чтобы в системе одновременно был реализован режим глубокой воды $L < 2D$ (D – глубина) и величина завихренности была достаточной для локализации гребня на периоде $\lambda_g = g/\omega^2 \ll L$. Примером геофизического процесса, где удовлетворить данным условиям может быть легче, являются внутренние волны, распространяющиеся зонально на экваторе; в этом случае наличие завихренности обусловлено вращением Земли, а эффективное ускорение свободного падения g^* существенно уменьшается. Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [A4–A6].

Четвертая глава «Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерных уравнений движения» посвящена исследованию границ применимости квазитрехмерной конформной модели. Во введении к главе (§ 4.1) излагается основная идея предложенного В. П. Рубаном [20—22] метода использования конформных координат в трехмерной задаче. В § 4.2 приводятся уравнения модели Рубана в том виде, в котором они применяются в настоящей работе.

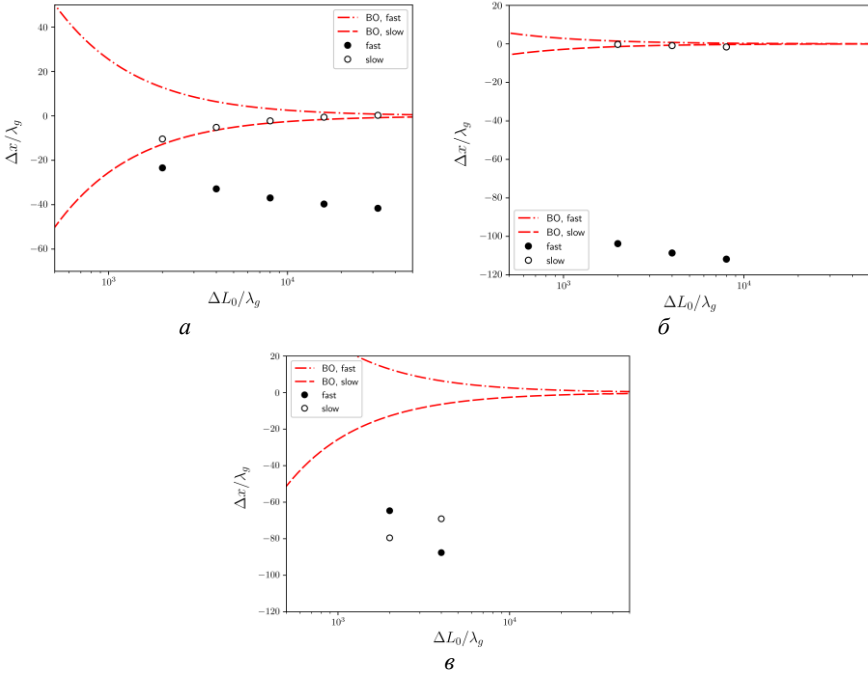


Рис. 6. Фазовые сдвиги усиненных волн как функции начального расстояния. Параметры: $a - h_1 = 0,15\lambda_g$, $h_2 = 0,05\lambda_g$, $\bar{b} - h_1 = 0,40\lambda_g$, $h_2 = 0,10\lambda_g$, $\bar{v} - h_1 = 0,40\lambda_g$, $h_2 = 0,30\lambda_g$. Пунктиром показаны кажущиеся фазовые сдвиги для двухсолитонного решения БО

В § 4.3 описывается нефизичная неустойчивость волны Стокса по отношению к коротковолновым поперечным возмущениям, которая присутствует в оригинальной модели и проявляется при попытке моделирования подковообразных волн. Данная неустойчивость связана с кубическими слагаемыми в трехмерной части функционала Гамильтона системы, но проявляется только при использовании регуляризации, восстанавливающей правильное дисперсионное соотношение для линейных волн на всей плоскости волновых чисел. Для устранения неустойчивости предлагается регуляризация, маскирующая вклад указанных слагаемых в

гармоники, близкие в поперечному направлению.

В § 4.4 проводится анализ устойчивости волны Стокса в рамках квазитрехмерной модели. На рис. 7 показаны зоны неустойчивости, рассчитанные для оригинальных и для регуляризованных уравнений; можно видеть, что предложенная в § 4.3 регуляризация действительно устраняет неустойчивость для гармоник, близких к поперечной оси.

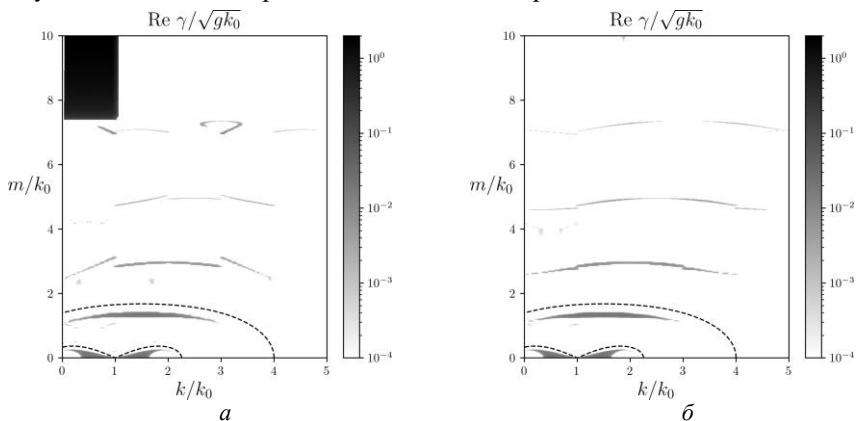


Рис. 7. Зоны неустойчивости волны Стокса на плоскости волновых векторов возмущений, рассчитанные в рамках *a* оригинальной и *б* модифицированной модели. (k, m) – продольное и поперечное волновые числа. Крутизна основной волны $ak_0 = 0,3$. Пунктиром изображены резонансные кривые, соответствующие 4- и 5-волновым взаимодействиям

Формирование подковообразных волн обусловлено неустойчивостью, связанной с 5-волновыми взаимодействиями (соответствующая резонансная кривая также отмечена на рис. 7). На рис. 8 приводится график инкремента наиболее неустойчивой моды 5-волновой зоны неустойчивости; можно видеть, что результаты расчета в рамках квазитрехмерной модели удовлетворительно согласуются с точным анализом из работы МакЛина [28].

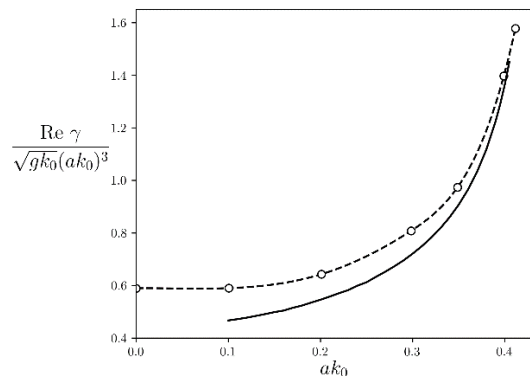


Рис. 8. Максимальный инкремент трехмерной неустойчивости в зависимости от крутизны основной волны. Сплошная линия – результаты расчета в рамках квазитрехмерной модели. Белые маркеры и пунктир – данные из работы [28]

В заключении к главе (§ 4.5) подводятся итоги исследования. Изложенные в четвертой главе результаты опубликованы в работах [A7, A8].

В **заключении** перечислены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Предложена численная модель ветровых волн на воде, основанная на уравнениях движения для двумерного потенциального течения в конформных координатах с добавлением параметризаций ключевых для динамики волн дециметрового диапазона эффектов: ветровой накачки и вязкого затухания. Показано, что модель удовлетворительно воспроизводит результаты прямого численного моделирования гравитационно-капиллярных волн в рамках уравнений Навье – Стокса и в рамках квазипотенциальной модели с явным учетом завихренной поправки к полю скорости.

2. Предложен физический механизм, объясняющий горизонтальную асимметрию стационарных конфигураций необрушающихся гравитационно-капиллярных волн. Показано, что наибольший вклад в асимметрию дают напряжения Рейнольдса, связанные с «паразитной» капиллярной рябью; для коротких волн значимый вклад в асимметрию вносит также капиллярное утолщение на гребне волны.

3. Построено численное решение уравнений Эйлера в виде уединенной волны конечной амплитуды (солитона) на глубокой воде с постоянной завихренностью для случая, когда волна распространяется вдоль направления сдвига скорости. Определены качественные и количественные отличия построенных решений полностью нелинейных уравнений гидродинамики от известных слабонелинейных аналогов (солитонов уравнения Бенджамина – Оно). Продемонстрирована устойчивость построенных солитонов при амплитудах, не превышающих критического значения.

4. Изучен процесс столкновения построенных солитонов на потоке с постоянной завихренностью. Показано, что взаимодействие солитонов является почти упругим, но после столкновения солитоны приобретают фазовый сдвиг.

5. Предложена регуляризация квазитрехмерной модели в конформных переменных, которая позволяет значительно улучшить качество воспроизведения картины трехмерных неустойчивостей нелинейных волн, в том числе исключает физически неверную неустойчивость для коротковолновых возмущений, распространяющихся почти перпендикулярно к направлению основной волны.

6. Показано, что квазитрехмерная модель в конформных координатах правдоподобно описывает развитие неустойчивости волны Стокса, связанной с 5-волновыми взаимодействиями, и формирование подковообразных волн. Положение зоны неустойчивости и величина инкремента для волн большой крутизны удовлетворительно согласуется с результатами анализа на основе точных трехмерных уравнений движения.

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. *Dosaev A., Troitskaya Y. I., Shkira V. I.* On the physical mechanism of front-back asymmetry of non-breaking gravity-capillary waves // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2021. – V. 906.
- A2. *Салин М., Досаев А., Коньков А., Салин Б.* Численное моделирование брэгговского рассеяния звука на поверхностном волнении при различных значениях параметра Рэлея // *Акустический журнал.* – 2014. – Т. 60, № 4. – С. 413.
- A3. *Slunyaev A., Dosaev A.* On the incomplete recurrence of modulationally unstable deep-water surface gravity waves // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2019. – V. 66. – P. 167–182.
- A4. *Dosaev A., Shishina M., Troitskaya Y. I.* Numerical simulation of solitary gravity waves on deep water with constant vorticity // *Physics of Fluids.* – 2022. – V. 34, no. 9. – P. 092101.
- A5. *Dosaev A. S., Shishina M. I., Troitskaya Y. I.* Numerical simulation of solitary waves on deep water with constant vorticity // *Journal of Physics: Conference Series.* V. 955. – IOP Publishing, 2018. – P. 012018.
- A6. *Досаев А., Троицкая Ю., Шишина М.* Моделирование в переменных Дьяченко поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока с постоянной завихренностью // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2017. – № 1. – С. 62–73.
- A7. *Досаев А. С.* Моделирование подковообразных волн в рамках квазитрехмерных уравнений движения // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана.* – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 561–566.
- A8. *Dosaev A. S., Troitskaya Y. I.* Numerical simulation of two- and three- dimensional gravity-capillary waves // *Journal of Physics: Conference Series.* V. 1163. – IOP Publishing, 2019. – P. 012063.

Список литературы

1. *Hirt C., Nichols B.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics.* – 1981. – V. 39, no. 1. – P. 201–225.
2. *Tsai W.-T., Yue D. K.* Computation of nonlinear free-surface flows // *Annual review of fluid mechanics.* – 1996. – V. 28, no. 1. – P. 249–278.
3. *Dyachenko A. I., Zakharov V. E., Kuznetsov E. A.* Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid // *Plasma Physics Reports.* – 1996. – V. 22, no. 10. – P. 829–840.
4. *Chalikov D. V.* Numerical modeling of sea waves. – Springer, 2016.
5. *Leykin I., Donelan M., Mellen R., McLaughlin D.* Asymmetry of wind waves studied in a laboratory tank // *Nonlinear Processes in Geophysics.* – 1995. – V. 2, no. 3/4. – P. 280–289.
6. *Caulliez G.* Dissipation regimes for short wind waves // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* – 2013. – V. 118, no. 2. – P. 672–684.
7. *Zavadsky A., Shemer L.* Investigation of statistical parameters of the evolving wind wave field using a laser slope gauge // *Physics of Fluids.* – 2017. – V. 29, no. 5. – P. 056602.
8. *Thomas R., Kharif C., Manna M.* A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity // *Physics of Fluids.* – 2012. – V. 24, no. 12. –

P. 127102.

9. *Peregrine D.* Interaction of water waves and currents // *Advances in Applied Mechanics*. V. 16. – Elsevier, 1976. – P. 9–117.

10. *Shrira V.* Nonlinear waves at the surface of a liquid layer with a constant vorticity // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. V. 286. – 1986. – P. 1332–1336.

11. *Simmen J. A., Saffman P.* Steady deep-water waves on a linear shear current // *Studies in Applied Mathematics*. – 1985. – V. 73, no. 1. – P. 35–57.

12. *Da Silva A. T., Peregrine D.* Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1988. – V. 195. – P. 281–302.

13. *Vanden-Broeck J.-M.* Steep solitary waves in water of finite depth with constant vorticity // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1994. – V. 274. – P. 339–348.

14. *Vanden-Broeck J.-M.* Periodic waves with constant vorticity in water of infinite depth // *IMA Journal of Applied Mathematics*. – 1996. – V. 56, no. 3. – P. 207–217.

15. *Dyachenko S. A., Hur V. M.* Stokes waves with constant vorticity: I. numerical computation // *Studies in Applied Mathematics*. – 2019. – V. 142, no. 2. – P. 162–189.

16. *Dyachenko S. A., Hur V. M.* Stokes waves with constant vorticity: folds, gaps and fluid bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2019. – V. 878. – P. 502–521.

17. *Komen G. J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S., Janssen P.* Dynamics and modelling of ocean waves. – 1996.

18. *Clamond D., Gruel J.* A fast method for fully nonlinear water-wave computations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – V. 447. – P. 337–355.

19. *Fochesato C., Dias F.* A fast method for nonlinear three-dimensional free- surface waves // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2006. – V. 462, no. 2073. – P. 2715–2735.

20. *Ruban V. P.* Quasiplanar steep water waves // *Physical Review E*. – 2005. – V. 71, no. 5. – P. 055303.

21. *Ruban V. P., Dreher J.* Numerical modeling of quasiplanar giant water waves // *Physical Review E*. – 2005. – V. 72, no. 6. – P. 066303.

22. *Ruban V. P.* Conformal variables in the numerical simulations of long-crested rogue waves // *The European Physical Journal Special Topics*. – 2010. – V. 185, no. 1. – P. 17–33.

23. *Ruvinsky K. D., Feldstein F. I., Freidman G. I.* Numerical simulations of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravity–capillary waves // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1991. – V. 230. – P. 339–353.

24. *Plant W. J.* A relationship between wind stress and wave slope // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. – 1982. – V. 87, no. C3. – P. 1961–1967.

25. *Hung L.-P., Tsai W.-T.* The formation of parasitic capillary ripples on gravity-capillary waves and the underlying vortical structures // *Journal of Physical Oceanography*. – 2009. – V. 39, no. 2. – P. 263–289.

26. *Fedorov A. V., Melville W. K.* Nonlinear gravity–capillary waves with forcing and dissipation // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – V. 354. – P. 1–42.

27. *Lamb H.* *Hydrodynamics*. – Cambridge university press, 1975.

28. *McLean J. W.* Instabilities of finite-amplitude water waves // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1982. – V. 114. – P. 315–330.

ДОСАЕВ Александр Сергеевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ВОЛН НА ВОДЕ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА
КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Автореферат

Подписано к печати 08.04.2026 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Усл. печ. л. 1,5.
Тираж 100 экз. Заказ № 12 (2026).

Отпечатано на ризографе в типографии Института прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук, 603951, г. Нижний Новгород,
ул. Ульянова, 46