

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова–Грехова Российской академии наук»

На правах рукописи

Емельянова Анастасия Александровна

**Смешанная динамика в коэволюционных ансамблях
осцилляторов Курамото**

1.3.4 — Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, член–корреспондент РАН
Некоркин Владимир Исаакович

Нижний Новгород — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Динамика коэволюционных ансамблей двух осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка	12
1.1 Введение	12
1.2 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с расстройкой собственных частот	14
1.2.1 Модель	14
1.2.2 Пересечение хаотического аттрактора с хаотическим репеллером	15
1.2.3 Обратимое ядро и характеристики смешанной динамики	21
1.2.4 Быстро–медленная динамика системы (1.6)	26
1.2.5 Двумерная система на аппроксимирующей поверхности и хаотическая динамика системы (1.6)	32
1.3 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула	41
1.3.1 Модель	41
1.3.2 Возникновение смешанной динамики под действием внешней силы	41
1.3.3 Влияние внешней силы на обратимое ядро	47
1.4 Система двух коэволюционно связанных активных ротаторов	48
1.4.1 Модель	48
1.4.2 Возникновение смешанной динамики при учёте неизохронности элемента системы	49
1.4.3 Влияние параметра неизохронности на обратимое ядро	53
1.5 Генератор хаотических колебаний на основе смешанной динамики в системе двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото	55
1.5.1 Блок-схема генератора	55
1.5.2 Динамика системы (1.30)	57
1.5.3 Режимы генератора	59
1.6 Выводы по первой главе	66

Глава 2. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка	69
2.1 Введение	69
2.2 Стационарные режимы	70
2.3 Переходные режимы	78
2.4 Выводы по второй главе	81
Глава 3. Динамика коэволюционного ансамбля трёх осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка	82
3.1 Введение	82
3.2 Смешанная динамика	83
3.3 Приложение к нейродинамике	87
3.4 Выводы по третьей главе	89
Глава 4. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка	91
4.1 Введение	91
4.2 Стационарные режимы	92
4.3 Переходные режимы	101
4.4 Выводы по четвёртой главе	104
Заключение	105
Список литературы	107
Приложение А. Характеристики смешанной динамики в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото	120
Приложение Б. Синхронизация в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото в задачах нейродинамики	121

Введение

Многие радиофизические системы состоят из взаимосвязанных автоколебательных элементов. Например, к ним относятся массивы джозефсоновских контактов, энергосети, сети фазовой синхронизации и др. В моделях, описывающих динамику таких систем, обычно используются переменные, характеризующие амплитуды и фазы колебаний, которые отражают автоколебательные свойства элементов. Однако в 1975 году японский исследователь Курамото (Y. Kuramoto), опираясь на концепцию, введённую ранее А. Winfree [1], предложил для описания динамики систем, состоящих из автоколебательных элементов с достаточно слабыми межэлементными связями, рассматривать лишь уравнения для фаз колебаний, поскольку амплитуды колебаний в таких системах менее чувствительны к внешним воздействиям и изменяются незначительно, т. е. перейти от амплитудно-фазового к фазовому описанию [2]. При этом эволюция фазы каждого элемента определяется суммарным действием всех других элементов, каждое из которых представляет собой произведение некоторой постоянной величины, характеризующей силу межэлементных связей, на синус разности фаз каждой пары элементов. Эта система фазовых уравнений стала общепризнанной и получила название классической (paradigmatic) модели, или ансамбля, Курамото, а её элементы стали называться фазовыми осцилляторами. Модель широко используется при изучении колебательных явлений в системах различной природы, в том числе химической, биологической, нейронной и др. Классическая модель Курамото получила дальнейшее развитие в работах Т. Antonsen, А. Arenas, Н. Daido, Y. Maistrenko, Е. Ott, А. Pikovsky, Н. Sakaguchi, S. Strogatz и др., в которых был сделан ряд важных обобщений на случай неоднородных межэлементных связей и частот, неограниченного числа осцилляторов, наличия в системе шума и задержки и т. д. Было получено много значимых результатов, включающих, в частности, условие полной и частичной синхронизации, коллективного хаоса, формирование кластерных состояний и др.

В настоящее время возрастающее внимание исследователей привлекает новый класс ансамблей Курамото, в котором межэлементные связи уже не являются постоянными. Коллективная динамика таких систем формируется в результате совместной эволюции состояний элементов модели и межэле-

ментных соединений. Это так называемые коэволюционные, или адаптивные, системы. Большой вклад в изучение таких ансамблей Курамото внесли Т. Aoyagi, R. Berner, S. Boccaletti, J. Kurths, E. Schöll, S. Yanchuk, Р.М. Борисюк, Я.Б. Казанович, Д.В. Касаткин, В.И. Некоркин, А.Е. Храмов. Было изучено влияние правила адаптации, задержки, топологии связей и многослойной организации на динамику адаптивных сетей Курамото, показано возникновение кластерных, химерных (когда одна часть сети находится в когерентном, а другая — в некогерентном состоянии) и метастабильных химероподобных состояний, иерархических и модульных структур, мультистабильности, эффекта «колебания порядка» (когда сеть колеблется между почти синхронным и асинхронным состояниями). В обзоре [3] представлено подробное описание адаптивных динамических сетей, их применение в различных областях исследований, приведён обзор математических методов их анализа, а в обзоре [A1] представлены основные классы моделей адаптивных связей, используемых при описании коэволюционных ансамблей Курамото. Проанализированы динамические и структурные эффекты, вызванные наличием соответствующего закона адаптации связей.

В последнее время возник большой интерес, в значительной степени стимулированный проблемами построения систем машинного обучения и искусственного интеллекта, к построению новых моделей, которые могли бы воспроизводить сложную структурную организацию и пластичность (адаптивность) реальных нейронных сетей. В связи с этим, была введена в рассмотрение концепция симплексных связей, или взаимодействий высокого порядка [4]. Поясним на уровне физической строгости, что симплекс — это n -мерный многогранник, имеющий $(n + 1)$ вершин, не лежащих в одной $(n - 1)$ -мерной плоскости. Применительно к ансамблям Курамото, вершинам симплексов соответствуют фазы взаимодействующих осцилляторов. Например, симплексу с $n = 1$ соответствует отрезок, и динамика ансамбля зависит от разности фаз каждой таких пар осцилляторов. При $n = 2$ симплекс представляет собой треугольник, и связи представляют собой функции от линейной комбинации фаз трёх осцилляторов, а при $n = 3$ — тетраэдр и т. д. Примерами систем с симплексными соединениями при $n \geq 2$ являются сети мозга [5; 6], сети взаимодействующих белков [7], ансамбли электрохимических осцилляторов [8] и др. Изучение автоколебательных систем с симплексными связями ($n \geq 2$) находится на начальной стадии, и их свойства остаются малоизученными. Настоящая

диссертация относится к этому новому и актуальному направлению радиофизики.

Другое направление диссертации связано с хаотической динамикой, традиционным объектом радиофизики. Исследование хаотического поведения автоколебательных систем восходит к пионерским экспериментам Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка, которые обнаружили шумоподобные колебания в генераторе Ван-дер-Поля, находящегося под действием периодической внешней силы [9]. К настоящему времени в этом направлении достигнуты значительные успехи. Разработан целый ряд генераторов шумоподобных колебаний, в основе которых лежит динамический (детерминированный) хаос: генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича [10; 11], кольцевой генератор Дмитриева–Кислова [12], генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова [13], генератор Чуа [14], генератор с запаздывающей связью на лампе бегущей волны Кислова–Залогина–Мясина [15], генераторы Безручко–Кузнецова–Трубецкого [16] и Гинзбурга–Кузнецова на лампе обратной волны [17] и др. Проблеме генерации хаоса в радио- и микроволновом диапазонах частот на основе твердотельных устройств со сосредоточенными параметрами посвящена книга А.С. Дмитриева [18].

С момента формирования теории динамического хаоса сложилось его условное деление на два типа: консервативный и диссипативный. Сравнительно недавно математиками С.В. Гонченко и Д.В. Тураевым была предложена концепция третьего типа хаоса — так называемой смешанной динамики [19]. Смешанная динамика характеризуется сосуществованием в одной и той же системе консервативных и диссипативных объектов. В фазовом пространстве такой системы, наряду с диссипативными элементами — аттрактором и репеллером (аттрактором в обратном времени), существует также замкнутое инвариантное множество — так называемое обратимое ядро, образованное траекториями, одновременно принадлежащими хаотическому аттрактору и хаотическому репеллеру. Наличие такого консервативного объекта, не притягивающего и не отталкивающего другие траектории, существенно влияет на динамику диссипативной системы. Первоначально явление смешанной динамики было обнаружено в узком классе обратимых систем. В обратимых системах аттракторы и репеллеры симметричны друг другу и при соответствующем преобразовании координат они полностью совпадают. Примерами обратимых систем с третьим типом хаоса являются модели кельтского камня [20], волчка

Сулова [21], связанных ротаторов Пиковского–Топажа [22], вихревых потоков [23]. Результаты, полученные в работах [20–23] по смешанной динамике обратимых систем, в значительной степени получены при использовании оригинальных качественных и численных методов, разработанных А.О. Казаковым. До настоящей диссертационной работы явление смешанной динамики в системах более общего вида — необратимых, не наблюдалось.

Таким образом, в настоящей диссертации будут рассмотрены ансамбли осцилляторов Курамото, обладающие, с одной стороны, сложными адаптивными, в том числе симплексными, межэлементными связями, а с другой, как будет установлено в диссертации — демонстрирующие смешанную динамику.

Целью диссертационной работы является разработка моделей, демонстрирующих смешанную динамику, в классе необратимых коэволюционных ансамблей Курамото с симплексными и адаптивными межэлементными связями (первого и второго порядков) и выявление на их основе динамических свойств и характеристик этого нового явления. Исследование режимов синхронизации в этом классе систем. Приложение полученных результатов к задачам генерации шумоподобных автоколебаний и нейродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Выделить области параметров и вид функций адаптации в ансамблях Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков, при которых реализуется смешанная динамика.
2. Разработать аналитические и численные методы анализа третьего типа хаоса в необратимых системах.
3. Изучить влияние внешнего периодического стимула на смешанную динамику в ансамбле осцилляторов Курамото с симплексными адаптивными связями первого порядка.
4. Исследовать механизмы формирования и разрушения синхронных режимов в коэволюционных сетях осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядка.
5. Разработать генератор шумоподобных колебаний на базе модели Курамото с адаптивными связями, демонстрирующей смешанную динамику.
6. Изучить влияние различных правил адаптации на динамику нейронных осцилляторов в рамках модели Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков.

Научная новизна:

1. Впервые предложены необратимые системы с третьим типом хаоса, представляющие собой коэволюционные ансамбли Курамото.
2. Разработаны аналитические и численные методы установления пересечения хаотического аттрактора с хаотическим репеллером, введены и исследованы характеристики третьего типа хаоса в необратимых коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото.
3. Установлено, что при действии внешней силы на ансамбль осцилляторов Курамото с симплексными адаптивными связями первого порядка, находящийся в режиме смешанной динамики, фрактальные размерности хаотического аттрактора и обратимого ядра, характеризующие отличие их фрактальной структуры от структуры классических многообразий, уменьшаются.
4. Выделены условия на параметры функции адаптации, при которых ансамбли Курамото демонстрируют синхронизацию как в случае симплексных связей первого порядка, так и в случае симплексных связей второго порядка.
5. Впервые показано, что процесс разрушения синхронных режимов в коэволюционных сетях осцилляторов Курамото при изменении параметра, характеризующего правило адаптации, происходит иерархически. При этом в случае симплексных связей первого порядка разрушение происходит через состояния частичной синхронизации, а в случае симплексных связей второго порядка имеет место резкий, скачкообразный переход к асинхронному режиму.
6. Реализован генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики в системе с дискретным временем. Установлено, что в случае третьего типа хаоса спектральная плотность мощности колебаний более равномерно распределена по частотам, чем в случае классического диссипативного хаоса в той же системе.
7. Продемонстрировано, что ансамбли Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков можно рассматривать как модели спайковых нейронных сетей. При этом в случае смешанной динамики ансамбль осцилляторов Курамото воспроизводит сложные спайковые последовательности, которые не могут быть реализованы в рамках хаотической диссипативной динамики.

Практическая значимость. Разработанные методы исследования третьего типа хаоса могут быть полезны при изучении других систем. Реализованный на программируемой логической интегральной схеме генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики может быть востребован при построении новых перспективных систем коммуникации и кодирования информации. Предложенные в работе правила адаптации межэлементных связей могут быть востребованы при построении новых моделей реальных нейронных сетей, обладающих сложной структурной организацией и пластичностью.

Методология и методы исследования. В исследовании были использованы современные методы нелинейной динамики, теории бифуркаций и численного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Коэволюционные ансамбли осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков демонстрируют смешанную динамику.
2. В фазовом пространстве ансамбля осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого порядка хаотический аттрактор, хаотический репеллер и обратимое ядро локализованы в окрестности двумерной поверхности.
3. В коэволюционных ансамблях Курамото с симплексными связями первого и второго порядков синхронный режим колебаний осцилляторов существует для широкого класса функций коэволюции.
4. Разрушение синхронного режима происходит по-разному для коэволюционных ансамблей Курамото с симплексными связями первого и второго порядков.
5. Генератор с дискретным временем, построенный на основе программируемой логической интегральной схемы, демонстрирует третий тип хаоса.
6. Новая модель нейронного ансамбля Курамото, находящегося в режиме смешанной динамики, генерирует сложные спайковые последовательности, которые не могут быть реализованы в рамках диссипативной хаотической динамики.

Достоверность. Все представленные результаты диссертационного исследования являются достоверными и обоснованными. В работе применялись

надежные и апробированные методы и подходы. Разработанные алгоритмы и программы для численного моделирования тщательно тестировались на известных моделях. Полученные аналитические и численные результаты хорошо согласуются между собой. Для дискретной модели Курамото результаты исследования подтверждены экспериментально при реализации генератора шумоподобных колебаний, построенного на ПЛИС. Положения и основные результаты диссертационной работы опубликованы в рецензируемых российских и зарубежных научных журналах и подвергались оценке независимых международных экспертов. Результаты докладывались на всероссийских и международных симпозиумах, конференциях, школах и обсуждались на научных семинарах.

Апробация работы. Материалы диссертации были представлены в виде докладов на следующих конференциях:

1. XXII и XXV научные конференции по радиофизике (Нижний Новгород, 2018, 2021);
2. XXIV и XXVIII Нижегородские сессии молодых учёных (Нижегородская область, 2019, 2023);
3. International Conference on Dynamical Systems “Shilnikov Workshop” (Нижний Новгород, 2018, 2019, 2020, 2022);
4. XXIII и XXVI Конкурсы работ молодых учёных ИПФ РАН (Нижний Новгород, 2021, 2024);
5. SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (virtual conference, 2021);
6. Конференция международных математических центров мирового уровня (ФТ Сириус, 2021);
7. XX научная школа «Нелинейные волны-2022» (Нижегородская область, 2022);
8. XVII Всероссийская молодёжная научно-инновационная школа «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2023);
9. 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (Ярославль, 2023);
10. XXIII молодежная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2023).

Результаты, полученные в ходе выполнения работы, были использованы в ходе исследовательских работ в рамках проектов РФФИ и РНФ. Результаты

работы также обсуждались на научных семинарах ИПФ РАН. Они отмечены дипломами второй степени Конкурса работ молодых учёных ИПФ РАН (2021) и XVII Всероссийской молодёжной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование» (2023), а также дипломом первой степени Нижегородской сессии молодых учёных (2023).

Личный вклад. Все приведенные в диссертации результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. В частности, автором выполнены все присутствующие в работе численные расчёты и реализованы алгоритмы разработанных методов. Численные расчёты выполнялись на основе оригинальных программ, созданных автором самостоятельно, а также с использованием программы с открытым исходным кодом [24].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 печатных изданиях, 8 из которых изданы в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 11 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 2 приложений. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, включая 68 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 129 наименований.

Глава 1. Динамика коэволюционных ансамблей двух осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка

1.1 Введение

Фазовое описание больших популяций взаимодействующих автоколебательных элементов было впервые предложено Уинфри [1]. В рамках такого подхода предполагается, что связь между элементами является слабой, поэтому можно пренебречь изменениями амплитуд колебаний, рассматривая лишь динамику фаз. Тогда динамика каждого осциллятора, взаимодействующего с остальными осцилляторами через среднее поле, сводится к описанию с помощью только одной фазовой переменной. Впоследствии эта концепция фазового описания была развита в работах Курамото [2; 25], в которых была предложена модель вида

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N F(\varphi_i - \varphi_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.1)$$

где φ_i и ω_i характеризуют, соответственно, фазу и собственную частоту осциллятора с индексом i , коэффициент κ описывает силу связи, а $F(\varphi)$ — зависящая от разности фаз взаимодействующих элементов функция связи, которая в оригинальной модели имеет вид $F(\varphi) = -\sin \varphi$.

С момента своей первоначальной формулировки появилось огромное число исследований всевозможных вариаций и обобщений модели (1.1), учитывающих влияние различных факторов на коллективное поведение сетей связанных осцилляторов, применительно к широкой области приложений. К числу таких факторов относятся, в частности, мультимодальные частотные распределения, наличие шума, неоднородность межэлементных связей, сложная конфигурация соединений, влияние инерции и др. [26; 27] Другое важное обобщение модели Курамото, появившееся сравнительно недавно, связано с изучением эффектов и явлений в коэволюционных, или адаптивных, осцилляторных сетях. Особенностью таких сетей является наличие динамического изменения силы связи между элементами сети в зависимости от их текущих состояний [3; 28—30]. Модели коэволюционных ансамблей автоколебательных

элементов описывают, например, энергосети [31], а также химические [32; 33], эпидемиологические [34], нейронные и физиологические [35–37], социальные [38; 39] и многие другие системы. Для описания динамики элементов в сетях с таким сложным нестационарным характером взаимодействий используют обобщение модели (1.1) следующего вида

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij}(t) \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.2)$$

где $\kappa_{ij}(t)$ описывает силу воздействия j -го осциллятора на i -ый. При этом обычно предполагается, что взаимодействия неидентичны, то есть $\kappa_{ij} \neq \kappa_{ji}$, а сила связи зависит от разности фаз взаимодействующих элементов. Исходя из этих предположений, уравнение для динамики коэффициентов связи в общем случае может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon \Phi(\kappa_{ij}, \Lambda(\varphi_i - \varphi_j)), \quad (1.3)$$

где $\Lambda(\varphi)$ — 2π -периодическая функция адаптации. Параметр ε характеризует временной масштаб изменения коэффициентов связей. Традиционно предполагается, что связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее по сравнению с изменением состояний самих осцилляторов, поэтому выбирают значение параметра $\varepsilon \ll 1$.

Система уравнений вида (1.2), (1.3) при $\Lambda(\varphi) = \sin(\varphi + \beta)$, когда уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon \sin(\varphi_i - \varphi_j + \beta), \quad (1.4)$$

была рассмотрена в работах [40; 41], где накладывалось дополнительное ограничивающее условие на коэффициенты связи $|\kappa_{ij}| < 1$. Если рассматривать эту систему как модель взаимодействующих спайковых нейронов с пластичной связью [42; 43], то параметр $0 \leq \beta < 2\pi$ непрерывно управляет правилом пластичности, или адаптации. Например, при $\beta = 0$ коэффициенты связи эволюционируют во времени согласно правилу пластичности, зависящей от времени появления потенциала действия, или спайка (spike-time-dependent plasticity, или STDP) [44–46], когда сила связи между парой нейронов изменяется в зависимости от разности времён генерации пре- и постсинаптическим нейронами потенциалов действия. А именно, если пресинаптический спайк предшествует постсинаптическому, то есть способствует генерации последнего, то

сила такой связи увеличивается; в противном случае сила связи уменьшается. При $\beta = \frac{\pi}{2}$ связи эволюционируют по обратному правилу Хебба [47—49], когда сила связи между элементами уменьшается при уменьшении разности их фаз, а значение $\beta = \frac{3\pi}{2}$ соответствует правилу Хебба [50; 51], когда она увеличивается при уменьшении разности фаз осцилляторов.

Другой способ, при котором рост силы связи контролируется динамически, реализуется, например, посредством введения в правую часть уравнения (1.4) дополнительного слагаемого κ_{ij} . В этой главе мы будем рассматривать именно этот вид динамики связей и случай малого ансамбля, состоящего из двух элементов, а также рассмотрим различные вариации этой модели.

1.2 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с расстройкой собственных частот

1.2.1 Модель

Рассмотрим простейший случай коэволюционного ансамбля осцилляторов Курамото, состоящего из двух элементов с адаптивными симплексными связями первого порядка, в котором динамика фаз $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ и коэффициентов связи $\{\kappa_1(t), \kappa_2(t)\}$ описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - \kappa_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha), \\ \frac{d\kappa_1}{dt} = -\varepsilon(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) + \kappa_1), \\ \frac{d\kappa_2}{dt} = -\varepsilon(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \kappa_2), \end{cases} \quad (1.5)$$

где $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{S}^2$, $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$. В системе (1.5) параметр α характеризует задержку передачи сигнала от одного осциллятора к другому. Правило адаптации изменяется с помощью параметра β . Параметр ε определяет масштабное разделение между быстрой динамикой фаз и медленной динамикой адаптации, а собственные частоты осцилляторов обозначены как ω_1, ω_2 . Для удобства введём новые переменные, перейдём к медленному времени и введём параметр

расстройки собственных частот осцилляторов γ :

$$\theta = \varphi_1 - \varphi_2, \quad y = \kappa_1 + \kappa_2, \quad z = \kappa_2 - \kappa_1, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \gamma = \omega_1 - \omega_2,$$

тогда система (1.5) примет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta, \\ \dot{y} = -y - 2 \sin \beta \cos \theta, \\ \dot{z} = -z + 2 \cos \beta \sin \theta, \end{cases} \quad (1.6)$$

где точкой сверху обозначены производные по медленному времени τ . Будем рассматривать динамику системы (1.6) в области параметров

$$D = \left\{ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta < 2\pi, \gamma \geq 0, 0 < \varepsilon \ll 1 \right\}.$$

Система (1.6) определена в цилиндрическом фазовом пространстве $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, она диссипативна и имеет поглощающую область

$$G^+ = \{\theta, y, z : \theta \in \mathbb{S}^1, |y| \leq 2|\sin \beta|, |z| \leq 2|\cos \beta|\}.$$

Отметим, что система (1.6) является необратимой, то есть её аттракторы и репеллеры не симметричны друг другу и не существует такого преобразования координат, которое бы приводило систему к исходному виду при обращении времени [52; 53].

Система (1.6) была изучена в [54] в случае равных собственных частот осцилляторов ($\gamma = 0$). Было показано, что, в зависимости от параметров, система может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую динамику, а также были продемонстрированы механизмы формирования хаотического аттрактора и хаотического репеллера системы (1.6).

1.2.2 Пересечение хаотического аттрактора с хаотическим репеллером

Численное моделирование методом Рунге–Кутты четвёртого порядка с шагом по времени 0.001 и вычисление ляпуновских показателей траекторий системы (1.6) показало, что при параметрах, когда все состояния равновесия

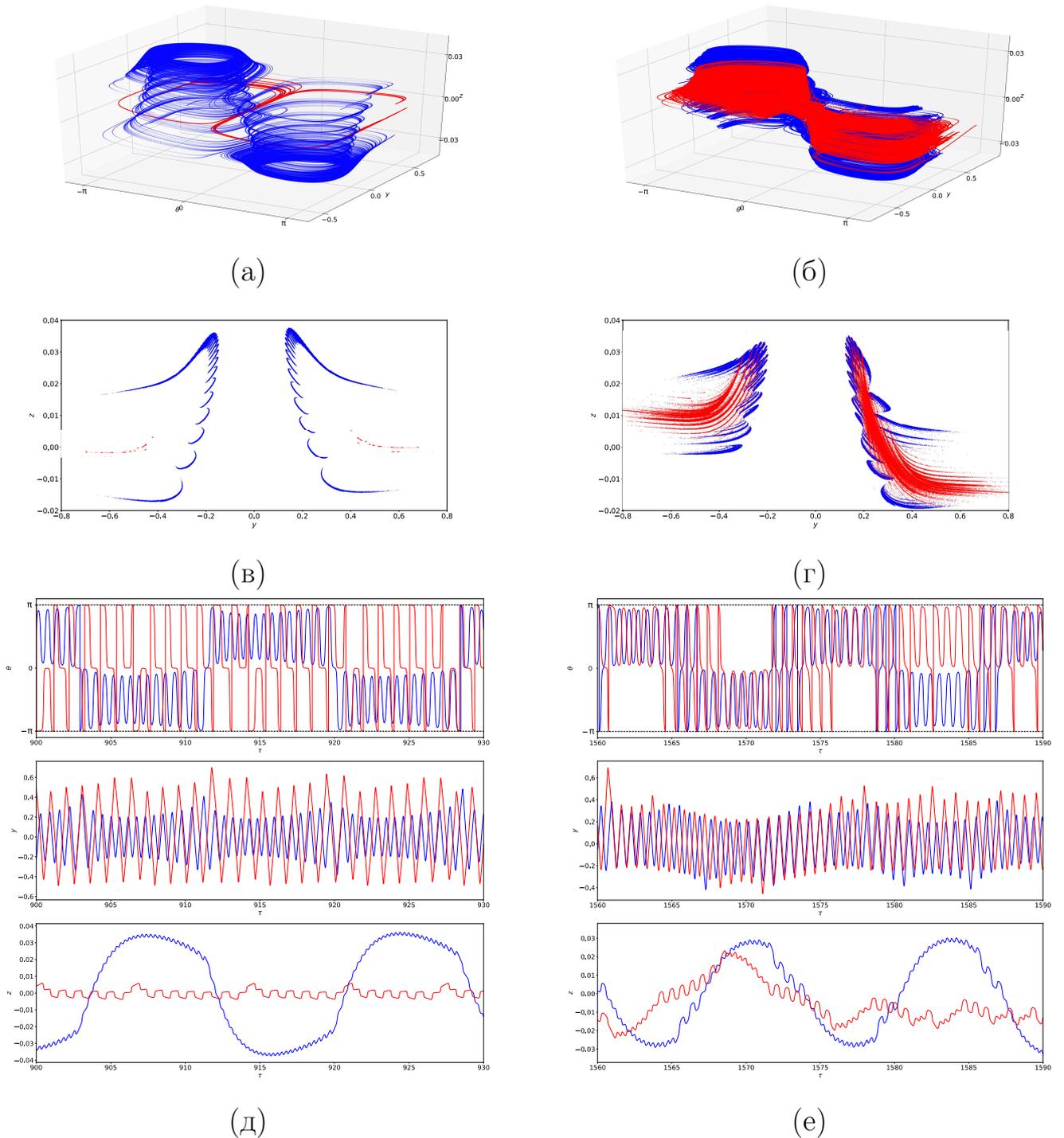


Рисунок 1.1 — Верхний ряд: хаотические аттрактор (синий) и репеллер (красный) в фазовом пространстве системы (1.6). Средний ряд: хаотические аттрактор (синий) и репеллер (красный) системы (1.6) на секущей Пуанкаре $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Нижний ряд: зависимости переменных от прямого (синий) и обратного (красный) времени. Слева: $\gamma = 0$, справа: $\gamma = 0.015$.

системы (1.6) O_j ($j = 1 \dots 4$) с координатами

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \\ \theta_2 &= -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \\ \theta_3 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \\ \theta_4 &= \pi - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \\ y_j &= -2 \sin \beta \cos \theta_j, \quad z_j = 2 \cos \beta \sin \theta_j\end{aligned}$$

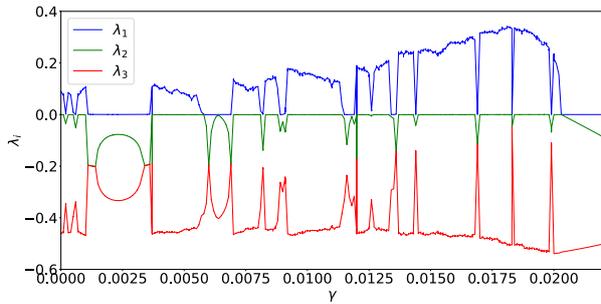
являются седловыми:

$$\begin{aligned}\gamma &< |\sin(\alpha + \beta)|, \\ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cos(\arcsin(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)})) \right) &< 0, \\ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \cos(\arcsin(\frac{\gamma}{\sin(\alpha+\beta)})) \right) &< 0,\end{aligned}$$

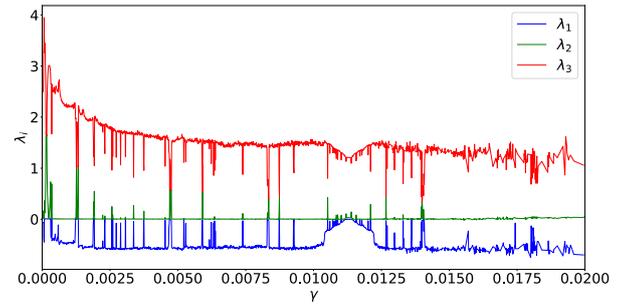
в фазовом пространстве G одновременно существуют хаотический аттрактор и хаотический репеллер (рис. 1.1а). Под хаотическим репеллером здесь понимается хаотический аттрактор системы (1.6), в которой обращено время ($t \mapsto -t$). При увеличении параметра γ от нуля наблюдается постепенное увеличение занимаемой хаотическим репеллером области фазового пространства. В некотором диапазоне параметра γ репеллер и аттрактор начинают находиться очень близко друг к другу и становятся похожими друг на друга по форме (рис. 1.1б). Поскольку этот эффект зависит от параметра γ , далее зафиксируем остальные параметры системы (1.6) следующим образом: $\{\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01\}$.

В случае хаотической динамики в спектре ляпуновских показателей присутствует как минимум один положительный ляпуновский показатель (для хаотического репеллера — один отрицательный). Были рассчитаны спектры ляпуновских показателей аттрактора и репеллера системы (1.6) методом Беннетина с ортогонализацией Грама–Шмидта [55]. При вычислении ляпуновских показателей параметры алгоритма подбирались из условия достижения равенства одного из ляпуновских показателей траектории системы (1.6) нулю с точностью до 10^{-5} . На рис. 1.2 представлены ляпуновские показатели аттрактора и репеллера системы (1.6) в зависимости от параметра γ . Как видно из приведённых графиков, хаотические аттрактор и репеллер системы (1.6) существуют одновременно в большом диапазоне параметра γ , однако у них есть окна регулярности.

Рассмотрим отображение Пуанкаре плоскости $\theta = -\frac{\pi}{4}$ в себя в прямом и обратном времени. На рис. 1.1в показана секущая Пуанкаре в случае $\gamma = 0$,



(а)



(б)

Рисунок 1.2 — Спектры ляпуновских показателей (а) аттрактора системы (1.6), (б) репеллера системы (1.6) в зависимости от параметра γ

когда хаотический аттрактор и хаотический репеллер отделены друг от друга. Однако в случае некоторых ненулевых значений параметра γ , когда хаотический аттрактор и хаотический репеллер близки в фазовом пространстве, их «следы» на секущей Пуанкаре пересекаются (рис. 1.1г).

При сближении аттрактора и репеллера зависимости переменных от прямого и обратного времени становятся качественно более похожими (ср. рис. 1.1д и рис. 1.1е). Более того, в отдельные моменты времени переменные практически совпадают.

Все приведенные выше результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что в системе (1.6), вероятно, реализуется смешанная динамика. Согласно теории смешанной динамики, утверждать об этом можно в случае, если удастся установить пересечение инвариантных многообразий траекторий аттрактора и репеллера. Для установления такого пересечения нами был разработан алгоритм численного построения инвариантных кривых, образованных многообразиями седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера, в малой окрестности этих седловых траекторий. Алгоритм базируется на свойстве диссипативности системы (1.6) и, например, для седловых траекторий хаотического аттрактора выглядит следующим образом (рис. 1.3):

1. В сечении, которое седловые траектории аттрактора и репеллера пересекают трансверсально (например, $\theta = \text{const}$), находится «след» траектории хаотического аттрактора (точка A на рис. 1.3).
2. Далее строится окружность с центром в точке A , радиус которой равен наперёд заданному малому числу.
3. Траектории с начальными условиями в точках на окружности и в ее центре численно интегрируются до следующего пересечения рас-

смагиваемой секущей. Так как траектории хаотического аттрактора являются седловыми, то по одному направлению фазовый объём сжимается, а по другому — растягивается. Таким образом, после первой итерации отображения Пуанкаре T точка A перейдёт в некоторую другую точку (точка $T(A)$ — образ точки A), окружённую замкнутой кривой.

4. Процедура повторяется до тех пор, пока эллипс с некоторой точностью не станет сходным с кривой, соответствующей неустойчивому многообразию.
5. Устойчивое многообразие можно получить по той же схеме, если интегрировать точки окружности в обратном времени.

Отметим, что в малой окрестности седловой траектории инвариантные кривые близки к прямым. Для хаотического репеллера процедура аналогична описанной выше.

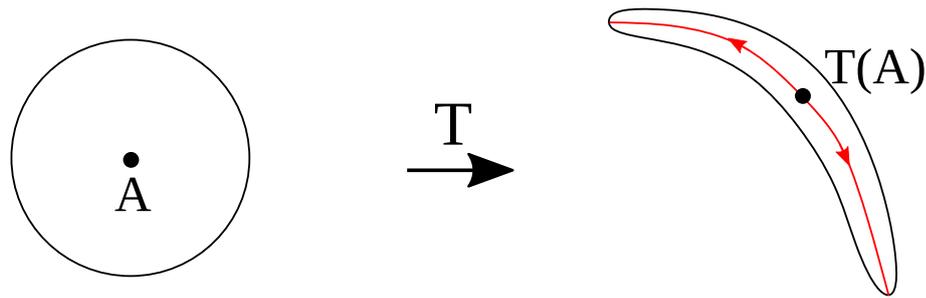


Рисунок 1.3 — Иллюстрация схемы построения инвариантной кривой, образованной неустойчивым многообразием седловой траектории хаотического аттрактора, на секущей Пуанкаре

На рис. 1.4 представлен результат построения инвариантных многообразий для двух близких траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера в случае $\gamma = 0.01509$. Синяя точка соответствует «следу» седловой траектории хаотического аттрактора на секущей Пуанкаре $\theta = -\frac{\pi}{4}$, а красная точка — «следу» седловой траектории хаотического репеллера. Радиусы окружностей, построенных с центрами в этих точках, выбирались равными $5 \cdot 10^{-4}$, число точек на каждой окружности — 1000, шаг интегрирования при построении инвариантных многообразий — 10^{-4} . После достижения схожести эллипса с кривой множество точек эллипса аппроксимировалось полиномиальной функцией, чтобы устранить их разреженность после растягивания эллипса.

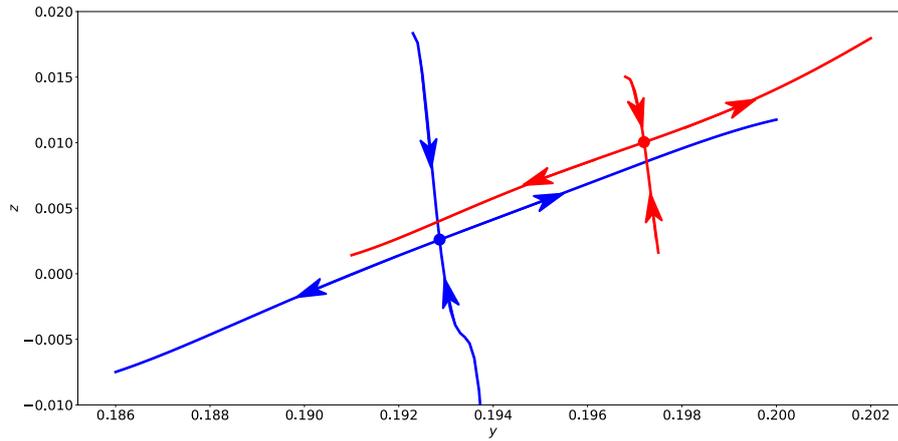


Рисунок 1.4 — Пересечение инвариантных кривых, образованных инвариантными многообразиями седловых траекторий хаотического аттрактора (синий цвет) и хаотического репеллера (красный цвет) на секущей Пуанкаре $\theta = \text{const} = -\frac{\pi}{4}$.
 $\gamma = 0.01509$

Из рис. 1.4 следует несколько выводов. Во-первых, инвариантные многообразия седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера системы (1.6) при определённых значениях параметров трансверсально пересекаются. Существование точек на секущей Пуанкаре, принадлежащих одновременно инвариантным кривым, образованным многообразиями хаотического аттрактора и многообразиями хаотического репеллера, свидетельствует о наличии смешанной динамики в системе (1.6) и является критерием существования в системе (1.6) обратимого ядра, поскольку эти точки пересечения многообразий принадлежат его траекториям. Во-вторых, из рис. 1.4 следует, что для седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера системы (1.6), расстояние между которыми — порядка $6 \cdot 10^{-3}$ (расстояние между синей и красной точкой на рис. 1.4) и меньше, инвариантные кривые близки к прямым, которые пересекаются, и реализуется ситуация, показанная на рис. 1.4. Отметим, что, помимо случая, изображённого на рис. 1.4, нами были численно получены схожие пересечения инвариантных многообразий и при других значениях параметров системы (1.6).

1.2.3 Обратимое ядро и характеристики смешанной динамики

Обратимое ядро — это замкнутое инвариантное множество, образованное траекториями, одновременно принадлежащими хаотическому аттрактору и хаотическому репеллеру. Оно не притягивает другие траектории, однако наличие такого консервативного объекта существенно влияет на динамику диссипативной системы.

Рассмотрим зависимость расстояния между типичными седловыми траекториями хаотического аттрактора и хаотического репеллера от времени. Это расстояние вычисляется по формуле

$$l_{ar}(\tau_i) = \min_j \sqrt{\left(\theta_a(\tau_i) - \theta_r(\tau_j)\right)^2 + \left(y_a(\tau_i) - y_r(\tau_j)\right)^2 + \left(z_a(\tau_i) - z_r(\tau_j)\right)^2}, \quad (1.7)$$

где $\{\theta_a, y_a, z_a\}$ — координаты траектории, принадлежащей аттрактору, а $\{\theta_r, y_r, z_r\}$ — координаты траектории, принадлежащей репеллеру. На рис. 1.5а показан случай $\gamma = 0$, а на рис. 1.5б показан случай $\gamma = 0.015$. Установлено, что в случае смешанной динамики наблюдаемое в численном моделировании минимальное расстояние между достаточно долгими по времени реализациями траекторий, принадлежащих хаотическому аттрактору и хаотическому репеллеру, меньше по крайней мере на три порядка по сравнению со случаем классического диссипативного хаоса (в случае диссипативного хаоса $\min l_{ar} \sim 10^{-2}$, а в случае смешанной динамики $\min l_{ar} \sim 10^{-5}$). График 1.5б ограничен сверху величиной 0.001 для иллюстрации факта того, что существует большое число точек в фазовом пространстве G , для которых это расстояние мало. Поскольку траектории хаотических аттрактора и репеллера являются седловыми и близки друг к другу в фазовом пространстве, это неизбежно приводит к пересечению их инвариантных многообразий, как было продемонстрировано выше.

Перебирая различные случайные начальные условия и рассчитывая расстояние (1.7) как функцию времени, из всего множества полученных в численном интегрировании точек траекторий хаотического аттрактора были отобраны только те, в которых расстояние между хаотическими аттрактором и репеллером мало: $l_{ar} < 0.002$. Как было показано в комментарии к рис. 1.4, для таких расстояний между седловыми траекториями хаотического аттрактора и хаотического репеллера их инвариантные многообразия пересекаются

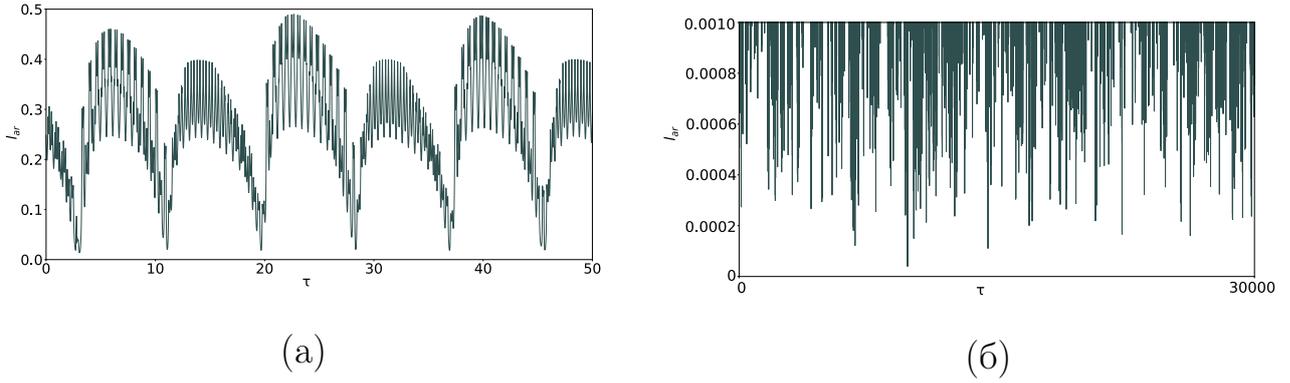


Рисунок 1.5 — График зависимости расстояния между типичными траекториями, принадлежащими аттрактору и репеллеру, от времени: $l_{ar}(\tau)$.

(a) $\gamma = 0$; (б) $\gamma = 0.015$

по траекториям обратимого ядра. Таким образом, полученное в ходе отбора точек множество с точностью до 0.002 является обратимым ядром системы (1.6) (рис. 1.6а). Далее будем использовать численный критерий $l_{ar} < 0.002$ как достаточный критерий близости седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера и, следовательно, наличия смешанной динамики в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка. На рис. 1.6б показан «след» обратимого ядра на секущей Пуанкаре $\theta = \pi$. На этой секущей есть элементы эллиптической формы, напоминающие консервативные элементы динамики. В то же время, в сечении есть области с высокой плотностью точек и области, в которых точек практически нет, что напоминает аттрактор в диссипативных системах. Стоит отметить, что области с консервативным и диссипативным поведением не отделены друг от друга. Этот факт подтверждает утверждение о том, что в случае смешанной динамики консервативные и диссипативные элементы динамики сосуществуют и они принципиально неразделимы [19].

Изучим некоторые характеристики обратимого ядра. Одной из таких характеристик является его робастность. На рис. 1.7 голубым цветом показана область параметров на плоскости (β, γ) , внутри которой реализуется смешанная динамика, в соответствии с введённым выше численным критерием. Эта область ограничена кривой C_1 , при пересечении которой хаотический аттрактор исчезает, и появляются два устойчивых колебательных предельных цикла. При пересечении кривой C_2 хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (1.6) исчезают, и появляется устойчивый вращательный предельный цикл. При пересечении кривой D хаотический аттрактор и хаотический ре-

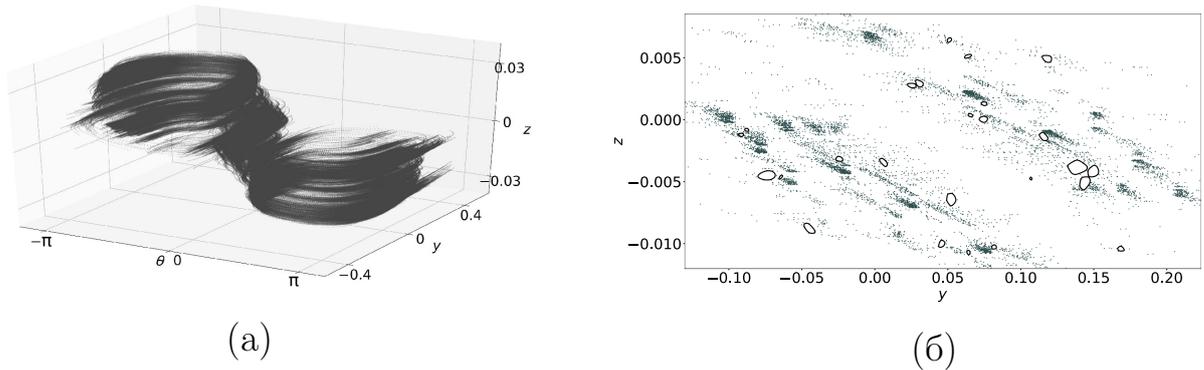


Рисунок 1.6 — Обратимое ядро системы (1.6). $\gamma = 0.015$

(а) Фазовое пространство. (б) Сечение Пуанкаре $\theta = \pi$.

пеллер продолжают существовать, однако перестаёт выполняться численный критерий наличия смешанной динамики. Наличие целой области параметров, в которой существует обратимое ядро, свидетельствует о его робастности. Отметим, что внутри этой области существует несколько окон регулярности, внутри которых аттрактор и репеллер не пересекаются. Наиболее крупные из них изображены на рисунке, однако есть и другие, более мелкие, окна, которые не видны в этом масштабе. Кроме того, отметим, что при параметрах внутри области, соответствующей смешанной динамике, функции адаптации связей близки к обратному правилу Хебба ($\beta = \frac{\pi}{2}$), когда сила связи между осцилляторами уменьшается при уменьшении разности их фаз.

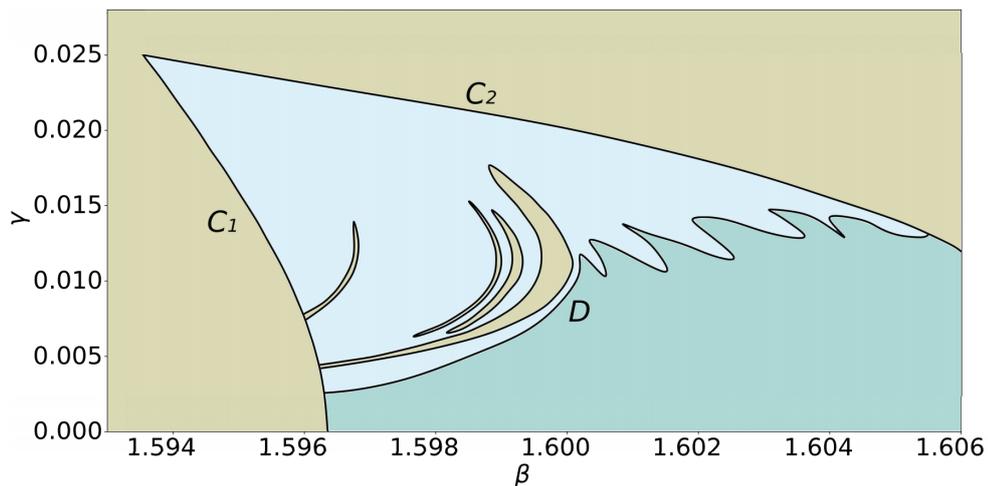


Рисунок 1.7 — Область на плоскости параметров (β, γ) , внутри которой реализуется смешанная динамика (голубой цвет).

$$\alpha = 0.24, \quad \varepsilon = 0.01$$

Введём другую характеристику обратимого ядра — его фрактальную размерность. Поскольку оно образовано пересечением двух фрактальных мно-

жеств (хаотический аттрактор и хаотический репеллер), его размерность тоже принимает дробные значения. Фрактальная размерность характеризует отличие фрактальной структуры от структуры классического многообразия (кривая, плоскость, пространство и т. д.). Если фрактальная размерность близка, например, к 1, это свидетельствует о том, что фрактальное множество по структуре схоже с кривой, если она близка к 2 — с поверхностью, а если она принимает значения между 1 и 2, то фрактальное множество представляет собой нечто «промежуточное» между кривой и поверхностью. С помощью метода дробления фазового пространства кубами (box-counting method), алгоритм которого приведён, например, в книге [56], были рассчитаны фрактальные размерности обратимого ядра, хаотического аттрактора и хаотического репеллера системы (1.6). При вычислении фрактальных размерностей аттракторов, репеллеров и обратимых ядер системы (1.6) оптимальный изначальный размер куба и число итераций, соответствующих уменьшению его размера, находились из условия равенства фрактальных размерностей аттракторов и репеллеров единице с точностью до 0.01 в режиме регулярной динамики. Рассчитанные фрактальные размерности для различных значений γ приведены в таблице 1, где первые две строки соответствуют классическому диссипативному хаосу, а вторые две строки соответствуют режиму смешанной динамики. Установлено, что фрактальная размерность обратимого ядра системы (1.6) меньше фрактальных размерностей хаотического аттрактора и хаотического репеллера. Кроме того, отметим, что в области параметров, соответствующей смешанной динамике, фрактальные размерности хаотического аттрактора, хаотического репеллера и обратимого ядра близки к 2, то есть по своей структуре из всех классических многообразий они наиболее всего близки к поверхности.

Таблица 1 — Фрактальные размерности хаотического аттрактора, хаотического репеллера и обратимого ядра

γ	аттрактор	репеллер	обратимое ядро
0	2.01	1.36	—
0.005	2.06	1.88	—
0.015	2.29	2.17	2.04
0.019	2.35	2.21	2.13

Таблица 2 — Сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора системы (1.6) $\sum_i \lambda_i$ в случае диссипативного хаоса ($\gamma = 0$, $\gamma = 0.005$) и в случае смешанной динамики ($\gamma = 0.01$, $\gamma = 0.015$, $\gamma = 0.018$, $\gamma = 0.019$).

γ	0	0.005	0.01	0.015	0.018	0.019
$\sum_i \lambda_i$	-0.37	-0.36	-0.29	-0.21	-0.16	-0.2

Другой характеристикой, которая представляет интерес при исследовании системы со смешанной динамикой, является сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора, поскольку именно его траектории мы наблюдаем в численном моделировании. В диссипативных системах, которой является рассматриваемая система (1.6), сумма ляпуновских показателей отрицательна (фазовый объём уменьшается), в то время как в консервативных системах она равна нулю (фазовый объём сохраняется). В таблице 2 представлены значения суммы ляпуновских показателей хаотического аттрактора для нескольких значений параметра γ , соответствующих диссипативному хаосу (первые два столбца) и смешанной динамике (последние четыре столбца). Из приведённых данных следует, что в случае смешанной динамики сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора более близка к нулю, чем в случае классического диссипативного хаоса. Это свидетельствует о том, что наличие консервативного объекта — обратимого ядра — влияет на динамику системы (1.6) таким образом, что она начинает приобретать черты консервативной системы.

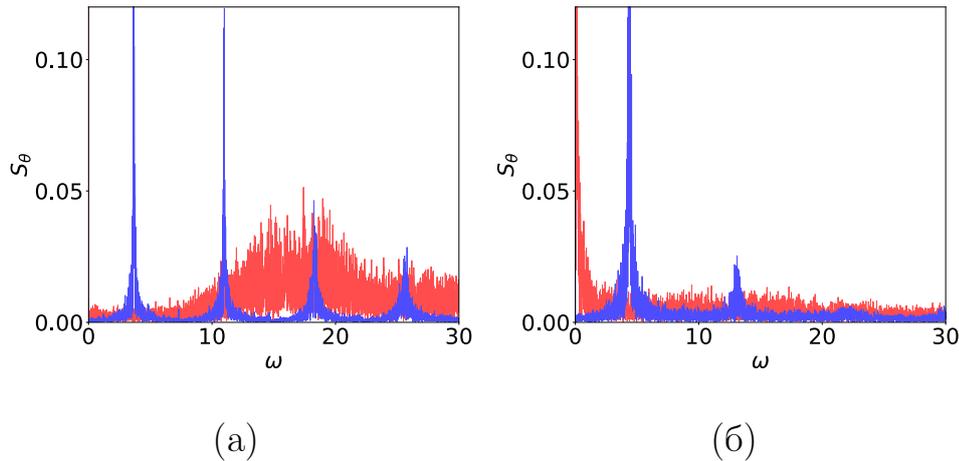


Рисунок 1.8 — Спектры мощности фазовой переменной θ в прямом (синий) и обратном (красный) времени.

(а) Диссипативный хаос: $\gamma = 0$. (б) Смешанная динамика: $\gamma = 0.015$

И, наконец, важной характеристикой любой автоколебательной системы является спектр мощности колебаний. Спектры мощности фазовой переменной θ в системе (1.6) были вычислены с помощью быстрого преобразования Фурье. На рис. 1.8 продемонстрировано, что спектры мощности колебаний в прямом и обратном времени непрерывны, что является свойством хаотической динамики, но в них есть некоторые выделенные частоты. Когда в системе (1.6) нет смешанной динамики (рис. 1.8а), спектры мощности значительно отличаются. Но когда смешанная динамика появляется (рис. 1.8б), спектры мощности становятся более похожими друг на друга. Однако полного совпадения при этом не происходит, как не происходит и полного совпадения аттрактора и репеллера в фазовом пространстве. Это свидетельствует об увеличении схожести поведения системы (1.6) в прямом и обратном времени в случае смешанной динамики и соотносится с тем фактом, что траектории в прямом и обратном времени в случае смешанной динамики локализованы в окрестности обратимого ядра.

1.2.4 Быстро–медленная динамика системы (1.6)

Система (1.6) относится к классу быстро–медленных систем, для которых развита определённая методика исследования [57]. В соответствии с этой теорией, динамика таких систем формируется динамикой медленной подсистемы и динамикой быстрой подсистемы. В системе (1.6) переменная θ является быстрой переменной, а y и z — медленными.

Для системы (1.6) быстрая подсистема определяется уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta, \quad (1.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8), где y и z являются параметрами, определяет поток на окружности \mathbb{S}^1 . Когда условие

$$\gamma < a, \quad \text{где } a = \sqrt{y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \sin^2 \alpha},$$

выполнено, уравнение (1.8) имеет два состояния равновесия $\theta = \psi_1$, $\theta = \psi_2$, где

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\sigma + \arcsin \frac{\gamma}{a}, \\ \psi_2 &= -\sigma + \pi - \arcsin \frac{\gamma}{a},\end{aligned}$$

а σ – одно из решений системы

$$\cos \sigma = \frac{y \cos \alpha}{a}, \quad \sin \sigma = -\frac{z \sin \alpha}{a}.$$

Состояние равновесия $\theta = \psi_1$ устойчиво, а $\theta = \psi_2$ – неустойчиво, так как их собственные значения удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\lambda(\psi_1) &= f_\theta(\psi_1, y, z) = -\sqrt{a^2 - \gamma^2} < 0, \\ \lambda(\psi_2) &= f_\theta(\psi_2, y, z) = \sqrt{a^2 - \gamma^2} > 0.\end{aligned}$$

При $\gamma = a$ происходит седло-узловая бифуркация этих состояний равновесия, и для $\gamma > a$ происходит неравномерное вращение по окружности.

Перейдя к медленной временной шкале $\tau = \varepsilon t$ и полагая $\varepsilon = 0$ в системе (1.6), получим медленную подсистему:

$$\begin{cases} 0 = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta, \\ \frac{dy}{d\tau} = -y - 2 \sin \beta \cos \theta = g_1(\theta, y), \\ \frac{dz}{d\tau} = -z + 2 \cos \beta \sin \theta = g_2(\theta, z). \end{cases} \quad (1.10)$$

Критическое многообразие системы (1.10) задаётся выражением

$$C_0 = \{\theta \in \mathbb{S}^1, (y, z) \in \mathbb{R}^2 : \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta = 0\}. \quad (1.11)$$

Так как критическое многообразие C_0 является многообразием состояний равновесия быстрой подсистемы, оно распадается на две части, отделённые друг от друга так называемой разделяющей кривой. Одна из этих частей, C_0^a , соответствует устойчивым состояниям равновесия уравнения (1.8), а другая, C_0^r , соответствует неустойчивым:

$$\begin{aligned}C_0^a &= \{(\theta, y, z) \in C_0 : -y \cos \alpha \cos \theta - z \sin \alpha \sin \theta < 0\}, \\ C_0^r &= \{(\theta, y, z) \in C_0 : -y \cos \alpha \cos \theta - z \sin \alpha \sin \theta > 0\},\end{aligned}$$

так что часть C_0^a – притягивающая, а C_0^r – отталкивающая по отношению к быстрому направлению. Разделяющая кривая L , соответствующая седло-узловой бифуркации состояний равновесия быстрой подсистемы (1.8), может быть

параметризована через θ :

$$L = \left\{ y = \frac{\gamma \sin \theta}{\cos \alpha}, \quad z = -\frac{\gamma \cos \theta}{\sin \alpha}, \quad -\pi < \theta \leq \pi \right\}. \quad (1.12)$$

Сечение критического многообразия C_0 любой плоскостью $\theta = \theta_0 = \text{const}$ представляет собой прямую, чья ориентация в фазовом пространстве G определяется величиной θ_0 . Принимая это во внимание, можно сделать вывод о том, что C_0 вращается вокруг разделяющей кривой L в фазовом пространстве G . Следовательно, на каждом из интервалов $\theta \in (-\pi, 0)$ и $\theta \in [0, \pi]$ критическое многообразие C_0 является листом Мёбиуса.

Пусть p — произвольная точка разделяющей кривой L . Следуя подходу Мищенко [58], введём функцию

$$l(\theta) = \left(f_y g_1 + f_z g_2 \right) \Big|_{p \in L} = \left(\gamma + \sin(\alpha + \beta) \sin 2\theta \right) \Big|_{p \in L}. \quad (1.13)$$

Из выражения (1.13) следует, что условие $l(\theta) = 0$ выполняется только в четырёх точках $\theta = \theta_j$, $j = 1 \dots 4$, где θ_j являются θ -координатами состояний равновесия O_j . Во всех других точках кривой L выполняется условие трансверсальности $l(\theta) \neq 0$ (нормальное переключательное условие). Выполнение этого условия означает, что для этих точек кривой L медленный поток продолжается быстрым потоком. В этой области фазового пространства G траектории системы (1.8), (1.9) близки к прямым $(y, z) = \text{const}$, вдоль которых они покидают критическое многообразие C_0 .

Рассмотрим поведение траекторий системы (1.10) с начальными условиями в точках $\theta = \theta_j$, которые являются точками сингулярности. Чтобы это сделать, получим систему, описывающую двумерный медленный поток на C_0 . Дифференцируя алгебраическое уравнение системы (1.10) по τ и используя уравнение $f(\theta, y, z) = 0$, получим систему на C_0

$$\begin{cases} \Phi(\theta, z) \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma + \sin(\alpha + \beta) \sin 2\theta, \\ \frac{dz}{d\tau} = -z + 2 \cos \beta \sin \theta, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $\Phi(\theta, z) = \frac{z \sin \alpha + \gamma \cos \theta}{\sin \theta}$, $\theta \neq 0, \pm\pi$. Система (1.14) является сингулярной вдоль кривой L . Чтобы десингуляризовать систему (1.14), осуществим перемасштабирование с фактором $\Phi(\theta, z)$. В результате десингуляризованный медленный поток принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau'} = \gamma + \sin(\alpha + \beta) \sin 2\theta, \\ \frac{dz}{d\tau'} = \Phi(\theta, z) (-z + 2 \cos \beta \sin \theta), \end{cases} \quad (1.15)$$

где $\frac{d\tau'}{d\tau} = \Phi(\theta, z)$. Отметим, что в системе (1.15) нужно учитывать, что при $\Phi(\theta, z) < 0$ нужно обращать направление траекторий. Будем учитывать это свойство при построении фазового портрета системы на критическом многообразии (1.15). Кроме того, отметим, что система (1.15) не определена на прямых $\theta = 0$, $\theta = \pm\pi$.

Прямые $\theta = \theta_j$ на фазовой плоскости (θ, z) системы (1.15) являются инвариантными. На этих линиях расположены, во-первых, состояния равновесия системы (1.6) O_j и, во-вторых, состояния равновесия $F_j(\theta = \theta_j, z = z_f(\theta_j))$, лежащие на разделяющей кривой L , на которой выполняется $\Phi(\theta, z) = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} z_f(\theta_1) &= -\frac{\gamma B_2}{\sin \alpha}, & z_f(\theta_2) &= -\frac{\gamma B_1}{\sin \alpha}, \\ z_f(\theta_3) &= \frac{\gamma B_2}{\sin \alpha}, & z_f(\theta_4) &= \frac{\gamma B_1}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

а B_1, B_2 определены как

$$B_1 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta) + \delta}{2 \sin(\alpha + \beta)}}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta) - \delta}{2 \sin(\alpha + \beta)}}. \quad (1.17)$$

где $\delta = \sqrt{\sin^2(\alpha + \beta) - \gamma^2}$. Анализ собственных значений состояний равновесия системы на критическом многообразии F_j показывает, что F_1 и F_3 являются так называемыми сложенными узлами, а F_2 и F_4 являются сложенными сёдлами (рис. 1.9, 1.10). На фазовой плоскости системы (1.15) существуют гетероклинические траектории, соединяющие точки F_j и соответствующие состояния равновесия O_j по инвариантным прямым $\theta = \theta_j$. Инвариантные прямые $\theta = \theta_j$ системы (1.15) также определяют инвариантные прямые, проходящие через состояния равновесия O_j в фазовом пространстве G системы (1.6). Эти прямые задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_j, \\ \gamma - y \cos \alpha \sin \theta_j + z \sin \alpha \cos \theta_j &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

На инвариантных прямых (1.18) все траектории системы (1.6), включая траектории с начальными условиями в точках F_j , стремятся к соответствующим состояниям равновесия O_j . С другой стороны, состояния равновесия O_1 и O_3 являются либо седло-фокусами, либо сёдлами с одномерными устойчивыми многообразиями, которые мы обозначим $W^s(O_1)$ и $W^s(O_3)$. Для состояний равновесия O_1 (O_3) уравнение, описывающее устойчивое инвариантное многообразие в линеаризованной системе, совпадает с уравнениями (1.18) для $j = 1$ ($j =$

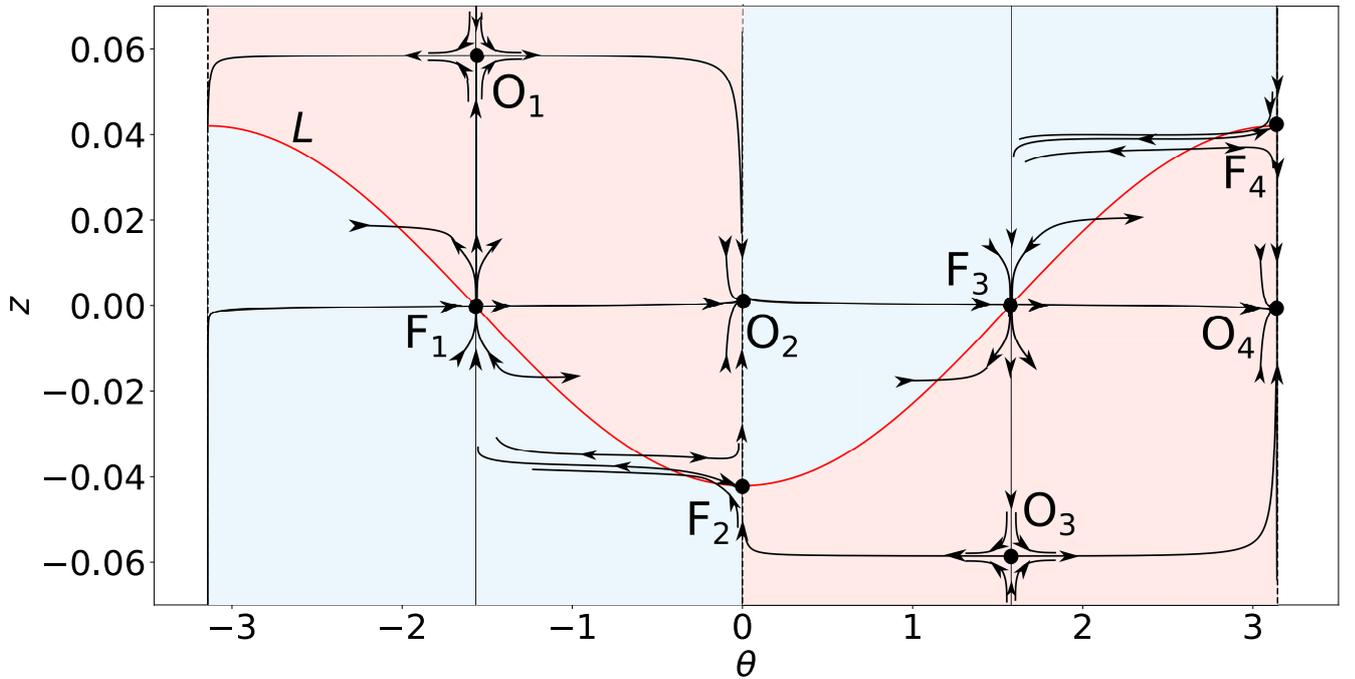


Рисунок 1.9 — Фазовая плоскость (θ, z) системы (1.15) с учётом знака функции $\Phi(\theta, z)$. Голубым цветом показана устойчивая относительно быстрых движений часть критического многообразия C_0 , красным — неустойчивая часть.
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.01$.

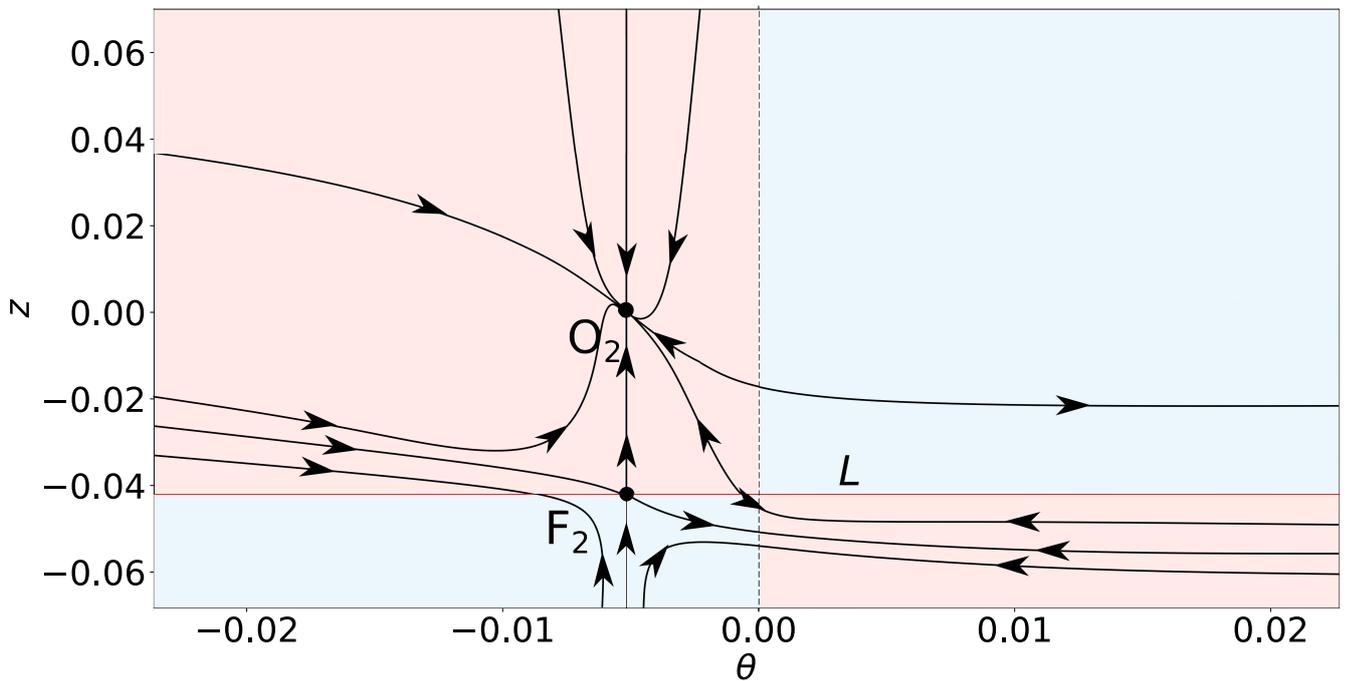


Рисунок 1.10 — Участок фазовой плоскости (θ, z) , показанной на рис. 1.9, вблизи $\theta = 0$.

3). Поэтому устойчивые многообразия $W^s(O_1)$ и $W^s(O_3)$ состояний равновесия нелинейной системы (1.6) совпадают с соответствующими многообразиями $E^s(O_1)$ и $E^s(O_3)$. Отметим, что для точек O_2 и O_4 инвариантные прямые

принадлежат инвариантным многообразиям состояний равновесия $E^s(O_2)$ и $E^s(O_4)$. Это означает, что устойчивые двумерные многообразия $W^s(O_2)$ и $W^s(O_4)$ пересекаются с критическим многообразием C_0 . Следовательно, прямые (1.18) инвариантны не только с учётом потока редуцированной системы (1.15), но и в исходной системе (1.6). Это означает, что они принадлежат не только критическому многообразию C_0 , но и многообразию C_ε , которое существует в соответствии с теоремой Феничеля [59; 60] ($C_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} C_0$).

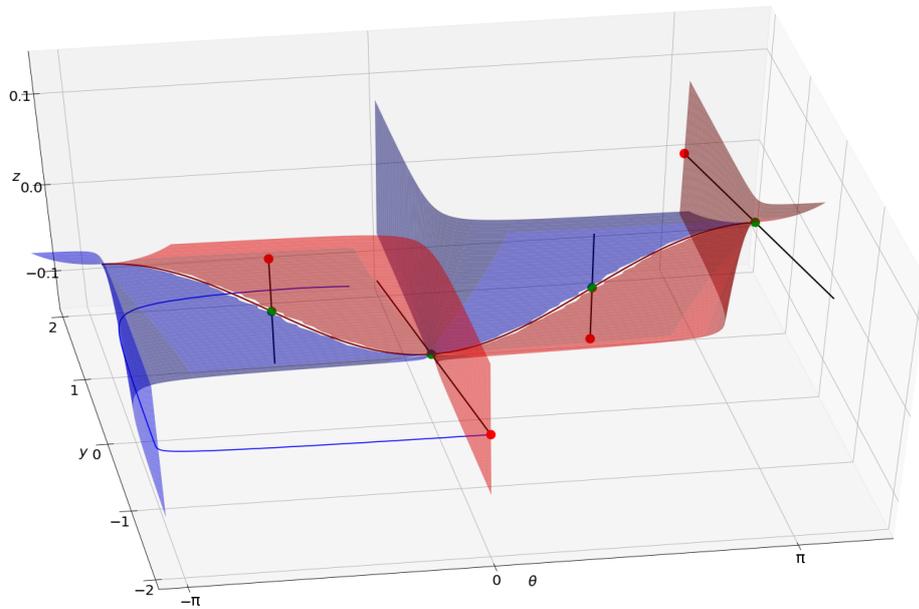


Рисунок 1.11 — Траектория (обозначена синим цветом) покидает окрестность критического многообразия C_0 в окрестности кривой L . Устойчивые части критического многообразия C_0 обозначены синим цветом, неустойчивые – красным цветом. Красными точками обозначены состояния равновесия O_j , зелёными точками обозначены F_j . $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.015$.

Таким образом, в результате анализа быстро–медленной динамики системы (1.6) были установлены следующие её свойства:

1. Классический, так называемый S-образный возвращающий динамический механизм формирования хаоса в этой системе отсутствует.
2. Траектории с начальными условиями на устойчивой части критического многообразия C_0 и в его окрестности покидают его, совершая вращательные движения в фазовом пространстве (рис. 1.11). Исключение составляют траектории, проходящие через точки F_j , которые не покидают окрестность критического многообразия, поскольку принад-

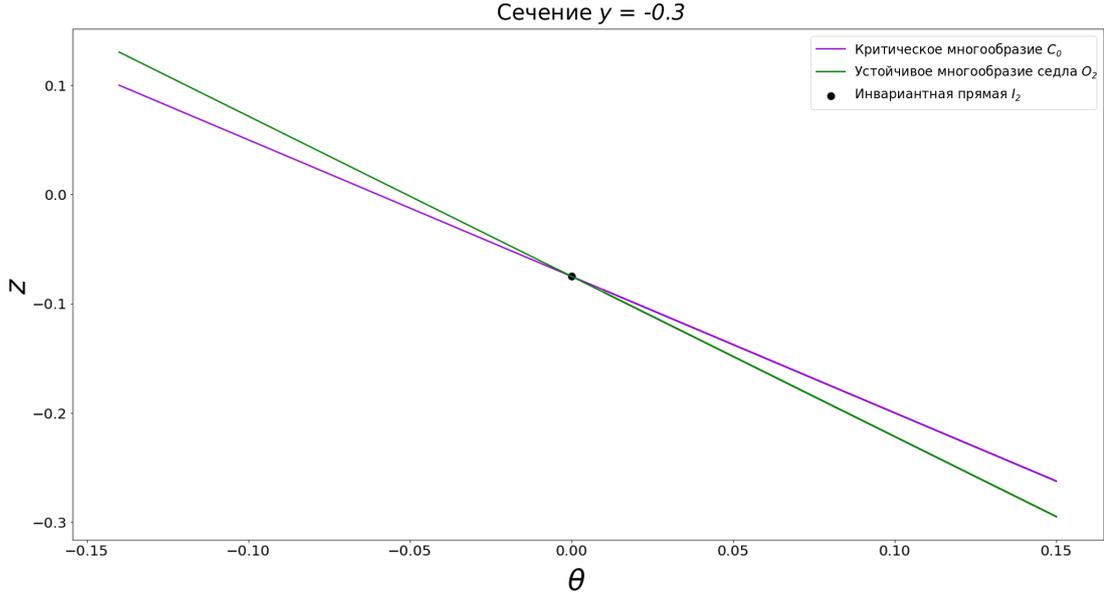


Рисунок 1.12 — Пересечение критического многообразия C_0 и устойчивых многообразий седел O_2 и O_4 вдоль инвариантных прямых в сечении $y = \text{const} = -0.3$. $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.017$.

лежат устойчивым многообразиям состояний равновесия O_j системы (1.6) (рис. 1.12).

Аналогичные рассуждения могут быть применены и для случая $t \mapsto -t$, то есть для репеллера.

1.2.5 Двумерная система на аппроксимирующей поверхности и хаотическая динамика системы (1.6)

В этом разделе мы приводим другое возможное объяснение механизма пересечения инвариантных многообразий хаотического аттрактора и хаотического репеллера и, соответственно, формирования смешанной динамики в системе (1.6). Численное моделирование системы (1.6) позволило установить, что седловые траектории хаотического аттрактора и хаотического репеллера локализованы в окрестности некоторой поверхности, показанной на рис. 1.13, которая описывается уравнением следующего вида:

$$z_{ap}(\theta, y) = A_z \cos \beta \sin \theta \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y}. \quad (1.19)$$

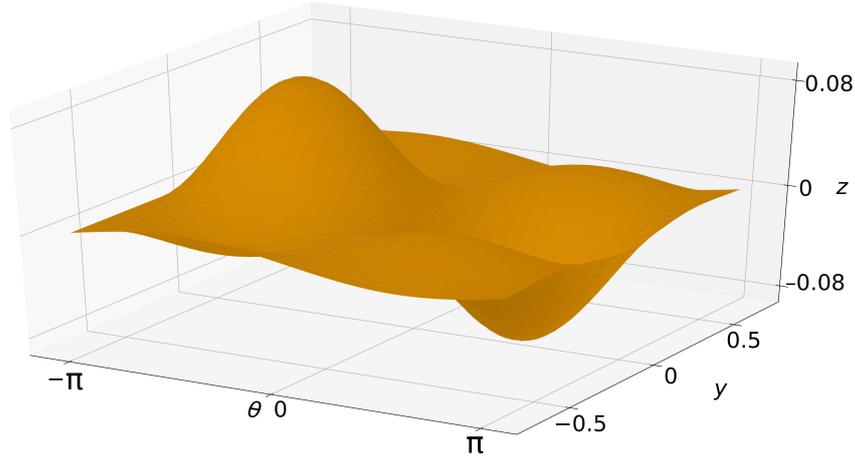


Рисунок 1.13 — Поверхность в фазовом пространстве G , в окрестности которой приближённо расположены траектории хаотического аттрактора и хаотического репеллера. Поверхность описывается уравнением (1.19) с параметрами

$$\omega_z = 10.25, \beta = 1.6, A_z = 3.06.$$

С помощью метода наименьших квадратов было установлено, что наилучшую аппроксимацию обеспечивают значения $\omega_z = 10.25$, $A_z = 3.06$. Чтобы убедиться в качестве аппроксимации, мы взяли значения переменных $\theta(\tau)$, $y(\tau)$ из численного моделирования системы (1.6) и подставили их в уравнение (1.19). Было произведено сравнение полученных значений переменной z со значениями из численного эксперимента. Результат этого сравнения приведён на рис. 1.14: он показывает, что аппроксимация $z_{ap}(\theta, y)$ удовлетворительна и она отражает качественное поведение переменной z . Стоит отметить, что аппроксимация (1.19) подходит как для случая пересекающихся аттрактора и репеллера, так и для случая отсутствия пересечения. Это позволяет проследить, каким образом смешанная динамика возникает в системе (1.6) и как она исчезает.

Предполагая, что вся динамика системы (1.6) происходит вблизи поверхности (1.19), исключим третье уравнение из системы (1.6) и подставим z_{ap} в первое уравнение вместо z . Получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + A_z \cos \beta \sin \theta \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y} \sin \alpha \cos \theta, \\ \dot{y} = -y - 2 \sin \beta \cos \theta. \end{cases} \quad (1.20)$$

Для параметров, соответствующих смешанной динамике, в исходной системе (1.6) есть четыре состояния равновесия: два седло-фокуса с одномерным устойчивым (приблизительно параллельным оси z) и двумерным неустойчивым многообразиями, и два седла с двумерным устойчивым (приблизительно $\theta = \text{const}$) и одномерным неустойчивым (приблизительно параллельным оси θ)

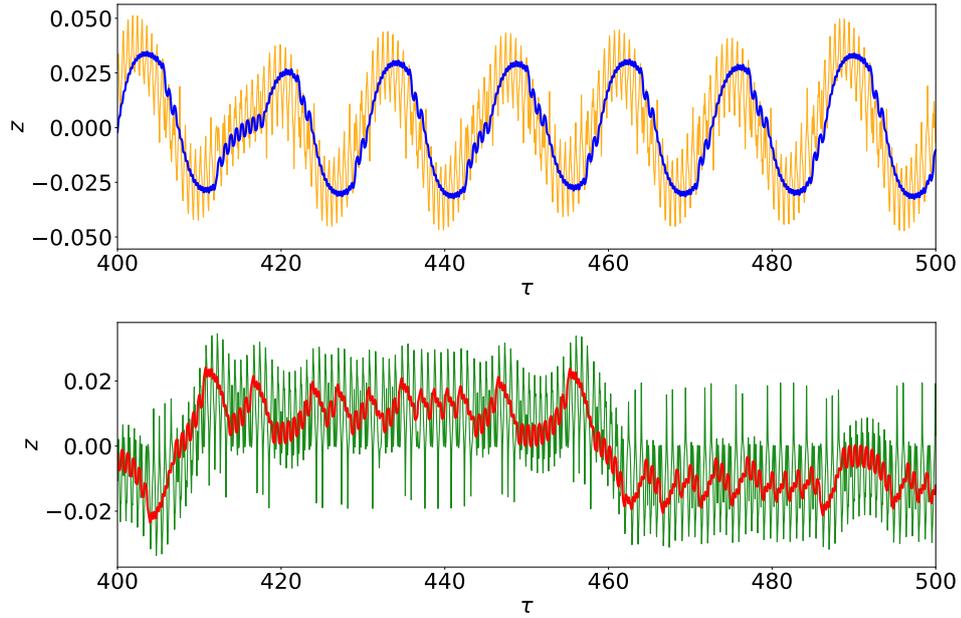


Рисунок 1.14 — На верхнем графике отображена зависимость $z(\tau)$ на траектории хаотического аттрактора (синий) в сравнении с приближённой зависимостью $z_{ap}(\theta(\tau), y(\tau))$ (оранжевый). На нижнем графике показана $z(\tau)$ на траектории хаотического репеллера (красный) и приближённая зависимость (зелёный).

$$\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.015, \omega_z = 10.25, A_z = 3.06$$

многообразиями. Анализ динамики двумерной системы (1.20) показал, что для этих значений параметров в ней также существуют четыре состояния равновесия: два неустойчивых фокуса и два седла с неустойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси θ , и устойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси y . Кроме того, координаты состояний равновесия в двумерной и трёхмерной системах почти совпадают, так что разницей в них можно пренебречь.

При $\gamma = 0$ система (1.20) имеет два устойчивых колебательных предельных цикла вокруг неустойчивых фокусов; их бассейны притяжения разделены инвариантными прямыми $\theta = 0$, $\theta = \pi$, которые содержат устойчивые сепаратрисы сёдел (рис. 1.15). При небольшом увеличении параметра γ одна из устойчивых сепаратрис сёдел и одна из неустойчивых (та, что направлена вдоль оси θ) совпадают, так что на фазовой плоскости формируются два гетероклинических контура (рис. 1.16). При разрушении этих контуров с дальнейшим увеличением параметра γ формируется неустойчивый предельный цикл вращательного типа (рис. 1.17).

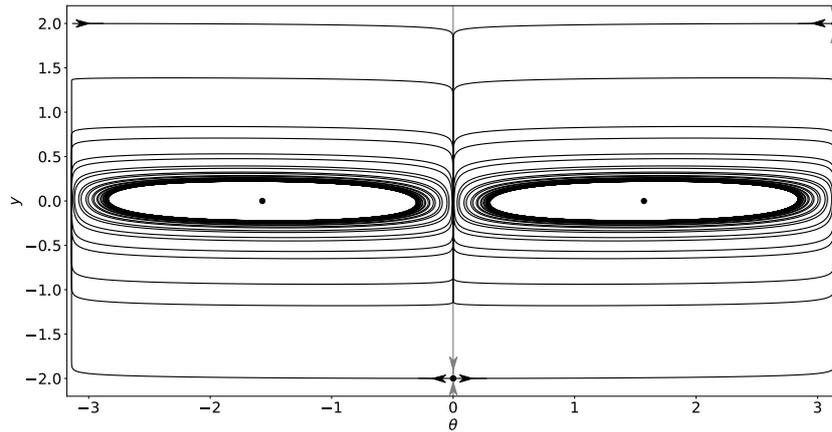


Рисунок 1.15 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0$

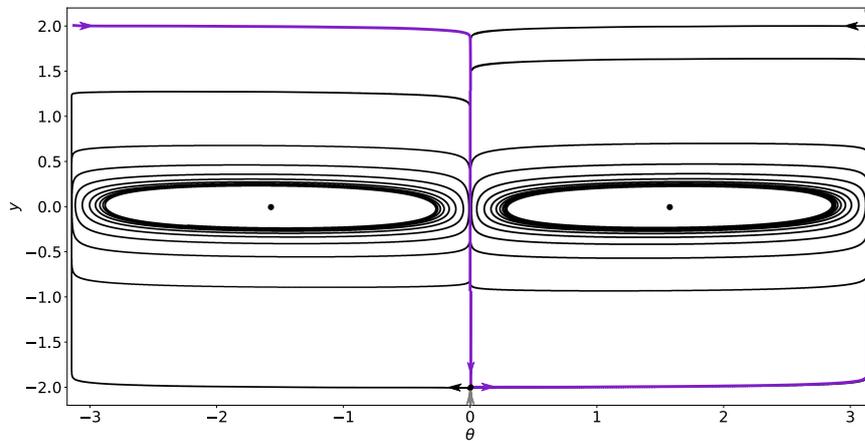


Рисунок 1.16 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 10^{-15}$

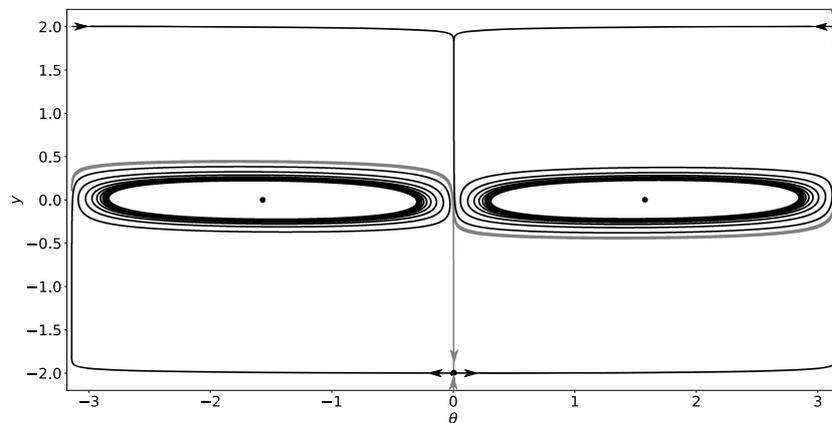


Рисунок 1.17 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.001$

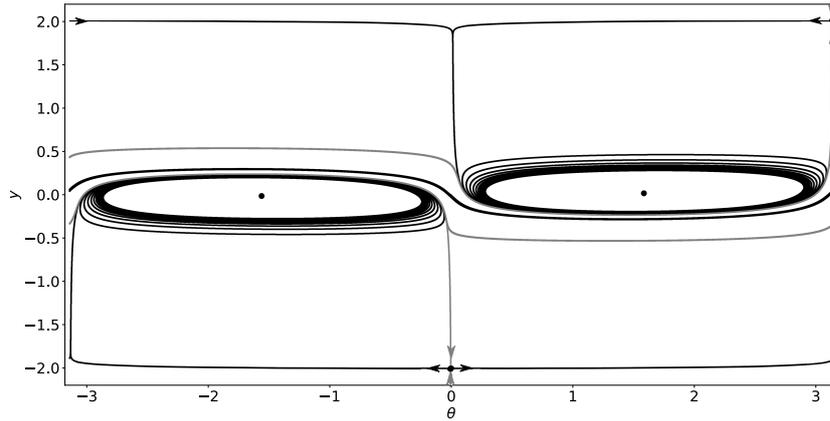


Рисунок 1.18 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.015$

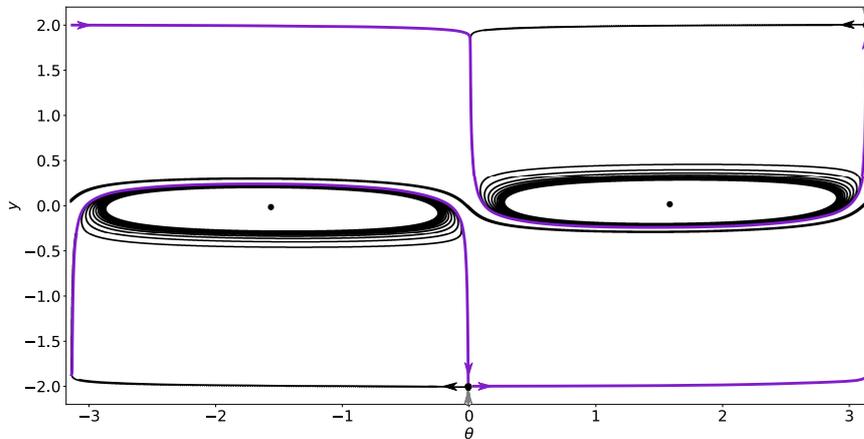


Рисунок 1.19 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.0155$

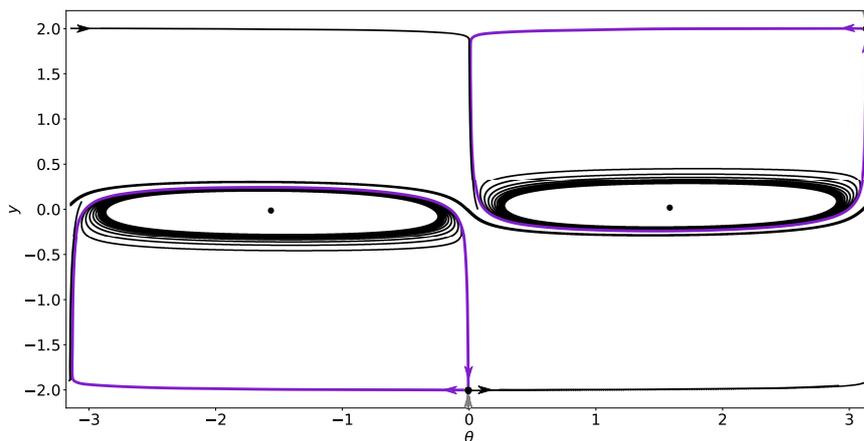


Рисунок 1.20 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.0155001$

При $\gamma = 0.0087$ около неустойчивого вращательного предельного цикла через седло-узловую бифуркацию появляются устойчивый и неустойчивый

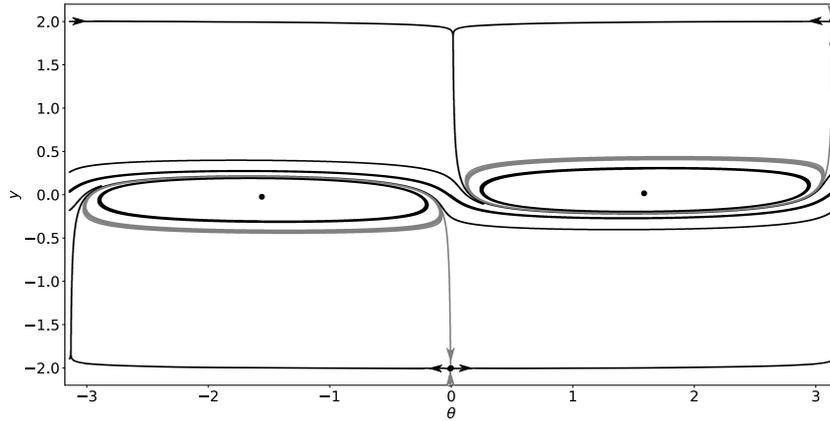


Рисунок 1.21 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.019$

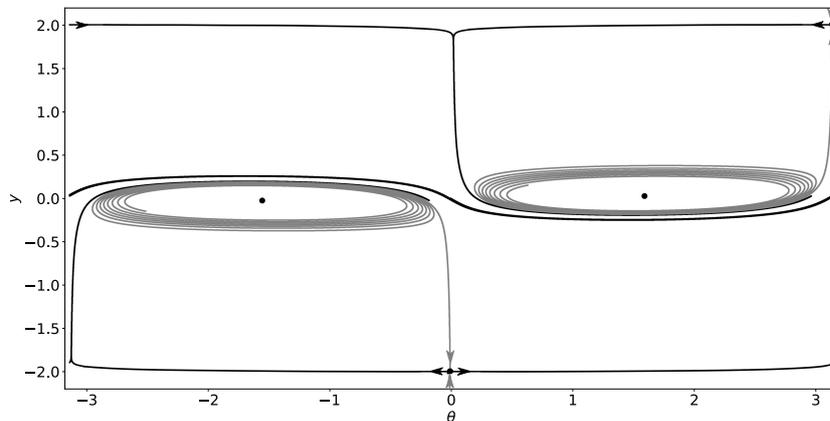


Рисунок 1.22 — Фазовая плоскость системы (1.20).
 $\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.021$

вращательные предельные циклы (рис. 1.18); затем два неустойчивых вращательных предельных цикла исчезают при $\gamma = 0.0155$ через две вращательные петли сепаратрис (рис. 1.19). При малом увеличении параметра γ от этой величины формируются две колебательные петли сепаратрис (рис. 1.20), из которых генерируются два неустойчивых колебательных предельных цикла (рис. 1.21). Затем они исчезают через седло-узловую бифуркацию, сливаясь с двумя устойчивыми колебательными предельными циклами, и начиная с $\gamma = 0.0203$, в системе остаётся один устойчивый вращательный предельный цикл (рис. 1.22).

Теперь рассмотрим, каким образом соотносятся динамика двумерной системы (1.20) и динамика исходной трёхмерной системы (1.6). При $0 \leq \gamma < 0.0203$ в системе (1.6) существуют хаотический аттрактор и хаотический репел-

лер, которые имеют окна регулярности. При $\gamma < 0.01$ траектории хаотического аттрактора в основном колеблются вокруг неустойчивых фокусов, периодически переключаясь между ними. С ростом γ они начинают также вращаться около $y = z = 0$ и совершать меньше колебательных движений. При этом в системе (1.20) при малых γ есть предельные циклы только колебательного типа, а затем, с ростом γ , появляется и предельный цикл вращательного типа. Что касается хаотического репеллера, наоборот, когда γ мало, его траектории в основном совершают вращательные движения, а при росте γ начинают совершать также и колебательные движения. При этом в двумерной системе (1.20) сначала есть только неустойчивый вращательный предельный цикл, а затем появляются неустойчивые колебательные циклы. Кроме того, с ростом γ амплитуда колебаний траекторий хаотического репеллера по оси z возрастает одновременно с уменьшением амплитуды колебаний по оси y . И в двумерной системе с ростом параметра γ амплитуда неустойчивых колебательных предельных циклов уменьшается. На поверхности (1.19) (рис. 1.13) с уменьшением координаты y координата z возрастает. Кроме того, при $\gamma \approx 0.0203$ в системе (1.20) происходят седло-узловые бифуркации двух пар колебательных предельных циклов, и после этого единственным устойчивым аттрактором в системе остаётся устойчивый предельный цикл вращательного типа, в то время как в системе (1.6) при $\gamma \approx 0.0203$ также одновременно исчезают хаотический аттрактор и хаотический репеллер, и после этого единственным устойчивым аттрактором в системе остаётся устойчивый предельный цикл вращательного типа в трёхмерном фазовом пространстве. Таким образом, динамика трёхмерной системы (1.6) и динамика двумерной системы (1.20) значительно коррелированы.

На рис. 1.23 изображены временные зависимости переменных на хаотическом аттракторе системы (1.6) вместе с временными зависимостями переменных на трёх различных аттракторах системы (1.20), а на рис. 1.24 показано то же для хаотического репеллера системы (1.6) и двух различных репеллеров системы (1.20). Стоит отметить, что система (1.20) не имеет колебательных и вращательных репеллеров одновременно, однако, как следует из рис. 1.24, траектории хаотического репеллера совершают как колебательные, так и вращательные движения. Из рисунков 1.23 и рис. 1.24 следует, что при параметрах, соответствующих смешанной динамике, *фрагменты* седловых траекторий системы (1.6) приближённо описываются траекториями, принадлежащими аттракторам и репеллерам системы (1.20).

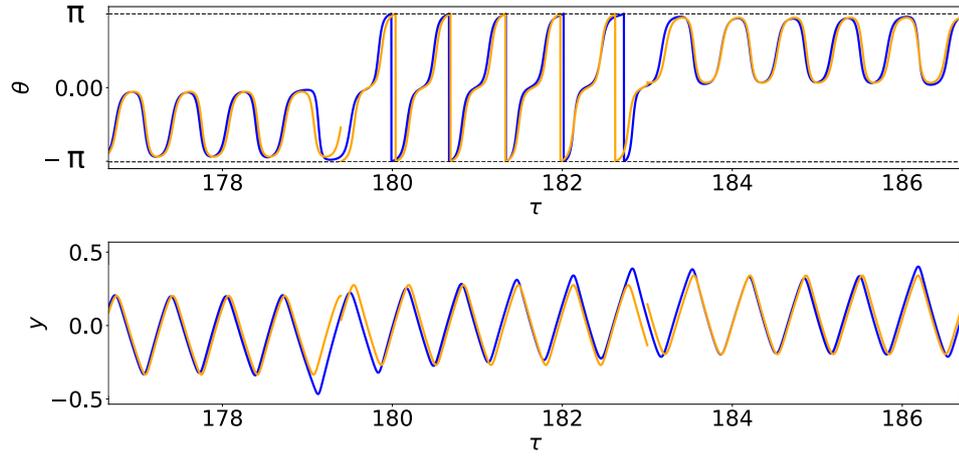


Рисунок 1.23 — Временные зависимости переменных на хаотическом аттракторе трёхмерной системы (синий) в сравнении с зависимостью переменных на аттракторах двумерной приближённой системы (оранжевый).

$$\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.0198$$

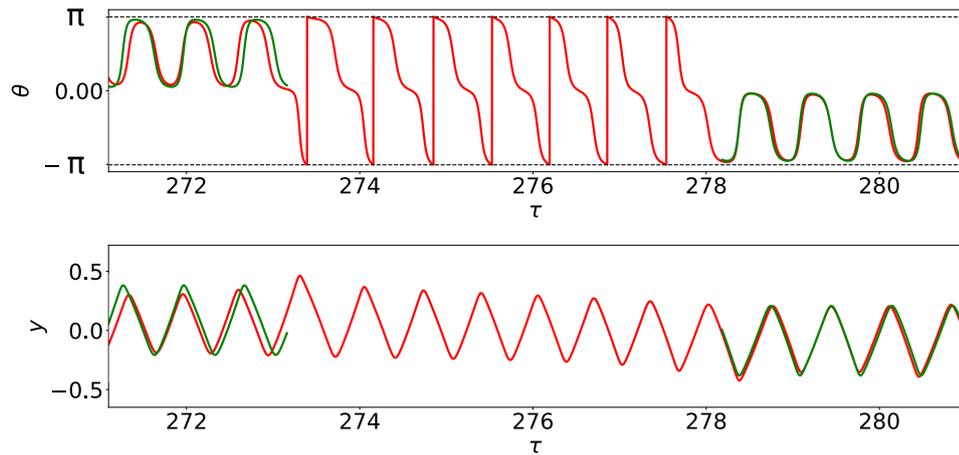


Рисунок 1.24 — Временные зависимости переменных на хаотическом репеллере трёхмерной системы (красный) в сравнении с зависимостями переменных на репеллерах двумерной приближённой системы (зелёный).

$$\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, \gamma = 0.0198$$

Рассмотрим, как соотносятся ляпуновские показатели аттракторов и репеллеров систем (1.6) и (1.20). Рисунок 1.25а демонстрирует, что в первом из трёх интервалов значений параметра γ , разделённых пиками, соответствующих окнам регулярности, наименьший ляпуновский показатель траектории системы (1.6) близок к ненулевому ляпуновскому показателю одного из устойчивых колебательных предельных циклов системы (1.20). Для других двух интервалов наименьший ляпуновский показатель траектории системы (1.6) близок к

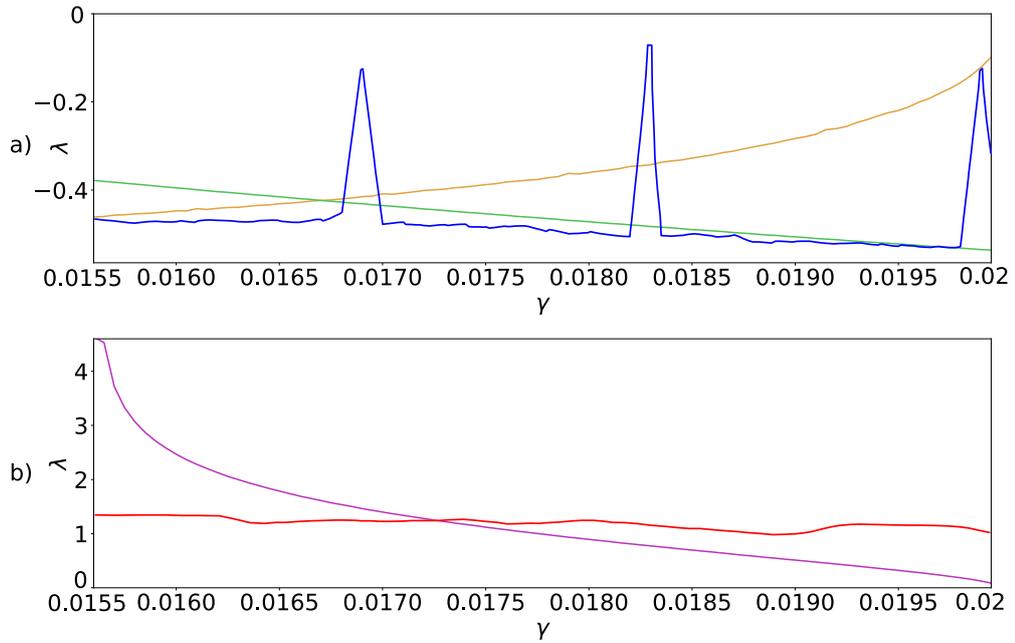


Рисунок 1.25 — Верхний график показывает зависимость наименьшего ляпуновского показателя хаотического аттрактора от параметра γ (синий) в сравнении с зависимостью ляпуновских показателей устойчивых колебательных предельных циклов (оранжевый) и устойчивого вращательного предельного цикла (зелёный). Нижний график показывает зависимость наибольшего ляпуновского показателя хаотического репеллера (красный) от параметра γ в сравнении с зависимостью ляпуновских показателей неустойчивых колебательных предельных циклов (фиолетовый).

$$\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01$$

ляпуновскому показателю устойчивого вращательного предельного цикла. На рис. 1.25б показано, что существует интервал значений параметра γ , в котором положительный ляпуновский показатель траектории хаотического репеллера близок к ляпуновскому показателю неустойчивого колебательного предельного цикла системы (1.20). Это подтверждает корректность аппроксимации. Таким образом, мы показали, что в системе (1.20) при параметрах, соответствующих смешанной динамике в системе (1.6), аттракторы и репеллеры близки друг к другу. Благодаря наличию неустойчивого направления в случае хаотической динамики в системе (1.6), для близких траекторий аттрактора и репеллера образуются пересечения их инвариантных многообразий и появляется смешанная динамика.

1.3 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула

1.3.1 Модель

В этом разделе приведено исследование динамики коэволюционного ансамбля двух осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула, который описывается системой следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta + A \sin \omega_0 \tau, \\ \dot{y} = -y - 2 \sin \beta \cos \theta, \\ \dot{z} = -z + 2 \cos \beta \sin \theta, \end{cases} \quad (1.21)$$

где $A > 0$ — амплитуда, а $\omega_0 > 0$ — частота внешнего гармонического воздействия. При $A = 0$ система (1.21) совпадает с системой (1.6). Систему (1.21) можно рассматривать как модель двух пластически связанных нейронов под действием периодического внешнего тока. Зафиксируем далее параметры $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, значения которых соответствуют значениям параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ в случае смешанной динамики в автономной системе (1.6).

1.3.2 Возникновение смешанной динамики под действием внешней силы

Для исследования смешанной динамики в системе (1.21) нужно изучать взаимное расположение хаотического аттрактора и хаотического репеллера на трёхмерной секущей отображения траекторий системы через период внешней силы $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Обнаружено, что даже для случая $\gamma = 0$, когда в автономной системе (1.6) отсутствует смешанная динамика, при увеличении амплитуды внешней силы A область занимаемого хаотическим репеллером пространства растёт, и при некотором критическом значении $A = A_{cr}$ в системе возникает смешанная динамика, когда хаотические аттрактор и репеллер пересекаются. В этом можно убедиться, проанализировав расположение аттрактора и репеллера на секущей Пуанкаре (рис. 1.26) и график зависимости расстояния между

точками аттрактора и репеллера на этой секущей (рис. 1.27), вычисленного по формуле:

$$(l_{ar})_i = \min_j \sqrt{(\theta_i^a - \theta_j^r)^2 + (y_i^a - y_j^r)^2 + (z_i^a - z_j^r)^2}. \quad (1.22)$$

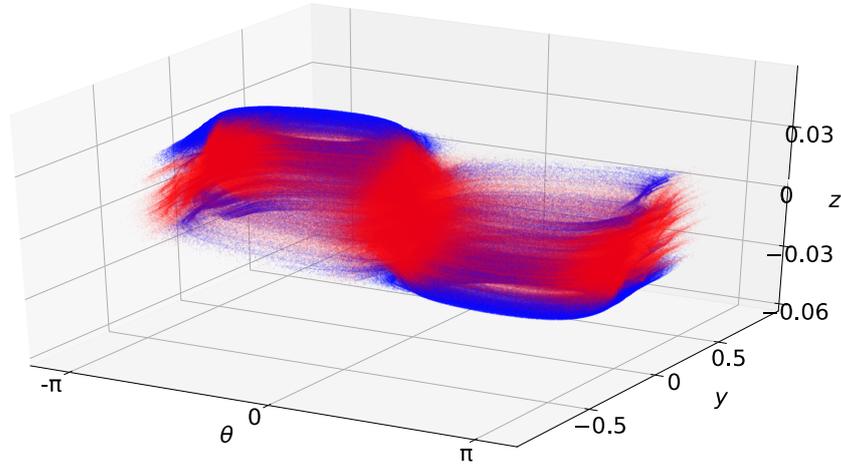


Рисунок 1.26 — Хаотический аттрактор (синий) и хаотический репеллер (красный) системы (1.21) на секущей Пуанкаре.

$$\gamma = 0, \quad \omega_0 = 0.5, \quad A = 0.013$$

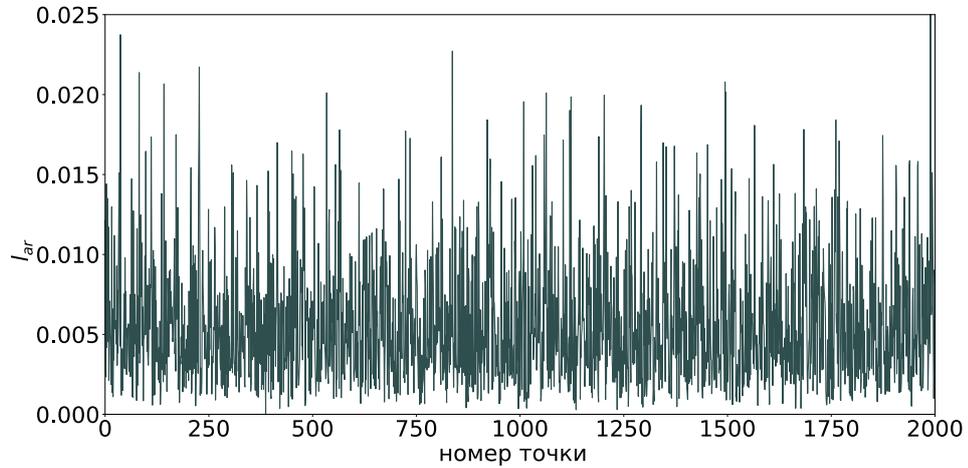


Рисунок 1.27 — График зависимости расстояния между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером на секущей Пуанкаре от номера точки хаотического аттрактора.

$$\gamma = 0, \quad \omega_0 = 0.5, \quad A = 0.013$$

Исследуем характеристики смешанной динамики в системе (1.21). Рисунок 1.28 демонстрирует область на плоскости параметров (ω_0, A) , внутри которой реализуется смешанная динамика для $0 < \omega_0 < 10$ (закрашена голубым цветом). Эта область ограничена снизу кривой B , при пересечении которой

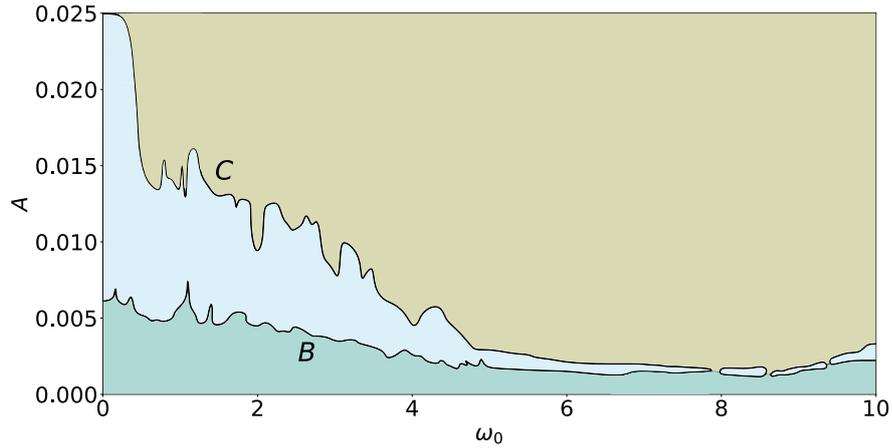


Рисунок 1.28 — Область существования смешанной динамики в неавтономной системе (1.21) на плоскости параметров (ω_0, A) (голубой цвет) при $\gamma = 0$

минимальное расстояние между хаотическим аттрактором и репеллером становится больше установленного нами порога в 0.002. При пересечении кривой C хаотический репеллер исчезает, а хаотический аттрактор остаётся. Таким образом, поведение системы (1.21) на верхней границе области существования смешанной динамики отличается от поведения системы (1.6) на верхней границе этой области по параметру γ , когда хаотический аттрактор и репеллер исчезают одновременно. Стоит отметить, что смешанная динамика существует и для $\omega_0 > 10$, но для этих частот область значительно уже по сравнению с приведённой на рис. 1.28.

Таблица 3 — Расстояние Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна ($KRW D$) между хаотическим аттрактором и репеллером системы (1.21)

$\{\gamma = 0, A = 0\}$	$\{\gamma = 0, \omega_0 = 0.5, A = 0.013\}$
0.45	0.2

Была изучена такая характеристика как расстояние Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна между хаотическим аттрактором и репеллером. Это расстояние оценивает меру схожести двух распределений в метрическом пространстве. Соответственно, в рассматриваемом случае оно отражает меру схожести распределений траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера в фазовом пространстве. Если представить обе меры как взвешен-

ные множества точечных мер

$$\mu = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \delta_{y_j}, \quad (1.23)$$

то любая матрица $f_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_i f_{ij} = \beta_j, \quad \sum_j f_{ij} = \alpha_i, \quad (1.24)$$

обеспечивает возможную транспортировку одной меры в другую. Оптимальная транспортировка должна минимизировать функцию стоимости, определяемую в соответствии с «выполненной работой», т. е. транспортируемой массой, умноженной на расстояние $c_{ij} = \|x_i - y_j\|_2$ между двумя точками

$$W(\mu, \nu) = \min \sum_{i,j} f_{ij} c_{ij}, \quad (1.25)$$

которая и называется расстоянием Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна. При исследовании смешанной динамики эта характеристика впервые была использована в работе [61]. Как и авторы указанной статьи, для её расчёта мы использовали программу с открытым исходным кодом [24]. Обнаружено, что в случае смешанной динамики это расстояние между аттрактором и репеллером уменьшается (таблица 3), что свидетельствует о том, что они становятся более похожими друг на друга.

Исследуем, как наличие смешанной динамики влияет на форму колебаний в прямом и обратном времени. Численное моделирование системы (1.21) показало, что в общем случае форма колебаний в прямом и обратном времени в неавтономном случае смешанной динамики обладает более высокой степенью схожести, чем в автономном случае (1.6). В автономном случае переменные ведут себя по-разному в прямом и обратном времени, совпадая лишь в некоторые моменты времени (рис. 1.29). Переменные в обратном времени в течение долгого промежутка времени принимают положительные значения, затем пересекают ноль и долгое время принимают отрицательные значения. Установлено, что в неавтономном случае (1.21) переменные в обратном времени пересекают ноль почти с такой же частотой, что и в прямом времени. Перебор значений параметра ω_0 показал, что при $\omega_0 \approx 0.3675$, а также на кратных частотах, колебания в прямом и обратном времени обладают наибольшей схожестью (рис. 1.30). Эта частота внешней силы примечательна тем, что она соответствует пику в спектрах мощности колебаний для траекторий хаотического аттрактора

системы (1.21) при $\{\gamma = 0, A = 0\}$ (выделенные спектральные компоненты в спектрах мощности переменных θ и z совпадают по частотам, что говорит о коррелированности колебаний этих переменных). Однако при $A \neq 0$ максимум сдвигается в область более высоких частот, поэтому случай, изображённый на рис. 1.30, не соответствует вынужденной синхронизации хаотического аттрактора и репеллера. Кроме того, отметим, что форма колебаний в обратном времени существенным образом зависит от параметра ω_0 , в то время как в прямом времени нет такой сильной зависимости.

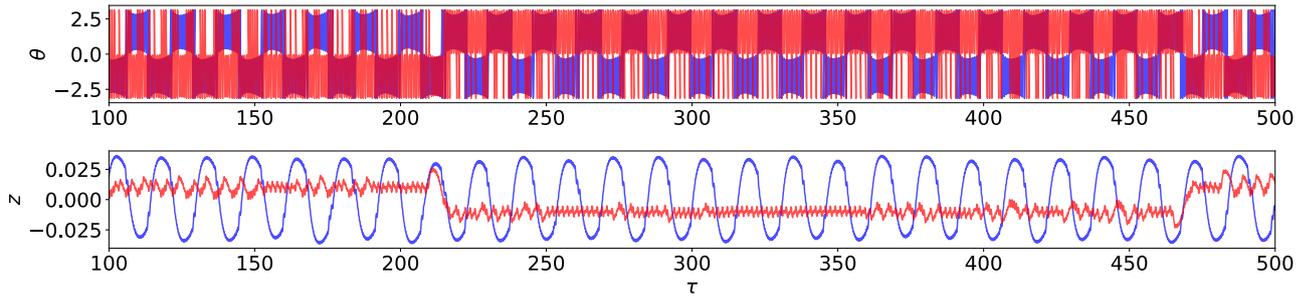


Рисунок 1.29 — Зависимости переменных θ и z от прямого (синий) и обратного (красный) времени в автономном случае (1.6) смешанной динамики.

$$\gamma = 0.01$$

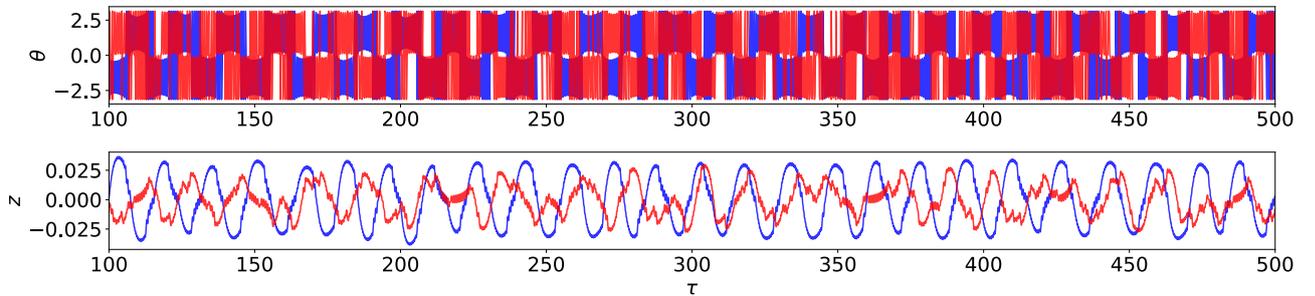


Рисунок 1.30 — Зависимости переменных θ и z от прямого (синий) и обратного (красный) времени в неавтономном случае (1.21) смешанной динамики.

$$\gamma = 0, \omega_0 = 0.3675, A = 0.02$$

Было проведено исследование вынужденной синхронизации в системе (1.21). Под вынужденной хаотической синхронизацией будем понимать совпадение частот, соответствующих пикам в спектрах мощности переменных, с частотой внешней силы. Такая трактовка справедлива в том случае, если колебания являются квазикогерентными, то есть если большая часть спектральной плотности мощности сконцентрирована на одной частоте. Вычисление спектров мощности переменных системы (1.21) показало, что колебания переменных θ и

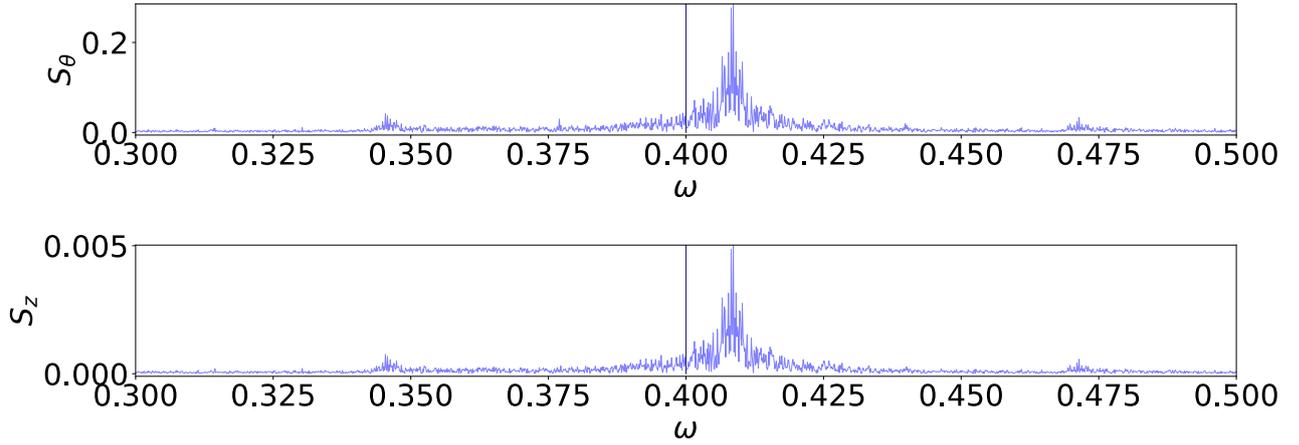


Рисунок 1.31 — Спектры мощности колебаний переменных θ и z в неавтономном случае (1.21) смешанной динамики. Прямой линией выделена частота внешней силы.

$$\gamma = 0, \omega_0 = 0.4, A = 0.02$$

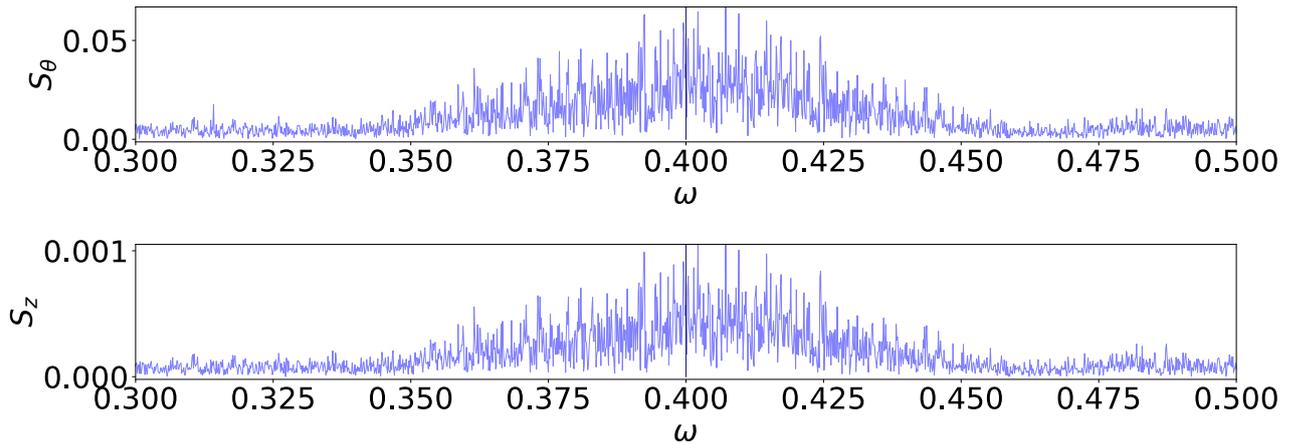


Рисунок 1.32 — Спектры мощности колебаний переменных θ и z в отсутствие смешанной динамики в системе (1.21). Прямой линией выделена частота внешней силы.

$$\gamma = 0, \omega_0 = 0.4, A = 0.03$$

z являются квазикогерентными, и порог вынужденной хаотической синхронизации приблизительно совпадает с верхней границей S области существования смешанной динамики, изображённой на рис. 1.28. Под «собственной частотой» хаотического аттрактора понимается частота $\omega \approx 0.3675$, соответствующая пику в спектрах мощности переменных при $\{\gamma = 0, A = 0\}$. Например, для значения $A = 0.03$ вынужденная хаотическая синхронизация существует в интервале $\omega_0 \in (0.2, 0.5)$, середина которого приблизительно совпадает с этой

собственной частотой. Рисунки 1.31 и 1.32 демонстрируют спектры мощности в случае смешанной динамики и в ее отсутствие, соответственно, для $\omega_0 = 0.4$. Установлено, что в случае смешанной динамики частота, соответствующая пикам в спектрах мощности переменных θ и z , не совпадает с частотой внешней силы. Однако как только смешанная динамика в системе (1.21) исчезает, пики становятся шире, а их центры начинают совпадать с частотой внешней силы. Таким образом, наличие смешанной динамики в некотором смысле «препятствует» вынужденной хаотической синхронизации колебаний.

1.3.3 Влияние внешней силы на обратимое ядро

Изучим влияние внешней силы на уже существующее обратимое ядро, сформированное под действием частотной расстройки (параметр γ). На рис. 1.33 показана область существования смешанной динамики на плоскости параметров (γ, A) (голубой цвет). Как и на рис. 1.28, при пересечении кривой B расстояние между хаотическим аттрактором и репеллером становится больше, чем 0.002, а при пересечении кривой C хаотический репеллер в системе (1.21) исчезает, в то время как хаотический аттрактор остаётся. Отметим, что внешнее воздействие может как вызывать появление смешанной динамики, так и подавлять её. Например, при $\gamma = 0.019$ существует «автономная» смешанная динамика, однако, если приложить небольшую внешнюю силу $A = 0.001$, смешанная динамика в системе (1.21) исчезнет одновременно с исчезновением хаотического репеллера.

Была исследована зависимость фрактальных размерностей хаотического аттрактора и обратимого ядра от параметра A . Исследование показало, что под действием внешней силы фрактальные размерности обратимого ядра и хаотического аттрактора уменьшаются (см. таблицу 4).

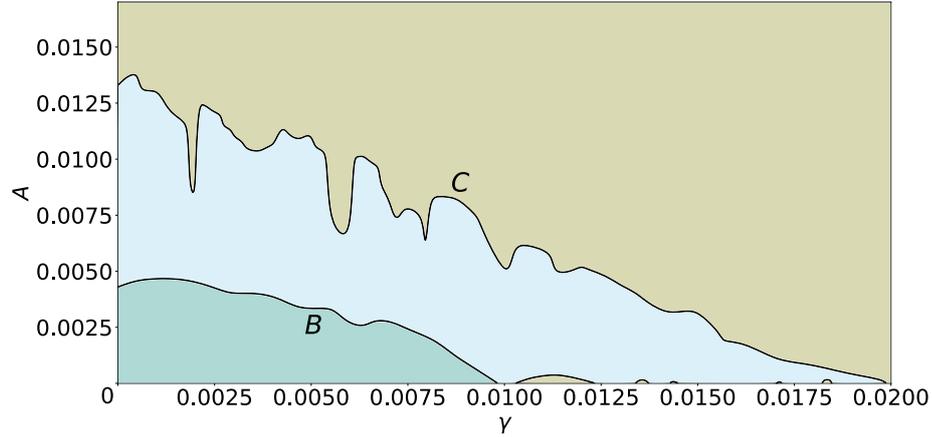


Рисунок 1.33 — Область существования смешанной динамики в неавтономной системе (1.21) на плоскости параметров (γ, A) (голубой цвет) для $\omega_0 = 2$

Таблица 4 — Зависимость фрактальных размерностей обратимого ядра D_F^c и хаотического аттрактора D_F^a от амплитуды внешней силы A для $\gamma = 0.015$

A	$D_F^c (\omega_0 = 0.1)$	$D_F^c (\omega_0 = 0.5)$	$D_F^a (\omega_0 = 0.5)$
0	2.04	2.04	2.27
0.001	1.84	1.86	2.01
0.003	1.89	1.89	2.06
0.005	1.89	1.97	2.07
0.007	1.89	2.01	2.07

1.4 Система двух коэволюционно связанных активных ротаторов

1.4.1 Модель

В этом разделе приведено исследование коэволюционного ансамбля осцилляторов Курамото следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + a \sin \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 - \kappa_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha) + a \sin \varphi_2, \\ \dot{\kappa}_1 = -\varepsilon (\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) + \kappa_1), \\ \dot{\kappa}_2 = -\varepsilon (\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \kappa_2), \end{cases} \quad (1.26)$$

где $a > 0$ — параметр, а точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t . Заметим, что, в отличие от систем (1.6), (1.21), колебания одиночного элемента системы (1.26) являются неизохронными. Если считать систему (1.26) моделью двух связанных спайковых нейронов, то при выполнении условия $\frac{\omega_i}{a} < 1$ для изолированного элемента системы (1.26) система возбуждима, то есть при наличии внешнего воздействия достаточной амплитуды нейрон генерирует одиночный спайк, а при $\frac{\omega_i}{a} > 1$ нейрон генерирует спайковые последовательности. В случае $a = 0$ система (1.26) совпадает с системой (1.5), которая сводится к системе (1.6). Снова зафиксируем параметры $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, соответствующие смешанной динамике в системах (1.6), (1.21).

1.4.2 Возникновение смешанной динамики при учёте неизохронности элемента системы

Поскольку система (1.26), как и системы (1.6), (1.21), относится к классу быстро–медленных, к ней применима соответствующая методика исследования. В системе (1.26) φ_1 и φ_2 являются быстрыми переменными, а κ_1 и κ_2 — медленными. Критическое многообразие системы (1.26) записывается следующим образом:

$$C_0 = \begin{cases} \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + a \sin \varphi_1 = 0, \\ \omega_2 + \kappa_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha) + a \sin \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Медленная подсистема описывается системой

$$\begin{cases} \frac{d\kappa_1}{d\tau} = -(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) + \kappa_1), \\ \frac{d\kappa_2}{d\tau} = -(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \kappa_2), \end{cases} \quad (1.28)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0$, а быстрая подсистема описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + a \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - \kappa_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha) + a \sin \varphi_2, \\ \frac{d\kappa_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\kappa_2}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Исследуем взаимное расположение хаотических аттрактора и репеллера в системе (1.26). На рис. 1.34а и 1.34в показаны проекции хаотических аттрактора и репеллера на плоскости (φ_1, φ_2) и (κ_1, κ_2) , соответственно, в случае

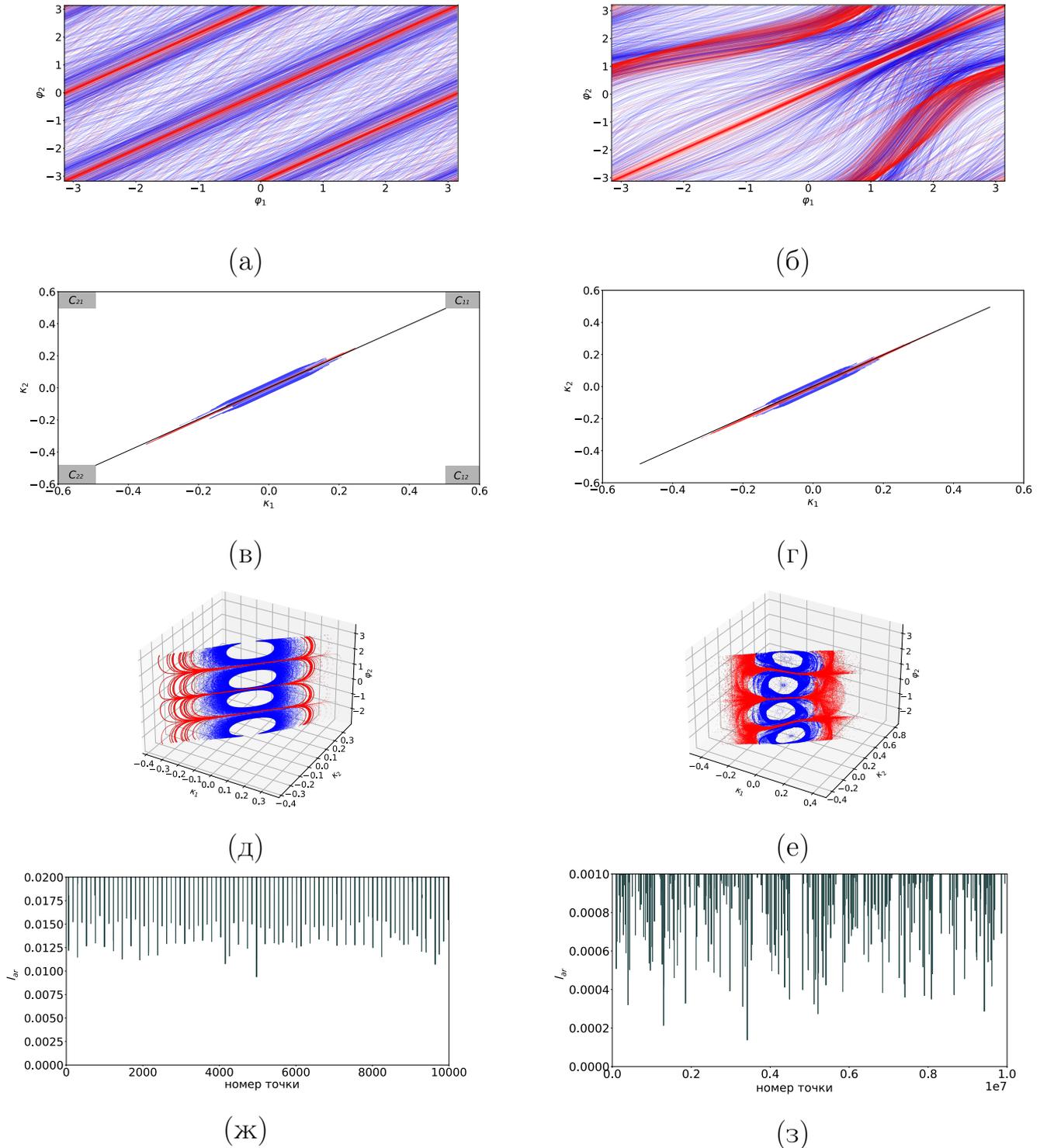


Рисунок 1.34 — Первый и второй ряды: хаотические аттрактор (синий) и репеллер (красный) системы (1.26) в проекциях на плоскости (φ_1, φ_2) и (κ_1, κ_2) , соответственно. Третий ряд: хаотические аттрактор (синий) и репеллер (красный) системы (1.26) на секущей Пуанкаре $\varphi_1 + \varphi_2 = 0.5$. Четвертый ряд: зависимости расстояния между хаотическими аттрактором и репеллером от номера точки на секущей Пуанкаре. Слева: смешанная динамика отсутствует ($a = 0$), справа: реализуется смешанная динамика ($a = 0.25$). $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$

$\{\omega_1 = \omega_2 = 0.5, a = 0\}$ (что соответствует $\gamma = 0$ в системе (1.6)). На рис. 1.26в также показаны области C_{11}, C_{12}, C_{21} и C_{22} , в которых существует критическое многообразие C_0 . Как следует из рисунков, проекции хаотических аттрактора и репеллера находятся в окрестности диагонали $\kappa_1 = \kappa_2$ и вне областей существования критического многообразия C_0 . Это означает, что, как и в случае системы (1.6), хаотические аттракторы и репеллеры системы (1.26) не могут быть описаны в рамках теории быстро–медленных систем. Рисунок 1.34д демонстрирует секущую Пуанкаре $\varphi_1 + \varphi_2 = 0.5$, а рис. 1.34ж демонстрирует график зависимости расстояния между хаотическими аттрактором и репеллером в зависимости от номера точки аттрактора на секущей. Как следует из этих рисунков, при выбранных значениях параметров хаотический аттрактор и хаотический репеллер разделены.

Рассмотрим теперь случай ненулевого параметра a . Рисунки 1.34б и 1.34г демонстрируют проекции хаотических аттрактора и репеллера в случае $\{\omega_1 = \omega_2 = 0.5, a = 0.25\}$. В этом случае хаотические аттрактор и репеллер меняют свой вид на плоскости (φ_1, φ_2) , однако их проекции на плоскости (κ_1, κ_2) по-прежнему заполняют окрестность главной диагонали. При этом на секущей Пуанкаре аттрактор и репеллер сближаются (рис. 1.26е), и на ней появляются точки, в которых расстояние между ними очень мало (рис. 1.26з). По численному критерию $l_{ar} < 0.002$, который мы использовали ранее при анализе систем (1.6), (1.21), это означает, что в системе (1.26) появляется смешанная динамика под действием параметра неизохронности a . Другим доказательством существования смешанной динамики в системе (1.26) является наличие пересечения инвариантных многообразий седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера на секущей Пуанкаре (рис. 1.35).

В соответствии с теорией третьего типа хаоса, развитой в статье [19], в случае смешанной динамики бассейны притяжения хаотических аттрактора и репеллера пересекаются. Рисунок 1.36, где изображено сечение $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, демонстрирует, что это условие выполняется в случае смешанной динамики в системе (1.26). Отметим, что бассейн притяжения хаотического репеллера достаточно узкий и расположен вблизи главной диагонали, причем с ростом параметра a он уменьшается. В других сечениях бассейн притяжения хаотического репеллера также сосредоточен вблизи главной диагонали $\kappa_1 = \kappa_2$.

Ещё одной характеристикой смешанной динамики является расстояние Канторовича–Рубинштейна–Вассерштейна между хаотическими аттрактором

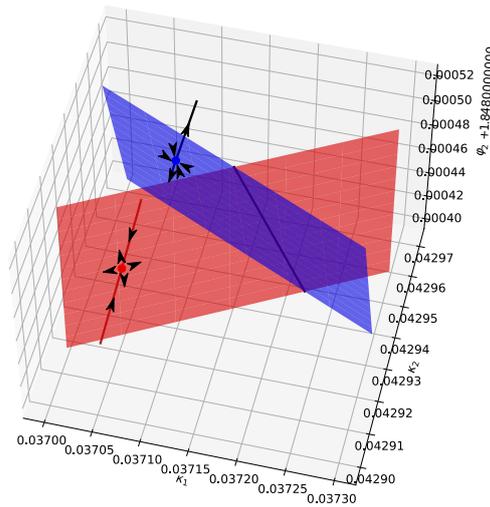


Рисунок 1.35 — Пересечение инвариантных многообразий седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера на сечущей Пуанкаре $\varphi_1 + \varphi_2 = 0.5$. Синяя точка принадлежит хаотическому аттрактору, красная точка принадлежит хаотическому репеллеру. Синяя плоскость соответствует устойчивому многообразию седловой траектории хаотического аттрактора, а черная линия соответствует её неустойчивому многообразию. Красная плоскость соответствует неустойчивому многообразию седловой траектории хаотического репеллера, а коричневая линия соответствует её устойчивому многообразию.

Плоскости пересекаются вдоль прямой линии.

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.5, a = 0.25$$

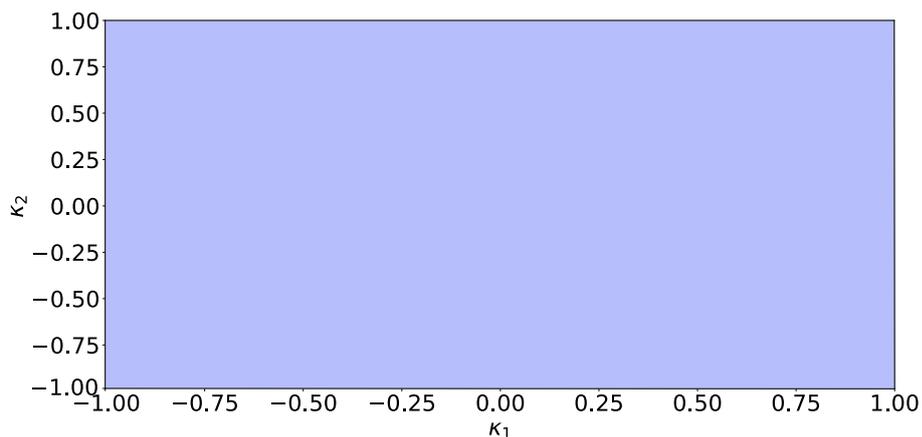


Рисунок 1.36 — Бассейны притяжения хаотического аттрактора (синяя область, включающая в себя красную область) и хаотического репеллера (красная область) в сечении $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. $\omega_1 = \omega_2 = 1, a = 0.4$

и репеллером. Установлено, что как и в случае системы (1.21), в случае смешанной динамики в системе (1.26) это расстояние уменьшается (таблица 5).

Таблица 5 — Расстояние Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна ($KRW D$) между хаотическими аттрактором и репеллером системы (1.26) в

случае $\omega_1 = \omega_2$	
$\{\omega_1 = \omega_2 = 0.5, a = 0\}$	$\{\omega_1 = \omega_2 = 0.5, a = 0.25\}$
0.45	0.32

1.4.3 Влияние параметра неизохронности на обратимое ядро

Исследуем влияние параметра неизохронности a на обратимое ядро, сформированное вследствие частотной расстройки. На рис. 1.37 показана сумма ляпуновских показателей аттрактора и область существования смешанной динамики на плоскости параметров $(a, \omega_1 - \omega_2)$, то есть когда в системе присутствуют сразу два механизма возникновения смешанной динамики — расстройка собственных частот осцилляторов и параметр a . Как следует из рисунка, смешанная динамика существует в области параметров, где параметр a мал по сравнению с собственными частотами, то есть параметры выбраны вдали от бифуркационного значения $\frac{\omega_i}{a} = 1$ ($i = 1, 2$). Установлено, что на разных границах области существования смешанной динамики в системе (1.26) происходят разные сценарии её исчезновения. При пересечении границы AB перестаёт выполняться численный критерий существования смешанной динамики. При пересечении границы DE хаотический репеллер в системе (1.26) исчезает, в то время как хаотический аттрактор остаётся. При пересечении границ CD и EF хаотический аттрактор и хаотический репеллер исчезают одновременно. Что касается суммы ляпуновских показателей, то, как и в системе (1.6), она ближе к нулю в области существования смешанной динамики по сравнению с другими значениями параметров. Кроме того, вблизи границы EF эта сумма имеет пик и наиболее близка к нулю (рис. 1.38), и система (1.26) наиболее близка к консервативной.

Вычисление расстояния Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна показало, что при наличии одновременно двух механизмов возникновения смешанной динамики — параметра a и частотной расстройки — в случае третьего типа хаоса оно уменьшается ещё сильнее (таблица 6), то есть хаотические аттрактор и репеллер при этом обладают наибольшей схожестью.

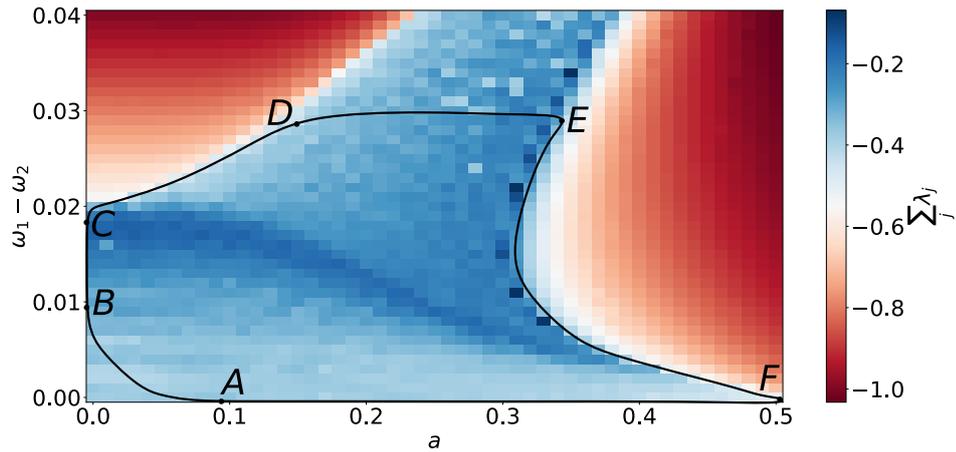


Рисунок 1.37 — Сумма ляпуновских показателей аттрактора системы (1.26) и область существования смешанной динамики на плоскости $(a, \omega_1 - \omega_2)$ для $\omega_2 = 1$.

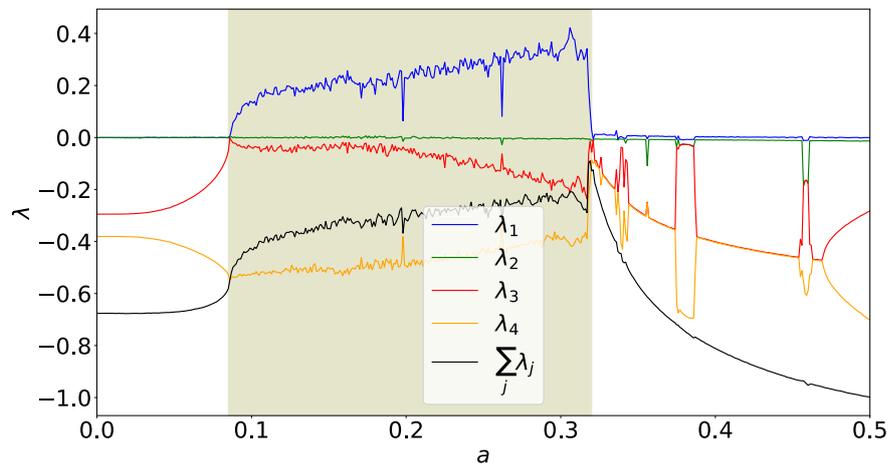


Рисунок 1.38 — Ляпуновские показатели аттрактора и их сумма в зависимости от параметра a . Цветной фон соответствует области параметров, в которой реализуется смешанной динамика.

$$\omega_1 = 1.025, \quad \omega_2 = 1$$

Таблица 6 — Расстояние Канторовича–Рубинштейна–Вассерштейна ($KRWD$) между хаотическим аттрактором и репеллером системы (1.26) в случае $\omega_1 \neq \omega_2$

$\{\omega_1 = 1.015, \omega_2 = 1, a = 0\}$	$\{\omega_1 = 1.015, \omega_2 = 1, a = 0.2\}$
0.24	0.1

1.5 Генератор хаотических колебаний на основе смешанной динамики в системе двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото

В этом разделе приводится схема построения электронного генератора, реализованного на программируемой логической интегральной схеме (ПЛИС) и демонстрирующего режим смешанной динамики. Система, которая описывает его динамику, является дискретной версией модели коэволюционного ансамбля двух осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула. Метод конструирования генераторов на ПЛИС используется для их реализации на основе широкого класса динамических систем, в том числе тех, которые описываются сложными нелинейными функциями (гиперболическими, тригонометрическими, экспоненциальными и т. д.). Реализация таких нелинейных функций с использованием стандартных аналоговых электронных компонентов достаточно проблематична.

1.5.1 Блок-схема генератора

Блок-схема генератора изображена на рис. 1.39. Выходные сигналы обозначены двойными стрелками и соответствующими символами θ , y , z . На схеме постоянные параметры: $2 \cos \beta$, $2 \sin \beta$, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, где $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$ и $\varepsilon = 0.01$ (далее в этом разделе зафиксируем эти значения параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$), а переменные параметры: $\gamma > 0$, $A > 0$, $\omega > 0$ и h . Блок «X» обозначает умножитель, блоки «+» и «-» соответствуют сумматору и вычитателю, блоки «sin» и «cos» обозначают синусоидальную и косинусоидальную функции, « F^{-1} » соответствует блоку выборки и хранения, блок « $\text{mod}(\pm\pi)$ » реализует модуль входного сигнала в интервале $[-\pi, \pi)$ и блок « $\text{mod}(\pm 2\pi)$ » реализует модуль входного сигнала в интервале $[0, 2\pi)$ для положительных входных значений или в интервале $[-2\pi, 0)$ для отрицательных входных величин. Входы всех блоков расположены с левой стороны, а выходы расположены справа. Блок выборки и хранения имеет дополнительный вход сверху для начальных значений $\{\theta_0, y, z\}$. Все представленные блоки оперируют с числами с фиксированной

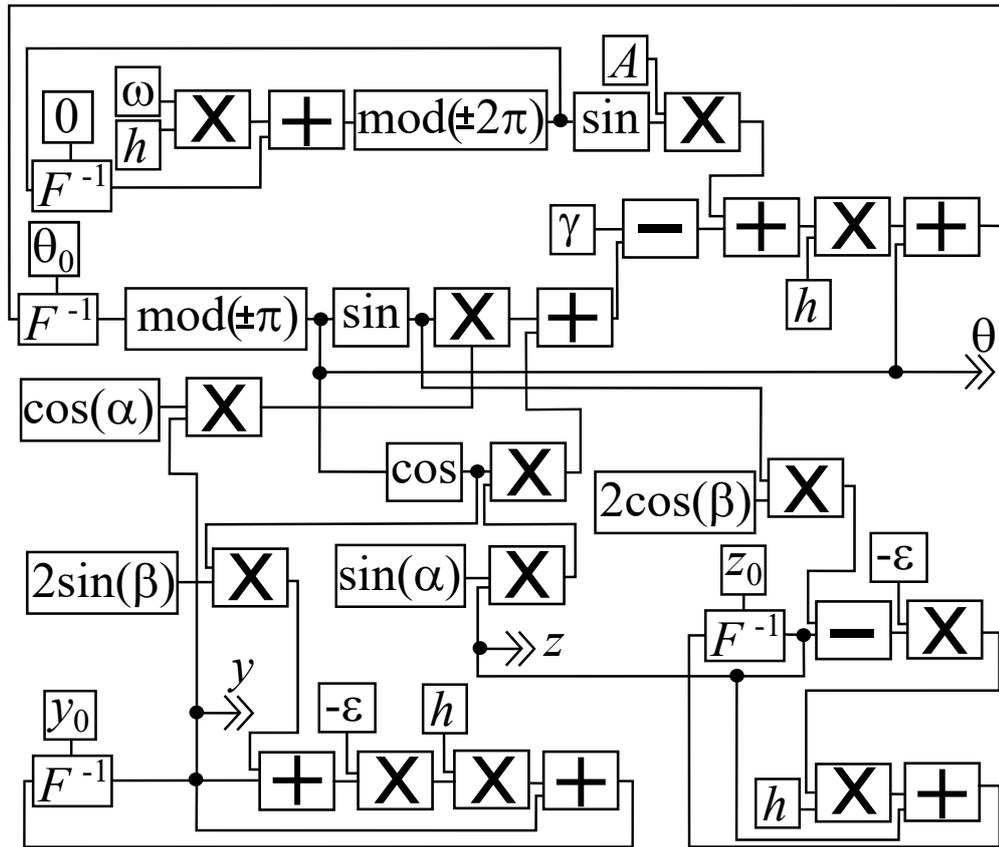


Рисунок 1.39 — Блок-схема генератора, реализованного на Xilinx FPGA Virtex-5 LX50

точкой формата «4,32», то есть диапазон принимаемых значений лежит в интервале $[-8, 8]$ с минимальным шагом $3.7 \cdot 10^{-9}$. Динамика генератора происходит в ограниченной области фазового пространства, поэтому переменные (θ, y, z) не принимают значения вне этого интервала. Динамика генератора описывается системой с дискретным временем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h(\gamma - y_n \cos \alpha \sin \theta_n + z_n \sin \alpha \cos \theta_n + A \sin \omega h n), \\ y_{n+1} = y_n - h\varepsilon(y_n + 2 \sin \beta \cos \theta_n), \\ z_{n+1} = z_n - h\varepsilon(z_n - 2 \cos \beta \sin \theta_n). \end{cases} \quad (1.30)$$

Система (1.30) является дискретной версией системы (1.21), в которой параметр h принимает конечные значения. Она не является её точной схемой интегрирования, поскольку схемы интегрирования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений более сложны и включают в себя контроль временного шага, ошибок интегрирования, матриц Якоби и т. д. Отметим, что это первая модель генератора хаотических колебаний, построенная на основе смешанной динамики.

Все переменные и параметры системы (1.30) безразмерны, однако сигналы, соответствующие переменным (θ, y, z) , выводятся через цифро–аналоговый преобразователь (ЦАП), в котором напряжение 1 В соответствует безразмерному числу 1. Общее время работы всех блоков генератора (или время выполнения одной итерации системы (1.30) на ПЛИС) равно $\tau_0 = 5.05$ мкс. Это означает, что ЦАП имеет скорость обновления около 198.0198 кВыб/с (при разрешении 16 бит для выходного напряжения в интервале ± 5 В). Далее экспериментальные данные, полученные с выходов генератора, будут указаны в вольтах: $\theta(V)$, $y(V)$, $z(V)$, а вместо номера итерации n при представлении времени будем писать время в секундах, учитывая, что время одной итерации равно τ_0 .

1.5.2 Динамика системы (1.30)

Для выбора значения параметра h в системе (1.30) рассмотрим зависимость ляпуновских показателей от параметров γ и h при фиксированных значениях параметров $\{\alpha = 0.24, \beta = 1.6, \varepsilon = 0.01, A = 0\}$. Отметим, что для системы (1.30) мы не строим обратное отображение, а вместо этого исследуем его динамику при отрицательных h . По аналогии с системой с непрерывным временем (1.21), будем называть притягивающее множество для $h > 0$ аттрактором, а для $h < 0$ — репеллером. На рис. 1.40а изображена плоскость параметров (γ, h) , где чёрным цветом обозначена область существования притягивающего множества, а белым цветом обозначена область, где траектория уходит в бесконечность. Как следует из рисунка, при $h > 0$ аттрактор существует в интервале $0 \leq \gamma \leq 0.04$, а при $h < 0$ репеллер существует только при $\gamma < 0.019$. Поскольку в случае смешанной динамики аттрактор и репеллер существуют одновременно при противоположных знаках параметра h , то накладывается ограничение на этот параметр: $|h| < 0.1$ (исключая значение $h = 0$). На рис. 1.40б изображена зависимость ляпуновских показателей от параметра h при $\gamma = 0$. Как видно из графика, старший ляпуновский показатель L_1 принимает положительное или нулевое значение как для положительных, так и для отрицательных h . Соответственно, в интервалах, где $L_1 = 0$, в системе (1.30) существует периодическая траектория, а в интервалах, где $L_1 > 0$, в системе (1.30) существует хаотический аттрактор. Отметим, что при $h > 0.1$ и

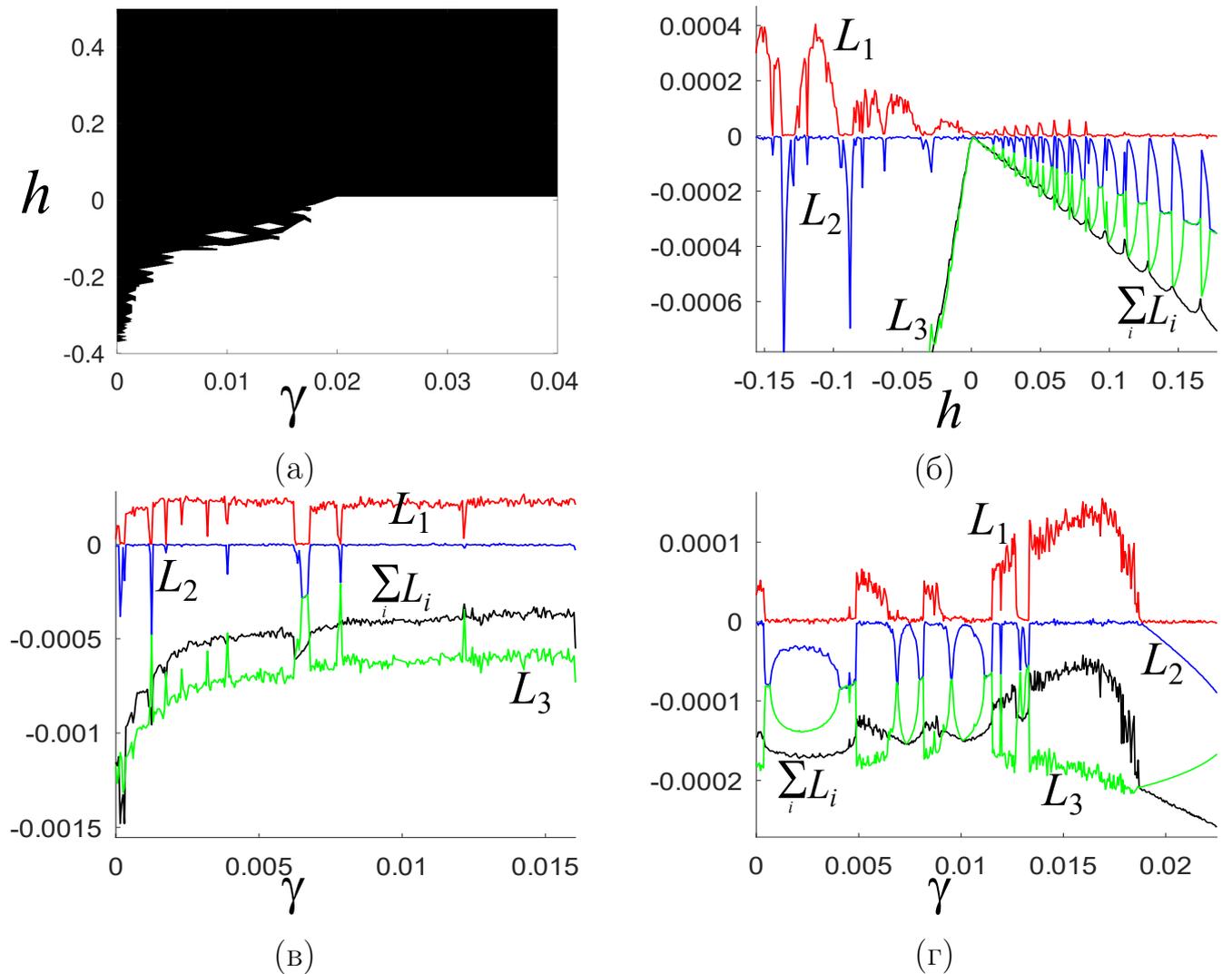


Рисунок 1.40 — (а) Область существования аттрактора или репеллера в системе (1.30) в зависимости от параметров (γ, h) (показана чёрным цветом). (б) Зависимость ляпуновских показателей от параметра h при $\gamma = 0$. (в) Зависимость ляпуновских показателей от параметра γ при $h = -0.04$ и (г) при $h = 0.04$.

$$A = 0$$

$\gamma = 0$ в системе (1.30) существует только периодическая траектория. Исходя из приведенных выше рассуждений, было выбрано значение временного шага $h = \pm 0.04$, для которого были построены зависимости ляпуновских показателей от параметра γ (рис. 1.40в,г). Исходя из этих графиков, были установлены значения параметра γ , при которых хаотический аттрактор и хаотический репеллер существуют одновременно в системе (1.30).

Из рисунков 1.40в,г следует несколько важных свойств системы (1.30). Во-первых, для всех значений параметра γ один из ляпуновских показателей приближённо равен нулю как при $h = -0.04$, так и при $h = 0.04$. Это означает, что динамика системы с дискретным временем (1.30) близка к динамике

системы с непрерывным временем (1.21). Во-вторых, в определённых интервалах по γ старший ляпуновский показатель положителен, что свидетельствует о существовании хаотической динамики при $h = \pm 0.04$, а также существуют интервалы по параметру γ , когда хаотический аттрактор и хаотический репеллер сосуществуют в системе (1.30). В-третьих, сумма ляпуновских показателей (показана чёрным цветом) отрицательна для $h = \pm 0.04$, что свидетельствует о том, что хаотические множества являются притягивающими. Стоит отметить, что при $h = -0.04$ и $\gamma > 0.016$ траектории системы (1.30) стремятся к бесконечности, то есть хаотический репеллер при этих значениях параметров перестаёт существовать. При этом при определённых начальных условиях изображающая точка в течение достаточно долгого времени (около 10^7 итераций) осциллирует в области фазового пространства, в которой был расположен хаотический репеллер. Кроме того, из графиков 1.40в,г следует, что сумма ляпуновских показателей более близка к нулю при $h = 0.04$ в интервале $0.012 \leq \gamma \leq 0.016$. Это говорит о том, что аттрактор системы (1.30) обладает динамикой, схожей с хаотической динамикой консервативных систем, что является одним из признаков существования в системе смешанной динамики. Далее будем рассматривать динамику системы (1.30) только при $h = \pm 0.04$. Отметим, что сумма ляпуновских показателей аттрактора и репеллера всегда принимает отрицательные значения, то есть система (1.30) при всех значениях параметров является диссипативной.

1.5.3 Режимы генератора

Рассмотрим фазовый портрет аттрактора при $h = 0.04$ и репеллера при $h = -0.04$ для $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.012$ при $A = 0$. На рис. 1.41а,б показаны хаотический аттрактор (синий цвет) и хаотический репеллер (красный цвет), полученные из экспериментальных данных с генератора для $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.012$, соответственно. На рис. 1.41в,г показаны временные зависимости выходных сигналов $\theta(V)$, $y(V)$ и $z(V)$, соответствующие этим фазовым портретам. Рисунки демонстрируют, что с ростом параметра γ область, занимаемая аттрактором и репеллером в фазовом пространстве, увеличивается. При этом в случае $\gamma = 0.012$ хаотические аттрактор и репеллер локализованы в пересече-

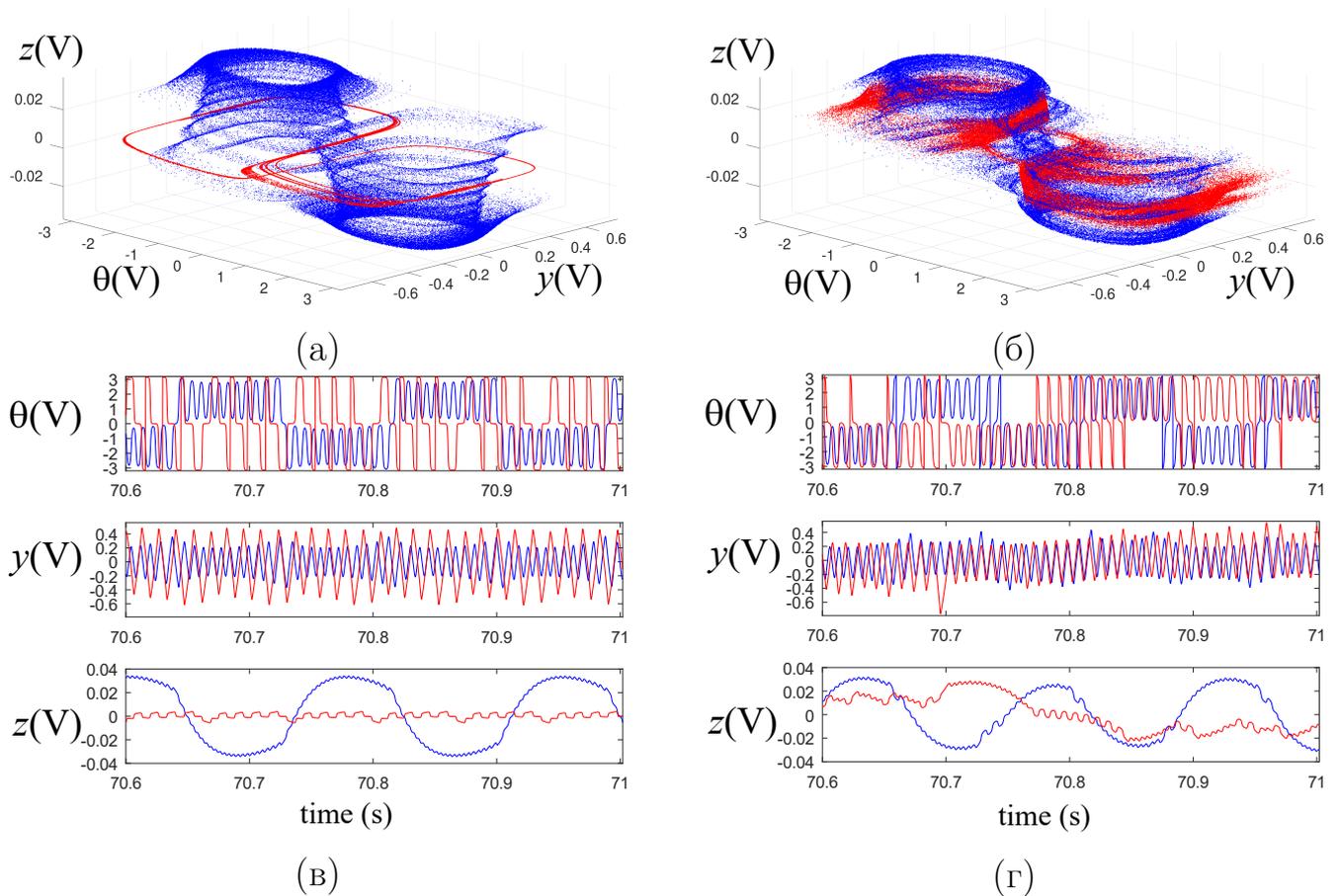


Рисунок 1.41 — (а), (б) Хаотический аттрактор (синий, $h = 0.04$) и хаотический репеллер (красный, $h = -0.04$) в фазовом пространстве. (в), (г) Зависимости переменных от времени для аттрактора (синий) и репеллера (красный).

(а), (в) $\gamma = 0$; (б), (г) $\gamma = 0.012$; $A = 0$

кающихся областях фазового пространства, и эти два хаотических множества «перемешаны». Этот эффект наиболее выражен на секущей Пуанкаре (рис. 1.42а,б,в). При $\gamma = 0$ аттрактор и репеллер чётко разделены, а при $\gamma = 0.012$ и $\gamma = 0.015$ их образы на секущей пересекаются. При этом в случае $\gamma = 0.015$ они «перемешаны» сильнее. Другим подтверждением сближения аттрактора и репеллера служит изменение расстояния между ними при вариации параметра γ . На рис. 1.42г,д,е показана зависимость расстояния между двумя типичными траекториями хаотических аттрактора и репеллера от времени. Расстояние рассчитывалось по формуле (1.7). Длительность траектории аттрактора при этом равна 0.4 с для всех выходных сигналов генератора, а длительность траектории репеллера равна 200 с. Поскольку с точки зрения смешанной динамики наиболее интересны траектории обратимого ядра, соответствующие минимальному значению расстояния между хаотическими аттрактором и репеллером, мы установили область параметров, внутри которой это расстояние меньше поро-

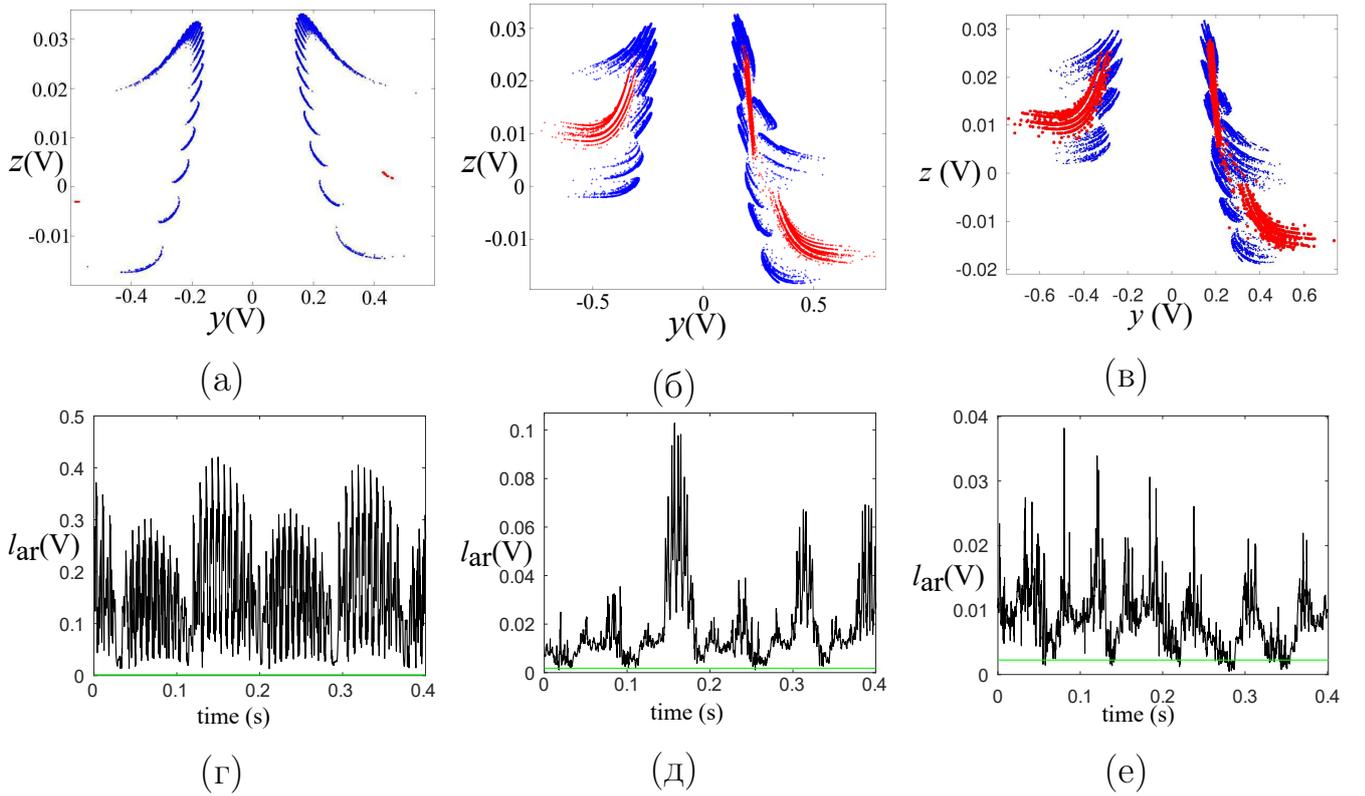


Рисунок 1.42 — (а), (б), (в) Хаотические аттрактор (синий) и репеллер (красный) на секущей Пуанкаре $\theta = -\frac{\pi}{4}$. (г), (д), (е) Расстояние между хаотическими аттрактором и репеллером в зависимости от времени. Зеленая линия соответствует значению 0.002 В.

(а), (г) $\gamma = 0$; (б), (д) $\gamma = 0.012$; (в), (е) $\gamma = 0.015$. $A = 0$, $h = \pm 0.04$

гового значения: $l_{ar} < 0.002$ (показано зеленым цветом на рис. 1.42г,д,е). Этот диапазон соответствует $\gamma \in [0.012, 0.016]$. Рисунки 1.42г,д,е демонстрируют, что в случае $\gamma = 0.015$ число точек, в которых расстояние меньше порогового, больше, чем в случае $\gamma = 0.012$, а при $\gamma = 0$ таких точек нет. Как было показано в предыдущих разделах, из факта наличия точек, в которых расстояние между седловыми траекториями хаотического аттрактора и хаотического репелера очень мало, следует пересечение их инвариантных многообразий и существование обратимого ядра. В системе (1.30) реализуется как классический диссипативный хаос, так и смешанная динамика. В случае смешанной динамики поведение траекторий в фазовом пространстве становится более сложным. Это отражается в том, что фрактальная размерность хаотического аттрактора увеличивается: $D_F = 2.06$ в случае $\gamma = 0$ и $D_F = 2.35$ в случае $\gamma = 0.015$. Также стоит отметить, что, в отличие от системы с непрерывным временем (1.6), при пересечении верхней границы области существования смешанной ди-

намики, т. е. при $\gamma > 0.016$, хаотический репеллер исчезает, а хаотический аттрактор остаётся.

Чтобы продемонстрировать, что шум на выходе ЦАП не влияет на спектры мощности выходных сигналов, была произведена оценка его уровня. Для этого на вход ЦАП был подан нулевой сигнал 0 В. Было установлено, что амплитуда шума равна 1 мВ, в то время как амплитуда выходных сигналов порядка 4 В. Соответственно, значения спектральных компонент шума ниже -110 дБ. Таким образом, уровень шума в спектре мощности значительно ниже минимального уровня непрерывного спектра мощности выходного сигнала. Как видно из рис. 1.41в,г, выходные сигналы $y(V)$ и $z(V)$ имеют небольшую амплитуду. Чтобы устранить влияние шума после ЦАП, мы увеличили амплитуды этих сигналов в 6 и 100 раз, соответственно. В этом случае значения выходных сигналов порядка 4 В, что значительно превышает уровень шума. После этого сигналы регистрировались записывающим устройством. Затем для восстановления исходных значений мы приводили их к исходным масштабам.

Для использования генератора в решении различных прикладных задач может быть полезно исследование характеристик выходных сигналов (режимов) и возможности управления ими. Было проведено исследование спектров мощности аттрактора и репеллера для различных значений параметров γ и A , которые показаны на рис. 1.43. Стоит отметить, что несмотря на то, что спектры мощности показаны в диапазоне 0-330 Гц, они также содержат и высокочастотные компоненты вплоть до 2 кГц. Однако спектральная плотность мощности этих высокочастотных компонент меньше 20 % общей, поэтому они не показаны на рисунках для удобства сравнения. Спектры мощности аттрактора и репеллера при $\gamma = 0$ и $A = 0$ содержат локальные максимумы на кратных частотах. Частоты, соответствующие локальным максимумам, для аттрактора равны $m\nu_a$, где $\nu_a = 5.74$ Гц, $m \in \mathbb{N}$, при этом спектральная плотность мощности для чётных m значительно больше (рис. 1.43а). Для репеллера частоты локальных максимумов равны $m\nu_r$, где $\nu_r = 14.59$ Гц, $m \in \mathbb{N}$. Отметим, что при $\gamma = 0$, $A = 0$ и $h = \pm 0.04$ система (1.30) имеет один положительный ляпуновский показатель, следовательно аттрактор и репеллер являются хаотическими и их спектры мощности непрерывны. Увеличение параметра γ до $\gamma = 0.012$ при $A = 0$ приводит к увеличению спектральной плотности мощности на частотах, промежуточных между частотами локальных максимумов $m\nu_a$ и $m\nu_r$ (рис. 1.43б). В этом случае кратные частоты в спектре мощности

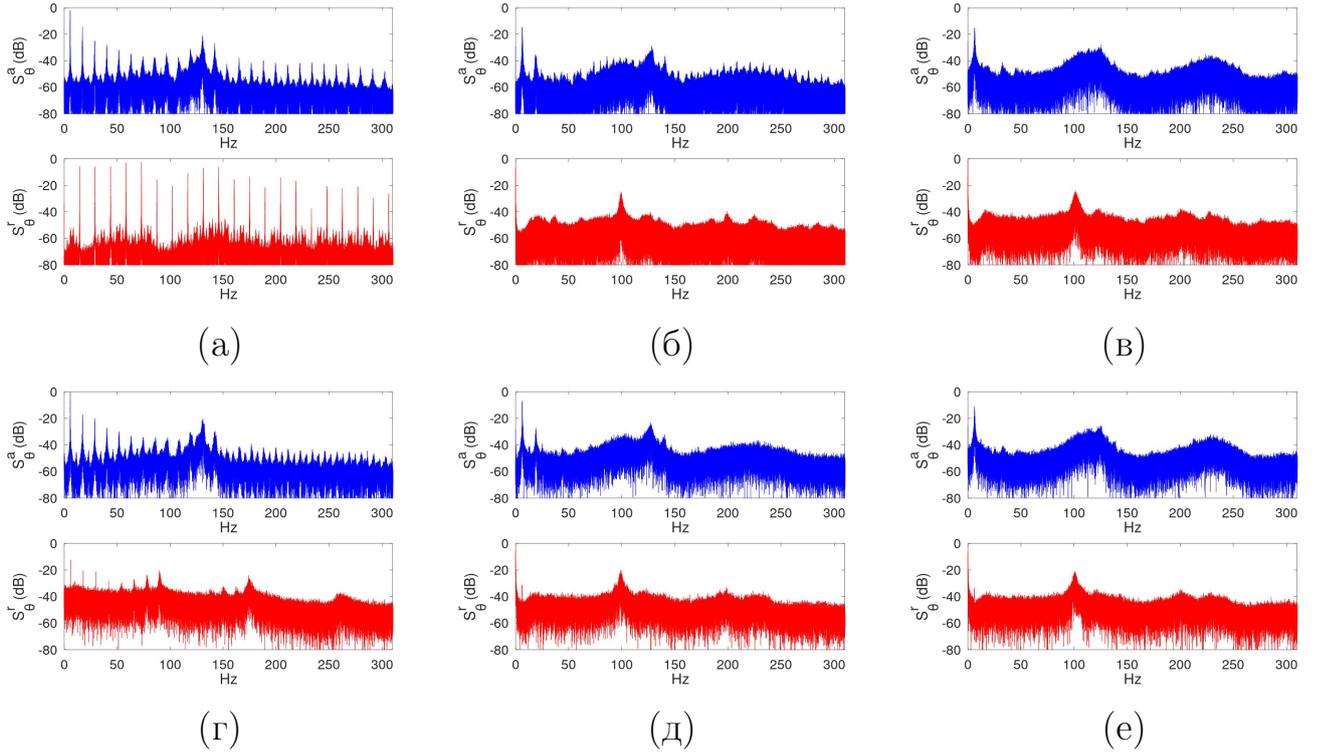


Рисунок 1.43 — Нормированные спектры мощности хаотического аттрактора (синий) и репеллера (красный) при $h = \pm 0.04$.

(а), (г) $\gamma = 0$; (б), (д) $\gamma = 0.012$; (в), (е) $\gamma = 0.015$.

(а), (б), (в) $A = 0$; (г), (д), (е) $A = 0.0024$, $\omega = 0.00475951$.

аттрактора остаются чётко различимыми, а спектральная плотность мощности репеллера распределена более равномерно по частотам и не имеет локальных максимумов. С дальнейшим ростом γ до $\gamma = 0.015$ спектральная плотность мощности аттрактора становится ещё более равномерно распределена, а локальные максимумы исчезают.

Рассмотрим влияние внешней силы на спектры мощности хаотических аттрактора и репеллера. Если при $\gamma = 0$ подействовать на систему (1.30) внешней силой с параметрами $A = 0.0024$ и $\omega = 0.00475951$ (где ω выражается из $\nu_0 = \frac{\omega h}{2\pi\tau_0} = 6$ Гц), спектральная плотность мощности аттрактора станет ещё более равномерно распределена между кратными частотами по сравнению с автономным случаем, а в спектре мощности репеллера исчезают локальные максимумы на частотах $m\nu_r$ и появляются пики на частотах $k\nu_0$, где $k = 1, 3, 5, 7, 9, 25, 27, 29$ (рис. 1.43г). Если при наличии внешней силы увеличить параметр γ до $\gamma = 0.012$, спектральная плотность мощности будет более равномерно распределена по частотам в спектрах мощности аттрактора и репеллера по сравнению со случаем $\gamma = 0.012$ и $A = 0$ (рис. 1.43д). В неавтономном слу-

чае при $\gamma = 0.015$ спектры мощности аттрактора и репеллера становятся также более равномерными по сравнению со случаем $\gamma = 0.015$ и $A = 0$ (рис. 1.43е). Таким образом, в случае смешанной динамики и неавтономности аттрактор и репеллер имеют более равномерные спектры мощности. Отметим, что мы не рассчитывали спектры ляпуновских показателей в неавтономном случае системы (1.30), однако из того факта, что спектры мощности аттрактора и репеллера непрерывны в неавтономном случае при рассмотренных параметрах, следует наличие хаотической динамики.

Как следует из рис. 1.43б,д, при $\gamma = 0.012$ как в автономном, так и в неавтономном случае, в спектрах мощности аттрактора и репеллера появляются два локальных максимума в диапазоне 80–150 Гц. Локальные максимумы в диапазоне 80–150 Гц остаются при $\gamma = 0.015$, а также появляются меньшие максимумы в диапазоне 200–250 Гц, которые особенно заметны в неавтономном случае (рис. 1.43е). Таким образом, при увеличении параметра γ аттрактор и репеллер имеют несколько совпадающих локальных максимумов в диапазонах 80–150 Гц и 200–250 Гц. Это означает, что они имеют общие ритмы и частичную синхронизацию колебаний. При этом в случае внешнего воздействия этот эффект выражен сильнее благодаря увеличению мощности в соответствующих диапазонах частоты приблизительно на 5 дБ. Отметим, что несмотря на то, что амплитуда $A = 0.0024$ может показаться небольшой, на самом деле она сравнительно большая, поскольку при $A > 0.0045$ репеллер исчезает.

Изучая методы управления спектрами мощности выходных сигналов генератора, мы отметили, что значения всех спектральных компонент могут варьироваться несколькими способами. Во-первых, это осуществляется вариацией параметра h . При уменьшении $|h|$ значения всех частот в спектрах мощности уменьшаются (т. е. спектр сдвигается влево), и динамика системы (1.30) приближается к динамике системы с непрерывным временем (1.21). Увеличение $|h|$ приводит к увеличению абсолютных значений частот в спектрах мощности, т. е. спектр сдвигается влево. Однако избыточное увеличение $|h|$ приводит к переходу от хаотической динамики к регулярной, поэтому нужно оставаться в диапазоне $|h| < 0.1$. Второй способ состоит в изменении рабочей частоты кристалла ПЛИС. В нашем случае она была равна 40 МГц, однако современные ПЛИС позволяют использовать более высокие рабочие частоты. Например, увеличение рабочей частоты до 200 МГц приведёт к пятикратному увеличению абсолютных значений всех частот (т. е. спектр сместится вправо).

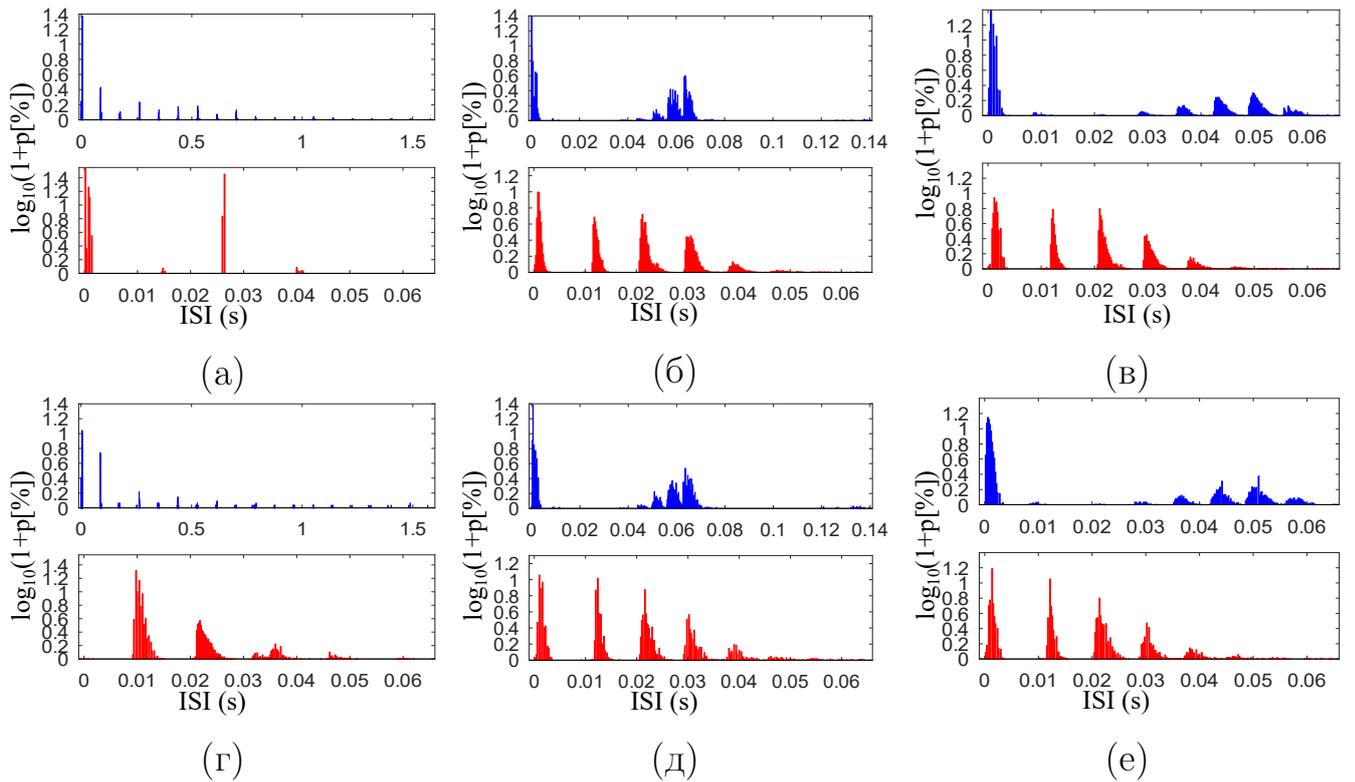


Рисунок 1.44 — Распределение межспайковых интервалов (ISI) p (в логарифмическом масштабе, где p показано в процентах) для хаотического аттрактора (синий) и репеллера (красный).

(а), (г) $\gamma = 0$; (б), (д) $\gamma = 0.012$; (в), (е) $\gamma = 0.015$.

(а), (б), (в) $A = 0$; (г), (д), (е) $A = 0,0024$, $\omega = 0.00475951$

Рассмотрим статистические характеристики хаотических сигналов генератора, которые могут быть использованы для различных информационных приложений, например, в системах обработки и передачи информации, для построения спайковых нейронных сетей и т. д. Такой статистической характеристикой может служить распределение межспайковых интервалов, когда пересечение переменной θ значения $\theta = \pi$ или $\theta = -\pi$ интерпретируется как спайк, а временной интервал между ними интерпретируется как межспайковый интервал. На рис. 1.44а показано распределение межспайковых интервалов для случая $\gamma = 0$ и $A = 0$. В неавтономном случае при $\gamma = 0$ и $A = 0.0024$ появляются дополнительные диапазоны существования межспайковых интервалов (рис. 1.44г). Увеличение параметра γ до $\gamma = 0.012$ приводит к возникновению дополнительных диапазонов существования межспайковых интервалов как в автономном (рис. 1.44б), так и в неавтономном (рис. 1.44д) случаях. Кроме того, в этом случае диапазоны межспайковых интервалов смещаются влево, что особенно заметно для аттрактора. Однако в неавтономном случае при $\gamma = 0.012$

ширина локальных максимумов и диапазон существования межспайковых интервалов шире, чем в автономном случае. Для аттрактора наиболее плотно заполнен диапазон 0.013–0.014 с, а для репеллера диапазон 0.03–0.065 с заполнен практически непрерывно. При увеличении параметра γ до $\gamma = 0.015$ появляются пересекающиеся диапазоны межспайковых интервалов для аттрактора и репеллера при 0.3–0.4 с (рис. 1.44в), а в неавтономном случае эти пересекающиеся области увеличиваются, и при $\gamma = 0.015$ и $A = 0.0024$ пересечение межспайковых интервалов максимально (рис. 1.44е). Таким образом, при увеличении параметра γ до значений, при которых существует смешанная динамика, увеличивается ширина диапазонов существования межспайковых интервалов и плотность заполнения этих диапазонов. В свою очередь, введение неавтономности в случае смешанной динамики приводит к дополнительному увеличению ширины диапазонов существования межспайковых интервалов и плотности их заполнения. Пересечение межспайковых интервалов аттрактора и репеллера означает, что они имеют общие ритмы и их динамика частично синхронизована. Таким образом, управлять статистическими (информационными) характеристиками генератора можно при помощи параметров A , ω и γ .

1.6 Выводы по первой главе

В этой главе была рассмотрена модель двух осцилляторов Курамото, в которой коэффициенты связи эволюционируют совместно с фазами осцилляторов, а правило адаптации связей изменяется с помощью параметра. Система может быть сведена к трёхмерной сингулярно возмущённой системе, в которой реализуется режим смешанной динамики. Установлено, что при наличии малой расстройки собственных частот и при правилах адаптации, близких к обратному правилу Хебба, в системе одновременно существуют хаотический аттрактор и хаотический репеллер, а инвариантные многообразия их седловых траекторий пересекаются, что свидетельствует о наличии в системе третьего типа хаоса — смешанной динамики. Показано, что критическое многообразие системы не участвует в формировании седловых траекторий, и они расположены в малой окрестности другой поверхности. Установлено, что фрагменты седловых траекторий приближённо описываются траекториями, принадлежа-

щими аттракторам и репеллерам системы на аппроксимирующей поверхности, а одновременное исчезновение хаотического аттрактора и хаотического репеллера совпадает с седло–узловой бифуркацией предельных циклов в системе, описывающей динамику на этой поверхности. Введены характеристики обратимого ядра и разработаны методы его исследования. Представленная система является первой необратимой системой с новым, третьим типом хаоса.

Было изучено влияние периодического внешнего стимула на эту систему. Показано, что под действием внешней силы, даже в отсутствие частотной расстройки, в ней возникает смешанная динамика. Показано, что расстояние Канторовича–Рубинштейна–Вассерштейна между хаотическими аттрактором и репеллером уменьшается при возникновении смешанной динамики, что свидетельствует об увеличении схожести между ними. Установлено, что в неавтономном случае смешанной динамики колебания в прямом и обратном времени имеют похожую форму. При этом они обладают наибольшей схожестью при значении частоты внешней силы, равной частоте пика в спектрах мощности переменных θ и z в случае, когда частоты осцилляторов равны, а внешнее воздействие отсутствует. Показано, что в случае смешанной динамики не происходит совпадения частот главных спектральных компонент в спектрах мощности переменных с частотой внешней силы, однако практически сразу после исчезновения смешанной динамики эти частоты начинают совпадать. Установлено, что при воздействии внешней силы на систему фрактальная размерность хаотического аттрактора и обратимого ядра уменьшается.

Изучена динамика ансамбля двух коэволюционно связанных активных ротаторов. Установлено пересечение инвариантных многообразий седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера, чем подтверждается существование смешанной динамики в системе. Показано пересечение поглощающих областей хаотических аттрактора и репеллера. Изучены характеристики смешанной динамики в системе.

Представлена схема реализации на ПЛИС генератора, обладающего возможностями формирования шумоподобных колебаний, которые могут соответствовать как классическому диссипативному хаосу, так и третьему типу хаоса. Установлено, что в случае третьего типа хаоса распределение спектральной плотности мощности по частотам становится более равномерным по сравнению с диссипативным хаосом в той же системе, при этом введение внешнего периодического воздействия усиливает этот эффект.

Приведённые в этой главе результаты опубликованы в статьях [A1—A6] и тезисах докладов [A9—A18].

Глава 2. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка

2.1 Введение

Динамические режимы, формируемые в больших сетях идентичных осцилляторов Курамото с рассмотренным в главе 1 способом описания коэволюционных связей, были изучены в работах [62–66]. В работах [62; 63] было показано, что используемая модификация модели связи позволяет наряду с однокластерными режимами, наблюдаемыми в случае модели связи с принудительным ограничением роста коэффициентов $|\kappa_{ij}| < 1$, получить новый класс мультичастотных кластерных режимов, когда в сети формируются группы синхронизованных осцилляторов, характеризующихся различными значениями частот. Ещё один тип поведения, обнаруженный в этой модели, характеризуется одновременным существованием пространственных областей с когерентным и некогерентным поведением и известен как химерные состояния. При этом когерентная часть химерных состояний также может представлять собой мультичастотные кластерные режимы.

Однако во всех представленных выше работах рассматривался случай идентичных осцилляторов ($\omega_i = \omega$), и не изучался случай частотной неоднородности. В этой главе приведено исследование динамики сети неоднородных коэволюционно связанных осцилляторов Курамото, где элементы связаны симплексными связями первого порядка по принципу «каждый с каждым», которую можно рассматривать как модель нейронной сети с пластичными связями. Сеть описывается системой следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{\Lambda}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \\ \dot{\kappa}_{ij} = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_j - \varphi_i + \beta) + \kappa_{ij} \right). \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $\varphi_i \in (-\pi, \pi]$ — фазы осцилляторов, κ_{ij} — коэффициенты связи, отражающие влияние j -го осциллятора на i -ый. По сравнению с уравнением (1.2) здесь дополнительно введён параметр Λ , характеризующий постоянную силу связи, на который домножаются слагаемые, описывающие влияние связей на динамику фаз. Кроме того, параметр α здесь выбран равным нулю, поскольку

он слабо влияет на динамику системы. Параметром N обозначено число элементов в сети, ω_i — это собственные частоты осцилляторов, а параметры β и ε имеют тот же смысл, что и в системах, приведённых в главе 1. Рассмотрим равномерное распределение собственных частот в промежутке $\omega_i \in (-\Delta, \Delta)$ и различные виды распределений начальных фаз. Начальные веса $\kappa_{ij}(0) = 1$ для $i \neq j$ и $\kappa_{ii}(0) = 0$. Кроме того, поставим условие, что эволюционируют во времени только изначально ненулевые коэффициенты связи. Зафиксируем параметры $N = 100$, $\varepsilon = 1$, $\Delta = 1$ и будем изучать совместное влияние силы связи (параметр Λ) и правила адаптации (параметр β) на динамику сети (2.1).

2.2 Стационарные режимы

Рассмотрим стационарные состояния сети (2.1). В стационарном состоянии выполняется условие $\dot{\kappa}_{ij} = 0$, поэтому из второго уравнения системы (2.1) следует $\kappa_{ij} = -\sin(\varphi_j - \varphi_i + \beta)$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (2.1), получим

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\Lambda}{2} \cos \beta + \frac{\Lambda}{2N} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\beta - 2\varphi_i)} \sum_{j=1}^N e^{2i\varphi_j} \right\}, \quad (2.2)$$

или, учитывая определение для второго параметра порядка $R_2 e^{i\Psi_2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2i\varphi_j}$,

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\Lambda}{2} \cos \beta + \frac{\Lambda R_2}{2} \cos(\Psi_2 - 2\varphi_i + \beta). \quad (2.3)$$

Переходя во вращающуюся с общей частотой систему отсчёта, получим $\Psi_2 = 0$. Следовательно, стационарные состояния задаются уравнением

$$\cos(2\varphi_i - \beta) = \frac{1}{R_2} \left(\cos \beta - \frac{2\omega_i}{\Lambda} \right). \quad (2.4)$$

При $|\Gamma| < 1$, где $\Gamma = \frac{1}{R_2} \left(\cos \beta - \frac{2\omega_i}{\Lambda} \right)$, каждый осциллятор имеет два стационарных состояния на периоде длиной π :

$$\varphi_i^{1*} = \frac{\beta + \arccos \Gamma}{2}, \quad \varphi_i^{2*} = \frac{\beta - \arccos \Gamma}{2}. \quad (2.5)$$

Характеристические показатели этих состояний равновесия:

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi_i^{1*}) &= -\Lambda R_2 \sqrt{1 - \Gamma^2} < 0, \\ \lambda(\varphi_i^{2*}) &= \Lambda R_2 \sqrt{1 - \Gamma^2} > 0.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Таким образом, φ_i^{1*} устойчиво, а φ_i^{2*} неустойчиво. При вариации параметров эти состояния равновесия исчезают одновременно через бифуркацию «двукратное равновесие». Поскольку переменная φ_i периодична с периодом 2π , то при $|\Gamma| < 1$ каждый осциллятор системы (2.1) имеет четыре состояния равновесия, два из которых устойчивы.

Далее, используем континуальный предел, который выражается в устремлении числа элементов к бесконечности. Для конечномерных систем выражение для m -го параметра порядка представляет собой среднее арифметическое от комплексных экспонент с фазами осцилляторов: $R_m = \frac{1}{N} |\sum_{j=1}^N e^{im\varphi_j}|$. В пределе бесконечного числа осцилляторов в выражении для R_m происходит усреднение по фазам и частотам через интеграл:

$$R_m = \operatorname{Re} \int_{\text{locked}} d\omega g(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f(\varphi) e^{im\varphi}.\quad (2.7)$$

Поскольку каждая фаза φ_i имеет два устойчивых состояния равновесия с периодом длиной π , для сети (2.1) есть две группы устойчивых стационарных фаз вблизи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Так как модель Курамото является одной из фазовых моделей нейрона, с точки зрения нейробиологии наиболее интересно рассмотреть бимодальное распределение начальных фаз, когда одна часть нейронов находится в состоянии покоя ($\varphi(0) \equiv \varphi_0 = 0$), а вторая часть находится в возбуждённом состоянии и генерирует спайки ($\varphi_0 = \pi$). Следовательно, выбирая бимодальное распределение начальных фаз с параметром асимметрии η :

$$f(\varphi_0) = \eta \delta(\varphi_0) + (1 - \eta) \delta(\varphi_0 - \pi),\quad (2.8)$$

в стационарном состоянии получим распределение по фазам

$$f(\varphi) = \eta \delta(\varphi - \varphi^{1*}) + (1 - \eta) \delta(\varphi - \varphi^{1*} - \pi),\quad (2.9)$$

поскольку фазы релаксируют к ближайшим состояниям равновесия вблизи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. В выражении (2.9) φ^{1*} определяется выражением (2.5) без индекса i для φ и ω , поскольку в континуальном пределе они непрерывны.

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_1 &= (2\eta - 1) \int_{-\Delta}^{\Delta} d\omega g(\omega) \cos(\varphi^{1*}), \\ R_2 &= \int_{-\Delta}^{\Delta} d\omega g(\omega) \cos(2\varphi^{1*}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $g(\omega) = \frac{1}{2\Delta}$. После взятия интегралов получим выражения для первого и второго параметров порядка:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(2\eta - 1)\Lambda R_2}{2\Delta} \left\{ -\frac{1}{2} \cos \left[\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{R_2} \left(\cos \beta - \frac{2\Delta}{\Lambda} \right) \right) \right] - \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \cos \left[\frac{3}{2} \arccos \left(\frac{1}{R_2} \left(\cos \beta - \frac{2\Delta}{\Lambda} \right) \right) + \frac{\beta}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \left[\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{R_2} \left(\cos \beta + \frac{2\Delta}{\Lambda} \right) \right) \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos \left[\frac{3}{2} \arccos \left(\frac{1}{R_2} \left(\cos \beta + \frac{2\Delta}{\Lambda} \right) \right) + \frac{\beta}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\Lambda}{8\Delta} \left\{ -\frac{\cos \beta (\Lambda \cos \beta - 2\Delta)^2}{\Lambda^2 R_2} + \sin \beta \left(\cos \beta - \frac{2\Delta}{\Lambda} \sqrt{1 - \frac{(\cos \beta - \frac{2\Delta}{\Lambda})^2}{R_2^2}} + \right. \right. \\ &\quad + R_2 \sin \beta \arcsin \left(\frac{\Lambda \cos \beta - 2\Delta}{\Lambda R_2} \right) + \frac{\cos \beta (\Lambda \cos \beta + 2\Delta)^2}{\Lambda^2 R_2} - \\ &\quad \left. - \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{2\Delta}{\Lambda} \right) \sqrt{1 - \frac{(\cos \beta + \frac{2\Delta}{\Lambda})^2}{R_2^2}} - R_2 \sin \beta \arcsin \left(\frac{\Lambda \cos \beta + 2\Delta}{\Lambda R_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Было проведено численное моделирование динамики сети (2.1) с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом по времени 0.01. Затем была изучена зависимость характеристик степени синхронизации сети, таких как первый и второй параметр порядка, от параметров системы. На рис. 2.1 показана зависимость первого и второго параметров порядка R_1 и R_2 от параметра адаптации β в системе (2.1) для бимодального распределения начальных фаз (2.8) с параметром асимметрии $\eta = 0.8$. Выколотыми точками показаны результаты численного моделирования, а сплошными линиями показаны теоретические кривые (2.11), (2.12). Как видно из графика, точки ложатся на теоретические кривые. Это означает, что приближение стационарных весов в синхронном режиме действительно выполняется. Отметим, что изучение влияния параметра

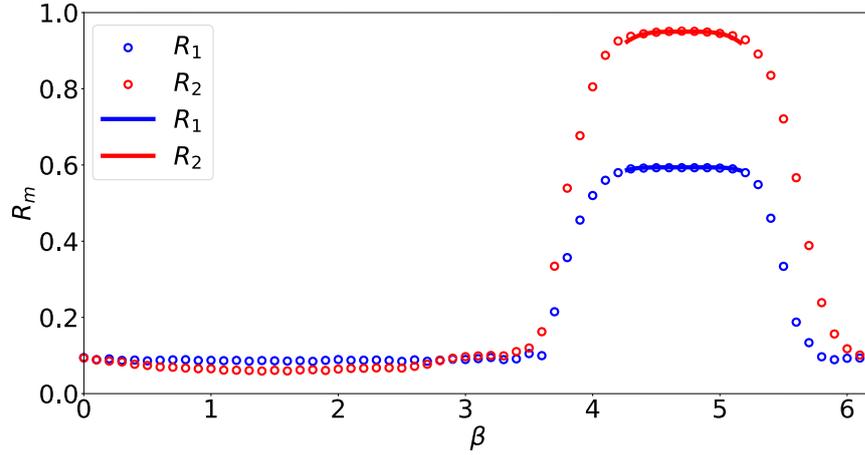


Рисунок 2.1 — Первый и второй параметры порядка R_1 и R_2 сети (2.1) в зависимости от параметра β при $\Lambda = 4$. Распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$.

ε на динамику сети (2.1) показало, что он влияет только на скорость выхода коэффициентов κ_{ij} на стационарное значение без качественного изменения динамики сети. Исходя из этих соображений, было выбрано значение $\varepsilon = 1$, при котором система (2.1) достаточно быстро достигает стационарного состояния. Рисунок 2.1 демонстрирует, что существует диапазон по параметру β , в котором второй параметр порядка R_2 близок к единице, а R_1 принимает значения между нулём и единицей. Это означает, что при значениях параметра β внутри этого диапазона в сети (2.1) существуют два фазовых кластера, находящиеся в противофазе по отношению друг к другу. Этот интервал достаточно широкий и включает в себя правило Хебба, когда $\beta = \frac{3\pi}{2}$. Кроме того, рис. 2.1 демонстрирует, что в сети (2.1) также реализуется асинхронное состояние, когда $R_1 \approx R_2 \approx 0$, и состояние, когда параметры порядка R_1 и R_2 принимают промежуточные значения и имеют гладкую зависимость от параметра β . Как будет продемонстрировано ниже, эти значения параметра β соответствует режиму частичной синхронизации [67]. Отметим, что параметр асимметрии начального распределения η входит в выражение для R_1 (2.11) линейно, влияя на высоту плато в синхронном состоянии. При $\eta = 1$, когда все начальные фазы одинаковы, его высота максимальна и близка к единице, при $\eta = 0.5$, когда начальные фазы распределены поровну между двумя значениями, его высота минимальна и равна нулю. В то же время, параметр η не оказывает влияния на высоту плато R_2 : поскольку распределение начальных фаз бимодальное, в сети (2.1) реализуются два фазовых кластера в синхронном режиме (или один фазовый кластер в случае $\eta = 1$), и поэтому всегда выполняется $R_2 \approx 1$.

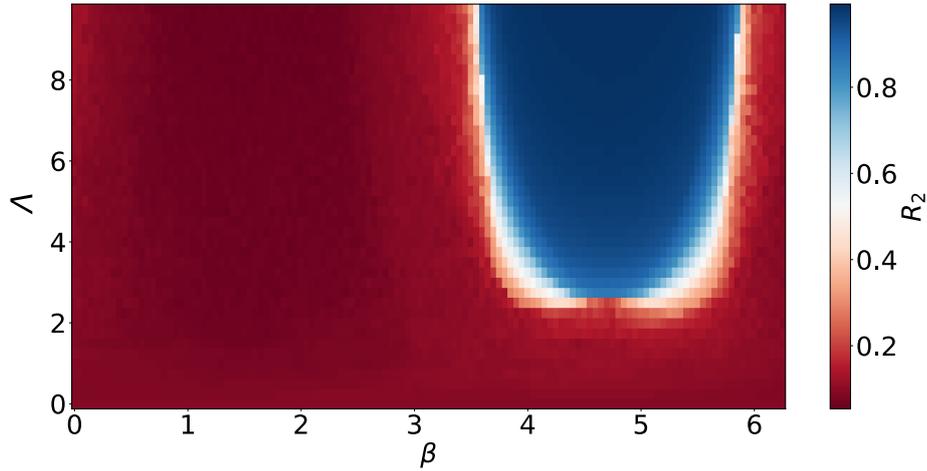


Рисунок 2.2 — Второй параметр порядка R_2 сети (2.1) в зависимости от параметров (β, Λ) . Распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$.

Теперь изучим совместное влияние силы связи и правила адаптации на динамику сети (2.1). На рис. 2.2 показана зависимость второго параметра порядка от параметров (β, Λ) в системе (2.1) для бимодального распределения начальных фаз (2.8) с параметром асимметрии $\eta = 0.8$. Как видно из рисунка, существует область параметров (показана синим цветом), внутри которой $R_2 \approx 1$, т. е. когда в сети (2.1) реализуются два фазовых кластера. В области, показанной красным цветом, выполняется $R_2 \approx 0$ и реализуется асинхронный режим. При этом существует порог синхронизации по параметру силы связи Λ , ниже которого в сети (2.1) всегда реализуется асинхронное состояние. С ростом параметра Λ от нуля появляется область параметров, соответствующая синхронному режиму с двумя фазовыми кластерами, которая постепенно увеличивается, так что при больших значениях Λ она достигает практически $\beta \in (\pi, 2\pi)$. Также рис. 2.2 демонстрирует, что есть плавный переход между областями, соответствующими синхронному ($R_2 \approx 1$) и асинхронному ($R_1 \approx 0$) режимам, показанный постепенным изменением цвета.

На рис. 2.3 приведена иллюстрация синхронного режима сети (2.1) с двумя фазовыми кластерами в случае бимодального распределения начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$. При построении рис. 2.3 осцилляторы переупорядочивались следующим образом: сначала по возрастанию их средних по времени частот, а затем по возрастанию фаз внутри каждого фазового кластера. На рис. 2.3а показана пространственно-временная динамика фаз, где фаза каждого осциллятора показана цветом. Как следует из этого рисунка, при данных параметрах

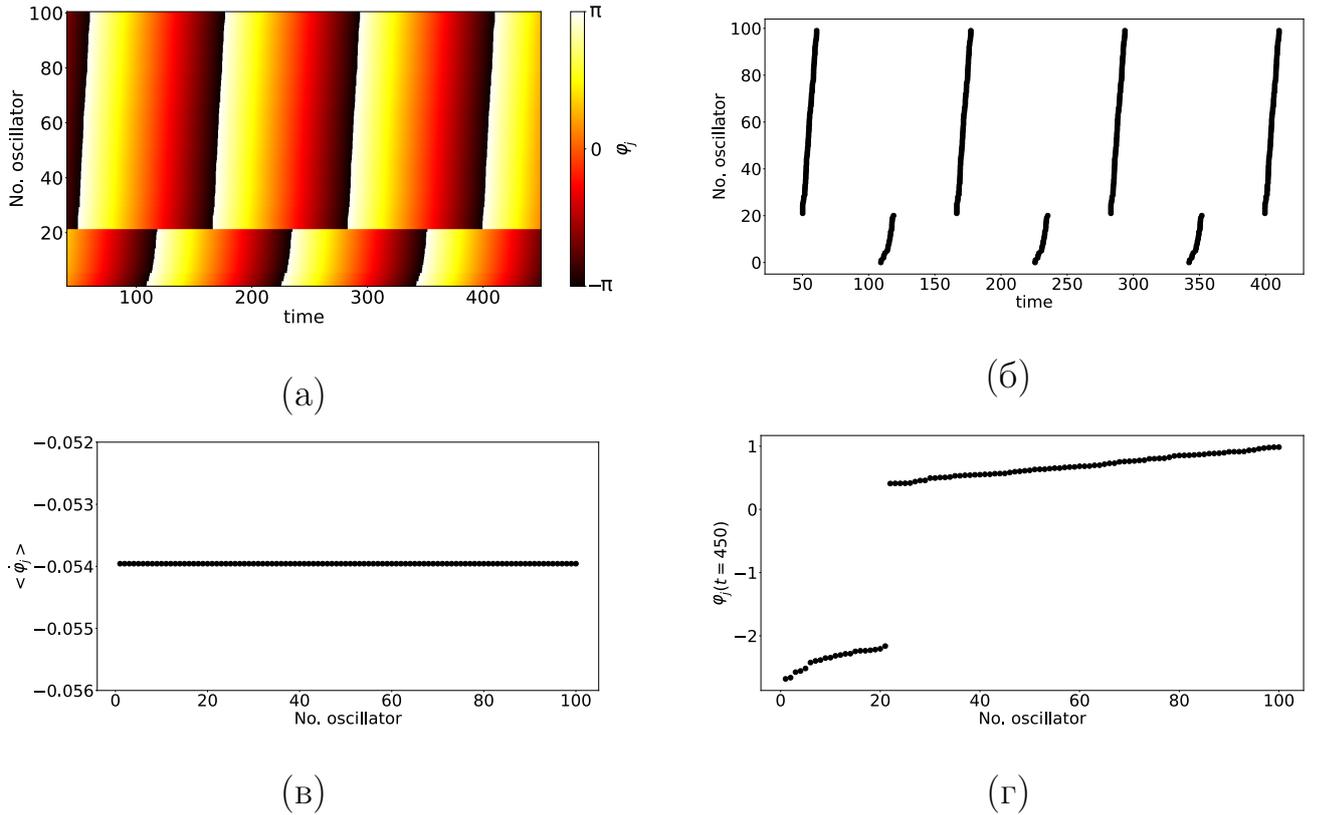


Рисунок 2.3 — Синхронный режим с двумя фазовыми кластерами в сети (2.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 450$. Распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$. $\beta = 5$, $\Lambda = 4$

в синхронном режиме действительно реализуются два фазовых кластера, находящихся в противофазе по отношению друг к другу. Поскольку аналитические решения в виде фазовых кластеров получены во вращающейся системе отсчёта, в численном моделировании наблюдаются бегущие волны, когда все осцилляторы имеют одну и ту же частоту, а соседние узлы внутри фазовых кластеров имеют постоянную разность фаз. Размер каждого кластера в форме бегущей волны зависит от параметра асимметрии начального распределения η : при $\eta = 0.5$ фазовые кластеры одинаковы в размерах, а при $\eta \approx 0.99$ размер одного кластера будет максимальным, а другого — минимальным. Если рассматривать каждый осциллятор как нейрон, то считается, что элемент сети генерирует спайк при пересечении его фазой некоторого значения, например, $\varphi_i = \pi$. На рис. 2.3б показана спайковая активность элементов сети (2.1). Как видно из рисунка, элементы внутри фазовых кластеров генерируют спайки практически одновременно. На рис. 2.3в показано, что средние по времени частоты осцилляторов в синхронном режиме одинаковы. Рисунок 2.3г демонстрирует, что две

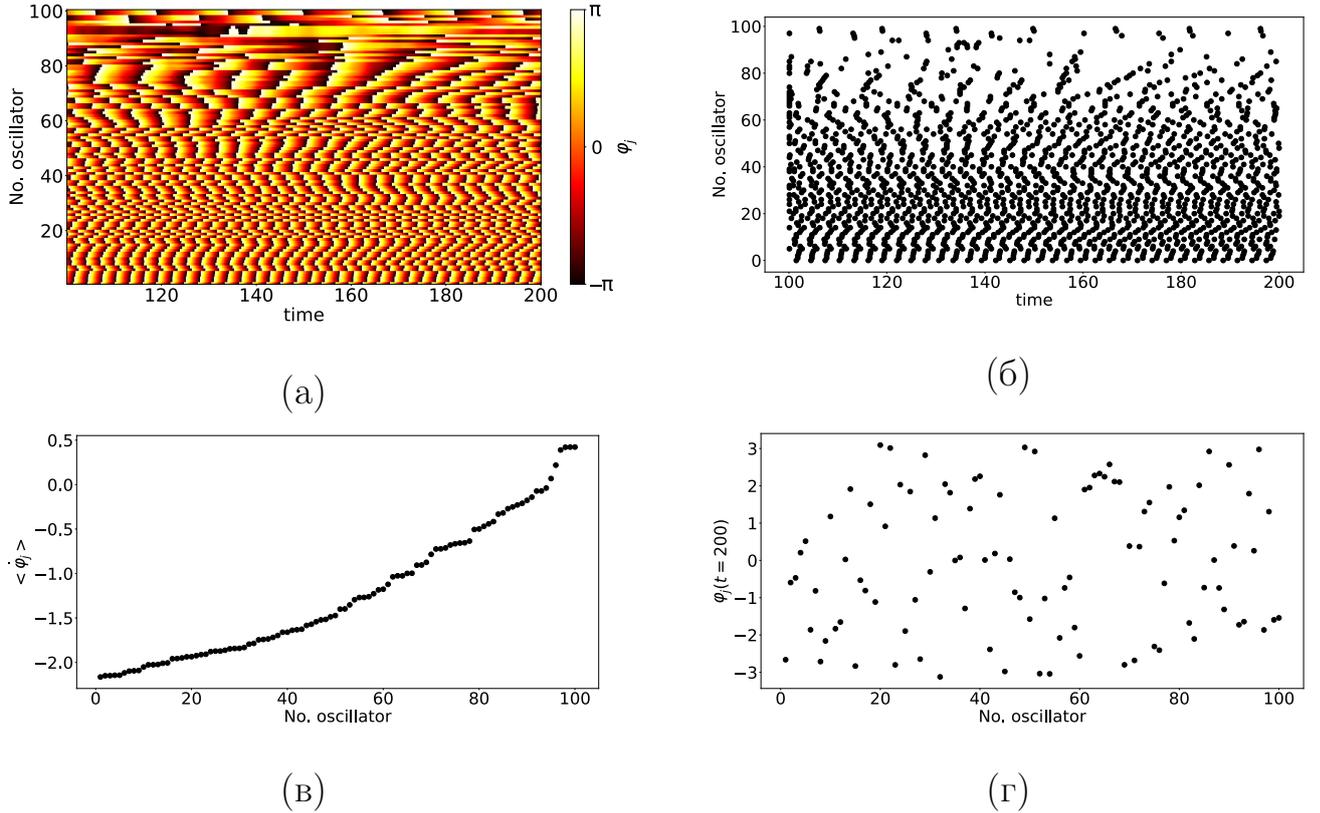


Рисунок 2.4 — Асинхронный режим сети (2.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 200$. Распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$, $\beta = 0$, $\Lambda = 4$

линии, соответствующие двум фазовым кластерам, имеют одинаковый наклон на мгновенном снимке распределения фаз, а разность фаз между соседними элементами практически одинакова, что соответствует бегущей волне.

Рисунок 2.4 иллюстрирует асинхронный режим сети (2.1) в случае бимодального распределения начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$. В этом случае в сети реализуется пространственно-временной беспорядок, когда частоты осцилляторов различны, фазы на мгновенных снимках случайны, и элементы сети генерируют спайки случайным образом.

Промежуточный между синхронным и асинхронным режимами сети (2.1) режим частичной синхронизации проиллюстрирован на рис. 2.5. В этом случае часть осцилляторов находится в когерентной части сети, а остальная находится в некогерентном состоянии. На рис. 2.5 показан случай $\beta = 3.8$, когда осцилляторы с номерами 1–46 находятся в когерентной части сети, а с 47 по 100 — в некогерентной части. Возникновение состояний частичной синхронизации в некоторых сетях было продемонстрировано, например, в работах [68–70] для

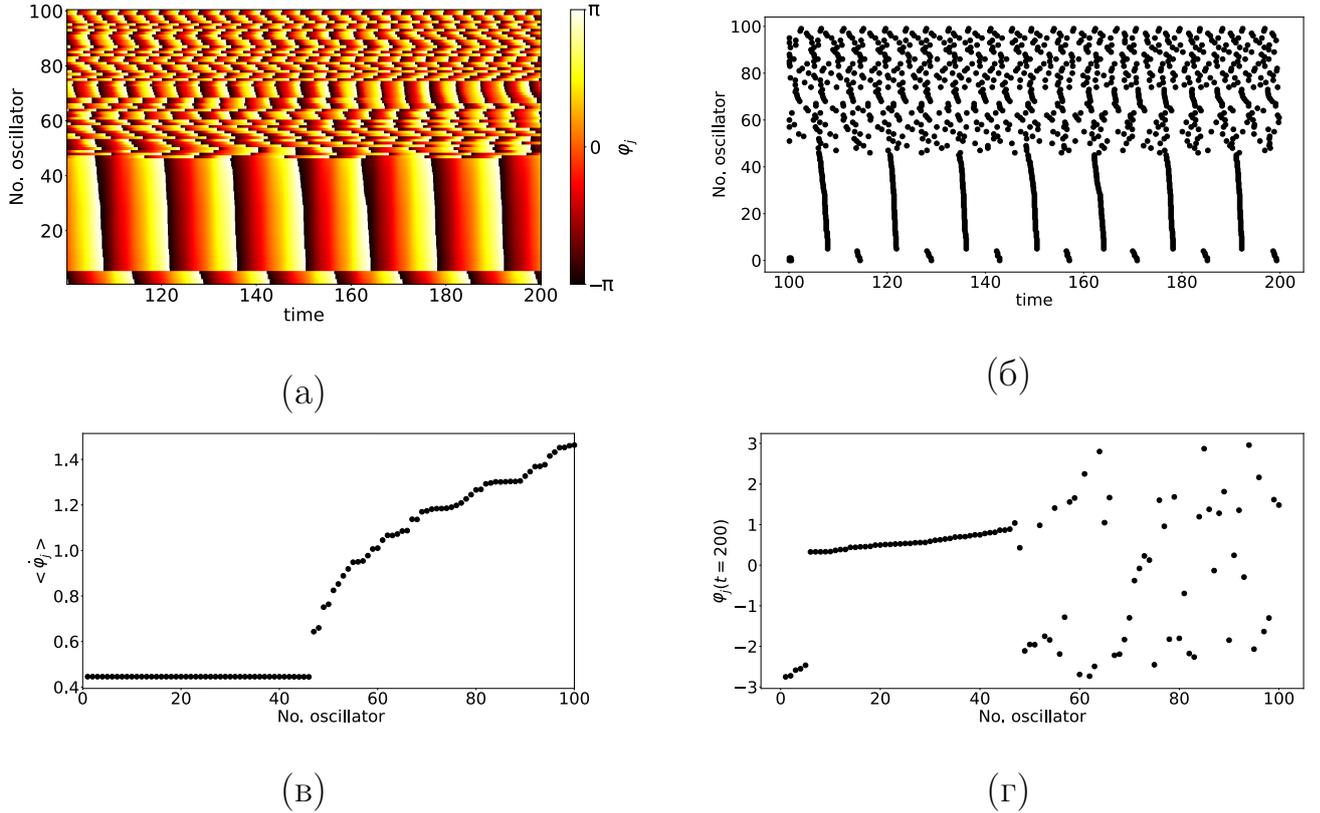


Рисунок 2.5 — Частично синхронное (химерное) состояние сети (2.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 200$. Распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$. $\beta = 3.8$, $\Lambda = 4$

статических связей κ_{ij} и в работах [64; 71] для адаптивных связей и однородных осцилляторов ($\omega_i = \omega$).

Отметим, что, во-первых, поскольку в системе (2.1) есть две группы устойчивых стационарных фаз, максимальное число фазовых кластеров в сети равно двум. Во-вторых, было установлено, что представленные результаты не изменяются при распределении начальных фаз более общего вида: численное моделирование показало, что, например, при равномерном распределении начальных фаз в промежутках $\varphi_i \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ и $\varphi_i \in (\pi - \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4})$ динамика системы качественно не изменится по сравнению с бимодальным начальным распределением (2.8). Это объясняется тем, что в этом случае начальные условия по-прежнему распределены вблизи устойчивых состояний равновесия, и выполняется условие стационарного распределения фаз (2.9), для которого были рассчитаны теоретические значения параметров порядка R_1 , R_2 .

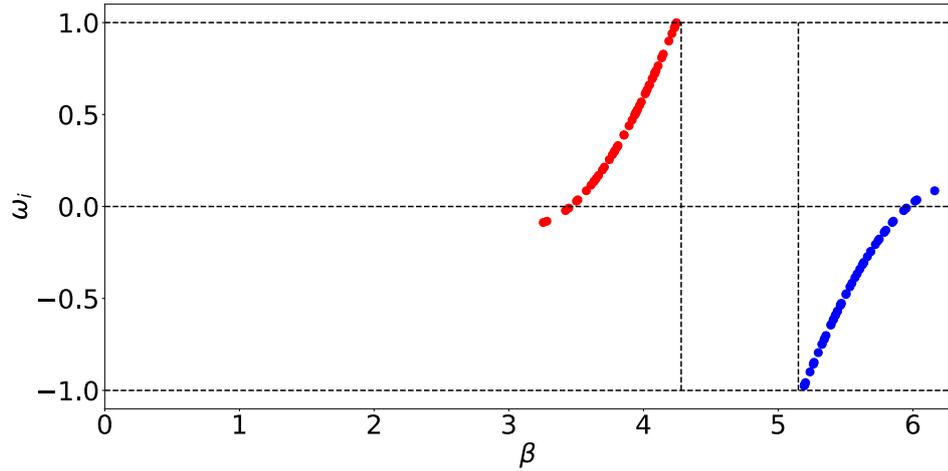


Рисунок 2.6 — Зависимость бифуркационных значений параметра β от собственных частот осцилляторов ω_i при $R_2 = 0.95$, что соответствует синхронному режиму системы (2.1). Красные точки соответствуют левой границе интервала синхронизации (2.13), синие точки соответствуют правой границе (2.14). Интервал синхронизации расположен между двумя вертикальными пунктирными линиями; горизонтальными пунктирными линиями показаны границы равномерного распределения собственных частот $\omega_i = \pm\Delta$ и значение

$$\omega_i = 0. \quad \Lambda = 4$$

2.3 Переходные режимы

Рассмотрим процесс десинхронизации в сети (2.1) в случае бимодального распределения начальных фаз (2.8). Из условия $|\Gamma| = 1$ находится выражение для параметра β , при котором стационарные фазы осциллятора с индексом i теряют устойчивость:

$$\beta_{left} = 2\pi - \arccos\left[\frac{2}{\Lambda}\left(\omega_i - \frac{\Lambda R_2}{2}\right)\right], \quad (2.13)$$

$$\beta_{right} = 2\pi - \arccos\left[\frac{2}{\Lambda}\left(\omega_i + \frac{\Lambda R_2}{2}\right)\right]. \quad (2.14)$$

Эти бифуркационные значения параметра β для всех собственных частот сети ω_i показаны на рис. 2.6, где интервал синхронизации сети расположен между двумя вертикальными пунктирными линиями. Отметим, что на рис. 2.6 часть собственных частот не показана, поскольку эти собственные частоты не удовлетворяют области определения арккосинуса. Ближе всего к границам интервала синхронизации оказываются самые высокочастотные осцилляторы:

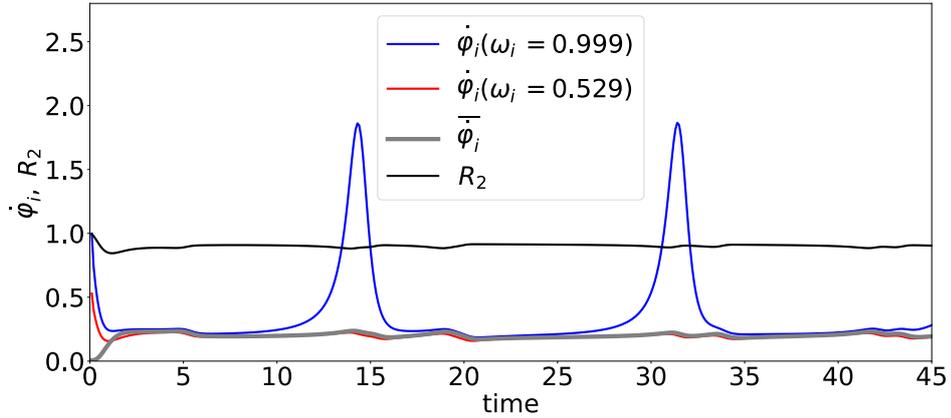


Рисунок 2.7 — Временные зависимости частоты осциллятора с наибольшей собственной частотой сети (синий), осциллятора с 25-ой по убыванию собственной частотой (красный), средней по ансамблю частоты сети (серый) и второго параметра порядка R_2 (чёрный) во время процесса десинхронизации. $\beta = 4.15$, $\Lambda = 4$, распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$

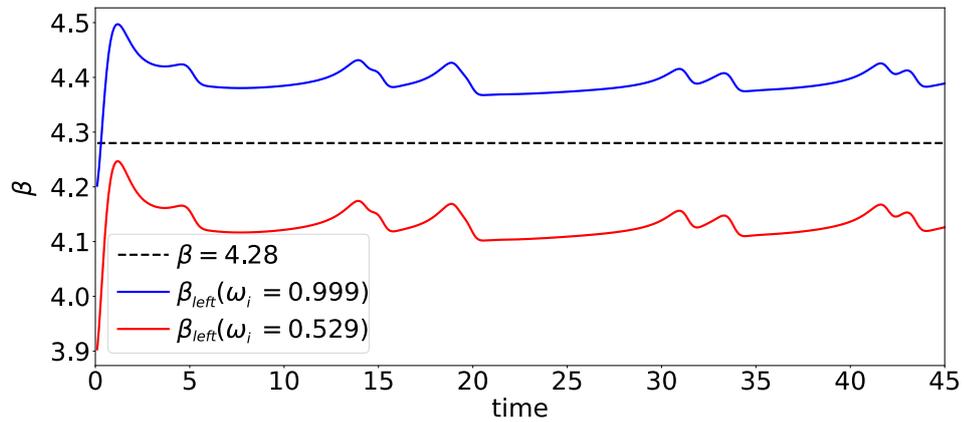


Рисунок 2.8 — Временные зависимости бифуркационных значений β_{left} для осциллятора с наибольшей собственной частотой (синий) и для осциллятора с 25-ой по убыванию собственной частотой (красный). Пунктирной прямой показана граница интервала синхронизации сети (2.1). $\beta = 4.15$, $\Lambda = 4$, распределение начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$

осциллятор с наибольшей положительной собственной частотой на левой границе интервала синхронизации и осциллятор с наименьшей отрицательной собственной частотой на правой границе. Поскольку пороги устойчивости самых высокочастотных осцилляторов совпадают с границами интервала синхронизации всей сети, это означает, что процесс десинхронизации начинается именно с них. Для иллюстрации процесса десинхронизации было выбрано значение параметра β вне интервала синхронизации, но вблизи его левой границы: $\beta = 4.15$. Оказалось, что при этом значении параметра β осцилляторы сначала синхронизируются, но затем часть осцилляторов сети один за другим отходит от синхронной группы, начиная с осциллятора с наибольшей собственной частотой и затем иерархически по принципу убывания собственных частот. Другая часть осцилляторов сети при этом остаётся в синхронной группе. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 2.7, где показаны временные зависимости частоты самого высокочастотного осциллятора, 25-го по убыванию собственной частоты осциллятора, средней частоты сети и второго параметра порядка. На рис. 2.7 самый высокочастотный осциллятор, показанный синим цветом, принадлежит случайной части сети, а красным цветом показан осциллятор, принадлежащий когерентной части сети. Когда первый, самый высокочастотный осциллятор отделяется от синхронной группы, второй параметр порядка уменьшается. Согласно формуле (2.13), это вызывает сдвиг бифуркационных значений β_{left} всех остальных осцилляторов, поэтому второй осциллятор, находящийся теперь ближе всех к границе интервала синхронизации, также пересекает её и отделяется от синхронной группы. И далее иерархически часть осцилляторов сети отделяется от синхронной группы ввиду того, что их значения β_{left} сдвигаются во времени, что проиллюстрировано на рис. 2.8 на примере самого высокочастотного осциллятора (синяя линия). Однако у другой части осцилляторов значение β_{left} никогда не пересекает границу интервала синхронизации (красная линия на рис. 2.8). Таким образом, в сети (2.1) появляются частично синхронные, или химерные состояния. Отметим, что на правой границе процесс десинхронизации происходит аналогичным образом.

2.4 Выводы по второй главе

В этой главе была изучена динамика сети неоднородных коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка. Исследовано совместное влияние параметра коэволюции и силы связи на динамику системы. Продемонстрировано, что, в зависимости от параметров, в сети реализуются синхронный или асинхронный режимы, а также режим частичной синхронизации (химерное состояние), который является промежуточным между ними. Синхронный режим реализуется в широком диапазоне правил коэволюции, включающем в себя правило Хебба. При этом существует порог по параметру силы связи, ниже которого в сети всегда реализуется асинхронное состояние. Обнаружено, что процесс потери десинхронизации сети происходит иерархически и берёт своё начало с самого высокочастотного осциллятора.

Приведённые в этой главе результаты опубликованы в статье [A7] и тезисах доклада [A19].

Глава 3. Динамика коэволюционного ансамбля трёх осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка

3.1 Введение

В этой главе приведено исследование ансамбля коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка, который можно рассматривать как модель трёх нейронов со сложным видом адаптивных связей, когда они образуют симплекс второго порядка [72–78]. Динамика ансамбля описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \Lambda \kappa_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_1 + \alpha), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \Lambda \kappa_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 + \alpha), \\ \dot{\varphi}_3 = \omega_3 + \Lambda \kappa_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 + \alpha), \\ \dot{\kappa}_1 = -\varepsilon (\sin(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_1 + \beta) + \kappa_1), \\ \dot{\kappa}_2 = -\varepsilon (\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 + \beta) + \kappa_2), \\ \dot{\kappa}_3 = -\varepsilon (\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 + \beta) + \kappa_3), \end{cases} \quad (3.1)$$

где φ_i — фазы осцилляторов, а κ_i — коэффициенты связи. Наличие симплексных связей второго порядка здесь отражено таким образом, что аргументом синуса является линейная комбинация трёх фаз, а не разность фаз двух осцилляторов, как в классическом случае. В случае трёх элементов $\kappa_{iii} \equiv 0$, и в силу симметрии $\kappa_{ijk} \equiv \kappa_{ikj}$, поэтому мы обозначили $\kappa_{ijk} \equiv \kappa_i$ и рассмотрели систему в шестимерном фазовом пространстве. Как и в модели (1.6), параметром α обозначена задержка, с помощью параметра β изменяется правило адаптации, параметр ε разделяет быструю динамику фаз и медленную адаптацию коэффициентов связи, ω_i — это собственные частоты осцилляторов, а Λ — постоянная сила связи между элементами.

Как и в случае малых ансамблей, рассмотренных в главе 1, наиболее интересным для нас является изучение возможности формирования в этой модели режима смешанной динамики. Система (3.1) обладает высокой размерностью фазового пространства, что, с одной стороны позволяет изучить этот эффект в высокоразмерных системах, а с другой стороны — усложняет поиск точек

пересечения инвариантных многообразий седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера.

3.2 Смешанная динамика

Зафиксируем параметры системы, за исключением параметра коэволюции β , следующим образом: $\{\alpha = 0.24, \varepsilon = 0.01, \Lambda = 44.5, \omega_1 = 0.985, \omega_2 = 1, \omega_3 = 1.015\}$. Выбор таких значений параметров обусловлен следующим образом: поскольку в системе (3.1) главный интерес вызывает изучение наличия смешанной динамики, параметры $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, а также расстройка собственных частот между смежными осцилляторами $\omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1 = 0.015$ имеют те же значения, что и в случае смешанной динамики в системах (1.6), (1.21), (1.26), (1.30). Выбор значения параметра Λ обусловлен тем, что при нём в системе (3.1) реализуется хаотическая динамика. Численное моделирование системы (3.1) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом по времени 0.001 и начальными условиями $\varphi_i(t = 0) = 0, \kappa_i(t = 0) = 0.01$ показало, что для указанных значений параметров в системе одновременно существуют хаотический аттрактор и хаотический репеллер, проекции которых на подпространства фазовых переменных $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и коэффициентов связи $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ показаны на рис. 3.1а и 3.1б. В отличие от случая симплексных связей первого порядка, в случае симплексных связей второго порядка хаотические аттрактор и репеллер практически совпадают в проекциях.

Исследование системы (3.1) показало, что хаотический аттрактор и хаотический репеллер существуют одновременно в интервале $\beta \in [1.08, 2.07]$. На рис. 3.2а и 3.2б показаны спектры ляпуновских показателей аттрактора и репеллера в этом интервале. Из графиков следует, что их ляпуновские показатели практически совпадают в значениях, если обратить знак ляпуновских показателей репеллера, поскольку для репеллера отрицательные ляпуновские показатели означают наличие хаотической динамики. Как аттрактор, так и репеллер имеют в представленном диапазоне параметра β два положительных, два нулевых и два отрицательных ляпуновских показателя. Наличие двух положительных ляпуновских показателей свидетельствует о появлении в системе гиперхаоса, а наличие двух нулевых ляпуновских показателей означает,

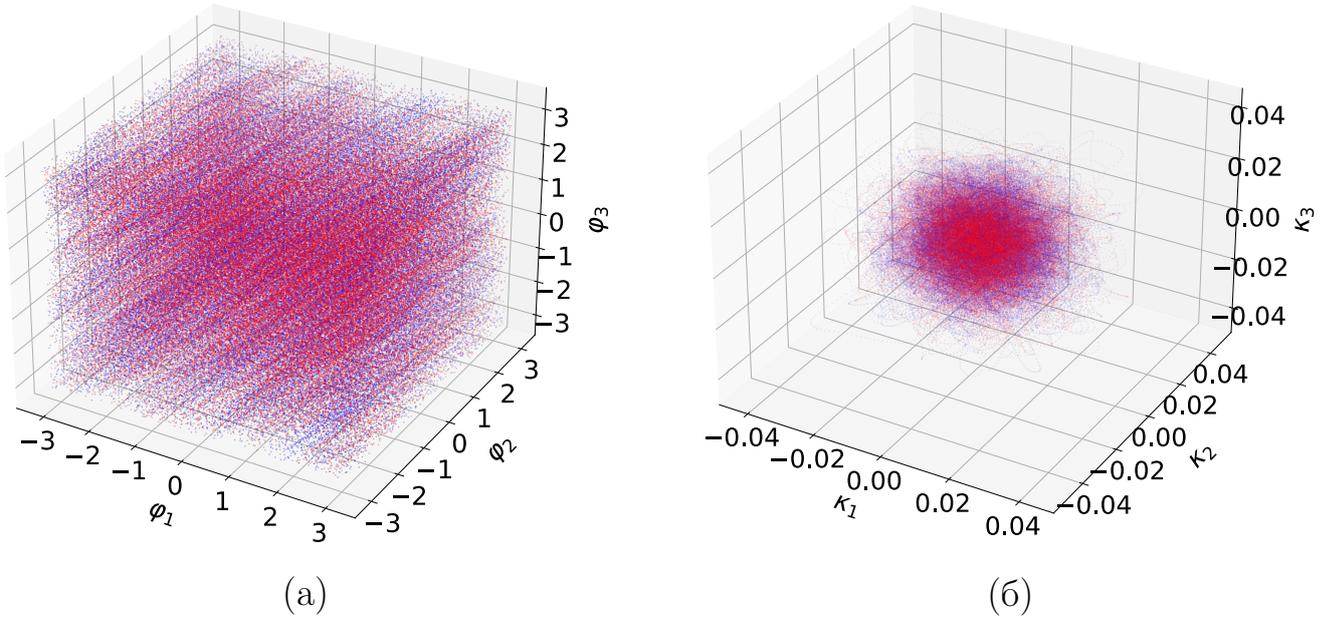
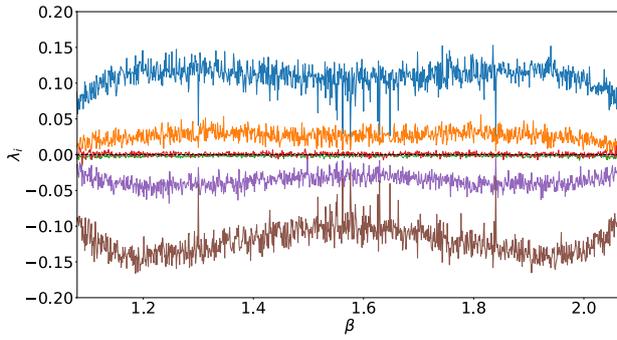


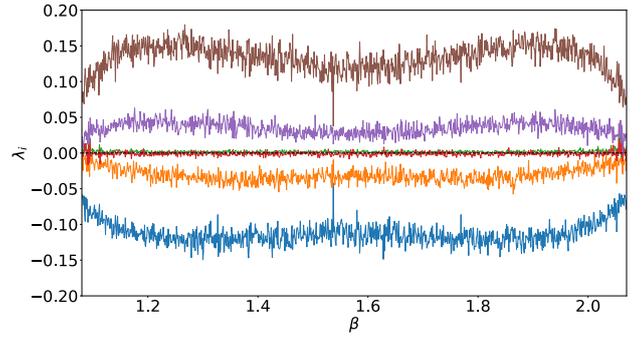
Рисунок 3.1 — Проекция хаотического аттрактора (синий) и хаотического репеллера (красный) системы (3.1) (а) на подпространство фазовых переменных; (б) на подпространство коэффициентов связи. $\beta = 1.6$

что в структуре хаотических аттрактора и репеллера содержатся седловые торы [79; 80]. Вне представленного интервала по параметру β хаотического репеллера в системе (3.1) не существует, и траектории в обратном времени стремятся к бесконечности. При вариации параметра β от границ представленного диапазона хаотический аттрактор сначала преобразуется в хаотический аттрактор с одним положительным, двумя нулевыми и тремя отрицательными ляпуновскими показателями, затем с одним положительным, одним нулевым и четырьмя отрицательными ляпуновскими показателями, и затем он преобразуется в устойчивый предельный цикл с одним нулевым и пятью отрицательными ляпуновскими показателями.

На рисунках 3.3а и 3.3б показана сумма ляпуновских показателей хаотических аттрактора и репеллера, соответственно. Из графиков следует, что эта сумма в среднем на порядок меньше, чем в случае симплексных связей первого порядка. Это подтверждает вывод о том, что консервативные свойства у диссипативной системы (3.1) выражены сильнее, чем у систем (1.6), (1.21), (1.26). Более того, в некоторых точках по параметру β сумма достигает значений порядка 10^{-5} . Это говорит о том, что консервативные свойства системы (3.1) выражены наиболее сильно вблизи значения $\beta = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$, которое в случае симплексных связей первого порядка соответствовало бы обратному правилу Хебба, а в случае симплексных связей второго порядка соответствует прави-

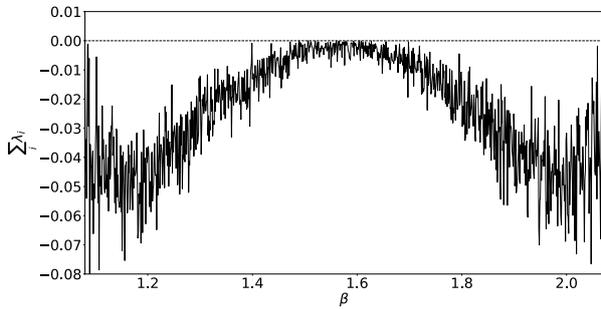


(a)

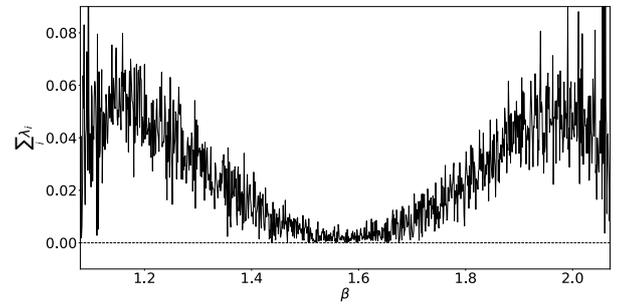


(б)

Рисунок 3.2 — Ляпуновские показатели хаотического аттрактора (а) и хаотического репеллера (б) системы (3.1) в зависимости от параметра адаптации $\beta \in [1.08, 2.07]$



(a)



(б)

Рисунок 3.3 — Сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора (а) и хаотического репеллера (б) системы (3.1) в зависимости от параметра адаптации $\beta \in [1.08, 2.07]$.

лу адаптации, когда воздействие на i -ый осциллятор со стороны j -го и k -го уменьшается при уменьшении комбинации фаз $(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i)$.

Поскольку хаотические аттрактор и репеллер системы (3.1) очень похожи между собой, стоит ожидать, что и расстояние Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна между ними будет принимать небольшие значения. Вычисление $KRWD$ для $\beta = 1.6$ в системе (3.1) показало, что $KRWD = 0.15$. Это меньше, чем в неавтономной системе (1.21) и системе (1.26) двух осцилляторов Курамото с равными собственными частотами, но немного больше, чем в случае наличия неизохронности и расстройки собственных частот в системе (1.26).

Система (3.1) имеет шестимерное фазовое пространство. Это означает, что для неё нельзя напрямую установить пересечение инвариантных многообразий седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера, как это было сделано для систем (1.6), (1.26). Однако наличие пересечений инвариантных

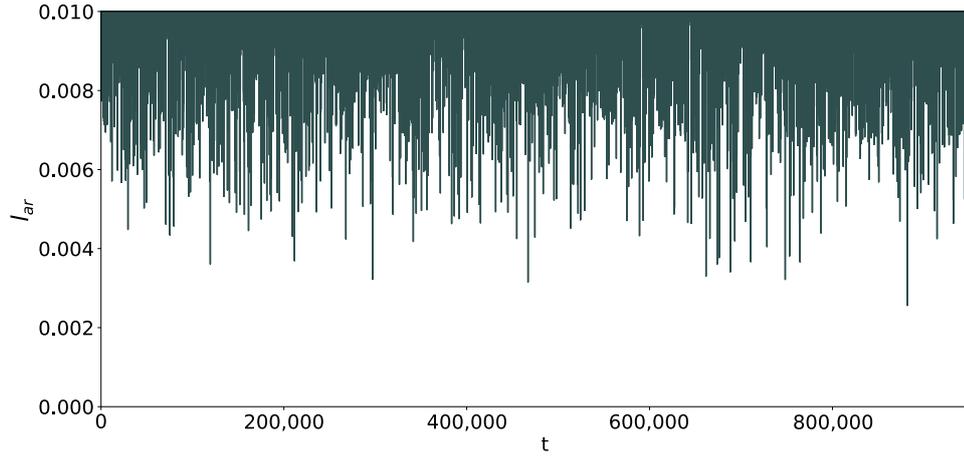


Рисунок 3.4 — Зависимость расстояния между траекториями хаотического аттрактора и хаотического репеллера системы (3.1) от времени. $\beta = 1.6$

многообразий следует из наличия точек в фазовом пространстве, в которых расстояние между хаотическим аттрактором и репеллером очень мало. Как и для систем (1.6), (1.21), (1.26), для системы (3.1) была рассчитана зависимость расстояния между типичными траекториями хаотического аттрактора и хаотического репеллера от прямого времени. Это расстояние рассчитывалось по формуле:

$$(l_{ar})_i = \min_j \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left((\varphi_k^a)_i - (\varphi_k^r)_j \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left((\kappa_k^a)_i - (\kappa_k^r)_j \right)^2}, \quad (3.2)$$

где φ_k^a и κ_k^a ($k = 1, 2, 3$) — это координаты точек траектории хаотического аттрактора, а φ_k^r и κ_k^r — координаты точек траектории хаотического репеллера, а i и j — индексы точек траекторий аттрактора и репеллера, соответственно. Результат вычисления расстояния между хаотическим аттрактором и репеллером показан на рис. 3.4. Из графика следует, что расстояние достаточно мало и оно на порядки меньше, чем, например, расстояние между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером в отсутствие смешанной динамики в системе (1.6). На рис. 3.5а и 3.5б показаны проекции обратимого ядра системы (3.1), т. е. множество точек, в которых расстояние между хаотическим аттрактором и репеллером меньше порога, выбранного в этом случае равным 0.01.

В таблице 7 представлены фрактальные размерности хаотического аттрактора, хаотического репеллера и обратимого ядра системы (3.1). Из представленных результатов следует, во-первых, что фрактальные размерности аттрактора

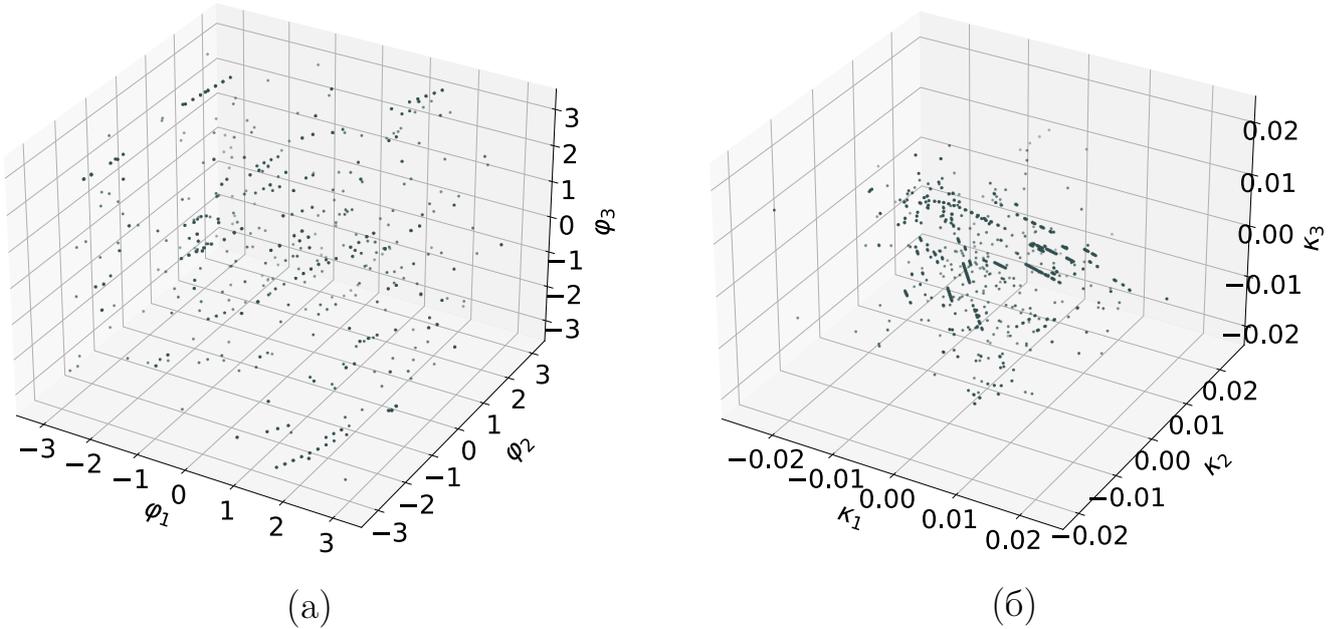


Рисунок 3.5 — Проекция обратимого ядра системы (3.1) (а) на подпространство фазовых переменных (б); на подпространство коэффициентов связи. $\beta = 1.6$

Таблица 7 — Фрактальная размерность хаотического аттрактора, хаотического репеллера и обратимого ядра системы (3.1) при $\beta = 1.6$

	аттрактор	репеллер	обратимое ядро
D_F	2.63	2.63	1.03

и репеллера совпадают, что объясняется их высокой степенью схожести. Во-вторых, фрактальные размерности хаотического аттрактора и хаотического репеллера мало отличаются от фрактальных размерностей в случае двух осцилляторов с симплексными связями первого порядка (ср. с таблицей 1).

3.3 Приложение к нейродинамике

Рассмотрим, как отражается наличие смешанной динамики на статистических характеристиках колебаний в системе (3.1). На рисунке 3.6 показаны спектры мощности фазовых переменных в системе (3.1) в случае смешанной динамики и в случае классического диссипативного хаоса. Как видно из представленных данных, в случае смешанной динамики спектральная плотность мощности более равномерно распределена по частотам в сравнении со случа-

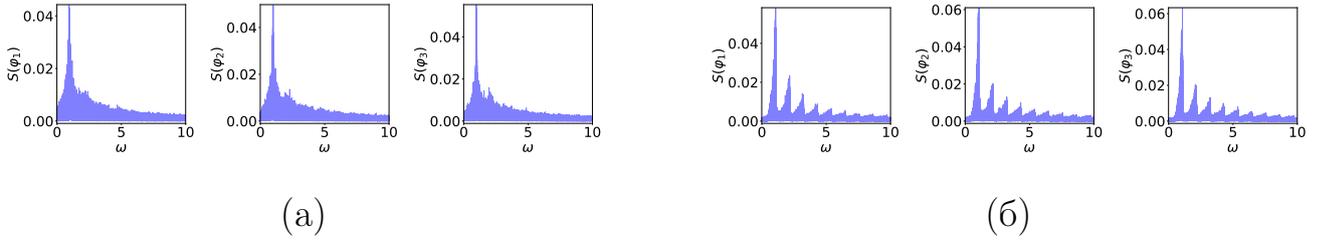


Рисунок 3.6 — Спектры мощности фазовых переменных в системе (3.1).

(а) Смешанная динамика: $\beta = 1.1$; (б) диссипативный хаос: $\beta = 1.05$

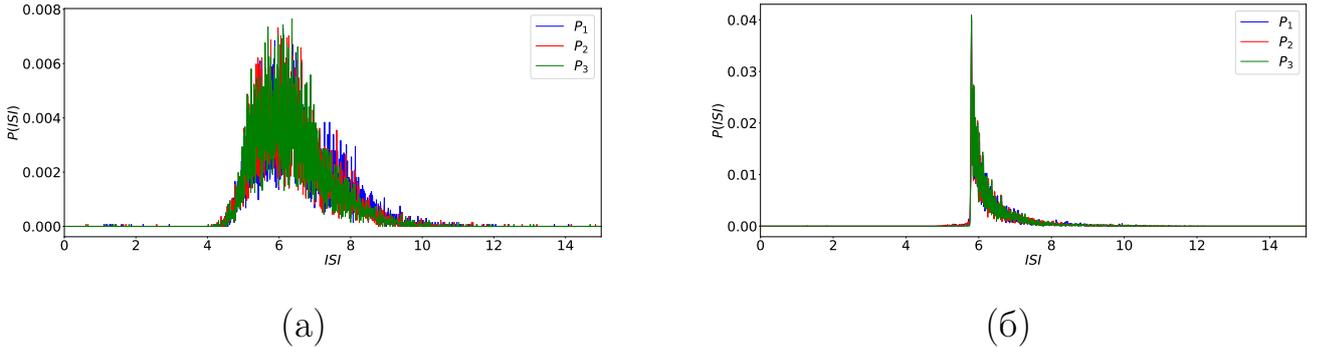


Рисунок 3.7 — Распределения межспайковых интервалов в системе (3.1).

(а) Смешанная динамика: $\beta = 1.1$; (б) диссипативный хаос: $\beta = 1.05$

ем классического хаоса. Это свидетельствует о том, что в случае смешанной динамики колебания становятся более «шумоподобными». Параметр β на представленных графиках отличается незначительно, то есть приведены близкие к границам режимов значения параметра. Вид спектра, представленного на рис. 3.6а, качественно сохраняется во всём диапазоне существования смешанной динамики, а вид спектра на рис. 3.6б — во всём диапазоне существования классического диссипативного хаоса в системе (3.1). Это говорит о том, что эффект вызван именно изменением типа хаоса, а не вариацией контрольного параметра. Отметим, что эти данные согласуются с данными анализа спектров мощности генератора шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики (1.30).

На рисунке 3.7 показаны распределения межспайковых интервалов в системе (3.1) в случае смешанной динамики и в случае классического диссипативного хаоса. Под межспайковыми интервалами здесь понимаются временные интервалы между моментами, когда фаза пересекает значение $\varphi_j = \pi$. Как следует из графиков, в случае смешанной динамики это распределение очень широкое в сравнении с классическим диссипативным хаосом. Как известно, значение межспайкового интервала является единицей информации, которой обмениваются нейроны [81]. Представленные данные свидетельствуют о высо-

кой информационной ёмкости сети (3.1) в случае смешанной динамики. Как и в случае спектров мощности, приведённых на рис. 3.6, вид распределений качественно сохраняется во всём диапазоне этих двух разных типов хаоса. Отметим, что уширение распределения межспайковых интервалов имеет место именно при сочетании двух факторов: смешанной динамики и симплексных связей второго порядка, и в случае смешанной динамики и симплексных связей первого порядка такой эффект не наблюдается.

3.4 Выводы по третьей главе

В этой главе была исследована система трёх коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка. В ней был обнаружен третий тип хаоса. Смешанная динамика в этом случае отличается от случая двух элементов с симплексными связями первого порядка (1.6), (1.21), (1.26). В частности, в случае симплексных связей второго порядка хаотические аттрактор и репеллер обладают очень высокой степенью схожести. Это выражается в том, что они практически неотличимы друг от друга в проекциях, а их фрактальные размерности и ляпуновские показатели совпадают. Кроме того, в случае симплексных связей второго порядка сумма ляпуновских показателей хаотических аттрактора и репеллера в среднем на порядок меньше, чем в случае симплексных связей первого порядка, а её минимальное значение меньше на четыре порядка. Это позволяет заключить, что в случае смешанной динамики консервативные свойства диссипативной системы (3.1) с симплексными связями второго порядка выражены сильнее, чем у систем с симплексными связями первого порядка (1.6), (1.21), (1.26). Наиболее сильно эти свойства выражены при значении параметра адаптации, которое в случае симплексных связей первого порядка соответствовало бы обратному правилу Хебба, а в случае симплексных связей второго порядка соответствует правилу адаптации, когда воздействие на i -ый осциллятор со стороны j -го и k -го уменьшается при уменьшении комбинации фаз $(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i)$. В то же время, такие характеристики, как расстояние Канторовича—Рубинштейна—Вассерштейна между хаотическими аттрактором и репеллером и фрактальные размерности хаотических аттрактора, репеллера и обратимого ядра, значительно не меняются по сравнению со случаем симплек-

ных связей первого порядка. Установлено, что в системе двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка хаотический аттрактор и хаотический репеллер одновременно появляются и исчезают. В приложении А приведена сравнительная таблица с характеристиками смешанной динамики в коэволюционных ансамблях Курамото.

Продемонстрировано, что в случае сочетания смешанной динамики и симплексных связей второго порядка распределение спектральной плотности мощности становится более равномерным, а распределение межспайковых интервалов становится гораздо более широким по сравнению со случаем смешанной динамики и симплексных связей первого порядка и со случаем классического диссипативного хаоса и симплексных связей второго порядка. Это означает, что в случае смешанной динамики в этой модели сигнал становится более «шумоподобным», а сеть приобретает большую информационную ёмкость. Приведённые свойства нейронного ансамбля (3.1), проявляющиеся при сочетании симплексных связей второго порядка и третьего типа хаоса, могут быть использованы в различных приложениях.

Приведённые в этой главе результаты опубликованы в статье [A8] и тезисах доклада [A18].

Глава 4. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка

4.1 Введение

В настоящее время лишь несколько работ посвящены исследованию больших сетей связанных элементов с симплексными связями порядка выше единицы. Ранее изучались либо статические симплициальные комплексы, либо модели сетей с адаптивными симплексными связями первого порядка. Результаты исследования синхронизации в статических симплициальных комплексах приведены, например, в работах [82–85]. В работе [86] был обнаружен эффект резкого перехода от асинхронного режима к синхронизации при вариации параметра силы связи. В статье [87] представлены результаты исследования модели на основе данных о связях в мозге макаки, которую можно представить в виде сети осцилляторов Курамото с симплексными связями. В работе [88] представлен подход к изучению синхронизации в симплициальных комплексах с адаптивными связями для общего вида функции связи. Однако этот подход предполагает, что в синхронном состоянии функция связи равна нулю, а это условие не всегда выполняется. В статье [89] была исследована сеть коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго и третьего порядка при одном определённом правиле адаптации. Было продемонстрировано, что в сети происходит скачкообразный переход от асинхронного режима к синхронному при вариации параметра силы связи. В этой главе приведено исследование динамики коэволюционной сети осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка и связью «каждый с каждым» с возможностью перестраивания закона коэволюции связей:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{\Lambda}{N^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^N \kappa_{ijk} \sin(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i), \\ \kappa_{ijk} = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i + \beta) + \kappa_{ijk} \right). \end{cases} \quad (4.1)$$

Систему (4.1) можно считать моделью спайковой нейронной сети со сложным видом связей, образующих симплексы второго порядка. Здесь $\varphi_i \in (-\pi, \pi]$ означает фазу i -го элемента, κ_{ijk} характеризует совместное воздействие на i -ый осциллятор со стороны других входящих в состав рассматриваемого симплекса

элементов с индексами j и k , а параметры $(N, \beta, \Lambda, \varepsilon, \omega_i)$ имеют тот же смысл, что и в системе (2.1). Рассмотрим равномерное распределение собственных частот в промежутке $\omega_i \in (-\Delta, \Delta)$ и различные виды распределений начальных фаз. Начальные веса $\kappa_{ijk}(0) = 1$ для $i \neq j \neq k$ и $\kappa_{ijk} = 0$ в противном случае, то есть связаны только три различных элемента каждого симплекса второго порядка. Снова поставим условие, что эволюционируют во времени только изначально ненулевые коэффициенты связи. Это означает, что в системе (4.1) нет петель, а также то, что симплексные связи второго порядка в системе (4.1) не могут быть сведены к симплексным связям первого порядка через вторую гармонику в случае $j = k$. Зафиксируем параметры $N = 100$, $\varepsilon = 1$, $\Delta = 1$ и изучим совместное влияние силы связи (параметр Λ) и правила коэволюции (параметр β) на динамику сети (4.1).

4.2 Стационарные режимы

Рассмотрим стационарные состояния сети (4.1). В стационарном состоянии $\dot{\kappa}_{ijk} = 0$, поэтому из второго уравнения системы (4.1) следует $\kappa_{ijk} = -\sin(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i + \beta)$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (4.1), получим

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\Lambda}{2} \cos \beta + \frac{\Lambda}{2N^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\beta - 4\varphi_i)} \sum_{j,k=1}^N e^{2i(\varphi_j + \varphi_k)} \right\}, \quad (4.2)$$

или, учитывая определение для второго параметра порядка $R_2 e^{i\Psi_2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2i\varphi_j}$,

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\Lambda}{2} \cos \beta + \frac{\Lambda R_2^2}{2} \cos(2\Psi_2 - 4\varphi_i + \beta). \quad (4.3)$$

Переходя во вращающуюся с общей частотой систему отсчёта, получим $\Psi_2 = 0$. Следовательно, стационарные состояния задаются уравнением

$$\cos(4\varphi_i - \beta) = \frac{1}{R_2^2} \left(\cos \beta - \frac{2\omega_i}{\Lambda} \right). \quad (4.4)$$

При $|\Gamma| < 1$, где $\Gamma = \frac{1}{R_2^2} \left(\cos \beta - \frac{2\omega_i}{\Lambda} \right)$, каждый осциллятор имеет два стационарных состояния на периоде длиной $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_i^{1*} = \frac{\beta + \arccos \Gamma}{4}, \quad \varphi_i^{2*} = \frac{\beta - \arccos \Gamma}{4}. \quad (4.5)$$

Характеристические показатели этих состояний равновесия:

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi_i^{1*}) &= -2\Lambda R_2^2 \sqrt{1 - \Gamma^2} < 0, \\ \lambda(\varphi_i^{2*}) &= 2\Lambda R_2^2 \sqrt{1 - \Gamma^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таким образом, φ_i^{1*} устойчиво, а φ_i^{2*} неустойчиво. При вариации параметров эти состояния равновесия исчезают одновременно через бифуркацию «двукратное равновесие». Поскольку переменная φ_i периодична с периодом 2π , то при $|\Gamma| < 1$ каждый осциллятор системы (4.1) имеет восемь состояний равновесия, четыре из которых устойчивы.

Далее, используем континуальный предел. Поскольку каждая фаза φ_i имеет четыре устойчивых состояния равновесия с периодом длиной $\frac{\pi}{2}$, для сети (4.1) есть четыре группы устойчивых стационарных фаз вблизи $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$. Как и в случае системы (2.1), рассмотрим бимодальное распределение начальных фаз с параметром асимметрии η :

$$f(\varphi_0) = \eta \delta(\varphi_0) + (1 - \eta) \delta(\varphi_0 - \pi), \quad (4.7)$$

и в стационарном состоянии получим распределение по фазам

$$f(\varphi) = \eta \delta(\varphi - \varphi^{1*}) + (1 - \eta) \delta(\varphi - \varphi^{1*} - \pi), \quad (4.8)$$

где φ^{1*} определяется выражением (4.5) без индекса i для φ и ω . Так как распределение (4.8) совпадает с распределением (2.9), то выражения для первого и второго параметров порядка в стационарном состоянии системы (4.1) определяются как (2.10). После взятия интегралов в (2.10) получим выражения для первого и второго параметров порядка в системе (4.1):

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{(2\eta - 1)\Lambda R_2^2}{2\Delta} \\
&\times \left\{ \frac{1}{3} \sin \left[\frac{3}{4} \arccos \left(\frac{-2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) - \frac{\beta}{4} \right] \right. \\
&- \frac{1}{5} \sin \left[\frac{5}{4} \arccos \left(\frac{-2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{4} \right] \\
&- \frac{1}{3} \sin \left[\frac{3}{4} \arccos \left(\frac{2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) - \frac{\beta}{4} \right] \\
&\left. + \frac{1}{5} \sin \left[\frac{5}{4} \arccos \left(\frac{2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{4} \right] \right\}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{\Lambda R_2^2}{4\Delta} \left\{ \cos \left[-\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \right. \\
&+ \frac{1}{3} \cos \left[\frac{3}{2} \arccos \left(\frac{-2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \\
&- \cos \left[-\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \\
&\left. - \frac{1}{3} \cos \left[\frac{3}{2} \arccos \left(\frac{2\Delta + \Lambda \cos \beta}{\Lambda R_2^2} \right) + \frac{\beta}{2} \right] \right\}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Из выражений (4.9) и (4.10) следует, что синхронный режим с одним или двумя фазовыми кластерами, который соответствует $R_2 = 1$, существует в системе (4.1) при выполнении условий

$$\left| -2\frac{\Delta}{\Lambda} + \cos \beta \right| < 1, \quad \left| 2\frac{\Delta}{\Lambda} + \cos \beta \right| < 1. \tag{4.11}$$

Условия (4.11) выполняются в двух областях на плоскости параметров (β, Λ) , симметричных друг другу относительно прямой $\beta = \pi$. Для оценки области параметров, соответствующей синхронному режиму с одним или двумя фазовыми кластерами, подставим $R_2 = 1$ в правую часть (4.10) и наложим условие, чтобы правая часть (4.10) была больше, чем 0.99. Это ограничение оставляет из двух областей на плоскости (β, Λ) лишь ту, которая соответствует $\beta > \pi$. Тогда синхронный режим с одним или двумя фазовыми кластерами существует в области параметров, ограниченной кривыми

$$\Lambda = \frac{2\Delta}{1 + \cos \beta} \quad \text{при} \quad \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}, \tag{4.12}$$

$$\Lambda = \frac{2\Delta}{1 - \cos \beta} \quad \text{при} \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi, \tag{4.13}$$

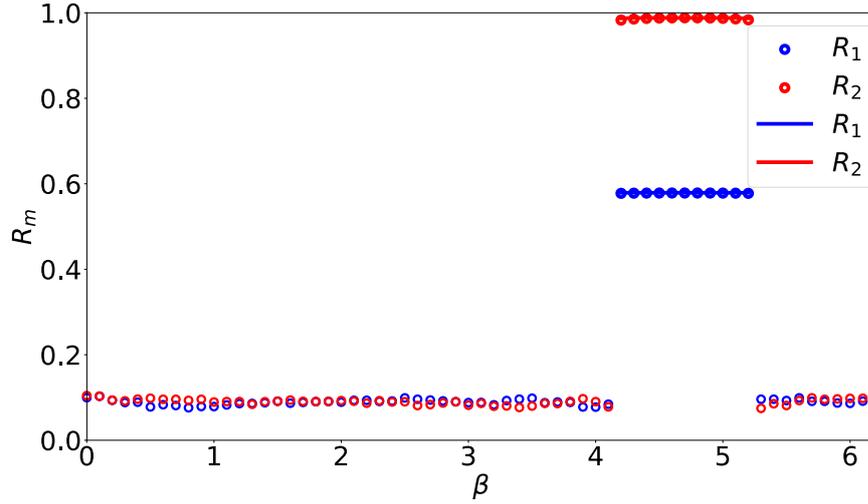


Рисунок 4.1 — Первый и второй параметры порядка R_1 и R_2 сети (4.1) в зависимости от параметра β при $\Lambda = 4$. Распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$.

выражения для которых следуют из (4.11).

Было проведено численное моделирование динамики сети (4.1) с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка и изучена зависимость первого и второго параметров порядка от параметров системы. На рис. 4.1 показаны зависимости первого и второго параметров порядка R_1 и R_2 от параметра адаптации β в системе (4.1) для бимодального распределения начальных фаз (4.7) с параметром асимметрии $\eta = 0.8$. Выколотыми точками показаны результаты численного моделирования, а сплошными линиями показаны теоретические кривые (4.9), (4.10). Точки ложатся на теоретические кривые, что означает выполнение приближения стационарных весов в синхронном режиме. Как и в системе (2.1), параметр ε влияет только на скорость выхода коэффициентов κ_{ijk} на стационарное значение без качественного изменения динамики сети (4.1), поэтому было выбрано значение $\varepsilon = 1$. Рисунок 4.1 демонстрирует, что существует диапазон по параметру β , в котором второй параметр порядка R_2 близок к единице, а R_1 принимает значения между нулём и единицей, внутри которого существуют два фазовых кластера, находящиеся в противофазе по отношению друг к другу. Интервал синхронизации достаточно широкий и включает в себя значение $\beta = \frac{3\pi}{2}$, которое в случае симплексных связей первого порядка соответствует правилу Хебба, а в случае симплексных связей второго порядка соответствует увеличению воздействия на i -ый осциллятор со стороны элементов с индексами j и k при уменьшении комбинации фаз

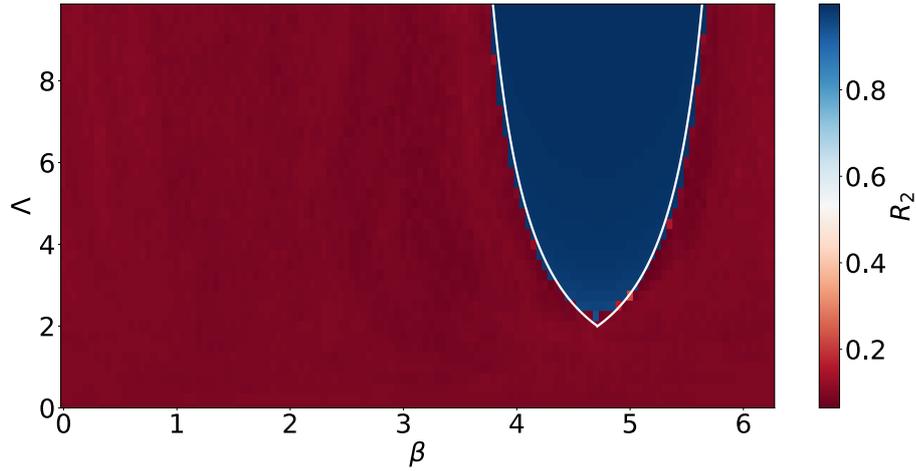


Рисунок 4.2 — Второй параметр порядка R_2 сети (4.1) в зависимости от параметров (β, Λ) . Распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$.

$(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i)$. При бимодальном распределении начальных фаз в сети (4.1), в отличие от сети с симплексными связями первого порядка (2.1), реализуются лишь два стационарных режима: синхронный с двумя фазовыми кластерами, когда $R_2 \approx 1$ и R_1 принимает значения между нулём и единицей, и асинхронный, когда $R_1 \approx R_2 \approx 0$. При выходе параметра β из интервала синхронизации происходит резкий скачок параметров порядка. В этом состоит фундаментальное отличие динамики сети с симплексными связями второго порядка (4.1) от сети с симплексными связями первого порядка (2.1), когда происходит постепенный переход между синхронным и асинхронным состояниями через состояния частичной синхронизации. Отметим, что границы интервала синхронизации, задаваемые выражениями (4.12), (4.13), не зависят от параметра η . По-видимому, этим характеризуются системы с адаптивными симплексными связями, поскольку, например, в работе [89] граничные значения также не зависели от η , а в работе [86], где исследовалась сеть со статическими симплексными связями, они зависели от значения параметра η . Кроме того, как и в случае системы (2.1), параметр η входит в выражение для R_1 (4.9) линейно, влияя на высоту плато в синхронном состоянии, и не влияет на R_2 , так как при бимодальном распределении начальных фаз в синхронном режиме сети (4.1) реализуются два фазовых кластера.

На рис. 4.2 показана зависимость второго параметра порядка от параметров (β, Λ) в системе (4.1) для бимодального распределения начальных фаз (4.7) с параметром асимметрии $\eta = 0.8$. В области, показанной синим цветом,

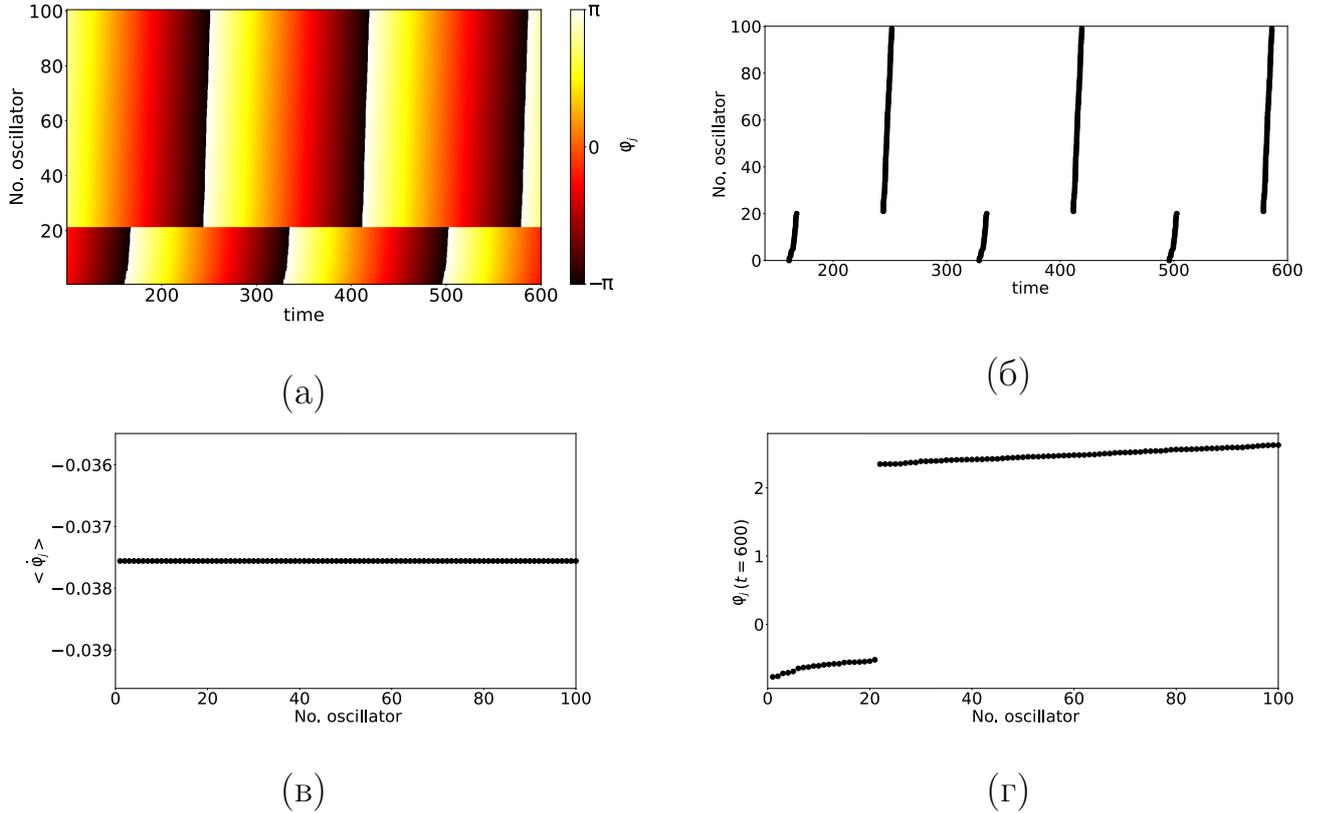


Рисунок 4.3 — Синхронный режим с двумя фазовыми кластерами в сети (4.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 600$. Распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$. Параметры: $\beta = 5$, $\Lambda = 4$

выполняется $R_2 \approx 1$ и реализуется синхронный режим с двумя фазовыми кластерами. В области, показанной красным цветом, выполняется $R_2 \approx 0$ и реализуется асинхронный режим. Область синхронного режима ограничена белыми кривыми, определёнными выражениями (4.12), (4.13), на которых происходит резкий скачок параметров порядка. Таким образом, скачкообразный переход от синхронного состояния к асинхронному происходит в системе (4.1) как при вариации параметра адаптации связей β , так и при вариации параметра силы связи Λ . Порог синхронизации $\Lambda = 2\Delta$ находится из условий минимума функций (4.12), (4.13). Ниже порога синхронизации синхронных состояний нет, а с ростом параметра Λ от нуля появляется область параметров, соответствующая синхронному режиму с двумя фазовыми кластерами, которая постепенно увеличивается, достигая $\beta \in (\pi, 2\pi)$ при больших Λ .

На рис. 4.3 приведена иллюстрация синхронного режима сети (4.1) с двумя фазовыми кластерами в случае бимодального распределения начальных

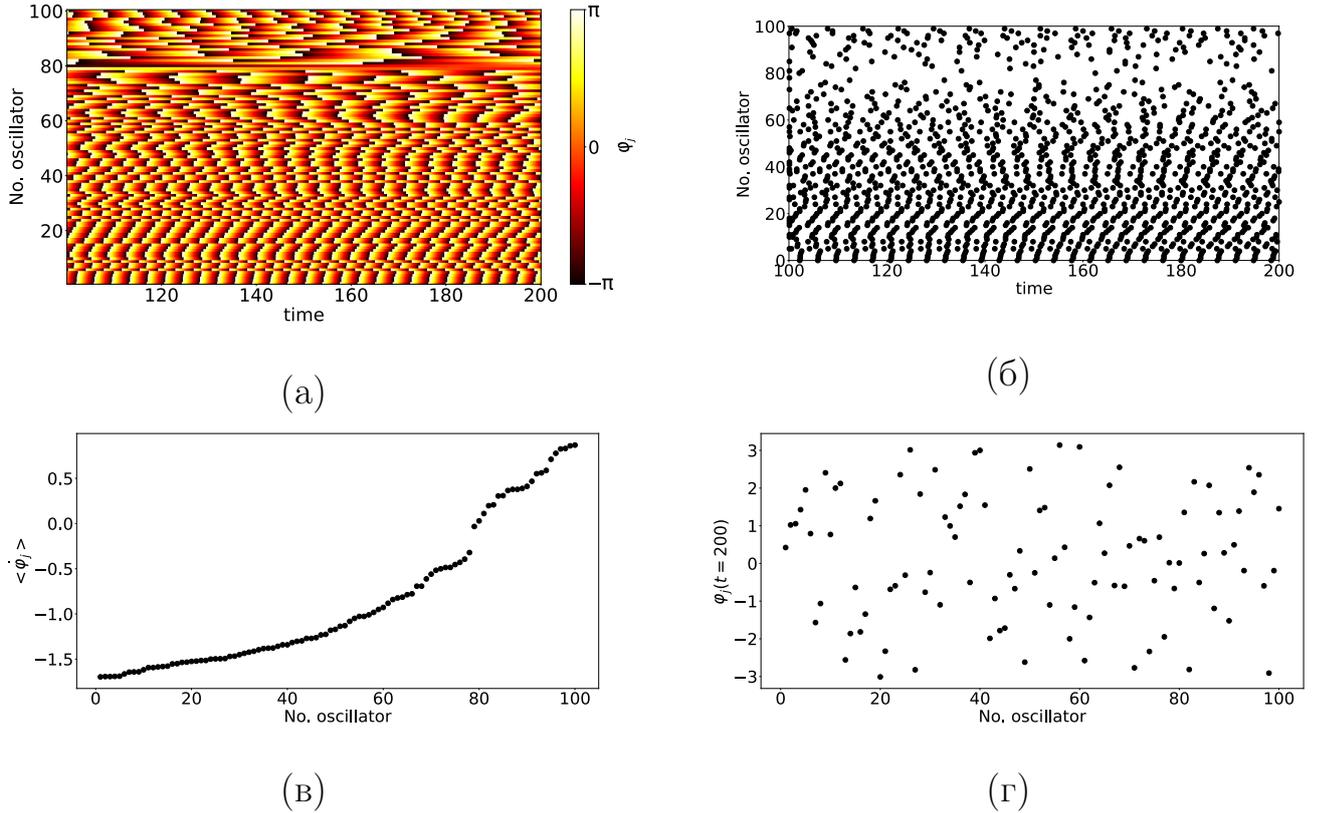


Рисунок 4.4 — Асинхронный режим сети (4.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 200$. Распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$. Параметры: $\beta = 0$, $\Lambda = 4$

фаз (4.7) при $\eta = 0.8$. Как и в случае системы (2.1), осцилляторы переупорядочивались сначала по возрастанию их средних по времени частот, а затем по возрастанию фаз внутри каждого фазового кластера. На рис. 4.3а показана пространственно-временная динамика фаз, когда реализуются два фазовых кластера в виде бегущей волны, находящихся в противофазе по отношению друг к другу. На рис. 4.3б показана спайковая активность элементов сети (4.1). В синхронном режиме сети (4.1) элементы внутри фазовых кластеров генерируют спайки практически одновременно. На рис. (4.3)в показано, что средние по времени частоты осцилляторов в синхронном режиме одинаковы. Рисунок 4.3г демонстрирует, что две линии, соответствующие двум фазовым кластерам, имеют одинаковый наклон на мгновенном снимке распределения фаз, а разность фаз между соседними элементами практически одинакова, что соответствует бегущей волне.

Рисунок 4.4 демонстрирует асинхронный режим сети (4.1) в случае бимодального распределения начальных фаз (2.8) при $\eta = 0.8$. В этом случае в

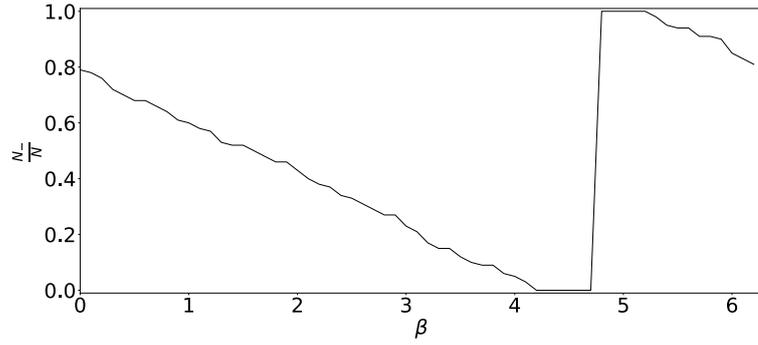


Рисунок 4.5 — Доля осцилляторов сети (4.1) в зависимости от параметра β для распределения начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$. $\Lambda = 4$

сети реализуется пространственно-временной беспорядок, когда частоты осцилляторов различны, фазы на мгновенных снимках случайны, и элементы сети генерируют спайки случайным образом.

Как следует из рис. 4.4в, средние по времени частоты осцилляторов принимают как положительные, так и отрицательные значения. На рис. 4.5 показана зависимость доли осцилляторов с отрицательными частотами от параметра β . Эта доля меняется в зависимости от значения параметра β , и интервал синхронизации разделён пополам — в одной части общая частота положительна, а в другой она отрицательна. При этом в середине интервала $\beta = \frac{3\pi}{2}$ общая частота осцилляторов близка к нулю.

Поскольку в системе (4.1) есть четыре группы устойчивых стационарных фаз, в зависимости от начальных условий фазы стремятся к одному из четырёх стационарных значений, поэтому минимальное число фазовых кластеров равно одному, а максимальное равно четырём. Например, если взять распределение начальных фаз вида

$$f(\varphi_0) = \frac{\eta}{2}\delta(\varphi_0) + \left(\frac{1-\eta}{2}\right)\delta\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{1-\eta}{2}\right)\delta\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\eta}{2}\delta(\varphi_0 - \pi), \quad (4.14)$$

в системе (4.1) при определённых значениях параметров реализуется синхронный режим с четырьмя фазовыми кластерами в виде бегущих волн, где фазы различных кластеров сдвинуты друг относительно друга на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.6). Если в распределении (4.14) положить равным нулю одно из слагаемых с пересчётом вероятностей, в сети (4.1) при определённых параметрах реализуется синхронный режим с тремя кластерами. Отметим, что в синхронном режиме для всех осцилляторов должно выполняться условие существования стационарных фаз

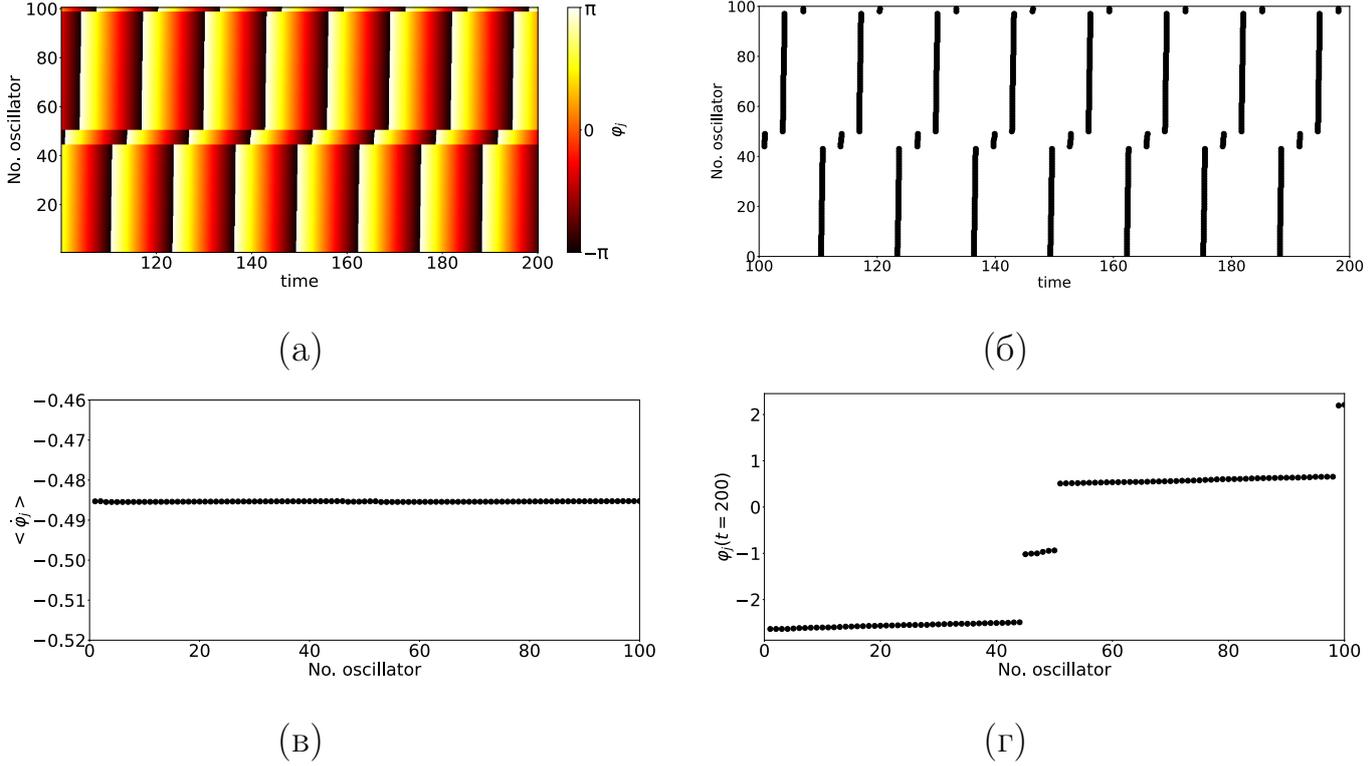


Рисунок 4.6 — Синхронный режим с четырьмя фазовыми кластерами в сети (4.1). (а) Пространственно-временная динамика фаз; (б) спайковая активность; (в) средние по времени частоты осцилляторов; (г) распределение фаз в момент времени $t = 200$. Распределение начальных фаз (4.14) при $\eta = 0.9$. Параметры:

$$\beta = 5, \Lambda = 10$$

$|\Gamma| < 1$, откуда следует, что второй параметр порядка R_2 должен быть отличен от нуля и близок к единице. Следовательно, для реализации трёх или четырёх фазовых кластеров распределение начальных фаз должно подбираться таким образом, чтобы большая часть осцилляторов в стационарном состоянии находилась в двух крупных кластерах, а меньшая часть находилась в одном или двух кластерах гораздо меньшего размера. Этого можно достичь, если выбирать параметр η в распределении (4.14) близким к единице. Для распределения (4.14) аналогично находятся выражения для параметров порядка, включая третий и четвёртый параметры порядка. Как и в случае бимодального распределения (4.8), они также имеют резкий скачок при выходе параметров адаптации β и силы связи Λ из области, соответствующей синхронному режиму.

Установлено, что представленные результаты не изменяются при распределении начальных фаз более общего вида: численное моделирование показало, что при равномерном распределении начальных фаз в промежутках $\varphi_i \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ и $\varphi_i \in (\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ динамика системы качественно не изменится по

сравнению с бимодальным начальным распределением (4.7). Это объясняется тем, что в этом случае начальные условия по-прежнему распределены вблизи устойчивых состояний равновесия, и выполняется условие стационарного распределения фаз (4.8), для которого были рассчитаны теоретические значения параметров порядка R_1 , R_2 .

4.3 Переходные режимы

Рассмотрим процесс десинхронизации в сети (2.1) в случае бимодального распределения начальных фаз (2.8). Из условия $|\Gamma| = 1$ выводится выражение для параметра β , при котором стационарные фазы осциллятора с индексом i теряют устойчивость:

$$\beta_{left} = 2\pi - \arccos \left[\frac{2}{\Lambda} \left(\omega_i - \frac{\Lambda R_2^2}{2} \right) \right], \quad (4.15)$$

$$\beta_{right} = 2\pi - \arccos \left[\frac{2}{\Lambda} \left(\omega_i + \frac{\Lambda R_2^2}{2} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Эти бифуркационные значения параметра β для всех собственных частот сети ω_i показаны на рис. 4.7, где интервал синхронизации сети расположен между двумя вертикальными пунктирными линиями. Отметим, что на рис. 4.7 часть собственных частот не показана, поскольку эти собственные частоты не удовлетворяют области определения арккосинуса. Ближе всего к границам интервала синхронизации оказываются самые высокочастотные осцилляторы: осциллятор с наибольшей положительной собственной частотой на левой границе интервала синхронизации и осциллятор с наименьшей отрицательной собственной частотой на правой границе. Поскольку пороги устойчивости самых высокочастотных осцилляторов совпадают с границами интервала синхронизации всей сети, это означает, что процесс десинхронизации начинается именно с них. Для иллюстрации процесса десинхронизации было выбрано значение параметра β вне интервала синхронизации, но вблизи его левой границы: $\beta = 4.15$. При этом значении параметра β осцилляторы сначала синхронизируются, но затем все осцилляторы сети один за другим отходит от синхронной группы, начиная с осциллятора с наибольшей собственной частотой и затем иерархически по принципу убывания собственных частот. Этот процесс проиллюстрирован

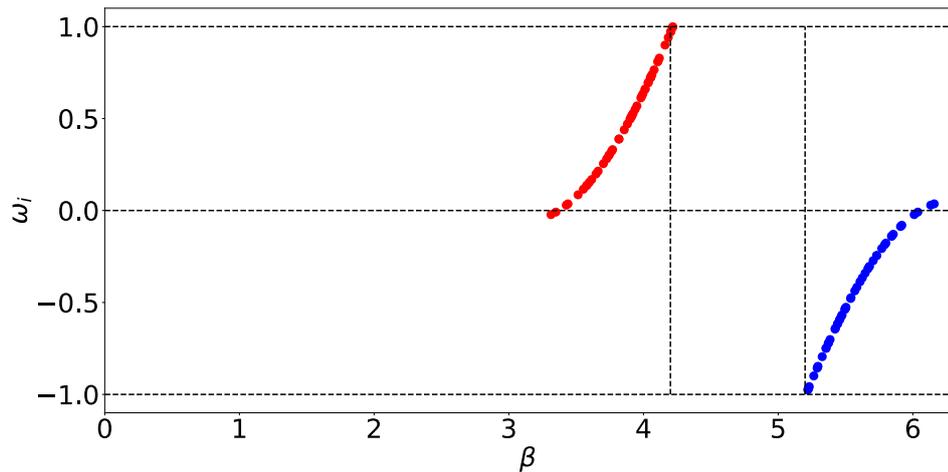


Рисунок 4.7 — Зависимость пороговых значений параметра β от собственных частот осцилляторов ω_i при $R_2 = 0.987$, что соответствует синхронному режиму системы (4.1). Красные точки соответствуют левой границе интервала синхронизации (4.15), синие точки соответствуют правой границе (4.16). Интервал синхронизации расположен между двумя вертикальными пунктирными линиями; горизонтальными пунктирными линиями показаны границы равномерного распределения собственных частот $\omega_i = \pm\Delta$ и значение $\omega_i = 0$. $\Lambda = 4$

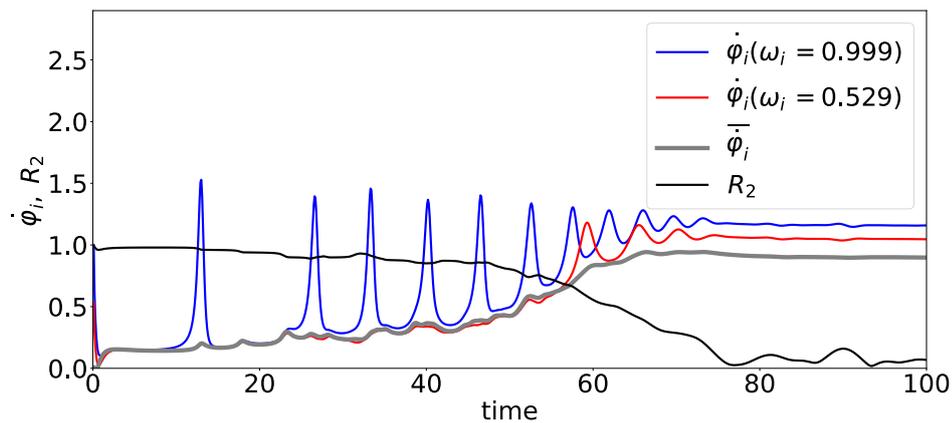


Рисунок 4.8 — Временные зависимости частоты осциллятора с наибольшей собственной частотой сети (синий), осциллятора с 25-ой по убыванию собственной частотой (красный), средней по ансамблю частоты сети (серый) и второго параметра порядка R_2 (чёрный) во время процесса десинхронизации. $\beta = 4.15$, $\Lambda = 4$, распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$

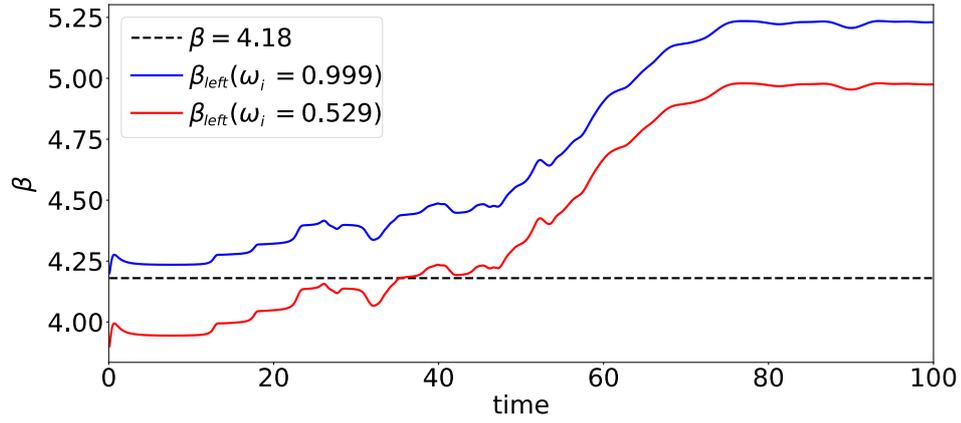


Рисунок 4.9 — Временные зависимости пороговых значений β_{left} для осциллятора с наибольшей собственной частотой (синий) и для осциллятора с 25-ой по убыванию собственной частотой (красный). Пунктирной прямой показана граница интервала синхронизации сети (4.1). $\beta = 4.15$, $\Lambda = 4$, распределение начальных фаз (4.7) при $\eta = 0.8$

на рис. 4.8, где показаны временные зависимости частоты самого высокочастотного осциллятора, 25-го по убыванию собственной частоты осциллятора, средней частоты сети и второго параметра порядка. Когда первый, самый высокочастотный осциллятор отделяется от синхронной группы, второй параметр порядка уменьшается. Согласно формуле (4.15), это вызывает сдвиг бифуркационных значений β всех остальных осцилляторов, поэтому второй осциллятор, находящийся теперь ближе всех к границе интервала синхронизации, также пересекает её и отделяется от синхронной группы. И далее иерархически все осцилляторы сети отделяются от синхронной группы ввиду того, что их пороги устойчивости сдвигаются во времени, что проиллюстрировано на рис. 4.9. Даже несмотря на то, что некоторые из них временно снова присоединяются к синхронной группе, процесс десинхронизации уже запущен и уже ведёт к полному исчезновению синхронной группы. Таким образом, в сети (4.1) при потере устойчивости состояний равновесия одним осциллятором происходит лавинообразная десинхронизация всей сети. Отметим, что на правой границе интервала синхронизации процесс десинхронизации происходит аналогичным образом.

4.4 Выводы по четвёртой главе

В этой главе была изучена динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка. Исследовано совместное влияние параметра адаптации и силы связи на динамику системы. Продемонстрировано, что, в отличие от случая симплексных связей первого порядка, в сети реализуются только два стационарных режима: синхронный или асинхронный. При этом переход между ними происходит резко, без каких-либо промежуточных состояний, и сопровождается скачком параметров порядка. Границы интервала синхронизации при этом не зависят от параметра асимметрии распределения начальных фаз. Синхронный режим реализуется в широком диапазоне правил адаптации, и существует порог по параметру силы связи. Процесс десинхронизации сети происходит иерархически, как и в случае симплексных связей первого порядка (2.1), однако в случае симплексных связей второго порядка потеря устойчивости стационарных фаз одним осциллятором приводит к потере устойчивости синхронного состояния всей сети. Установлено, что, в отличие от случая симплексных связей первого порядка (2.1), когда в синхронном режиме реализуются два фазовых кластера, максимальное число фазовых кластеров в сети (4.1) равно четырём.

В приложении Б эффекты синхронизации в коэволюционных сетях осцилляторов Курамото (2.1) и (4.1) сопоставлены с некоторыми наблюдаемыми в задачах нейродинамики сложными явлениями.

Приведённые в этой главе результаты опубликованы в статье [A7] и тезисах доклада [A19].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработаны методы построения инвариантных многообразий седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера и установления их пересечения, методы построения обратимого ядра, методика выделения когерентной части химерного состояния, методы изучения процесса разрушения синхронного режима в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков.
2. Выделен класс функций адаптации, соответствующих режиму синхронизации сетей неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядков. Показано, что разрушение синхронного режима происходит по-разному для сетей с различными порядками симплексных связей. Определены закономерности формирования режимов синхронизации и десинхронизации.
3. Показана принципиальная возможность реализации смешанной динамики в физическом эксперименте. Предложена система с дискретным временем, на основе которой реализован генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики. Установлено, что спектральные характеристики его колебаний в режиме третьего типа хаоса отличаются от характеристик шумоподобных колебаний в случае классического диссипативного хаоса.
4. Установлено, что в случае третьего типа хаоса распределение межпайковых интервалов элементов нейронного ансамбля с адаптивными симплексными связями второго порядка становится существенно более широким по сравнению со случаем диссипативного хаоса.
5. Показано, что установленные свойства коэволюционных ансамблей осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядков позволяют описать возможные механизмы ряда сложных явлений в нейродинамике.

В заключение автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю, Владимиру Исааковичу Некоркину, за постановку интересных задач, позволивших автору познакомиться с передовыми направ-

лениями в нелинейной науке, научное руководство на протяжении всего исследования и значимый вклад в профессиональное становление. Автор благодарит своих соавторов Дмитрия Владимировича Касаткина и Дмитрия Сергеевича Щапина за плодотворное сотрудничество, а также сотрудников отдела нелинейной динамики ИПФ РАН за доброжелательную и тёплую рабочую атмосферу.

Список литературы

1. *Winfree A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // *Journal of Theoretical Biology*. — 1967. — Vol. 16, no. 1. — P. 15—42.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag. — 1975. — P. 420—422.
3. Adaptive dynamical networks / R. Berner [et al.] // *Physics Reports*. — 2023. — Vol. 1031. — P. 1—59.
4. The structure and dynamics of networks with higher order interactions / S. Boccaletti [et al.] // *Physics Reports*. — 2023. — Vol. 1018. — P. 1—64.
5. Homological Scaffolds of brain functional networks / G. Petri [et al.] // *J. R. Soc. Interface*. — 2014. — Vol. 11, no. 101. — P. 20140873.
6. Cliques and cavities in the human connectome / A. Sizemore [et al.] // *J. Comp. Neurosci*. — 2018. — Vol. 44, no. 1. — P. 115—145.
7. *Estrada E., Ross G.* Centralities in simplicial complexes. Applications to protein interaction networks // *J. Theoret. Biol*. — 2018. — Vol. 438. — P. 46—60.
8. Emergent hypernetworks in weakly coupled oscillators / E. Nijholt [et al.] // *Nature Communications*. — 2022. — Vol. 13, no. 1.
9. *Van der Pol B., Van der Mark J.* Frequency Demultiplication // *Nature*. — 1927. — Vol. 120, no. 3019. — P. 363—364.
10. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением // *Доклады Академии наук СССР*. — 1978. — Т. 239, вып. 2. — С. 301—304.
11. *Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // *Радиотехника и электроника*. — 1980. — Т. 25, вып. 2. — С. 336.

12. *Кислов В. Я., Дмитриев А. С.* Стохастические колебания в радиотехнических и электронных системах // Проблемы современной радиотехники и электроники. — М., 1983. — С. 193—212.
13. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е.* Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. — 1982. — Вып. 10. — С. 1972—1978.
14. *Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T.* The Double Scroll Family // IEEE transactionson circuitsand system. — 1986. — Vol. CAS—33, issue 11. — P. 1073—1118.
15. *Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24, вып. 6. — С. 1118—1130.
16. *Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе «электронный пучок – обратная электромагнитная волна» // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29, вып. 3. — С. 180—184.
17. *Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П.* Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, — 1981. — С. 101.
18. Генерация хаоса / А. С. Дмитриев [и др.] ; под ред. А. С. Дмитриева. — Москва: Техносфера, 2012. — С. 424.
19. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трёх типах динамики и понятии аттрактора // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 2017. — Т. 297, № 1. — С. 133—157.
20. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 5. — P. 521—538.
21. *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O.* Dynamics of the Suslov Problem in a Gravitational Field: Reversal and Strange Attractors // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — Vol. 20, no. 5. — P. 605—626.

22. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators / A. S. Gonchenko [et al.] // *Physica D.* — 2017. — Vol. 350. — P. 45—57.
23. *Kazakov A. O.* Merger of a Hénon-like attractor with a Hénon-like repeller in a model of vortex dynamics // *Chaos.* — 2020. — Vol. 30, no. 1. — P. 011105.
24. *Doran G.* PyEMD: Earth mover's distance for Python. — 2014. — URL: <https://github.com/garydoranjr/pyemd>.
25. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence.* — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
26. The Kuramoto model in complex networks / F. A. Rodrigues [et al.] // *Physics Reports.* — 2016. — Vol. 610. — P. 1—98.
27. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena / J. A. Acebrón [et al.] // *Reviews of Modern Physics.* — 2005. — Vol. 77, no. 1. — P. 137—185.
28. *Gross T., Blasius B.* Adaptive coevolutionary networks: a review // *Journal of The Royal Society Interface.* — 2007. — Vol. 5, no. 20. — P. 259—271.
29. *Gross T., Sayama H.* *Adaptive Networks: Theory, Models and Applications.* — Springer Berlin Heidelberg, 2009.
30. *Масленников О. В., Некоркин В. И.* Адаптивные динамические сети // *Успехи физических наук (УФН).* — 2017. — Т. 187, № 7. — С. 745—756.
31. *Berner R., Yanchuk S., Schöll E.* What adaptive neuronal networks teach us about power grids // *Physical Review E.* — 2021. — Vol. 103. — P. 042315.
32. *Kuehn C.* Multiscale dynamics of an adaptive catalytic network // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* — 2019. — Vol. 14, no. 4. — P. 402.
33. *Jain S., Krishna S.* Graph theory and the evolution of autocatalytic networks. — 11/2002.
34. *Gross T., D'Lima C. J. D., Blasius B.* Epidemic Dynamics on an Adaptive Network // *Physical Review Letters.* — 2006. — Vol. 96, no. 20.

35. Modeling Tumor Disease and Sepsis by Networks of Adaptively Coupled Phase Oscillators / J. Sawicki [et al.] // *Frontiers in Network Physiology*. — 2022. — Vol. 1. — P. 730385.
36. Critical Parameters in Dynamic Network Modeling of Sepsis / R. Berner [et al.] // *Frontiers in Network Physiology*. — 2022. — Vol. 2.
37. *Alexandersen C. G., Goriely A., Bick C.* Neuronal activity induces symmetry breaking in neurodegenerative disease spreading // bioRxiv preprint. — 2023. — P. 083134. — URL: <https://doi.org/10.1101/2023.10.02.560495>.
38. *Horstmeyer L., Kuehn C.* Adaptive voter model on simplicial complexes // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 101. — P. 022305.
39. *Antoniades D., Dovrolis C.* Co-evolutionary dynamics in social networks: a case study of Twitter // *Computational Social Networks*. — 2015. — Vol. 2, no. 1.
40. *Aoki T., Aoyagi T.* Co-evolution of Phases and Connection Strengths in a Network of Phase Oscillators // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102, no. 3.
41. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, no. 066109.
42. Noise-enhanced coupling between two oscillators with long-term plasticity / L. Lücken [et al.] // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93. — P. 032210.
43. Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом — итоги «десятилетия» / Г. Н. Борисюк [и др.] // *Успехи физических наук*. — 2002. — Т. 172, № 10. — С. 1189—1214.
44. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity / Y. L. Maistrenko [et al.] // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75, no. 6.
45. *Takahashi Y. K., Kori H., Masuda N.* Self-organization of feed-forward structure and entrainment in excitatory neural networks with spike-timing-dependent plasticity // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 79, no. 5.
46. *Picallo C. B., Riecke H.* Adaptive oscillator networks with conserved overall coupling: Sequential firing and near-synchronized states // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 83, no. 3.

47. *Ren Q., Zhao J.* Adaptive coupling and enhanced synchronization in coupled phase oscillators // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 76, no. 1.
48. *Hou J.-L., Zhao J.* The order-oscillation induced by negative feedback in the adaptive scheme // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 7. — P. 929—932.
49. The adaptive coupling scheme and the heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks / Q. Ren [et al.] // *Physics Letters A*. — 2014. — Vol. 378, no. 3. — P. 139—146.
50. *Seliger P., Young S. C., Tsimring L. S.* Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 65, no. 4.
51. *Niyogi R. K., English L. Q.* Learning-rate-dependent clustering and self-development in a network of coupled phase oscillators // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 80, no. 6.
52. *Wikipedia, the free encyclopedia.* Time reversibility. — 2024. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Time_reversibility.
53. *Lamb J. S. W., Roberts J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1998. — Vol. 112, no. 1/2. — P. 1—39.
54. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика фазовых осцилляторов с пластичными связями // *Известия вузов. Радиофизика*. — 2015. — Т. 58, № 11. — С. 981—997.
55. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory / G. Benettin [et al.] // *Meccanica*. — 1980. — Vol. 15, no. 1. — P. 9—20.
56. *Kuznetsov S. P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. — Springer Berlin, Heidelberg, 2012.
57. *Kuehn C.* Multiple time scale dynamics. — Applied Mathematical Sciences, Springer, 2015.
58. Asymptotic methods in singularly perturbed systems / E. F. Mishchenko [et al.]. — Monographs in contemporary mathematics, Consultants Bureau, New York, 1994.

59. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana university mathematics journal. — 1971. — Vol. 21. — P. 193—226.
60. *Fenichel N.* Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations // Journal of differential equations. — 1979. — Vol. 31, no. 1. — P. 53—98.
61. *Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A.* Kantorovich–Rubinstein–Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller // Chaos. — 2020. — Vol. 30, no. 7. — P. 073114.
62. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика сети взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2015. — Т. 23, № 4. — С. 58—70.
63. *Nekorkin V. I., Kasatkin D. V.* Dynamics of a network of phase oscillators with plastic couplings // AIP Conference Proceedings. Vol. 1738. — 2016. — P. 210010.
64. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings / D. V. Kasatkin [et al.] // Physical Review E. — 2017. — Vol. 96, no. 6.
65. *Berner R., Schöll E., Yanchuk S.* Multiclusters in Networks of Adaptively Coupled Phase Oscillators // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2019. — Vol. 18, no. 4. — P. 2227—2266.
66. Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators / R. Berner [et al.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Vol. 29, no. 10.
67. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // Nonlinearity. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — R67—R87.
68. *Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T.* Chimera states on the route from coherence to rotating waves // Physical Review E. — 2015. — Vol. 91, no. 2.
69. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // Physical Review E. — 2014. — Vol. 89, no. 6.

70. Unbalanced clustering and solitary states in coupled excitable systems / I. Franović [et al.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 1.
71. Desynchronization Transitions in Adaptive Networks / R. Berner [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2021. — Vol. 126, no. 2.
72. Insights into brain architectures from the homological Scaffolds of functional connectivity networks / L.-D. Lord [et al.] // *Front. Syst. Neurosci.* — 2016. — Vol. 10. — P. 85.
73. Persistent brain network homology from the perspective of dendrogram / H. Lee [et al.] // *IEEE Trans. Med. Imaging*. — 2012. — Vol. 31, no. 12. — P. 2267—2277.
74. Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics / F. Battiston [et al.] // *Physics Reports*. — 2020. — Vol. 874. — P. 1—92.
75. *Giusti C., Ghrist R., Bassett D. S.* Two's company, three (or more) is a simplex: Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data // *Journal of Computational Neuroscience*. — 2016. — Vol. 41, no. 1. — P. 1—14.
76. The physics of higher-order interactions in complex systems / F. Battiston [et al.] // *Nature Physics*. — 2021. — Oct. — Vol. 17, no. 10. — P. 1093—1098.
77. *Akhtiamov D., Cohn A. G., Dabaghian Y.* Spatial representability of neuronal activity // *Scientific Reports*. — 2021. — Vol. 11, no. 1.
78. *Masulli P., Villa A. E. P.* The topology of the directed clique complex as a network invariant // *SpringerPlus*. — 2016. — Март. — Т. 5, № 1.
79. *Grines E. A., Kazakov A. O., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 9. — P. 093105.
80. Three dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators / N. V. Stankevich [et al.] // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Vol. 15, no. 11. — P. 111001.

81. *Izhikevich E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. — The MIT Press, 2007. — P. 505.
82. *Lucas M., Cencetti G., Battiston F.* Multiorder Laplacian for synchronization in higher-order networks // *Physical Review Research*. — 2020. — T. 2, № 3.
83. Stability of synchronization in simplicial complexes / L. V. Gambuzza [et al.] // *Nature Communications*. — 2021. — Vol. 12, no. 1.
84. Higher-order interactions can better optimize network synchronization / P. S. Skardal [и др.] // *Physical Review Research*. — 2021. — T. 3, № 4.
85. *Berner R., Lu A., Sokolov I. M.* Synchronization transitions in Kuramoto networks with higher-mode interaction // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 7.
86. *Skardal P. S., Arenas A.* Abrupt Desynchronization and Extensive Multistability in Globally Coupled Oscillator Simplexes // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 122, no. 24.
87. *Skardal P. S., Arenas A.* Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching // *Communications Physics*. — 2020. — Vol. 3, no. 1.
88. *Anwar M. S., Ghosh D.* Synchronization in Temporal Simplicial Complexes // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2023. — Vol. 22, no. 3. — P. 2054—2081.
89. *Kachhvah A. D., Jalan S.* Hebbian plasticity rules abrupt desynchronization in pure simplicial complexes // *New Journal of Physics*. — 2022. — Vol. 24. — P. 052002.
90. *Uhlhaas P. J., Singer W.* Neural Synchrony in Brain Disorders: Relevance for Cognitive Dysfunctions and Pathophysiology // *Neuron*. — 2006. — Vol. 52, no. 1. — P. 155—168.
91. Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status / P. J. Uhlhaas [et al.] // *Frontiers in Integrative Neuroscience*. — 2009. — Vol. 3.
92. *Wang X.-J.* Neurophysiological and Computational Principles of Cortical Rhythms in Cognition // *Physiological Reviews*. — 2010. — Vol. 90, no. 3. — P. 1195—1268.

93. *Fell J., Armacher N.* The role of phase synchronization in memory processes // *Nature Reviews Neuroscience*. — 2011. — Vol. 12, no. 2. — P. 105—118.
94. *Odor Encoding as an Active, Dynamical Process: Experiments, Computation, and Theory / G. Laurent [et al.]* // *Annual Review of Neuroscience*. — 2001. — Vol. 24, no. 1. — P. 263—297.
95. *Buzsaki G., Draguhn A.* Neuronal Oscillations in Cortical Networks // *Science*. — 2004. — Vol. 304, no. 5679. — P. 1926—1929.
96. *Haken H., Kelso J. A. S., Bunz H.* A theoretical model of phase transitions in human hand movements // *Biological Cybernetics*. — 1985. — Vol. 51, no. 5. — P. 347—356.
97. *Neurons, networks and motor behavior / S. Grillner [et al.]*. — Cambridge: MIT Press, 1999.
98. *Titcombe M. S., Edwards R., Beuter A.* Mathematical modelling of Parkinsonian tremor // *Nonlinear Stud.* — 2004. — Vol. 11, issue 3. — P. 363—384.
99. *Bressler S. L.* Cortical Coordination Dynamics and the Disorganization Syndrome in Schizophrenia // *Neuropsychopharmacology*. — 2003. — Vol. 28, S1. — S35—S39.
100. *Kromer J. A., Khaledi-Nasab A., Tass P. A.* Impact of number of stimulation sites on long-lasting desynchronization effects of coordinated reset stimulation // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 8.
101. *Tass P. A., Hauptmann C., Popovych O. V.* Development of therapeutic brain stimulation techniques with methods from nonlinear dynamics and statistical physics // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 7. — P. 1889—1911.
102. *Milton J., Jung P.* *Epilepsy as a dynamic disease*. — Berlin: Springer, 2003.
103. *Genesis of epileptic interictal spikes. New knowledge of cortical feedback systems suggests a neurophysiological explanation of brief paroxysms / G. F. Ayala [et al.]* // *Brain Research*. — 1973. — Vol. 52. — P. 1—17.

104. All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures / R. G. Andrzejak [et al.] // *Scientific Reports*. — 2016. — Vol. 6, no. 1.
105. *Mukhametov L. M., Supin A. Y., Polyakova I. G.* Interhemispheric asymmetry of the electroencephalographic sleep patterns in dolphins // *Brain Research*. — 1977. — Vol. 134, no. 3. — P. 581—584.
106. *Rattenborg N. C., Amlaner C. J., Lima S. L.* Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep // *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. — 2000. — Vol. 24, no. 8. — P. 817—842.
107. *Laing C. R., Chow C. C.* Stationary Bumps in Networks of Spiking Neurons // *Neural Computation*. — 2001. — Vol. 13, no. 7. — P. 1473—1494.
108. *Somers D. C., Nelson S. B., Sur M.* An emergent model of orientation selectivity in cat visual cortical simple cells // *The Journal of Neuroscience*. — 1995. — Vol. 15, no. 8. — P. 5448—5465.
109. *Zhang K.* Representation of spatial orientation by the intrinsic dynamics of the head-direction cell ensemble: a theory // *The Journal of Neuroscience*. — 1996. — Vol. 16, no. 6. — P. 2112—2126.
110. *Camperi M., Wang X.-J.* A model of visuospatial working memory in prefrontal cortex: recurrent network and cellular bistability // *Journal of Computational Neuroscience*. — 1998. — T. 5, № 4. — C. 383—405.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, входящих в международные базы цитирования Web of Science и Scopus

- A1. *Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2021. — Т. 29, № 4. — С. 635—675.
- A2. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Vol. 29, no. 11. — P. 111102.
- A3. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Vol. 30, no. 5. — P. 051105.
- A4. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Vol. 31, no. 3. — P. 033102.
- A5. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The influence of nonisochronism on mixed dynamics in a system of two adaptively coupled rotators // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Vol. 169. — P. 113271.
- A6. *Shchapin D. S., Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* A chaotic oscillation generator based on mixed dynamics of adaptively coupled Kuramoto oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Vol. 166. — P. 112989.
- A7. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Adaptation rules inducing synchronization of heterogeneous Kuramoto oscillator network with triadic couplings // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2024. — Vol. 34, no. 2. — P. 023112.
- A8. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of adaptively coupled phase oscillators with higher-order interactions // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 19. — P. 4024.

В сборниках трудов конференций

- A9. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Динамика двух неидентичных фазовых осцилляторов с пластичными связями // Труды XXII научной конференции по радиоп физике, посвященной 100-летию Нижегородской радиолоборатории. — Нижний Новгород: ННГУ, 2018. — С. 202—205.
- A10. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Attractors and repellers in a system of two nonidentical phase oscillators with adaptive couplings // Book of Abstracts of the International Conference on Dynamical Systems “Shilnikov Workshop 2018”. — Nizhny Novgorod, 2018. — P. 16.
- A11. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Смешанная динамика в системе двух неидентичных фазовых осцилляторов с пластичными связями // 24 Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки): материалы докладов. — Нижний Новгород: НРЛ, 2019. — С. 87—90.
- A12. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Mixed dynamics in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // Book of Abstracts of the International Conference-School “Shilnikov Workshop 2020”. — Nizhny Novgorod, 2020. — P. 21.
- A13. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Третий тип хаоса в системе адаптивно связанных осцилляторов Курамото // Конференция международных математических центров мирового уровня. Программа и тезисы докладов. — ФТ «Сириус», 2021. — С. 195—196.
- A14. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Смешанная динамика в системе двух адаптивно связанных неизохронных ротаторов // XX научная школа «Нелинейные волны-2022». Тезисы докладов. — Нижний Новгород, 2022. — С. 96.
- A15. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Mixed dynamics in a system of two adaptively coupled nonisochronous Kuramoto oscillators // Book of Abstracts of the International Conference-School “Shilnikov Workshop 2022”. — Nizhny Novgorod, 2022. — P. 11.

- A16. *Емельянова А. А.* Смешанная динамика в системе адаптивно связанных фазовых осцилляторов // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов XVII Всероссийской молодёжной научно-инновационной школы. — Саров: ООО «Интерконтакт», 2023. — С. 323—324.
- A17. *Emelianova A. A.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled Kuramoto oscillators // Integrable Systems & Nonlinear Dynamics (ISND-2023) : Abstracts. — Yaroslavl: YarSU, 2023. — P. 46—47.
- A18. *Емельянова А. А.* Смешанная динамика в ансамблях адаптивно связанных фазовых осцилляторов // XXVIII Нижегородская сессия молодых ученых. — Издательство «Перо», 2023. — С. 309—310.
- A19. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Влияние правила адаптации на синхронизацию в сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXIII Международной конференции (Н. Новгород, 13–16 ноября 2023 г.). Под ред. проф. Д.В. Баландина. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2023. — С. 51—52.

Приложение А

Характеристики смешанной динамики в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото

Таблица 8 — Характеристики смешанной динамики в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото

	Система (1.6) $\{\alpha = 0.24,$ $\beta = 1.6,$ $\varepsilon = 0.01,$ $\gamma = 0.015\}$	Система (1.21) $\{\alpha = 0.24, \beta = 1.6,$ $\varepsilon = 0.01,$ $\gamma = 0.015,$ $\omega_0 = 0.5,$ $A = 0.003\}$	Система (1.26) $\{\alpha = 0.24, \beta = 1.6,$ $\varepsilon = 0.01,$ $\omega_1 = 1.015,$ $\omega_2 = 1, a = 0.2\}$	Система (3.1) $\{\alpha = 0.24,$ $\beta = 1.6,$ $\varepsilon = 0.01,$ $\omega_1 = 0.985,$ $\omega_2 = 1,$ $\omega_3 = 1.015,$ $\Lambda = 44.5\}$
dim	3	4	4	6
min l_{ar}	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-6}$
$KRWD$	0.45	не рассчитывалось	0.1	0.15
$\sum_j \lambda_j$	- 0.21	не рассчитывалось	- 0.32	- 0.0047
D_F^c	2.04	1.89	не рассчитывалось	1.03

Приложение Б

Синхронизация в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото в задачах нейродинамики

Режимы, наблюдаемые при моделировании коэволюционных сетей осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями первого и второго порядков (2.1) и (4.1), согласуются с данными нейрофизиологических экспериментов и позволяют описать возможные механизмы ряда сложных явлений в нейродинамике. Синхронизация нейронных групп при альфа- и гамма-ритмах участвует в различных когнитивных функциях, таких как перцептивная группировка, перцептивная осведомленность, выбор стимула, сенсомоторная деятельность, рабочая память, связывание признаков, восприятие запахов, также она необходима для формирования движений и паттернов [90–97]. С другой стороны, наличие или отсутствие синхронизации характеризует некоторые паталогические виды нейронной активности: болезни Паркинсона и Альцгеймера характеризуются чрезмерной синхронизацией поврежденных нейронов [37; 98–101], а во время эпилептического припадка нейроны некоторых областей мозга сильно синхронизированы, в то время как другие десинхронизированы [102–104]. Состояния частичной синхронизации также возникают во время однополушарного сна у некоторых морских млекопитающих и птиц [105; 106]. Кроме того, известно, что через состояния частичной синхронизации разрушаются локализованные состояния с высокой скоростью спайковой активности (bump states) [107], которые играют важную роль при выборе признаков в моделях зрительной системы [108], в системах направления головы [109] и рабочей памяти [110].

Таким образом, системы (2.1) и (4.1) могут быть полезны при моделировании некоторых нейронных ансамблей мозга. Согласно приведенным выше данным нейрофизиологических экспериментов, наблюдаемый в случае системы с симплексными связями первого порядка (2.1) процесс десинхронизации через состояния частичной синхронизации при вариации параметра адаптации можно трактовать как переход от нормальной нейронной активности к паталогической во время приступа эпилепсии или при нарушении работы зрительной системы, системы направления головы и рабочей памяти, а также как раз-

рушение двигательного паттерна. В то же время, наблюдаемый в системе с симплексными взаимодействиями второго порядка (4.1) резкий переход между двумя реализуемыми режимами можно трактовать как резкий переход от нормальной нейронной активности к патологической или как резкое разрушение двигательного паттерна.