

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
ФИЗИКИ ИМ. А.В. ГАПОНОВА-ГРЕХОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи

Артеменко Иван Игоревич

**ИОНИЗАЦИОННАЯ ИНИЦИАЦИЯ КАСКАДОВ, СПИНОВЫЕ И  
РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В СИЛЬНЫХ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ  
ПОЛЯХ**

1.3.9 — Физика плазмы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Неруш Евгений Николаевич

Нижний Новгород  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>КЭД эффекты высших порядков в процессах излучения и приближение эффективного постоянного поля</b>	<b>20</b>
2.1	Введение к главе . . . . .	20
2.2	Приближение постоянного магнитного поля в задаче об излучении заряженной частицы в лазерном поле . . . . .	21
2.2.1	Уравнения Больцмана и приближение Фоккера-Планка . . . . .	21
2.2.2	Приближение постоянного глобального поля в приближении Фоккера-Планка . . . . .	22
2.2.3	Численное моделирование уравнения Больцмана в постоянном магнитном поле . . . . .	24
2.2.4	ПГПП в приближении ФП и за его пределами: сравнение с РС моделированием . . . . .	27
2.2.5	Заключение к подглаве . . . . .	32
2.3	Учет показателя преломления в задаче об излучении заряженной частицы . . . . .	34
2.3.1	Синхронизм между волной и током в классической электродинамике . . . . .	34
2.3.2	Выражения для спектров излучения с учетом показателя преломления . . . . .	39
2.3.3	Время формирования излучения для синхротрон-Черенковского излучения . . . . .	44
2.3.4	Возможные экспериментальные наблюдения поляризации вакуума . . . . .	51
2.3.5	Заключение к подглаве . . . . .	57
<b>3</b>	<b>КЭД каскады в сильном лазерном поле</b>	<b>60</b>
3.1	Введение . . . . .	60
3.2	Ионизационная инициация КЭД каскадов . . . . .	60
3.2.1	Модель ионизации . . . . .	60
3.2.2	Численное моделирование ионизационных процессов . . . . .	71
3.2.3	Заключение и обсуждение результатов . . . . .	79

3.3	Вычисление скорости роста КЭД каскадов во вращающемся поле .	85
3.3.1	Кинетическая модель . . . . .	85
3.3.2	Динамика электронов и позитронов . . . . .	88
3.3.3	Скорость роста каскада . . . . .	90
3.3.4	Проверка и обсуждение результатов . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Динамика спина заряженных частиц в сильном лазерном поле</b>	<b>95</b>
4.1	Модель непрерывных радиационных потерь . . . . .	95
4.2	Спиновая динамика с учетом радиационных эффектов . . . . .	106
4.3	НРП модель для электрона в постоянном магнитном поле . . . . .	108
4.4	Численное моделирование спиновых и радиационных эффектов в сильных электромагнитных полях . . . . .	111
4.5	Сильно квантовый режим . . . . .	117
4.6	Обсуждение результатов . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>Список публикаций по диссертации</b>	<b>124</b>

# 1 Введение

## Актуальность темы диссертации

Данная диссертация посвящена исследованию процессов в сильных лазерных и плазменных полях, таких как ионизационная инициация квантовоэлектродинамических каскадов (КЭД каскадов), радиационные эффекты и особенности спиновой динамики лептонов. Явления, обсуждаемые в данной работе, представляют не только научный интерес, но также имеют и практическую значимость. В частности, понимание динамики спина заряженных частиц в условиях воздействия сильных лазерных полей может оказаться полезным в ситуациях, где необходимо создать пучки частиц с высокой степенью поляризации или же ускорить уже поляризованный электронный пучок с помощью лазерного поля, не теряя при этом поляризационных свойств. Используя лазеры на свободных электронах можно получать фотоны МэВ-ных энергий за счет нелинейного комптоновского рассеяния на установках HI $\gamma$ S [1] и NewSUBARU [2]. Несмотря на то, что теория рассеяния света на релятивистских электронах хорошо исследована теоретически, существует не так много экспериментов в этой области и многие теоретические модели все еще требуют экспериментальной проверки. Недавнее исследование силы реакции излучения в кристаллах показало, что есть разница между экспериментальными данными и формулами для квантового синхротронного излучения [3]. Это открытие сподвигло новое обсуждение теоретических моделей [4, 5]. Строгий анализ взаимодействия лазерного излучения с заряженными частицами очень сложен. Найти какие-либо радиационные характеристики можно либо для какого-то приближения, либо для узкого круга параметров. В данной работе было продемонстрировано, что конечные спектры электронов и фотонов можно вычислять считая, что пучок электронов распространяется как будто в постоянном магнитном поле. Такое приближение (приближение глобального постоянного поля, ПГПП) выгодно по двум причинам. Во-первых, этот подход может сделать теоретический анализ стохастического процесса излучения проще, чем в случае переменного лазерного поля. Во вторых, это позволяет вычислять спектры электронов и фотонов, используя более простые и быстрые численные схемы.

Для рассмотрения радиационных процессов и распада фотонов удобно ввести

следующий параметр:

$$\chi = \frac{\sqrt{-(F^{\mu\nu}p_\mu)^2}}{mcB_{cr}} = \frac{\gamma}{B_{cr}} \sqrt{\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)^2 - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}, \quad (1)$$

где  $F^{\mu\nu}$  это тензор электромагнитного поля,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  есть электрическое и магнитное поля,  $p_\mu$  это 4-вектор рассматриваемой частицы,  $\mathbf{v}$  есть скорость частицы,  $\gamma$  это Лоренц фактор,  $B_{cr} = m^2c^3/e\hbar \approx 4.41 \cdot 10^9$  Т есть критическое магнитное поле или поле Заутера-Швингера [6],  $m$  это масса электрона,  $c$  скорость света,  $\hbar$  это постоянная Планка,  $e$  есть величина элементарного заряда. Заметим, что данный параметр является Лоренц инвариантной величиной. Параметр  $\chi$  характеризует квантовость процесса, при  $\chi \ll 1$  для описания процессов в сильных полях достаточно классического описания, в противном случае нужен учет квантовой природы процессов. Для фотона можно ввести аналогичный параметр:

$$\varkappa = \frac{\hbar\sqrt{-(F^{\mu\nu}k_\mu)^2}}{mcB_{cr}} = \frac{\hbar\omega}{mc^2B_{cr}} \left| \mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{B} \right|, \quad (2)$$

где  $\hbar\omega$  есть энергия фотона, а  $\mathbf{k}$  его волновой вектор. Строгое описание процессов в квантовой области очень сложно, однако для случая сильных полей можно сделать несколько полезных упрощений. В данной работе будет использоваться подход к описанию радиационных эффектов, развитый в [7], называемый в литературе операторным методом Байера и Каткова. Суть этого подхода в следующем. При движении заряженной частицы в сильном электромагнитном поле квантовые эффекты можно разделить на два типа: квантование движения и эффект отдачи при излучении фотона. В случае  $\chi \sim 1$  энергия излученного фотона  $\hbar\omega \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  есть энергия электрона. Если  $\chi \gg 1$ , то энергия электрона после излучения  $\varepsilon_f \sim mc^2B_{cr}/B \ll \varepsilon$ , т.е. лептон теряет почти всю энергию. Таким образом, если выполняется условие  $B/B_{cr} \ll 1$  лептон остается ультрарелятивистским. В свою очередь квантованность движения лептона характеризуется величиной  $\hbar\omega_B/\varepsilon = B/(B_{cr}\gamma) \ll 1$ , где  $\omega_B$  – частота обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле  $B$ . Таким образом, можно пренебречь дискретизацией энергии электрона и учитывать только эффект отдачи (а также поляризационные эффекты, о которых пойдет речь дальше). Это означает, что при вычислении матричных элементов, учитываются только коммутационные соотношения между операторами фотона и лептона, а коммутационными соот-

ношениями между операторами для лептона можно пренебречь. Вычисленная таким образом вероятность в единицу времени излучения фотона с энергией  $\hbar\omega$  имеет следующий вид

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{1}{2}C_0 [w_0 + \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{w}_f \cdot \mathbf{S}_f], \quad (3)$$

где

$$w_0 = \frac{\xi^2 - 2\xi + 2}{1 - \xi} K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) - \text{Int}K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{w}_i = -\mathbf{e}_2 \xi K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_f = & -u K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) \mathbf{e}_2 + \\ & + \left[ 2K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) - \text{Int}K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) \right] \mathbf{S}_i + \\ & + \xi u \left[ K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) - \text{Int}K_{1/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) \right] (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{S}_i) \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\xi = \hbar\omega/\varepsilon$ ,  $u = \xi/(1 - \xi)$ ,  $\varepsilon = mc^2\gamma$  есть энергия электрона до излучения,  $\text{Int}K_{1/3}(x) = \int_x^\infty K_{1/3}(t)dt$ , и  $\chi$  определен уравнением (1). Векторы  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  определены в главе 4.2 и представляют из себя удобный для описания поляризованного вектора базис. Также будет использоваться просуммированная по конечным спином формула (3)

$$\frac{d\overline{W}}{d\xi} = C_0 [w_0 + \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i], \quad (7)$$

и усредненная по начальным спином формула

$$\frac{d\overline{\overline{W}}}{d\xi} = C_0 w_0. \quad (8)$$

Излучение фотона представляет из себя случайное событие, а энергия фотона подчиняется распределению (3). Излучение формируется на некотором участке траектории, называемым длиной формирования [8], и если эта длина существенно меньше характерных размеров в системе, то рассмотрение динамики электрона значительно упрощается [9]. А именно, можно считать, что электрон рас-

пространяется согласно классическим уравнениями движения, а потери энергии на излучение происходят случайным образом, согласно вероятностям (3). Существует и более простой подход, при котором, вместо вероятности излучения используется сила радиационного трения [10]. Данный подход уже использовался в работах [11–14], однако в данной диссертации обсуждается строгий вывод и применимость такого метода. Использование непрерывных дифференциальных уравнений с квантовыми поправками вместо вероятностей, мы будем называть моделью непрерывных радиационных потерь [15] (НРП).

В рамках описанного выше приближения можно рассматривать такое явление как КЭД каскады. Это явление представляет собой цепочку из двух процессов: излучения релятивистским лептоном фотона с большой энергией (жесткого фотона) и распада фотона на электрон-позитронную пару (хотя возможен распад и на другие лептоны, но в данной работе рассматриваются только электрон-позитронные пары). Этот эффект также носит название процесса Брейта — Уилера [16]. КЭД каскад может происходить в атмосфере планет, при пролете высокоэнергичной частицы из космоса. Такая частица, пролетая через поле атомов в атмосфере, имеет существенную вероятность распасться на электрон-позитронную пару, если это фотон, или, в случае, если это электрон (позитрон), излучить жесткий фотон. Тем самым запускается цепная реакция, ограниченная лишь начальной энергией затравочной частицы. Еще этот эффект носит название атмосферных ливней, а возникающие каскады называют каскадами «ливневого» типа, или S-типа. Похожий процесс может происходить в окрестности таких астрофизических объектов как нейтронные звезды. Есть также каскады «лавиного» типа, называемые еще самоподдерживающиеся каскады, или каскады A-типа. В таких каскадах каждое поколение вторичных частиц в среднем восполняет свою энергию за счет, например, внешнего электромагнитного поля. В лабораторных условиях для создания КЭД каскада предлагается сталкивать ускоренные до высоких энергий пучки электронов с лазерными импульсами высокой интенсивности, или сталкивать два и более лазерных импульсов в области заполненной газом или вблизи твердотельной мишени. На момент написания данной работы получить самоподдерживающийся КЭД каскад в лабораторных условиях не удалось. Это связано, в основном, с недостаточно высокой интенсивностью лазерных полей, доступных на данный момент. Тем не менее, можно ожидать, что лазерные установки ближайшего будущего [17–24] смогут достичь необходимых

мощностью. В частности, относительно недавно была достигнута интенсивность в  $10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup> [25], которой уже может быть достаточно, для наблюдения каскада. Также уже есть установки которые могут работать на уровне мощности 10 ПВт [17, 18, 26]. Было предложено несколько конфигураций лазерного поля для минимизации мощности лазера, необходимой для создания самоподдерживающегося КЭД каскада. Одна из самых простых конфигураций представляет собой наложение двух встречных лазерных импульсов. В работах [6, 27–29] было показано, что линейная поляризация лазерного излучения более оптимальна для формирования самоподдерживающегося каскада, чем круговая в пределах низкой интенсивности. Лазерно-дипольная волна может обеспечить развитие каскада КЭД при мощности лазера ниже 10 ПВт [30]. Структура поля, похожая на дипольную волну, может быть образована с использованием 12 лазерных импульсов [31]. Другая конфигурация лазера, обеспечивающая формирование КЭД каскада на уровне мощности ниже 10 ПВт, может быть построена путем когерентного суммирования нескольких лазерных импульсов с эллиптической поляризацией [32]. Стоит отметить, что размер фокусного пятна имеет решающее значение для КЭД каскада [33]. С одной стороны, за счет уменьшения размера фокального пятна при заданной мощности можно увеличить интенсивность лазерного поля, тем самым увеличивая вероятность процессов КЭД. С другой стороны, если размер пятна слишком мал, каскадные частицы могут быстро покинуть объем каскада, подавляя его развитие.

В пределах высокой интенсивности каскад может быть инициирован спонтанным созданием электрон-позитронных пар из вакуума [6]. Однако, при использовании относительно низких интенсивностей необходимы затравочные частицы для инициации каскада. В качестве таких частиц могут выступать как электроны [29, 32, 34], так и фотоны высокой энергии [35]. При попытках создать каскад за счет столкновения лазерного импульса с пучком электронов возникает следующая проблема. Электроны могут быть вытолкнуты из области каскада пондеромоторным потенциалом лазерного поля до попадания в область высокой напряженности поля. Только небольшая часть затравочных электронов может служить катализатором для запуска каскада [29]. Можно использовать ультрарелятивистские электроны, поскольку пондеромоторный потенциал подавляется из-за релятивистской массы [36], однако, потребуются использование ускорителей электронов. Кроме того, требуется сфокусировать пучок электронов в

области взаимодействия и синхронизировать его с лазерными импульсами, что создает дополнительные трудности. Аналогичные трудности (высокая стоимость источников яркого гамма-излучения, фокусировка и синхронизация гамма-луча) возникают при попытках использовать в качестве затравочных частицы высокоэнергетических фотонов.

В качестве затравочных электронов можно использовать электроны с нижних уровней атомов с высоким номером. Потенциал ионизации этих электронов настолько велик, что они могут покинуть атом только при достаточно высокой величине поля. При попадании в достаточно интенсивное поле, электроны с низких оболочек покидают атом за счет полевой ионизации и оказавшись в сильном лазерном поле могут служить катализатором для каскада. В работе [33] было продемонстрировано, что запуск каскада в поле двух встречных лазерных импульсов облегчается за счет использования газов с высоким порядковым номером, однако авторы использовали упрощенную модель для описания ионизации атома и рассматривали только водород и кислород в качестве газовой мишени. Модель не учитывала вероятностный характер ионизации, зависимость вероятности ионизации от параметров электронной оболочки, последовательную и множественную ионизацию атомов с высоким порядковым номером. В связи с этим данная модель не может обеспечить точное описание ионизации и динамики затравки электронов.

В данной работе рассматривается формирование КЭД каскада при столкновении двух лазерных импульсов в области, заполненной различными сортами инертных газов. Используя полностью трехмерный код QUILL [37], моделируется распространение и столкновение двух лазерных импульсов в различных инертных газах. Предлагается новая формула для скорости ионизации, расширяющая известное выражение для туннельной ионизации [38, 39] в чрезвычайно интенсивном поле, когда потенциальный барьер сильно подавлен. Для описания ионизации был разработан и добавлен в пакет QUILL ионизационный блок, учитывающий вероятностный характер ионизации, последовательную и множественную ионизацию.

Аналитическое исследование КЭД каскадов крайне затруднительно, чем обусловлена такая популярность численных методов среди исследователей, занимающихся данной проблемой. Феноменологическая формула для скорости нарастания каскада во вращающемся электрическом поле была получена в результате

численного моделирования [29,32]. Скорость роста оценивалась также в пределах слабого [40, 41] и сильного лазерных полей [6]. В данной диссертации представлены расчеты скорости роста каскада во вращающемся электрическом поле с учетом КЭД поправок к силе радиационного трения.

При попадании в сильное электромагнитное поле фотон может не только распадаться на электрон-позитронную пару, квантовая электродинамика также предсказывает нелинейные диэлектрические свойства вакуума в сильных магнитных полях, создаваемые виртуальными электрон-позитронными парами. Отношения Крамерса-Кронига связывают вакуумный показатель преломления с вероятностью фоторождения пар, что исследовалось в сильных кристаллических [42] и лазерных полях [43,44]. На момент написания данной работы прямые экспериментальные наблюдения вакуумного показателя преломления отсутствуют, и существует множество идей, как его можно было бы измерить в эксперименте. Одна из идей – это использование рентгеновской дифракции на двух щелях, формируемой двумя встречными интенсивными лазерными импульсами [45–47]. Также предлагается измерять изменение поляризации рентгеновских или гамма-фотонов из-за двойного лучепреломления в вакууме в сильном лазерном поле [48–51]. Подобные эксперименты могут помочь проверить КЭД в еще не исследованной области экстремальных лазерных полей. Более того, исследование поляризации вакуума становится важным в свете гипотезы Ритуса–Нарожного [52–56]. Как известно в свободной КЭД малым параметром в теории возмущений является постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/\hbar c$ . Однако, когда рассматривается КЭД в присутствии внешнего электромагнитного поля, рассматривать электрон как свободный нельзя. Нужно переходить к представлению Фарри, когда начальное и конечное состояние электрона находятся в некотором внешнем потенциале. Для случая плоской электромагнитной волны волновая функция известна и называется Волковской [57]. Авторами вышеупомянутых статей было вычислено несколько слагаемых теории возмущений с несвободными электронами и была выдвинута гипотеза, что в качестве малого параметра следует принять  $\alpha\chi^{2/3}$ .

При интенсивностях  $10^{23} - 10^{24}$  Вт см<sup>-2</sup>, напряженность электромагнитного поля будет порядка  $10^{-3}V_{cr}$ , при таких значениях показатель преломления вакуума  $n$  можно оценить как  $\delta n = n - 1 \sim 10^{-10}$  [58] для фотонов с энергией  $\lesssim 1$  ГэВ [59]. Несмотря на такое малое значение  $\delta n$ , уже при энергии электрона

порядка 50 ГэВ, его скорость превысит фазовую скорость фотонов. Например, для формального выполнения условия Черенкова в поляризованном вакууме для низкоэнергетических фотонов, испускаемых электронами, достаточно, чтобы параметр  $\chi = 70$ . Таким образом, можно выбрать  $\gamma = 7 \times 10^4$  и  $B/B_{cr} = 1 \times 10^{-3}$ . Как видно из формулы (85), при таком значении магнитного поля показатель преломления будет  $\delta n \approx 2 \times 10^{-10}$ . Этим объясняется недавний интерес к черенковскому излучению в поляризованном вакууме [60–62]. Однако результаты этих статей следует пересмотреть из-за используемого там упрощенного подхода. Как известно, черенковское излучение возникает при движении по прямолинейной траектории, однако в сильных электромагнитных полях траектория заряженной частицы криволинейная. Кривизна траектории определяет длину формирования излучения и имеет решающее значение для процесса излучения. В работе [63] использовалось более общее описание процесса излучения, при таком рассмотрении «черенковский» и синхротронный режим излучения являются частными случаями одного общего процесса – синергического синхротрон-Черенковского излучения (термин введен в работе [63]). Таким образом, в некоторых случаях рассматривать эти процессы отдельно, как это сделано в работе [60, 61], некорректно. В работе [62] авторы рассматривают черенковское излучение и синхротронное излучение как один процесс, но используют выражение для излучаемой энергии, как если бы частица двигалась по прямой и излучала фотоны согласно обычному черенковскому процессу. В то же время более ранние работы по рассматриваемой теме содержат не только качественные оценки, но и выражения для спектра и вероятности испускания фотона.

Впервые на возможность черенковского излучения в поляризованном вакууме указал Эрбер [58], где, используя выражение для фоторождения пар в постоянном магнитном поле и дисперсионное соотношение [64], была вычислена действительная часть показателя преломления. В [65] автор рассматривал возможность Черенковского излучения в постоянных скрещенных электромагнитных полях с использованием фотонной функции Грина. В работе [63] авторы использовали метод массового оператора и получили общее выражение для спектра излучения фотона заряженной частицей, движущейся в постоянном магнитном поле и в среде с  $n \neq 1$ . Авторы указали, что есть только «синергическое синхротронно-черенковское» излучение, и переход к черенковскому режиму или к синхротронному происходит в пределах исчезающего поля или при переходе к

вакууму соответственно. Также было отмечено, что излучение чувствительно к знаку величины  $n - 1$  [63,66] и может либо усиливаться, либо подавляться. Также было установлено, что условия для наблюдения синхротронно-черенковского режима  $v > c/n$  для электрона недостаточно [66]. Синергетическое синхротронно-черенковское излучение наблюдалось в газах [67], результаты хорошо согласуются с теорией.

В последнее время растет интерес к исследованию поляризационных эффектов в лазерно-плазменном взаимодействии [68,69]. Выражения для скоростей излучения были также получены в работах [70,71]. Уже исследован ряд явлений, в которых спиновые эффекты играют существенную роль. Рассмотрена спиновая динамика в магнитном узле двух встречных лазерных импульсов [72]. Передача спиральности от лазерных фотонов электронному пучку исследована численно в работе [73], а в работах [74,75] образование поляризованных лептонов в процессе Брейта-Уилера. Имеется ряд работ, посвященных эволюции поляризации электронного пучка в плазменных ускорителях [76–78]. Была разработана модель для исследования спиновой динамики в лазерно-плазменных ускорителях и рассчитаны оптимальные параметры для достижения минимальной деполяризации электронных пучков при ускорении [78]. Предложен метод фильтрации для генерации электронных пучков с высокой степенью поляризации [79]. Ускорение пучка частиц с сохранением высокой степени поляризации обсуждается в [80]. Исследована роль спино-зависимой силы реакции излучения при взаимодействии лазерного импульса с электронным пучком [81]. Показано, что учет этой силы приводит к асимметричному отклонению электронов с различной ориентацией спина, и это отклонение больше, чем отклонение, вызванное силой, действующей на магнитный момент электрона.

Спиновые свойства лептонов широко используются в экспериментальных исследованиях для измерения параметров атомов и молекул [82], изучения радиационных свойств и ядерных структур [42,83] и исследования физики за пределами Стандартной модели на линейных коллайдерах [84]. Пучки поляризованных лептонов могут быть получены с помощью эффекта Соколова-Тернова [85]. Однако, лучи, полученные с помощью этого метода, имеют низкий ток, и для создания поляризации требуется длительное время.

В работе [86] была предложена модель эволюции вектора спина лептона. Автор выводит уравнения, описывающие прецессию спина, возникающую из-за

наличия внешних электромагнитных полей, и уменьшение длины вектора спина из-за радиационной реакции. Решение этих уравнений хорошо согласуется с предсказаниями, основанными на эффекте Соколова-Тернова. Однако в модели используются два допущения: во-первых, рассматривается классический предел ( $\chi \ll 1$ ), во-вторых, предположение, что  $\chi$  остается постоянным в процессе спиновой эволюции, что эквивалентно постоянной энергии, если частица движется в постоянном магнитном поле. В работе [87] были выведены те же уравнения, но без предположения, что  $\chi \ll 1$ . В обоих случаях коэффициенты в уравнениях зависят от параметра  $\chi$ , однако в работах [86, 87] этот параметр считался постоянным. Предположение о том, что  $\chi$  остается постоянным, очень специфично и не соответствует действительности в большинстве реальных случаев, особенно, когда рассматриваются сильные лазерные поля.

Стоит отметить, что за последнее десятилетие компьютерные технологии значительно продвинулись вперед и теперь служат мощным инструментом для решения задач, слишком сложных для теоретического анализа. Одним из таких инструментов является метод частиц в ячейках или PIC (particle in cell) [9, 88]. Это очень универсальный численный метод, который в настоящее время все больше и больше используется для изучения взаимодействия электромагнитных полей с веществом, планирования экспериментов, сравнения и анализа результатов. В данной работе автор очень часто прибегает к использованию метода PIC, а именно кода QUILL [37]. Хотя PIC-коды используются уже довольно давно, только недавно спиновая динамика была реализована в PIC-симуляциях [73–75]. До сих пор нет единого мнения о том, как правильно учитывать спиновую динамику, и было предложено несколько различных моделей [72, 87].

## **Цель работы**

В данной диссертационной работе преследовались следующие задачи:

1. Найти величину магнитного поля и время взаимодействия электрона с таким полем, при которых спектры электронов совпадают со спектрами электронов, взаимодействующих с лазерным полем в приближении Фоккера-Планка.
2. Исследовать излучение электрона, движущегося в сильном магнитном поле с учетом вакуумного показателя преломления. Показать, что наблюдение влияния вещественной части показателя преломления поляризованного ва-

куума на синхротронный спектр электрона в области параметров, где применима теория возмущений, невозможно. Продемонстрировать перспективность использования мюонов для исследования влияния действительной части показателя преломления поляризованного вакуума на излучение.

3. Разработать численную схему для учета полевой ионизации атомов. Исследовать перспективность использования, в качестве затравки для развития каскадов, инертных газов с большим номером.
4. Вычислить скорость роста КЭД каскада с учетом квантовых поправок к силе радиационного трения.
5. Исследовать применимость модели непрерывных радиационных потерь для квазиклассической и классической областей в задаче о взаимодействии электрона с постоянным однородным магнитным полем.
6. Разработать численную модель для вычисления спиновой динамики лептонов в электромагнитных полях с учетом переворота спина из-за излучения. Получить выражения для эволюции проекции спина вдоль магнитного поля в случае, когда изменением энергии электрона пренебречь нельзя.

## **Научная новизна**

1. Исследовано излучение ультрарелятивистского электрона в приближении Фоккера-Планка, когда число излученных фотонов велико, а энергия каждого фотона много меньше энергии электрона, который его излучает. Найдена величина магнитного поля и время взаимодействия электрона с таким полем, при которых спектры электронов совпадают со спектрами электронов, взаимодействующих с лазерным полем.
2. Было продемонстрировано, что влияние действительной части показателя преломления поляризованного вакуума на спектр излучения электрона, в области параметров, где справедливо использование теории возмущений, чрезвычайно мало.
3. Было продемонстрировано, что мюоны являются перспективными для исследования влияния вещественной части показателя преломления поляризованного вакуума.

4. Построена физически более корректная численная модель для описания полевой ионизации. Результаты численного моделирования, с использованием данной модели, подтверждают предположение о том, что более тяжелые газы лучше подходят в качестве затравки для инициации КЭД каскада.
5. Исследована применимость модели непрерывных радиационных потерь в задаче о движении электрона в постоянном, однородном магнитном поле. Продемонстрирована применимость данной модели в сильно квантовом режиме в задаче о движении электрона в постоянном магнитном поле.
6. Получено выражение для эволюции спина в постоянном магнитном поле в режиме, когда пренебрегать изменением энергии электрона нельзя.

### **Достоверность результатов:**

Результаты, полученные аналитически, сравнивались с численным моделированием пакетами QUILL [37] и SMILEI [89], которые в свою очередь были многократно проверены на известных задачах. Результаты, полученные программами, созданными автором данной работы, также согласуются с результатами других групп, аналитическими решениями и известными экспериментальными результатами.

### **Личный вклад автора:**

Автор самостоятельно разработал и протестировал программу для исследования спиновой динамики, разработал блок программы, учитывающий полевую ионизацию и добавил его в пакет QUILL, занимался выводом выражения для магнитного поля и времени взаимодействия, получал оценки для синхротрон-Черенковского излучения для электронов и для мюонов. Занимался разработкой и тестированием ионизационного блока программы. Получал численные результаты для скорости роста каскада во вращающемся поле.

### **Краткое содержание диссертации**

**В первой главе**, в разделе 2.2 рассматривается задача о взаимодействии лазерного импульса с летящим навстречу пучком электронов и взаимодействие такого же пучка электронов с магнитным полем в течении некоторого времени. Получено соответствие между величиной магнитного поля, длительностью взаимодействия и параметрами лазерного импульса, а именно длительностью импульса, частотой и амплитудой поля, при котором энергетические спектры электронов в

обоих случаях совпадали. В подразделе 2.2.1 рассматривается одномерное уравнение Больцмана, записывается его решение в операторном виде и обсуждается применимость приближения Фоккера-Планка, когда электрон излучает много фотонов и энергия фотона много меньше энергии электрона. В подразделе 2.2.2 выводятся формулы для связи между магнитным полем, временем взаимодействия и характеристиками лазерного поля в приближении Фоккера-Планка. В подразделе 2.2.3 обсуждается работа кода Scintillans, который решает одномерное уравнение Больцмана в постоянном магнитном поле. Приводится численное представление для функции распределения и алгоритм решения уравнения Больцмана. В подразделе 2.2.4 приводятся сравнения моделирования PIC-кодом и работы кода Scintillans. Моделирование одномерного уравнения Больцмана в постоянном магнитном поле и расчеты с лазерным полем PIC дают приемлемое согласие. Подраздел 2.2.5 посвящен обсуждению результатов.

Раздел 2.3 посвящен исследованию излучения фотона ультрарелятивистской заряженной частицей в чрезвычайно сильном магнитном поле с учетом поляризации вакуума и эффекта отдачи. В подразделе 2.3.1 выводятся выражения для излученной энергии в интегральном виде. Подчеркивается важность синхронизма между волной и частицей для процесса излучения, вводятся характерные времена выхода частицы из синхронизма за счет кривизны траектории (поперечное время) и за счет разности фазовой скорости волны и скорости частицы (продольное время). В подразделе 2.3.2 добавляется показатель преломления. Обсуждаются приближения, в которых формулы справедливы, приводятся выражения для квантовой и классической мощностей излучения с учетом показателя преломления. Обсуждается почему условие для модификации синхротронного спектра более строгое, чем кажется из простых оценок. А именно, не достаточно просто выполнить условие черенковского синхронизма, также требуется сделать "продольное" время намного меньше "поперечного" времени за счет показателя преломления. Подраздел 2.3.3 посвящен обсуждению времени (длины) формирования излучения. Получено выражения для длины формирования синхротрон-черенковского излучения для разных соотношений продольного и поперечного времени. Приводится два расчета кодом  $jE$ , использующим формулы для излучения с наличием искусственного показателя преломления для демонстрации синхротронного и черенковского режимов. В подразделе 2.3.4 приводятся аналитические оценки и показано, почему для электронов наблюдение показателя

преломления невозможно. Также приводятся оценки для мюонов и показано, что мюоны являются перспективными для исследования влияния показателя преломления на синхротронные спектры. Это объясняется тем, что мюоны более тяжелые, кривизна их траектории меньше, и выполнить условие на малость продольного времени проще. Для мюонов поляризация вакуума приводит к усилению максимума спектра излучения на 10% уже при  $\chi \approx 30$ .

**Во второй главе** рассматривается ионизационная инициация КЭД каскада в результате столкновения двух лазерных импульсов, распространяющихся в области, заполненной инертным газом. Также выводятся выражения для скорости роста каскада во вращающемся электрическом поле.

Раздел 3.2 целиком посвящен ионизационной инициации каскадов. В подразделе 3.2.1 строится численная модель ионизации, выводится феноменологическая формула для скорости полевой ионизации атомов в виде кусочно заданной функции, справедливая для всех необходимых напряженностей электрического поля. Подраздел 3.2.2 посвящен численному моделированию, приводятся результаты моделирования для всех сортов благородных газов. Результаты моделирования показывают, что более тяжелые газы дают больший выход электрон-позитронных пар в каскаде. В подразделе 3.2.3 обсуждаются результаты и справедливость пренебрежения процессами ударной ионизации и фотоэлектрического эффекта.

В разделе 3.3 выводится выражение для скорости роста каскада. В подразделе 3.3.1 рассматривается кинетическая модель, приводятся выражения для вероятностей рождения пары и излучения. В подразделе 3.3.2 дается решение уравнений Больцмана во вращающемся электрическом поле и в приближении, что излучение можно описывать через силу реакции излучения. В подразделе 3.3.3 выведено выражения для скорости роста каскада, приведено сравнение с другими работами. Подраздел 3.3.4 посвящен обсуждению результатов и сравнению аналитики с моделированием PIC.

**В третьей главе** обсуждается модель НРП и ее применимость, рассматривается динамика электрона, движущегося в постоянном магнитном поле, с учетом радиационных эффектов и спиновых степеней свободы. В разделе 4.1 обсуждается модель НРП и ее область применимости. В разделе 4.2 приводятся общие уравнения для описания динамики электрона во внешнем электромагнитном поле, обсуждается радиационная и нерадиационная поляризация. В разделе 4.3

аналитически решается задача о движении электрона в постоянном магнитном поле, приводится выражение для эволюции вектора поляризации во времени. Раздел 4.4 посвящен численному моделированию обсуждаемой в данной главе задачи. Приводится численный алгоритм для описания движения электрона во внешнем электромагнитном поле, а также описывается метод учета радиационных эффектов. Приводится несколько результатов моделирования для проверки правильности работы алгоритма. Получено хорошее согласие с аналитическим решением, полученным в разделе 4.3. В разделе 4.5 приводятся результаты моделирования для больших  $\chi$ , результаты моделирования сравниваются с моделью НРП для этой области параметров, которая также приводится в этом разделе. Для задачи о постоянном магнитном поле получено хорошее согласие даже в области  $\chi = 100$ . Раздел 4.6 представляет собой заключение, где обсуждаются результаты и перспективы дальнейшего исследования.

**Структура и объем диссертации** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка публикаций по диссертации и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 143 страницы, включая 26 рисунков, 2 таблицы, список литературы из 166 наименований на 17 страницах и список публикаций по диссертации на 2 страницах.

### **Апробация результатов работы**

По теме диссертации опубликовано 12 работ, в том числе 6 статей [A1-A6] в изданиях, индексируемых в базе Web of Science и 6 работ в трудах конференций [A6-A12].

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отделения нелинейной динамики и оптики ИПФ РАН, а также на следующих конференциях:

1. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Синхротрон-Черенковское Излучение в вакууме», Нелинейные волны-2018, XVIII научная школа, 26 февраля – 4 марта 2018 года, Нижний Новгород.
2. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Излучение ускоренных электронов в синхротрон-черенковском режиме». Радиофизическая конференция 2018 17 мая 2018 года, Нижний Новгород, ННГУ.
3. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Излучение ускоренных электронов в поляризованном вакууме». Двадцать третья научная конференция по радиофизике 2019, 13 мая 2019 года, Нижний Новгород, ННГУ.

4. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. "Синхротрон-Черенковское излучение в вакууме". Нелинейные волны-2020, XIX научная школа, 29 февраля - 4 марта 2020 года, Нижний Новгород.
5. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Новые методы ускорения частиц и экстремальные состояния материи», межинститутский онлайн-семинар, 5 июля 2020 - 22 сентября 2020.
6. Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. "Численное моделирование спиновых эффектов при взаимодействии пусков с эм полями". Нелинейные волны-2022, XIX научная школа, 7 - 13 ноября 2022 года, Нижний Новгород.

### **Положения выносимые на публичную защиту:**

1. В приближении Фоккера-Планка спектры электронов, взаимодействующих с лазерным полем, могут быть получены заменой лазерного поля на некоторое постоянное магнитное поле, действующее в течении определенного времени взаимодействия. Полученное соответствие между магнитным и лазерным полями и между длительностью лазерного поля и длительностью взаимодействия с постоянным магнитным полем справедливо за пределами применимости приближения Фоккера-Планка.
2. Изменения в спектре фотонов, излучаемых электроном, движущемся в постоянном магнитном поле, за счет действительной части вакуумного показателя преломления, индуцированного этим полем, становятся существенными в области, где теория возмущений несправедлива. Использование мюонов более перспективно для экспериментального наблюдения влияния действительной части показателя преломления вакуума на радиационные спектры.
3. Тяжелые инертные газы перспективнее для использования в качестве затравки для развития КЭД каскада. Это объясняется высоким потенциалом ионизации нижних оболочек, из-за которого электроны с этих оболочек попадают в результате ионизации сразу в область сильного поля.
4. Модель непрерывных радиационных потерь (НРП) применима на временах, существенно превышающих характерное время диссипации энергии

для квазиклассического режима. В сильно квантовом режиме, как показывает моделирование для постоянного магнитного поля, модель НРП дает качественное описание динамики системы.

## 2 КЭД эффекты высших порядков в процессах излучения и приближение эффективного постоянного поля

### 2.1 Введение к главе

В данной главе рассматривается приближение постоянного магнитного поля и влияние вещественной части показателя преломления поляризованного вакуума на спектр излучения электронов и мюонов в постоянном магнитном поле. В первую очередь рассматривается задача о взаимодействии пучка электронов с лазерным импульсом. Исследование такой системы и вычисление, например, спектров электронов и фотонов, очень сложно с точки зрения аналитики и зачастую приходится прибегать к использованию численного моделирования. Самым широко используемым алгоритмом для расчета подобных задач является метод PIC (particle in cell, метод частиц в ячейках). Моделирование PIC реалистичных задач может занимать дни и недели. Существует однако альтернативный подход, рассмотренный в работе [90]. Суть этого подхода в замене лазерного поля на глобальное магнитное поле такой величины и длительности, что получаемые спектры излучения и спектры электронов будут одинаковые. Это позволяет не прибегать к сложным и длительным расчетам для подобных задач, а также получить аналитическое решение.

Как известно, при движении в вакууме в сильном внешнем магнитном (электромагнитном) поле, ультррелятивистский электрон излучает синхротронное излучение. Этот эффект хорошо исследован аналитически [10] и экспериментально. Однако, при достаточно сильных полях и высоких энергиях частиц, а именно, когда квантовый параметр перестает удовлетворять условию  $\chi \ll 1$ , в силу вступают квантовые эффекты и характер излучения существенно меняется. Одним из таких эффектов является эффект отдачи, суть которого в том, что когда параметр  $\chi \gtrsim 1$ , энергия излученного фотона  $\hbar\omega$  того же порядка, что и энергия электрона и спектр фотонов должен быть ограничен энергией электрона.

При достаточно больших полях и высоких энергиях электрона, внешнее электромагнитное поле может рассматриваться как некоторая анизотропная среда для излученного фотона [58]. При определенных условиях такой показатель пре-

ломления может сильно изменить спектр излучения.

## 2.2 Приближение постоянного магнитного поля в задаче об излучении заряженной частицы в лазерном поле

### 2.2.1 Уравнения Больцмана и приближение Фоккера-Планка

В работе [12] было показано, что если энергия электронов остается достаточно большой в процессе столкновения, то траектории электронов меняются незначительно и можно их считать прямыми. Также будем предполагать, что поперечный размер пучка мал по сравнению с пятном лазера и мы пренебрегаем коллективными эффектами в плазме. В этом случае реакция излучения описывается одномерным уравнением Больцмана:

$$\partial_t f_e(t, \gamma) = -U f_e(t, \gamma) + \int_{\gamma}^{\infty} f_e(t, \gamma') w(\gamma' \rightarrow \gamma) d\gamma', \quad (9)$$

где  $w_0(\gamma' \rightarrow \gamma) d\gamma dt$  есть вероятность, что электрон с энергией  $\gamma'$  за интервал времени  $dt$  излучит фотон, и энергия конечного электрона будет лежать в интервале  $(\gamma, \gamma + d\gamma)$  с бесконечно малыми  $dt, d\gamma$ . Здесь и далее  $\gamma = \varepsilon/mc^2$  есть Лоренц фактор электрона, а  $\varepsilon$  ее энергия. В правой части уравнения (9) должно быть еще одно слагаемое, связанное с рождением электрон-позитронных пар, но для  $\chi \lesssim 1$  этим слагаемым пренебрегается. Заметим, что описание распределения уравнением (9) возможно, поскольку вероятность излучения  $w$  определяется только величиной локального поля [91] и интерференции с излученными фотонами не происходит. Здесь  $U$  есть полная вероятность излучения в единицу времени

$$U = \int_0^{\gamma} w_0(\gamma \rightarrow \gamma') d\gamma'. \quad (10)$$

Вероятность излучения фотона зависит от поля, которое меняется во времени вдоль траектории электрона. Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$f_e(t) = \hat{T} \exp \left[ \int_0^t \hat{A} dt' \right] f_e(0), \quad (11)$$

где линейный оператор  $\hat{A}$  есть правая часть уравнения (9) и  $\hat{T}$  есть оператор временного или хронологического упорядочивания. Аналогичный оператор ис-

пользуется в КЭД [91] и определяется следующим образом. Пусть у нас есть два оператора  $\hat{A}(t_1)$  и  $\hat{B}(t_2)$ , тогда

$$\hat{T}(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & \text{если } t_1 > t_2, \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & \text{если } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (12)$$

Возникает идея использовать  $U$  и  $w$  для некоторого внешнего постоянного магнитного поля и некоторого времени взаимодействия вместо величин  $U^*$  и  $w^*$ , усредненных по лазерному полю. Соответствие случая постоянного магнитного поля и лазерного поля, дающее одну и ту же функцию распределения электронов (приближение глобального постоянного поля, далее ПГПП) можно строго оправдать в приближении Фоккера-Планка (далее ФП). В приближении ФП [92, 93], когда энергия каждого отдельного фотона мала, а каждый электрон излучает много фотонов, результирующий спектр фотонов не зависит от формы функции  $w_0(\gamma' \rightarrow \gamma)$ , а только от её первого и второго момента. Таким образом, можно легко найти параметры для ПГПП, приводящие к той же функции распределения, как и для лазерного поля.

### 2.2.2 Приближение постоянного глобального поля в приближении Фоккера-Планка

Из выражений (8) и (4) легко видеть, что когда квантовый параметр  $\chi \ll 1$  (что соответствует классическому режиму), спектр определяется критической частотой  $\omega_c = \chi\gamma mc^2/\hbar$ . Следовательно, ширина и средняя энергия излучаемого фотона порядка  $\hbar\omega_c$  [10]. В то же время, полная вероятность излучения в единицу времени  $U \approx \alpha/t_{rf}$ , где  $t_{rf} \approx mc/F$  есть время формирования излучения, где  $F$  это модуль поперечной силы Лоренца (подробнее см. подраздел 2.3.3). Электрон излучает 1 фотон за время порядка  $t_{rf}/\alpha$ , заметим также, что в классическом режиме  $\hbar\omega \ll mc^2\gamma$ .

Можно перейти от дифференциального уравнения (9) к рассмотрению излучения фотонов как некоторого стохастического процесса [94]. Энергия электрона уменьшается каждый раз, когда происходит излучение, а конечная энергия электрона есть его разница начальной энергии и энергии фотона. В приближении ФП, если число излученных фотонов достаточно большое и энергия излученных фотонов мала, разные акты излучения можно рассматривать как независимые

случайные события и применять центральную предельную теорему (ЦПТ). Т.е. среднее уменьшение энергии электрона и квадрат стандартного отклонения есть сумма для индивидуальных излучений фотона. Критическая частота пропорциональна  $F$ , следовательно, для излучения одного фотона его средняя энергия  $\mu_i \propto F$  и разброс распределения по энергиям  $\sigma_i \propto F$ . Вспоминая, что  $U \propto \omega_c \propto F$  и заменяя сумму на интеграл мы получаем:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \sim \sum_{\Delta t} U \mu_i \Delta t \propto \int_0^t F^2(t') dt', \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \sim \sum_{\Delta t} U \sigma_i^2 \Delta t \propto \int_0^t F^3(t') dt', \quad (14)$$

где  $\mu$  есть математическое ожидание и  $\sigma^2$  есть дисперсия.

Эти уравнения позволяют найти такую величину постоянного внешнего магнитного поля, что для данного лазерного поля величины  $\mu$  и  $\sigma$  совпадают с соответствующими величинами для лазерного поля. Заметим, что в рассмотренном выше случае предполагается, что каждый электрон излучает одинаковое количество фотонов.

Чтобы вычислить параметры ПГПП, нужно рассмотреть два случая. Прохождение электроном через магнитное поле  $B_0$  так, что  $F = eB_0$  в течении интервала  $\tau$  и прохождение электронного пучка через лазерный импульс длительностью  $x_L/c$ . Лазерный импульс выбирается таким, что электрическое поле в нем

$$E = E_0 \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2x_L}\right) \cos(k_L\xi), \quad (15)$$

а магнитное поле  $B = E$ , где  $\xi = x - ct$ ,  $k_L = \omega_L/c$ ,  $\omega_L$  лазерная частота и  $x_L$  есть полная ширина на уровне половины электрического поля (FWHM). Если в начале электрон находился в точке  $x(0) = x_L$ , то полное прохождение

электронным пучком импульса соответствует интервалу  $t \in [0, x_L/c]$  и

$$F \approx 2eE_0 \sin^2 \left( \frac{\pi ct}{x_L} \right) \cos(k_L x_L - 2\omega_L t). \quad (16)$$

Рассматривая одну и ту же начальную энергию электрона, можно вычислить  $\mu$  и  $\sigma$  для случаев  $F = eB_0$  и для случая (16)

$$\tau \left( \frac{B_0}{E_0} \right)^2 = \frac{3 x_L}{4 c}, \quad (17)$$

$$\tau \left( \frac{B_0}{E_0} \right)^3 = \frac{40 x_L}{6\pi c}, \quad (18)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{40}{9\pi} E_0, \\ \tau &= \frac{243\pi^2 x_L}{6400 c}, \end{aligned} \quad (19)$$

где предполагается, что  $x_L \gg 2\pi/k_L$ .

### 2.2.3 Численное моделирование уравнения Больцмана в постоянном магнитном поле

Для численного решения уравнения Больцмана в постоянном магнитном поле используется код [95], который решает уравнение Больцмана с учетом электронов и фотонов [12, 27]

$$\partial_t f_e = -U f_e + \int_{\gamma}^{\infty} f_e(\gamma') w(\gamma' \rightarrow \gamma) d\gamma', \quad (20)$$

$$\partial_t f_{ph} = \int_{\gamma}^{\infty} f_e(\gamma') w(\gamma' \rightarrow \gamma' - \gamma) d\gamma'. \quad (21)$$

Для этого используется следующее численное представление:

$$\partial_t f = \hat{A}f, \quad (22)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_e \\ f_{ph} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{00} & \hat{A}_{01} \\ \hat{A}_{10} & \hat{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $f_e$  и  $f_{ph}$  — векторы-столбцы, представляющие электронную и фотонную функции распределения на интервалах энергии  $[\gamma_a, \gamma_b]$  и  $[0, \gamma_b - \gamma_a]$ :

$$f_e = \begin{pmatrix} f_e(\gamma_a) \\ f_e(\gamma_a + \Delta\gamma) \\ \vdots \\ f_e(\gamma_b) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$f_{ph} = \begin{pmatrix} f_{ph}(0) \\ f_{ph}(\Delta\gamma) \\ \vdots \\ f_{ph}(\gamma_b - \gamma_a) \end{pmatrix} \quad (26)$$

каждый из столбцов содержит  $n$  узлов. Здесь  $\Delta\gamma = (\gamma_b - \gamma_a)/(n - 1)$ . Использование разных, но согласованных интервалов энергии для распределения электронов и фотонов функций особенно полезно в классическом режиме, где можно выбрать  $\gamma_b - \gamma_a \ll \gamma_b$ .

Элементами блочной матрицы  $\hat{A}$  являются матрицы  $\hat{A}_{00} = -\hat{U} + \hat{W}$ ,  $\hat{A}_{01} = \hat{A}_{11} = \hat{0}$  (нулевая матрица) и  $\hat{A}_{10}$ . матрицы  $\hat{U}$ ,  $\hat{W}$  и  $\hat{A}_{10}$  определяются следующим образом. Во-первых,

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} w_{0 \rightarrow 0} & w_{1 \rightarrow 0} & w_{2 \rightarrow 0} & w_{3 \rightarrow 0} & \cdots \\ 0 & w_{1 \rightarrow 1} & w_{2 \rightarrow 1} & w_{3 \rightarrow 1} & \cdots \\ 0 & 0 & w_{2 \rightarrow 2} & w_{3 \rightarrow 2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{3 \rightarrow 3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $w_{k \rightarrow l} = w(\gamma_a + k\Delta\gamma \rightarrow \gamma_a + l\Delta\gamma)$ . Заметим, что переходы в состояния с

отрицательными индексами (например,  $w_{0 \rightarrow -1}$ ) не учитываются, считается, что весь спектр электронов лежит в области от  $\gamma_a$  до  $\gamma_b$ . Таким образом, предполагается, что  $\gamma_a$  настолько мало, что испускание фотона для электронов с  $\gamma_a$  или пренебрежимо мало, или электронов с энергией  $\gamma_a$  почти нет. Тогда матрица  $\hat{U}$  является диагональной матрицей, где диагональные элементы вычисляются как суммы в соответствующих столбцах  $\hat{W}$ . Чтобы вычислить  $\hat{A}_{10}$ , мы переставляем элементы в столбцах  $\hat{W}$ :

$$\hat{A}_{10} = \begin{pmatrix} w_{0 \rightarrow 0} & w_{1 \rightarrow 1} & w_{2 \rightarrow 2} & w_{3 \rightarrow 3} & \cdots \\ 0 & w_{1 \rightarrow 0} & w_{2 \rightarrow 1} & w_{3 \rightarrow 2} & \cdots \\ 0 & 0 & w_{2 \rightarrow 0} & w_{3 \rightarrow 1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{3 \rightarrow 0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Сингулярное поведение  $w(\gamma \rightarrow \gamma')$  (функция стремится к бесконечности, если  $\gamma'$  стремится к  $\gamma$ ) здесь не важно, поскольку эволюция  $f_e$  определяется распределением мощности излучения  $(\gamma - \gamma') w(\gamma \rightarrow \gamma')$ , которая не имеет особенностей. Таким образом, в численном приближении достаточно разрешить небольшой масштаб около критической частоты (в классическом пределе) или около некоторой доли  $\gamma$  (в квантовом пределе). По той же причине здесь используется  $w_{k \rightarrow k} = 0$ .

Уравнения (20) и (21) можно решать методом Эйлера.

$$f(t) = \exp(\hat{A}t) f(0), \quad (29)$$

$$\exp(\hat{A}t) \approx (\hat{1} + \hat{A}\Delta t)^p, \quad (30)$$

где  $p = [t/\Delta t]$  и  $\hat{1}$  единичная матрица. Вычисление (30) можно выполнить с помощью алгоритма быстрого возведения в степень, который имеет сложность  $O(\log p)$ .

Наконец, (29) и (30), так же как и исходные уравнения Больцмана (20) и (21), сохраняют число электронов и общую энергию. А именно, умножение  $(\hat{1} + \hat{A}_{00}\Delta t)$  и  $f_e$  не изменяют число электронов,

$$\sum_{k,l} (\hat{1} + \hat{A}_{00})_{kl} (f_e)_l = \sum_{k,l} [\hat{1} + (\hat{W} - \hat{U})\Delta t]_{kl} (f_e)_l = \sum_l (f_e)_l \equiv N_e, \quad (31)$$

потому что  $\hat{U}$  вычисляется из  $\hat{W}$  и сумма по любому столбцу  $\hat{A}_{00}$  равна нулю. Тогда изменение общей энергии, вызванное умножением на  $(\hat{1} + \hat{A}\Delta t)$  равно нулю,

$$\sum_{k,l} [(\gamma_a + k\Delta\gamma)(A_{00})_{kl} + k\Delta\gamma(A_{10})_{kl}] (f_e)_l \Delta t = 0, \quad (32)$$

потому что суммирование по  $k$  дает

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k [(A_{00})_{kl} + (A_{10})_{kl}] &= -U_{ll} + \sum_{k=0}^l (w_{l \rightarrow k} + w_{l \rightarrow (l-k)})k = \\ &= \left( \sum_{k=0}^l w_{l \rightarrow (l-k)} - U_{ll} \right) l + \sum_{k=0}^l [kw_{l \rightarrow k} - (l-k)w_{l \rightarrow (l-k)}] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Поэтому, несмотря на свою простоту, *Scintillans* обеспечивает быстрое и достаточно точное численное решение уравнения Больцмана для электронов и фотонов в постоянном магнитном поле.

#### 2.2.4 ПГПП в приближении ФП и за его пределами: сравнение с PIC моделированием

Чтобы проверить ПГПП, было проведено трехмерное моделирование столкновения электронного пучка с лазерным импульсом с помощью PIC-кода QUILL [37]. В этом коде, для учета излучения фотонов, был добавлен блок программы, основанный на методе Монте-Карло (далее МК) [27, 96]. При моделировании задается продольная форма лазерного импульса аналогично выражению (15), но введена поперечная огибающая с полуширинами по осям  $y$  и  $z$  равными  $y_s$  и  $z_s$  соответственно. Длительность  $x_L/c$ , амплитуда лазерного импульса, а также начальная энергия электрона  $\gamma_0$ , варьировались так, чтобы получить различные режимы реакции излучения. Время взаимодействия выбирается так, чтобы обеспечить полное прохождение всех электронов через лазерный импульс. Полный радиус электронного пучка ( $2\lambda_L$ ) намного меньше, чем поперечный размер лазерного импульса ( $y_s = z_s = 13.4\lambda_L$ ), где  $\lambda_L = 2\pi c/\omega_L = 1$  мкм есть длина волны лазера.

Результаты PIC моделирования для начальной энергии электрона  $\varepsilon_0 = 920$  МэВ и  $a_0 = 16.5$  показаны на рисунке 1 светлыми "шумными" линиями. Максимум квантового параметра в этом случае достигал  $\chi \approx 0.07$ . Для  $x_L = 82\lambda_L \gg ct_{rf}/\alpha$  ( $x_L/c = 270$  фс,  $t_{rf}/\alpha \approx 4.4$  фс.) применимо приближение ФП. В соответ-

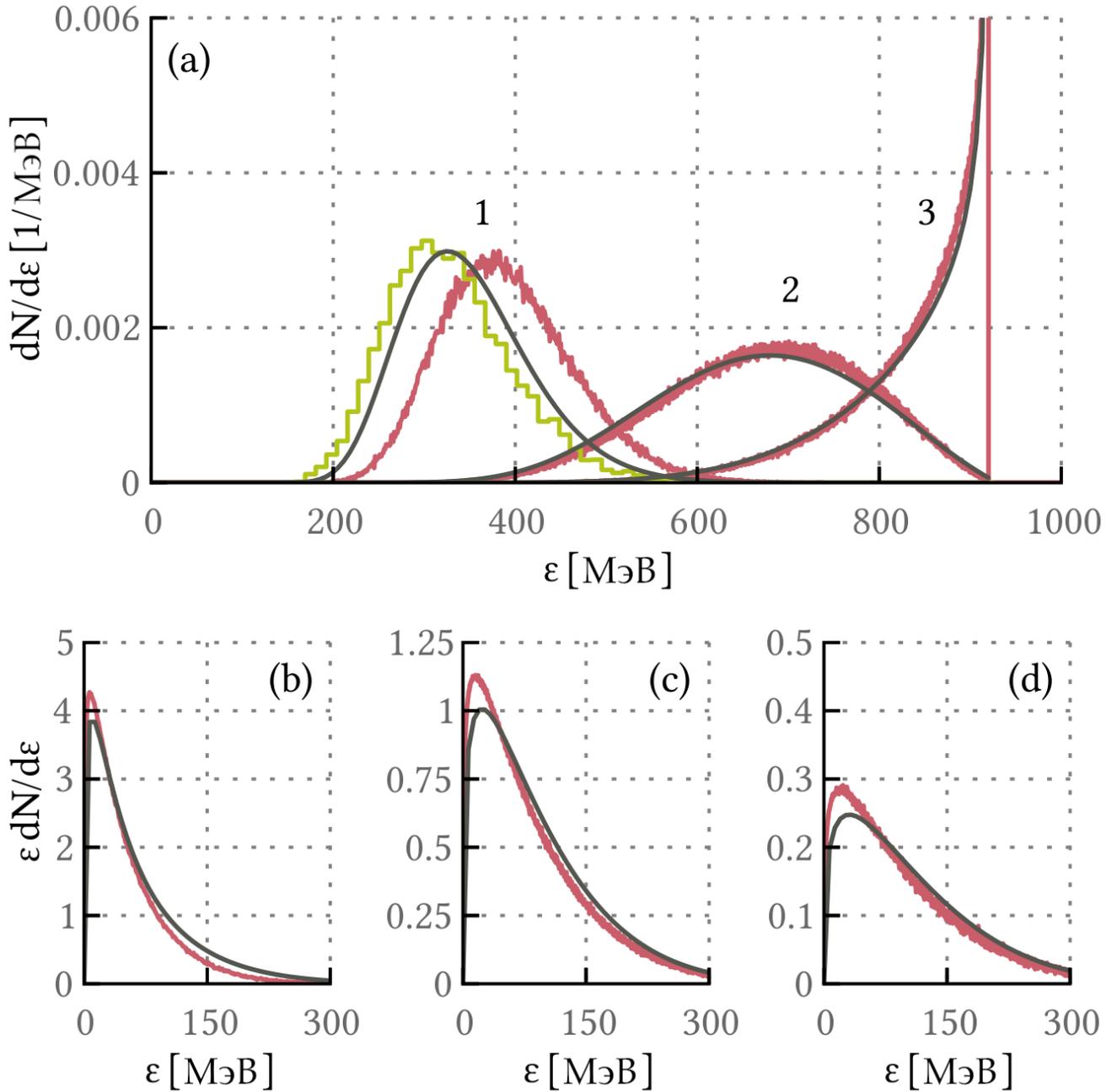


Рис. 1: Спектры частицы, получаемые в результате столкновения лазерного импульса с электронным пучком для различных длительностей импульса, вычисленные в PIC моделировании (красные линии) и аналогичные спектры, полученные из уравнений Больцмана в ПГПП (черные кривые). Магнитное поле и время взаимодействия с полем вычисляются согласно уравнениям (19), где  $\chi = 0.1$  для ПГПП. Линии 1, 2 и 3 изображают спектры электронов, а графики (b), (c) и (d) изображают энергетические спектры фотонов для лазерных импульсов с длительностью 270, 68 и 17 фс соответственно. Зеленая кривая 1 показывает результат работы PIC кода для лазерного импульса без дифракции.

ствии с центральной предельной теоремой, в этом случае электронный спектр близок к гауссовому распределению (см. "шумная" красная кривая 1 на рисунке 1(a)). Соответствующий энергетический спектр фотонов  $\gamma f_{ph}(\gamma)$  показан красной линией на рисунке 1(b). Точно так же электронные спектры для лазерных импульсов с длительностью в 4 и 16 раз меньше ( $x_L/c = 68$  и 17 фс соответственно) показаны красными линиями 2 и 3 на рисунке 1(a), а соответствующие энергетические спектры фотонов показаны на рисунках 1(c) и (d). Обратите внимание, что для коротких лазерных импульсов электрон испускает слишком мало фотонов, что не позволяет использовать приближение ФП и ЦПТ [92].

Результаты полученные кодом *Scintillans* в ПГПП показаны на рисунке 1 черными линиями. Уравнения (19) использовались для нахождения постоянного магнитного поля и времени взаимодействия. Таким образом, черные линии 1, 2 и 3 на рисунке 1(a) являются спектрами электронов, а на рисунках 1(b), (c) и (d) - распределение фотонов по энергиям  $\gamma f_{ph}(\gamma)$  для  $B_0 = 250$  кТ и  $\tau = 102, 26$  и 6.4 фс соответственно. Эти параметры дают  $B_0/B_{cr} = 5.6 \times 10^{-5}$ , для начального значения  $\chi = 0.1$  и времени испускания фотона  $t_{rf}/\alpha = 3.1$  фс.

При моделировании кодом *Scintillans*, а также в моделировании PIC, функция распределения электронов нормирована одинаковым образом:

$$\int_0^{\infty} f_e(\epsilon) d\epsilon = 1. \quad (34)$$

Стоит заметить, что параметры моделирования кодом *Scintillans* для темной кривой 1 на рисунке 1(a) такие же, что и для средних кривых на рисунке 10(c) в работе [92], с той лишь разницей, что в данном случае используется моноэнергетический электронный пучок с нулевой температурой. Тем не менее, кривая на рисунке 1(a) лежит довольно близко к соответствующим кривым из работы [92], что указывает на хорошее согласие между симуляциями на *Scintillans* и на SMILEI.

Для самого длинного лазерного импульса было выполнено дополнительное моделирование PIC, в котором лазерное поле определяется аналитически в форме (15), без поперечной огибающей и следовательно, без дифракции. Результирующий электронный спектр (зеленая ступенчатая линия 1 на рисунке 1(a)) близок к спектру, полученному в ПГПП. Расхождение между красной и черной линиями 1 на рисунке 1(a), вызвано дифракцией лазерного импульса. Резуль-

таты моделирования без дифракции (поля заданы аналитически), представлены ступенчатой зеленой кривой 1, которая хорошо ложится на черную кривую 1 (см рисунок 1(a)). Таким образом, из рисунка 1 можно сделать вывод, что электронные и фотонные спектры могут быть хорошо описаны в ПГПП в классическом пределе, если применимо одномерное уравнение Больцмана, даже если количество излучаемых фотонов невелико.

Такое хорошее совпадение спектров электронов и фотонов, рассчитанных в постоянном магнитном поле и в поле лазера, говорит о том, что следует рассмотреть ПГПП в области умеренных значений  $\chi \sim 1$ . Для этого следует использовать достаточно короткие лазерные импульсы,  $x_L \lesssim t_{rf}/\alpha$ , иначе электроны теряют почти всю начальную энергию, что делает приближение ФП неприменимым. Важно отметить, что при  $\chi \gtrsim 1$  процесс рождения электрон-позитронных пар (который не учитывается в коде *Scintillans*) и последующая эмиссия фотонов вторичными электронами и позитронами, также делает используемый подход неприменимым. В описанных ниже симуляциях  $x_L/c = 17$  фс и  $\varepsilon = 2.76$  ГэВ ( $\gamma = 5400$ ). Берется разная амплитуда лазерного импульса для получения различных значений  $\chi$ .

На рисунке 2 результаты моделирования PIC показаны красными линиями, а решения уравнения Больцмана в ПГПП, полученные с *Scintillans*, показаны черными. Кривые на левой колонке изображают спектр электронов  $f_e(\gamma)$ , тогда как правый столбец есть энергетические спектры фотонов  $\gamma f_{ph}(\gamma)$ . Графики 2 (a-f) соответствуют  $a_0 = 16.5, 33$  и  $66$  соответственно. В ПГПП это дает начальный квантовый параметр  $\chi_0 = 0.3, 0.6$  и  $1.2$ . С увеличением напряженности магнитного поля время испускания фотона уменьшается ( $t_{rf}/\alpha = 3.1, 1.6$  и  $0.8$  фс при  $\tau = 6.4$  фс), количество фотонов, испускаемых электроном, увеличивается, и распределение электронов прижимается к более низким энергиям.

С экспериментальной точки зрения средняя энергия электронов

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f_e(\varepsilon) d\varepsilon \times \left[ \int_0^\infty f_e(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{-1} \quad (35)$$

и полная энергия гамма-квантов характеризуют взаимодействие [14, 97]. Эти величины связаны законом сохранения энергии, и для того, чтобы характеризовать электронные и фотонные пучки можно использовать, например, среднюю энергию электрона  $\langle \varepsilon \rangle$  и число фотонов  $n_\gamma$  с энергией выше некоторой (в представлении

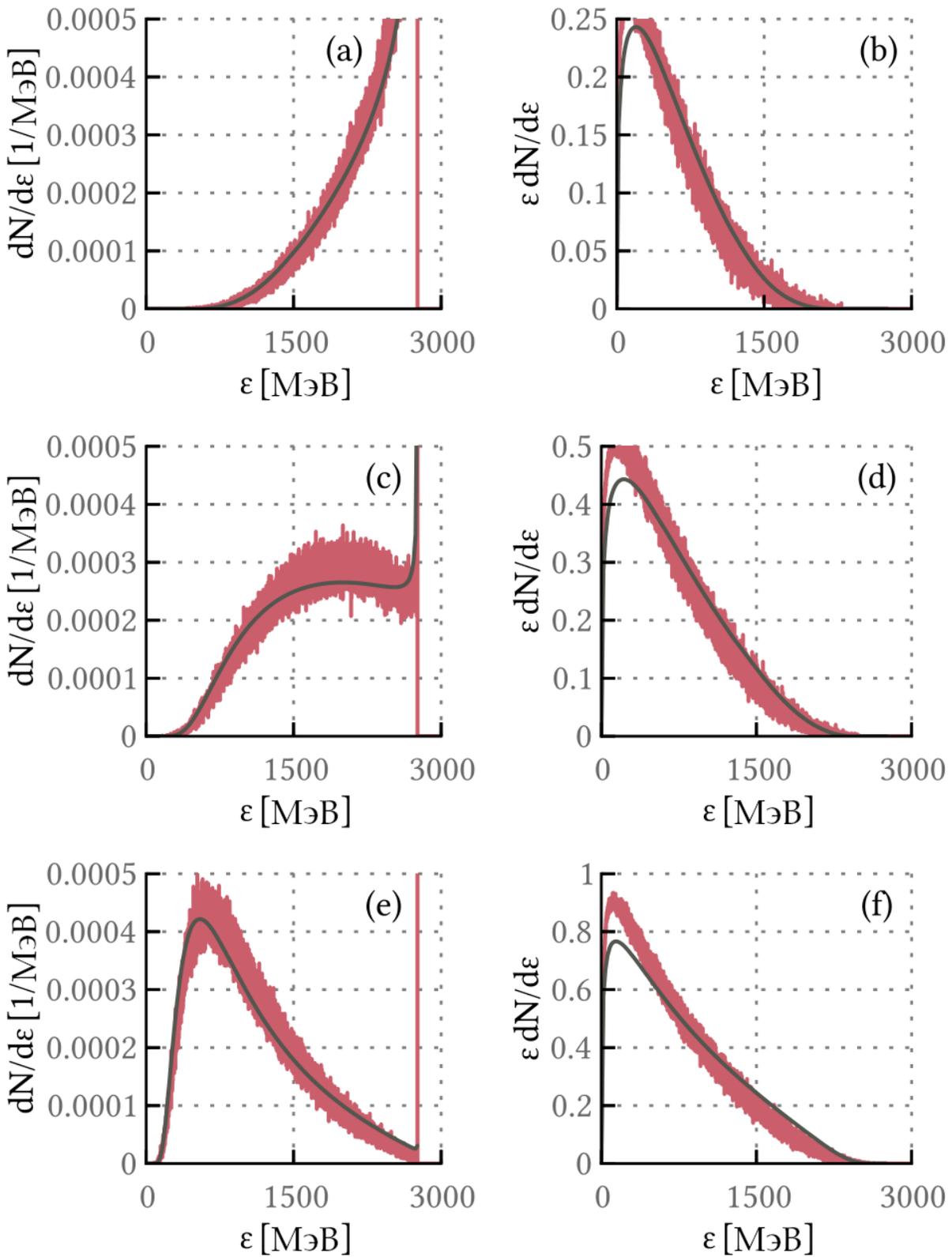


Рис. 2: Распределение электронов по энергиям (левая колонка) и спектры фотонов (правая колонка) при столкновении лазерного импульса с пучком электронов посчитанные, используя PIC-МС (красные кривые) и решая уравнение Больцмана с ПГПП (черные кривые). Амплитуда лазера меняется так, что в ПГПП в начале  $\chi = 0.3$  для графиков (a), (b),  $\chi = 0.6$  для графиков (c), (d) и  $\chi = 1.2$  для (e), (f).

Таблица 1: Средняя энергия электронов и число фотонов (на электрон) с энергией  $> 100$  МэВ для результатов моделирования, представленных на рисунках 1 и 2.

Figure	$\langle \varepsilon_e \rangle_{PIC}$ [МэВ]	$\langle \varepsilon_e \rangle_{Sc}$ [МэВ]	$n_{\gamma, PIC}$	$n_{\gamma, Sc}$
1(a), 1	391	248	0.57	0.83
1(a), 2	674	667	0.57	0.58
1(a), 3	845	845	0.18	0.20
2(a-b)	2347	2335	1.02	0.96
2(c-d)	1813	1807	2.10	1.91
2(e-f)	1037	1055	3.66	3.25

ных счетах обрезка сделана на 100 МэВ, см. таблицу 1), нормированное на число электронов, которые приведены в таблице 1 для всех результатов моделирования, изображенных на рисунках 1 и 2. В таблице 1 результаты моделирования PIC-МС отмечены как PIC, а результаты моделирования кодом *Scintillans* - как "Sc". Первый ряд таблицы включает результаты моделирования PIC с учетом дифракции лазерных импульсов (красная линия 1 на рисунке 1(a)).

Заметим, что для параметров рисунков 2(a)-(f) нарушаются почти все предположения в которых были получены уравнения (19). А именно, спектр излучения не определяется только классической синхротронной формулой и критической частотой  $\omega_c$ . Уже при  $\chi \approx 0.2$  мощность излучения составляет всего 1/2 от рассчитанной по формуле из классической электродинамики [91]. Кроме того, центральная предельная теорема неприменима, поскольку количество излученных фотонов мало, и последовательные события испускания фотонов нельзя считать независимыми (после излучения первого фотона, энергия электрона заметно изменится, что скажется на излучении второго фотона). Таким образом, достаточно хорошее совпадение решений уравнения Больцмана в ПГПП и результатов моделирования PIC с переменным лазерным полем показывают, что можно найти более корректное соотношение чем (19).

## 2.2.5 Заключение к подглаве

В данной главе рассматривалось приближение Фоккера–Планка (ФП), когда число излучаемых фотонов на один электрон велико, а энергия отдельных фотонов

мала. Рассматривались две ситуации: излучение фотонов электронами в постоянном магнитном поле и излучение фотонов электронами при прохождении пучка этих электронов через лазерный импульс. Получающиеся электронные спектры одинаковы в обеих задачах, если параметры задач соотносятся согласно (19). Таким образом, в приближении ФП можно вычислять электронные спектры в приближении глобального постоянного поля (ПГПП) вместо использования переменного лазерного поля. Стоит заметить, что ПГПП может быть оправдан также в сверхкритическом режиме  $\chi \gg 1$  [54].

Моделирование PIC демонстрирует, что установленное соответствие (19) может быть использовано далеко за пределами применимости приближения ФП. А именно, электронный спектр, рассчитанный в ПГПП, хорошо согласуется со спектром, рассчитанным в лазерном поле для  $\chi \approx 1$  (это значит, что энергия излученного фотона сравнима с энергией электрона) или для малого количества излучаемых фотонов. Более того, спектры испускаемых фотонов в постоянном магнитном поле и в поле лазера в этих режимах достаточно хорошо совпадают друг с другом.

В ПГПП электронные и фотонные спектры могут быть эффективно вычислены из одномерных уравнений Больцмана, для чего разработан открытый код *Scintillans* [95]. Код точно сохраняет число электронов и суммарную энергию частицы. Очевидно, что в одномерных уравнениях Больцмана не учтены ни дифракция импульсов, ни расталкивание электронов в пучке. Однако упомянутые эффекты, как правило, малы и ими можно пренебречь для типичных параметров взаимодействия лазерного импульса с электронным пучком.

Теоретический анализ реакции излучения в лазерных полях, т.е. анализ эффекта стохастичности – довольно сложная задача и часто требует численного моделирования [92, 93, 98, 99]. Полученные выражения (19) позволяют исследовать аналитически процессы в лазерных полях, не прибегая к численному моделированию.

В контексте недавнего экспериментального исследования реакции излучения [14, 97] ПГПП тоже может быть полезным. Моделирование *Scintillans* занимает всего несколько секунд, тогда как PIC моделирование может занимать минуты и часы, следовательно, поиск оптимальных экспериментальных параметров [100] гораздо проще с использованием ПГПП. Кроме того, в опытах где спектр электронов известен до и после столкновения [14], можно найти амплиту-

ду и длительности лазерного импульса, сравнивая экспериментальные результаты с результатами моделирования *Scintillans* для большой области параметров. Такое сравнение может позволить избежать экспериментальных неопределенностей и четко различать в каком режиме реакции излучения мы работаем.

## 2.3 Учет показателя преломления в задаче об излучении заряженной частицы

### 2.3.1 Синхронизм между волной и током в классической электродинамике

Излучение ультрарелятивистской заряженной частицы при  $n = 1$  хорошо известно, а выражения для спектров можно найти во многих учебниках, например в [101]. Однако эти расчеты часто трудно распространить на случай  $n \neq 1$  из-за членов, которые могут быть сингулярны для черенковского излучения. В классической электродинамике ключевой особенностью процесса излучения является синхронизм между излучающим током и испускаемой волной. Для начала получим общие формулы для углового и спектрального распределения излучаемой энергии в более удобной форме. Выражения здесь пишутся для случая  $n = 1$ , однако в той форме, в которой они получены здесь, их легко обобщить на случай  $n \neq 1$ , если  $\delta n \ll 1$ . Здесь и далее рассматривается только действительная часть показателя преломления.

Будем рассматривать излучение электромагнитных волн плотностью тока  $\mathbf{j}$  внутри виртуального сверхпроводящего прямоугольного ящика (резонатора или полости) размером  $L_x \times L_y \times L_z$ . Излучаемое поле можно разложить по комплексным модам резонатора с хорошо известной синусоидальной структурой в пространстве и структурой во времени  $\exp(-i\omega_s t)$ :

$$\mathbf{E} = \sum_s C_s \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{B} = \sum_s C_s \mathbf{B}_s, \quad (36)$$

где  $s$  есть номер обобщенной моды, а  $\omega_s$  циклическая частота моды,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — электрическое и магнитное поля соответственно. Выберем моды ортогонально,

используя следующую нормировку:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}_s \mathbf{E}_l^* + \mathbf{B}_s \mathbf{B}_l^*) dV = \hbar \omega_s \delta_{sl}, \quad (37)$$

где символ  $*$  означает комплексное сопряжение. Следовательно, энергия излучаемого поля равна

$$I = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{E}^* + \mathbf{B} \mathbf{B}^*) dV = \sum_s \hbar \omega_s |C_s|^2, \quad (38)$$

и  $|C_s|^2$  можно интерпретировать как вероятность излучения фотона с модой  $s$ .

Для нахождения коэффициентов  $C_s$ , можно начать с уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (40)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (41)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (42)$$

где  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — заряд и плотность тока соответственно. Пусть рассматриваемый ток  $\mathbf{j}$  излучает в течение  $t \in (t_1, t_2)$ , а при  $t < t_1$  и  $t > t_2$   $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ . Таким образом, разложение (36) справедливо при  $t > t_2$ . Умножим уравнение (39) на  $\mathbf{B}_s^*$  и вычтем его из уравнения (40), умноженного на  $\mathbf{E}_s^*$ . Результат проинтегрируем по пространству и времени:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{E}_s^* \mathbf{E} + \mathbf{B}_s^* \mathbf{B}) dV \Big|_{t_1}^{t_2} + 4\pi \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_s^* dV dt = \\ = c \int_{t_1}^{t_2} \oint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_s^* \mathbf{E} \times \mathbf{B}_s^*) dS dt, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $V$  объем виртуального ящика и  $S$  его граница.

Полость можно выбрать достаточно большой, чтобы  $\mathbf{E}(t_2) = \mathbf{B}(t_2) = 0$  на границе, в этом случае правая часть (43) равно нулю. Кроме того,  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  при  $t = t_1$ , поэтому из (43), с учетом (36) и (37) получаем:

$$C_s = -\frac{1}{2\hbar \omega_s} \int_t \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_s^* dV dt. \quad (44)$$

Уравнение (44) имеет вполне понятный физический смысл. Умножив его на  $\hbar\omega_s C_s^*$ , мы получим равенство между энергией, излучаемой в моду  $s$ , и работой тока  $\mathbf{j}$  на половине поля излучаемой моды. Эта работа максимальна, если достигается синхронизм между током и полем моды. Стоит отметить, что формула (44) аналогична амплитуде осциллятора, приводимого в действие внешней силой.

Для ультрарелятивистского электрона, который излучает в основном в направлении своего движения, можно упростить вычисление  $C_s$ . Во первых, ток создаваемый таким электроном есть:

$$\mathbf{j} = -ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (45)$$

где  $\mathbf{r}(t)$  траектория электрона. Во-вторых, каждая из комплексных мод образована восемью комплексными плоскими волнами  $\propto \exp(-i\omega_s t + i\mathbf{k}_s \mathbf{r})$  (за исключением нескольких мод с волновым вектором, параллельным границам ящика). Это дает восемь членов в интеграле по  $t$  в (44). Можно заметить, что один из членов колеблется значительно медленнее, чем другие и, следовательно, они могут быть отброшены. Например, если  $k_x \approx \omega_s/c$  и  $x(t) \approx ct$ , то член  $\exp[i\omega t - ik_x x(t)]$  нельзя отбросить, тогда как член  $\exp[i\omega t + ik_x x(t)]$  – можно. Пусть оставшийся член соответствует волне с направлением поляризации  $\mathbf{e}_s$  (где  $e_s^2 = 1$ ). Амплитуда этой оставшейся волны,  $a_s$ , может быть найдена из нормировки (37); энергия волны равна  $\hbar\omega_s/8$ , следовательно,  $a_s = (2\pi\hbar\omega_s/V)^{1/2}$ . Поэтому из уравнения (44),

$$C_s = -\frac{e}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar\omega_s V}} \int_t \mathbf{v} \mathbf{e}_s \exp [i\omega_s t - i\mathbf{k}_s \mathbf{r}(t)] dt. \quad (46)$$

Ультрарелятивистская частица испускает фотоны в узкий конус вокруг направления скорости частицы. Таким образом, энергия, излучаемая в определенном направлении, может быть легко вычислена из энергии мод. Плотность мод, имеющих в разложении плоскую волну в заданном единичном телесном угле в единичном интервале частот может быть найдена из граничных условий для виртуальной сверхпроводящей коробки. Отсюда, полная излучаемая энергия может быть выражена через излучаемую энергию в единичный частотный интервал и

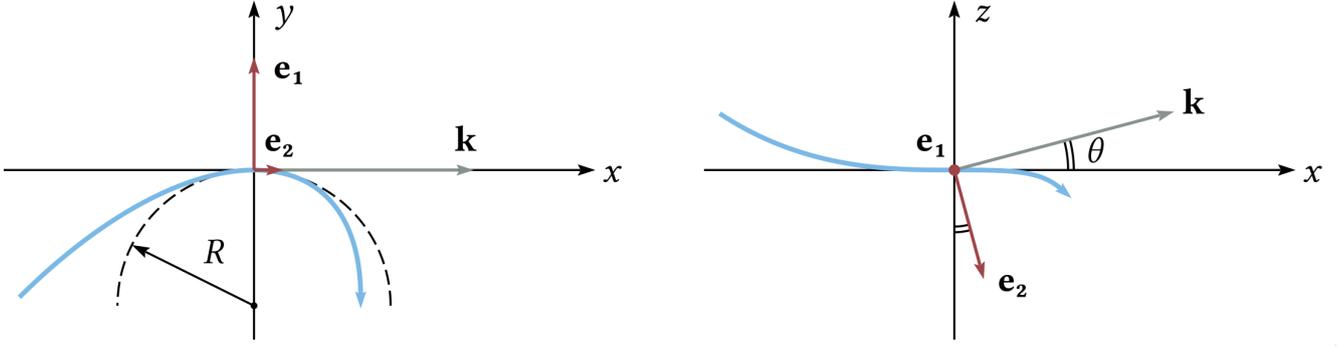


Рис. 3: Локальные координаты, используемые в вычислениях. Для заданного волнового вектора  $\mathbf{k}$  начало находится на траектории электрона (синяя кривая), где  $\mathbf{k}$  перпендикулярен вектору нормали траектории. Поэтому, ось  $x$  есть касательная к траектории, ось  $y$  параллельна вектору нормали, а ось  $z$  выбирается по правилу правой руки. Вектор поляризации  $\mathbf{e}_1$  выбирается вдоль оси  $y$  и  $\mathbf{e}_2$  перпендикулярно  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{k}$ .

в единичный телесный угол:

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_s \hbar\omega_s |C_s|^2 = \\
 &= \frac{\hbar V}{\pi^3 c^3} \int \int \omega^3 \sum_e |C_e|^2 d\omega d\Omega = \\
 &= \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \int \int \omega^2 \sum_e \left| \int \mathbf{e}\mathbf{v}(t) \exp[i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] dt \right|^2 d\omega d\Omega,
 \end{aligned} \tag{47}$$

где  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2$ ) направления поляризации. Уравнение (47) очень полезно для оценки временных масштабов излучения и длины формирования излучения синхротронного и синхротронно-черенковского излучения, обсуждаемых далее. Заметим также, что (47) (вопреки (14.65) из [101]) записано в такой форме, что не содержит членов, пропорциональных  $1/(1 - \mathbf{v}\mathbf{k}/\omega)$ , таким образом, его можно использовать даже в случае точного черенковского синхронизма.

Таким образом, особенностью испускания фотона ультрарелятивистской заряженной частицей является синхронизм между током частицы и излучаемой волной, как видно из (44), (46) и (47). Фаза экспоненциальной функции в этих уравнениях в случае  $n = 1$  (отсюда  $k = \omega/c$ ), медленно меняется вблизи точки, где угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{k}$  минимален. Для простоты предположим, что есть только одна такая точка, и она находится в начале локальной системы координат (см. рисунок 3) и частица находится в начале координат при  $t = 0$ .

В синхротронном приближении или приближении локально постоянного поля траектория частицы локально описывается круговой орбитой и полностью определяется локальным радиусом кривизны  $R$  и Лоренц фактором  $\gamma$ :

$$x \approx R \sin(vt/R) \approx vt - \frac{(vt)^3}{6R^2}, \quad (48)$$

$$y \approx R [\cos(vt/R) - 1] \approx -\frac{(vt)^2}{2R}. \quad (49)$$

Тогда выражение в предэкспоненциальной функции в подынтегральном выражении (47) может быть упрощено следующим образом:

$$\mathbf{v}e_1 \approx c^2 t/R, \quad (50)$$

$$\mathbf{v}e_2 \approx c \sin \theta, \quad (51)$$

$$\exp[i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] \approx \exp[i\phi(t)], \quad (52)$$

где фаза  $\phi$  получается аналогично (14.76) и (14.77) из [101] и содержит только линейные и кубические члены:

$$\phi(t) = 2\pi \left[ \frac{t}{\tau_{\parallel}} + \left( \frac{t}{\tau_{\perp}} \right)^3 \right]. \quad (53)$$

Здесь  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$  — времена расфазировки между электроном и излучаемой волной, связанные с продольным (вдоль оси  $x$ ) и поперечным (вдоль оси  $y$ ) движением электрона соответственно:

$$\tau_{\parallel} = \frac{4\pi}{\omega(\theta^2 + 1/\gamma^2)}, \quad (54)$$

$$\tau_{\perp} = \left( \frac{12\pi\gamma^2}{\omega\omega_B^2} \right)^{1/3}, \quad (55)$$

где для удобства введена эффективная напряженность магнитного поля  $B$  так, что  $v = \omega_B R/\gamma$  и

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} \quad (56)$$

есть циклотронная частота в этом поле. Заметим, что  $\tau_{\parallel}$  зависит от  $v$  (следовательно, от  $\gamma$ ) и не зависит от  $R$ , тогда как  $\tau_{\perp}$  зависит от  $R \propto \gamma/\omega_B$  и не зависит отдельно от  $\gamma$ .

Известные соотношения (14.78) и (14.83) из учебника [101], описывающие угловые и спектральное распределение синхротронных фотонов, можно легко получить из (47) и (50)-(53). Основная особенность синхротронного спектра — критическая частота (см. (14.85) в [101]; стоит обратить внимание, что в разной литературе используется разный числовой коэффициент)

$$\omega_c = \frac{3\gamma^3 c}{R} = 3\omega_B \gamma^2. \quad (57)$$

Энергия, излучаемая на единицу частотного интервала на единицу телесного угла,  $d^2 I/d\omega d\Omega$ , имеет максимум при  $\theta = 0$  и  $\omega \approx 0.42 \times \omega_c$ .

Если  $\omega \gg \omega_c$  или  $\theta \gg 1/\gamma$ , излучаемая энергия резко стремится к нулю, что можно объяснить, используя  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$ . Критическая частота соответствует  $\tau_{\perp}/\tau_{\parallel} = 3/(4\pi)^{2/3} \approx 0.56$ . Если  $\omega$  сильно больше  $\omega_c$  или если  $\omega \sim \omega_c$  и  $\theta$  увеличивается за пределы  $1/\gamma$ , тогда  $\tau_{\parallel}$  становится меньше, чем  $\tau_{\perp}$ . Следовательно, экспоненциальная функция (52), (53) сильно осциллирует, следовательно, синхротронные интегралы стремятся к нулю. Наличие показателя преломления меняет основное уравнение для вероятности испускания фотона, но она по-прежнему определяется синхронизмом между излучаемой волной и током заряженной частицы т.е. через  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$ , однако выражения для них должны быть перезаписаны с учетом показателя преломления. Синхронизм — это единственное на что может влиять показатель преломления при малом  $\delta n$ . Таким образом, чтобы принять во внимание показатель преломления в классической электродинамике, нужно только заменить соотношение между частотой фотона и волновым вектором на  $k = n\omega/c$  в фазе. Модовую структуру, энергию мод и их нормировку можно считать неизменными.

### 2.3.2 Выражения для спектров излучения с учетом показателя преломления

Если следовать квазиклассической теории Байера–Каткова–Страховенко (сокращенно БКС) для вывода спектрального и углового распределения синхротронных фотонов [7], можно обнаружить, что наличие вакуумного показателя преломления ничего в нем не меняет, кроме фазы в экспоненциальном множителе. Стоит заметить, что показатель преломления учитывается вплоть до (2.26) в [7] (см. также [102]). Однако в теории БКС используются два допущения, о кото-

рых следует упомянуть. Во-первых, предполагается, что угол между направлением распространения испускаемого фотона и скоростью электрона мал,  $\theta \ll 1$ . Как видно из (70), величина  $\tau_{\parallel}$  уменьшается с увеличением  $\theta$  если  $\theta \gtrsim 1/\gamma$  (для  $1/\gamma^2 \gtrsim \delta n$ ) или если  $\theta \gtrsim \sqrt{\delta n}$ . Уменьшение  $\tau_{\parallel}$  приводит к уменьшению мощности излучения, следовательно, фотоны излучаются в конус  $\theta \lesssim \max(1/\gamma, \sqrt{\delta n}) \ll 1$ .

Второе важное предположение теории БКС состоит в том, что  $\omega^2 - c^2 k^2 = 0$ , однако при наличии  $n \neq 1$  это не так и дисперсионное соотношение будет другим. Как показано в [7] (см. уравнение (2.26)), появляется дополнительное слагаемое в фазе, если  $\omega \neq ck$ . Этот дополнительный член следует учитывать для переходного излучения [102]. Экспоненциальная функция в (2.27) из [7] с этим членом имеет следующий вид (здесь опущены члены с моментом времени  $t_2$  для краткости):

$$\exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega} \left[ \omega t_1 - \mathbf{k}\mathbf{r}(t_1) - \frac{\hbar(\omega^2 - c^2 k^2)t_1}{2\varepsilon} \right] \right\}, \quad (58)$$

где  $\varepsilon$  энергия электрона. При использовании разложения в ряд Тейлора для круговой траектории электрона, в фазе получается линейный член следующего вида:

$$\frac{i\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega} \left[ \frac{\omega t_1}{2\gamma^2} - \frac{\hbar(\omega^2 - c^2 k^2)t_1}{2\varepsilon} \right]. \quad (59)$$

Таким образом, отношение  $\hat{r}$  второго слагаемого в фазе (59) к старшему линейному члену порядка  $\hat{r} \sim 2\gamma^2 \delta n \hbar\omega/\varepsilon$ , что дает  $\hat{r} \sim (2\pi)^{-1} \alpha \chi \varkappa N(\varkappa) \lesssim 4 \times 10^{-4} \chi$  для электронов и  $\hat{r} \sim (2\pi)^{-1} \alpha \chi \varkappa N(\varkappa) m/m_{\mu} \lesssim 2 \times 10^{-6} \chi$  для мюонов (здесь используются (85) и (86)). Стоит обратить внимание, что оценка приведенная здесь справедлива даже для диапазона  $\hbar\omega/\varepsilon \lesssim 1/\chi \ll 1$ , где показатель преломления в вакууме максимален. Поэтому значение  $\chi$ , для которого параметр разложения в теории возмущения КЭД мал ( $\chi \ll 1600$ ),  $\hat{r} \ll 1$ . Как видно из (59), член  $\propto \omega^2 - c^2 k^2$  просто корректирует линейный фазовый член, т.е. корректирует величину  $\tau_{\parallel}$ . Следовательно, если  $\hat{r} \ll 1$ , дополнительным членом в фазе  $\propto (\omega^2 - c^2 k^2)$  можно пренебречь и считать что  $\tau_{\parallel}$  определяется (70).

Квазиклассическая формула для испускания фотона может быть переписана в форме, близкой к классической, как показано в [103] для  $n = 1$ . Однако для учета  $\delta n$  в формуле требуется избавиться от  $1/(1 - \mathbf{v}\mathbf{k}/\omega)$ , возникающего в предэкспоненте под интегралом. Для этого можно начать с формулы для испус-

кания фотона неполяризованным электроном (см. уравнение (34) в [103] и (6) в дополнительных материалах к работе [3]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = & \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[ \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2\varepsilon^2} \left| \int dt \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^2} \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})] \right|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar\omega mc^2}{\varepsilon^2} \right)^2 \left| \int dt \frac{\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^2} \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})] \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (60)$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}/c$ ,  $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$  (здесь  $|\mathbf{n}| = 1$ ), и

$$\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega, \quad (61)$$

$$\omega' = \omega\varepsilon/\varepsilon', \quad (62)$$

где  $\varepsilon$  энергия электрона перед излучением фотона. Можно заметить, что

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^2}, \quad (63)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^2}, \quad (64)$$

$$\frac{d}{dt} \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})] = i\omega'(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})]. \quad (65)$$

Следовательно, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = & \frac{e^2 \omega'^2}{4\pi^2 c} \left[ \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2\varepsilon^2} \sum_e \left| \int dt \boldsymbol{\beta} \mathbf{e} \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})] \right|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar\omega mc^2}{\varepsilon^2} \right)^2 \left| \int dt \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\boldsymbol{\rho})] \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (66)$$

где произведение  $\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}$  записано через  $\boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_1$  и  $\boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_2$ . Теперь, чтобы учесть показатель преломления  $n$  требуется подставить  $|\mathbf{n}| \equiv |c\mathbf{k}/\omega| = n = 1 + \delta n$  в показателе экспоненты (66).

Таким образом, в поляризованном вакууме, энергия излучаемая электроном

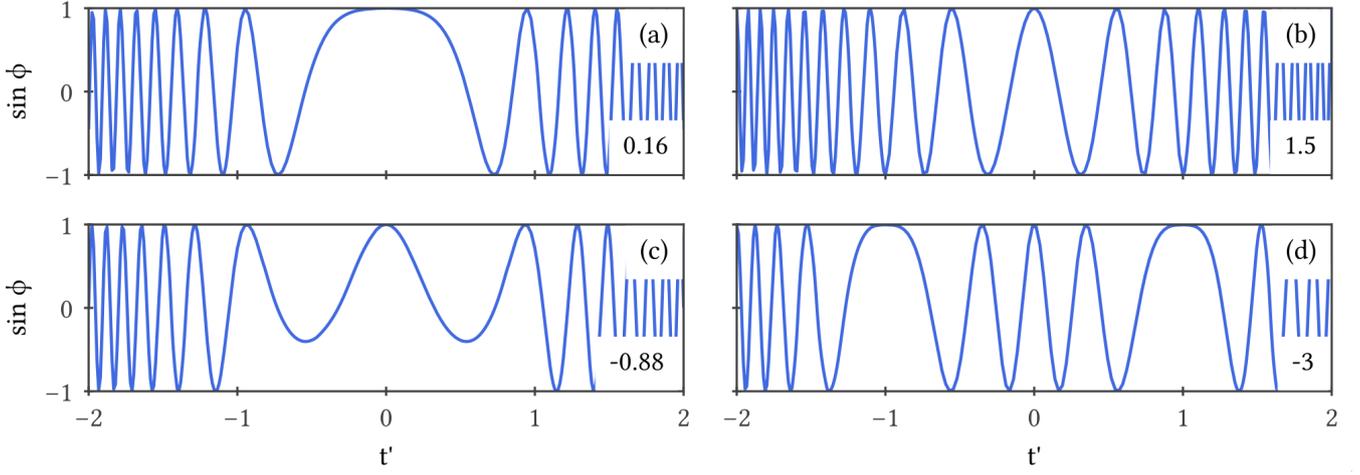


Рис. 4: Функция  $\cos[\phi(t')]$  для фазы (53), а именно  $\phi(t') = 2\pi(at' + t'^3)$  где  $t' = t/\tau_{\perp}$  и  $a = \xi\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$ . Значения параметра  $a$  показаны в правых нижних углах.

на единицу частотного интервала и в единицу телесного угла определяется (66), где показатель преломления присутствует только в экспоненциальной функции:

$$\exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\rho)], \quad (67)$$

где  $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$ ,  $|\mathbf{n}| = n$  показатель преломления,  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  волновой вектор и циклическая частота испускаемого фотона,  $\omega' = \omega\varepsilon/\varepsilon'$ ,  $\varepsilon$  энергия электрона,  $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$  и  $\rho = \mathbf{r}/c$  нормированное положение электрона.

Уравнение (66) отличается от классического (47) в двух местах. Во-первых, появляется дополнительный спиновый член в (66), обусловленный переворотом спина [7, 91, 104]. Во-вторых, возникает так называемый эффект отдачи, который заключается в том, что  $\omega$  в экспоненте заменяется на  $\omega'$ . Следовательно, если энергия фотона примерно равна энергии электрона, отдача сильно влияет на синхронизм. В частности, эффект отдачи сжимает спектр фотонов так, что он ограничивается энергией электрона.

Все члены в (66), включая спиновый член, содержат экспоненциальные функции одного вида. В приближении локального постоянного поля фаза в экспоненте может быть разложена в ряд Тейлора также, как и в классическом случае,  $\exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\rho)] \approx \exp[i\phi(t)]$  где

$$\phi(t) = 2\pi \left[ \frac{\varsigma t}{\tau_{\parallel}} + \left( \frac{t}{\tau_{\perp}} \right)^3 \right], \quad (68)$$

$$\varsigma = \text{sgn}(\theta^2 + 1/\gamma^2 - 2\delta n). \quad (69)$$

Следует заметить, что, если приближение локального постоянного поля не работает, то требуется учесть показатель преломления не только для излучаемых фотонов, но и для лазерного поля. Это аналогично случаю, когда лазерный импульс распространяется в плазме и последняя меняет его характеристики, например групповую скорость [105]. Таким образом, как и для классического синхротронного излучения, спектр синхротронно-черенковского излучения на данной частоте  $\omega$  определяется только двумя временными масштабами

$$\tau_{\parallel} = \frac{4\pi}{\omega'|\theta^2 + 1/\gamma^2 - 2\delta n|}, \quad (70)$$

$$\tau_{\perp} = \left( \frac{12\pi\gamma^2}{\omega' \omega_B^2} \right)^{1/3}, \quad (71)$$

где  $\theta$  – угол между скоростью частицы при  $t = 0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_B = eB/mc$  циклотронная частота и  $B$  напряженность магнитного поля. Легко видеть, что временные масштабы отличаются от таковых для классического синхротронного спектра, заданного по (54) и (55).

Показатель преломления дает новый эффект: может измениться знак перед линейным членом (первое слагаемое в (59)). Если условие Черенкова выполнено,  $\beta n > 1$ , то по крайней мере при  $\theta \approx 0$   $\zeta = -1$ . Как будет показано далее, в случае  $\zeta < 0$  спектр излучения может сильно отличаться от синхротронного.

Аналогично классическому синхротронному излучению критическая частота  $\omega_c$  может быть определена

$$\omega_c = \frac{\varepsilon\omega'_c}{\varepsilon + \hbar\omega'_c}, \quad (72)$$

$$\omega'_c = \frac{3\omega_B\gamma^2}{|1 - 2\delta n\gamma^2|^{3/2}} \quad (73)$$

как частота на которой  $\tau_{\perp}$  и  $\tau_{\parallel}$  величины одного порядка при  $\theta = 0$ , а именно для  $\omega = \omega_c$  имеем  $\tau_{\perp}/\tau_{\parallel} = 3/(4\pi)^{2/3} \approx 0.56$ .

Если квантовый параметр  $\chi = \gamma B/B_{cr} \ll 1$ , то квантовые формулы сводятся к классическим и можно пренебречь эффектом отдачи  $\omega_c \approx \omega'_c \approx 3\omega_B\gamma^2$ . Спиновое слагаемое в этом случае также исчезает. Поэтому (если дополнительно  $\delta n = 0$ ) максимум  $d^2I/d\omega d\Omega$  находится в точке  $\theta = 0$  и  $\omega \approx 0.42\omega_c$ .

В квантовом пределе  $\chi \gg 1$  (и при  $\delta n = 0$ ) (73)) дает  $\hbar\omega_c \gg \varepsilon$ , что физически неверно и является следствием пренебрежения эффектом отдачи. Этот эффект

существенно меняет критическую частоту:  $\hbar\omega_c \approx \varepsilon[1 - 1/(3\chi)]$ ,  $\omega_c$  становится очень близка к верхней границе спектра  $\varepsilon/\hbar$ . Поэтому в квантовом пределе почти для всех частот  $\tau_\perp \ll \tau_\parallel$  и слагаемым  $t/\tau_\parallel$  в фазе (68) можно пренебречь.

Для показателя преломления поляризованного вакуума для электронов условие Черенкова выполняется только в квантовом случае, т.е.  $n\beta > 1$  может быть достигнуто, только если  $\chi \gg 1$ . Как видно из (70) и (71), показатель преломления влияет только на  $\tau_\parallel$ , т.е. только на линейный член в фазе. Однако, в квантовом случае этот член пренебрежимо мал практически для всех частот синхротронного спектра. Поэтому для модификации синхротронного спектра показатель преломления должен быть достаточно большим, чтобы не только изменить  $\tau_\parallel$ , но и сделать его намного меньше, чем в случае  $\tau_\perp$ . Это объясняет, почему одного Черенковского условия не достаточно, чтобы изменить синхротронный спектр.

### 2.3.3 Время формирования излучения для синхротрон-Черенковского излучения

Длина формирования излучения – это длина пути электрона (его траектории), на которой вносится наибольший вклад в интегралы в (47) и (66). Она, очевидно, зависит от частоты излучаемой волны, хотя для синхротронного излучения часто предполагается  $\omega \sim \omega_c$ .

Время формирования излучения (т.е. длина формирования излучения, деленная на  $c$ ) можно оценить рассмотрев следующий интеграл:

$$\mathcal{I}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} f(t) \sin[\phi(t)] dt, \quad (74)$$

где  $f(t)$  и  $\phi(t)$  медленно меняющиеся функции, а  $\sin[\phi(t)]$  содержит много периодов колебаний на интервале  $[t_a, t_b]$ . Вклад одного периода колебаний можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t_0, t_2) &= \int_{t_0}^{t_2} f(t) \sin[\phi(t)] dt \approx \\ &\approx 2fT|_{(t_0+t_1)/2} - 2fT|_{(t_1+t_2)/2} \approx - \int_{t_0}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} fT \right) dt. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь  $t_0, t_1, t_2$  – моменты времени, соответствующие  $\phi = 0, \pi, 2\pi$ , соответ-

ственно. Непрерывная функция  $T(t)$  приблизительно равна локальному периоду функции  $\sin[\phi(t)]$ . Очевидно, что оценку (75) для  $I(t_a, t_b)$  можно распространить на случай  $t_b - t_a = 2\pi N_T$ , где  $N_T$  - некоторое натуральное число. В этом случае интеграл можно оценить как разность между интегралом от первого «пики» (первой половины периода) и последнего, тогда как промежуточные «пики» не вносят вклада. Наконец, интеграл, определяющий скорость сходимости  $\mathcal{I}(-\infty, \infty)$  можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{I}(t, \infty) \sim f(t)T(t), \quad (76)$$

где предполагается, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} fT = 0$ .

Локальный период колебаний фазы (68) вдали от седловых точек равен

$$T(t) \approx 2\pi \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^{-1} = \left( \frac{\varsigma}{\tau_{\parallel}} + \frac{3t^2}{\tau_{\perp}^3} \right)^{-1}. \quad (77)$$

Интегралы в (66) для  $\beta e_i$  из (50) и (51) содержат  $f(t) = 1$  и  $f(t) = t$ , оба приводят к одному и тому же времени формирования излучения, таким образом далее для простоты полагаем  $f(t) = t$ .

Для синхротронного излучения на низких частотах ( $\tau_{\perp} \lesssim \tau_{\parallel}$ ,  $\varsigma = +1$ ) доминирующий «пик» подынтегральной функции имеет ширину порядка  $\tau_{\perp}$  [см. рисунок 4(a)], а для  $t \gg \tau_{\perp}$  получается  $\mathcal{I}(t, \infty) \propto 1/t$ . Следовательно, время формирования излучения  $t_{rf} \sim \tau_{\perp}$  в этом случае. Для высоких частот [ $\tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}$ ,  $\varsigma = +1$ , см. рисунок 4(b)] вклад под интегралом затухает,  $\mathcal{I}(t, \infty) \propto 1/t$ , только если  $t \gg t_s$  где

$$t_s = \sqrt{\frac{\tau_{\perp}^3}{3\tau_{\parallel}}} \quad (78)$$

точка, в которой линейный и кубический члены фазы дают одинаковые периоды колебаний. Таким образом, здесь время формирования излучения  $t_{rf} = t_s \gtrsim \tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}$ .

Рассмотрим черенковскую ветвь синхротрон-Черенковского излучения ( $\varsigma = -1$ ). Если  $\tau_{\perp} \lesssim \tau_{\parallel}$ , то знак линейного члена не важен и  $t_{rf} \sim \tau_{\perp}$ . Однако в случае  $\tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}$  подынтегральная функция существенно меняется [см. рис. 4(c) и (d)]: наибольший вклад в синхротронно-черенковские интегралы вносят области вокруг двух седловых точек  $t = \pm t_s$ . Если  $\tau_{\parallel} \ll \tau_{\perp}$ , фазу вблизи седловой точки

(например,  $t = +t_s$ ) можно аппроксимировать параболической зависимостью:

$$\phi = 2\pi \left( -\frac{t}{\tau_{\parallel}} + \frac{t^3}{\tau_{\perp}^3} \right) \approx \frac{6\pi t_s}{\tau_{\perp}^3} (t - t_s)^2 + \text{const}, \quad (79)$$

где членом в правой части  $2\pi(t - t_s)^3/\tau_{\perp}^3$  пренебрегается. Можно найти ширину пика в  $t_s$ :

$$T(t_s) \sim \left( \frac{\tau_{\perp}^3}{t_s} \right)^{1/2} \sim \tau_{\perp}^{3/4} \tau_{\parallel}^{1/4}, \quad (80)$$

Следовательно, кубический член на самом деле мал:  $(t - t_s)^3/\tau_{\perp}^3 \sim T^3(t_s)/\tau_{\perp}^3 \sim (\tau_{\parallel}/\tau_{\perp})^{3/4} \ll 1$ . Параболическая зависимость в фазе приводит к достаточно быстрой сходимости интегралов, т.е.  $fT \sim 1/|t - t_s|$  для  $T(t_s) \ll |t - t_s| \ll t_s$ .

Важным следствием приведенных выше оценок является то, что  $\tau_{\parallel} \ll T(t_s) \ll \tau_{\perp} \ll t_s$  в случае  $\varsigma = -1$  и  $\tau_{\parallel} \ll \tau_{\perp}$ . Это означает, что седловые точки  $t = \pm t_s$  находятся далеко друг от друга, и существует фазовый сдвиг между интегралами вокруг этих точек. Если считать, что вклады с этих «пиков» примерно одинаковые, то весь интеграл есть сумма вероятностей, которые вычисляются отдельно для  $t = +t_s$  и  $t = -t_s$ , и перекрестного слагаемого. Это также означает, что в качестве длины формирования излучения в этом случае нужно брать не расстояние между этими точками, а ширину выступов,  $t_{rf} \sim T(t_s) \sim \tau_{\perp}^{3/4} \tau_{\parallel}^{1/4} \ll \tau_{\perp}$ .

Суммируя вышеизложенное, длина формирования излучения для синхротронно-черенковского излучения:

$$t_{rf}/\tau_{\perp} \sim \begin{cases} 1, & \text{for } \tau_{\perp} \lesssim \tau_{\parallel}. \\ (\tau_{\perp}/\tau_{\parallel})^{1/2}, & \text{for } \tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}, \varsigma = 1. \\ (\tau_{\perp}/\tau_{\parallel})^{1/4}, & \text{for } \tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}, \varsigma = -1. \end{cases} \quad (81)$$

Помимо длины формирования излучения синхротронно-черенковские интегралы зависят от отношения  $\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$ . Например, можно заметить, что интегралы экспоненциально затухают с увеличением  $\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$ , если  $\tau_{\perp} \gg \tau_{\parallel}$  и  $\varsigma = +1$  [см. рисунок 4(b)]. Вероятность излучения становится очень мала в данном случае. Принимая это во внимание, из (81) можно отметить, что во всех важных случаях длина формирования излучения меньше или порядка  $\tau_{\perp}$ , а последняя величина от показателя преломления не зависит. Отметим также, что в режиме, где кажется, что должен преобладать черенковский режим излучения,  $\delta n \gg 1/\gamma^2$ ,

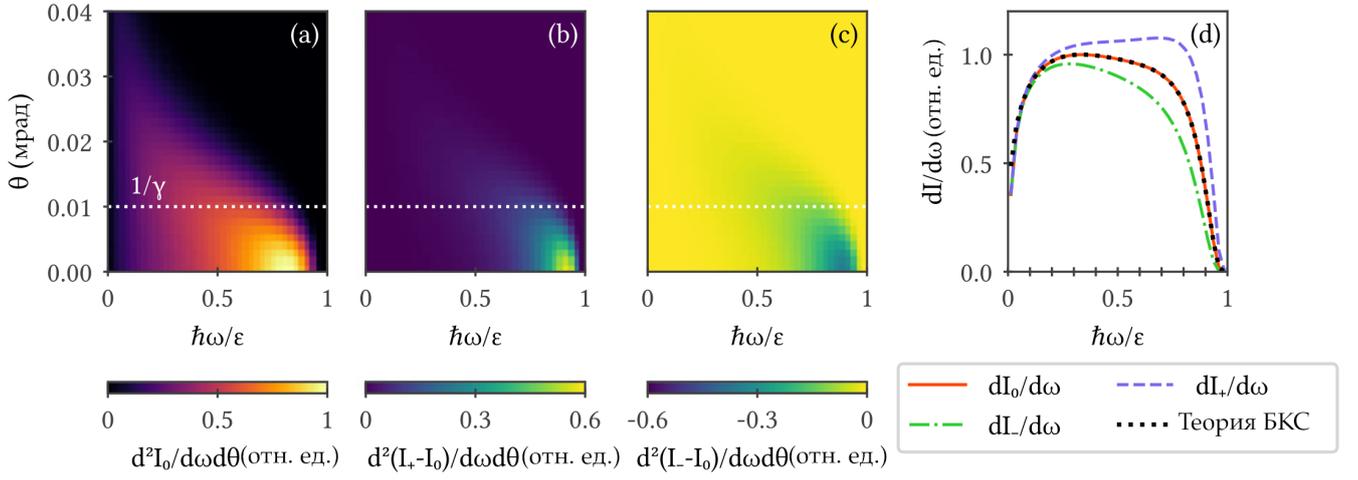


Рис. 5: Влияние знака  $\delta n$  на спектры квантового синхротронного излучения, когда  $|\delta n| < 0.5/\gamma^2$ . Энергия излучаемая электроном в единичный интервал частот и в единичный телесный угол  $\theta$ : (a)  $d^2 I_0/d\omega d\theta$  для  $n = 1$ , (b)  $d^2 I_+/d\omega d\theta$  для  $\delta n = 0.1/\gamma^2$  и  $d^2 I_-/d\omega d\theta$  для  $\delta n = -0.1/\gamma^2$ . (d) Спектры синхротронного излучения для  $\delta n = 0$  (пунктирная линия), посчитанные аналитически (красная сплошная) и спектры излучения для  $\delta n > 0$  (штрихованная синяя кривая) и  $\delta n < 0$  (зеленая кривая). Во всех случаях  $\xi = -1$  для всего частотного и углового диапазона.

имеем  $\varsigma = -1$  и  $\tau_{\parallel} \ll \tau_{\perp}$  [см. рис. 4(d)], а время формирования излучения мало,  $t_{rf} \ll \tau_{\perp}$ . Это существенно отличается от случая простого черенковского излучения, когда длина формирования излучения может быть чрезвычайно большой.

Однако, наличие показателя преломления с  $\delta n \neq 0$  может существенно повлиять на вероятность излучения. Влияние показателя преломления в случае  $\varsigma = +1$  показано на рисунке 5, где  $I_0$ ,  $I_+$  и  $I_-$  — излучаемая энергия при  $n = 1$ ,  $n = 1 + 0.1/\gamma^2$  и  $n = 1 - 0.1/\gamma^2$  соответственно. На рисунках 5(a)-(c) показаны частота и угловое распределение, тогда как рисунок 5(d) изображает энергию, излучаемую в единицу частотного интервала. Распределения  $d^2 I/d\omega d\theta$  на рисунках 5(a)-(c) получены численно, для  $\gamma = 1 \times 10^5$  и  $B/B_{cr} = 3 \times 10^{-5}$  ( $\chi = 3$ ). Кривые на рисунке 5(d) вычисляются путем интегрирования распределений на рисунках 5(a)-(c) по углу  $\theta$ , за исключением черной пунктирной линии, которая соответствует аналитическому выражению для чисто синхротронного излучения ( $n \equiv 1$ ), найденного в рамках БКС теории [7, 91]. Заметим, что для таких  $\delta n$  членом  $\propto \omega^2 - c^2 k^2$  (который не учитывался при вычислении распределений 5(a)-(c)) в фазе пренебрегать нельзя (см. (59),  $\hat{r} \approx 0.2$  для  $\hbar\omega \approx \varepsilon$ ), таким образом рисунок 5 демонстрирует поведение функции  $d^2 I_0/d\omega d\theta$  лишь качественно.

В области высоких частот  $\omega \gtrsim \omega_c$  временные шкалы соотносятся как  $\tau_{\perp} \gtrsim \tau_{\parallel}$ , когда  $\delta n = 0$ . Наличие показателя преломления  $\delta n > 0$  приводит к увеличению  $\tau_{\parallel}$  и к существенному увеличению вероятности излучения [см. рисунок 4(b) и рисунок 4(a)]. В противоположном случае  $\delta n < 0$ , временной масштаб  $\tau_{\parallel}$  уменьшается, что приводит к уменьшению вероятности излучения. Это легко видеть из рисунка 5(d), где критическая частота  $\hbar\omega_c = 0.9 \times \varepsilon$ . Для фотонов  $\omega \sim \omega_c$  длину формирования излучения можно оценить с помощью (81) и (71) как  $c\tau_{rf} \lesssim c\tau_{\perp} \sim c/\omega_B \sim 10^{-2} \mu\text{m}$ .

В области низких частот ( $\omega \ll \omega_c$ ,  $\tau_{\perp} \ll \tau_{\parallel}$ ) синхротронные интегралы не зависят от  $\tau_{\parallel}$ , а только этот масштаб времени зависит от показателя преломления. Поэтому наличие показателя преломления с  $\delta n \neq 0$  не меняет низкочастотный спектр, как показано на рисунке 5. При увеличении параметра  $\chi$  критическая частота стремится к  $\varepsilon/\hbar$  и область, где заметно влияние показателя преломления становится узкой и прижатой к  $\varepsilon/\hbar$ . Стоит еще раз обратить внимание на то, что в данном случае условие Черенкова не выполняется.

Влияние показателя преломления становится более существенным, если выполняется условие Черенкова,  $\delta n > 1/(2\gamma^2)$ . Такой случай для  $\delta n = 1/\gamma^2$  показан на рисунке 6 для  $\gamma = 1 \times 10^5$  и  $B/B_{cr} = 3 \times 10^{-5}$  (отсюда  $\chi = 3$  и  $\hbar\omega_c = 0.9 \times \varepsilon$ ). Заметим, что для таких  $\delta n$  слагаемым  $\propto \omega^2 - c^2k^2$  в фазе, которое не учитывается в вычислениях, нельзя пренебрегать (см.(59),  $\hat{r} \approx 2$  для  $\hbar\omega \approx \varepsilon$ ), таким образом, рисунок 6 демонстрирует спектр лишь качественно. Для выбранного показателя преломления и  $\theta = 0$ ,  $\tau_{\parallel}$  остается тем же, что и для случая  $\delta n = 0$ , но знак линейного члена меняется на противоположный, при изменении фазы (68),  $\varsigma = -1$ . Как и прежде, низкочастотная часть спектра остается одинаковой в обоих случаях,  $\delta n = 0$  [нижняя половина рисунка 6(a) и сплошная красная кривая на рисунке 6(c)] и  $\delta n > 0$  [верхняя половина рисунка 6(a) и пунктирная синяя кривая на рисунке 6(c)]. Однако в случае  $\delta n > 0$  заметно усиливается высокочастотная часть спектра, так что суммарная излучаемая больше, чем в случае  $\delta n = 0$ .

Точки А, В, С и D на рисунках 6(a, b) соответствуют  $a \equiv \varsigma\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$  используемым на рисунках 4 (a), (b), (c) и (d) соответственно. Тонкая структура в распределении излучения на высоких частотах видна на рис. 6(b), на котором подробно показана прямоугольная область рисунка 6(a), отмеченная линией черного цвета (на рисунках разная цветовая шкала). Эта тонкая структура возникает

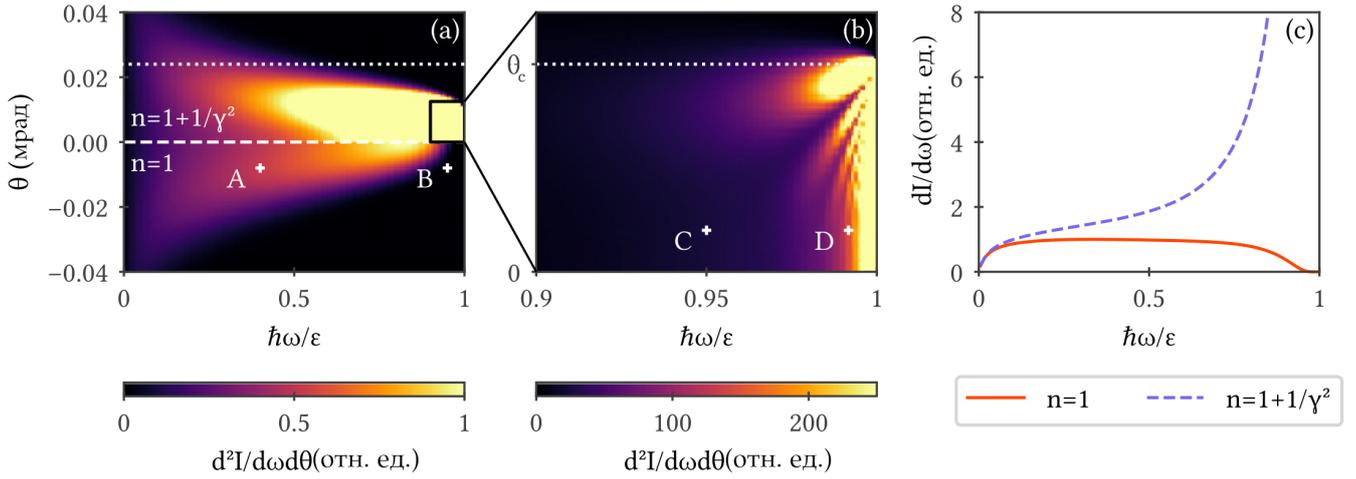


Рис. 6: Влияние знака  $\delta n$  на спектр синхротронного излучения в случае, когда показатель преломления  $\delta n > 1/2\gamma^2$ . Энергия излучаемая электроном в единичный интервал частот в единичный телесный угол  $\theta$  для ((a) нижняя часть графика) чисто синхротронного излучения с  $\delta n = 0$ , и для синхротрон-Черенковского режима  $\delta n = 1/\gamma^2$  (верхняя половина a, b). Спектры излучения изображены на (c) для  $\delta n = 0$  (красная кривая) и для  $\delta n = 1/\gamma^2$  (штрихованная кривая). Черенковский угол  $\theta_c = (2\delta n - 1/\gamma^2)^{1/2} = 0.01$  мрад показан белой пунктирной линией на (a) и (b). Точки A, B, C, D на (a) и (b) соответствуют форме фазы, показанной на рисунке 4.

из-за интерференции вкладов двух выступов, показанных на рисунке 4(d).

Показатель преломления поляризованного вакуума зависят от частоты фотона и имеет как области с  $\delta n > 0$ , так и части с  $\delta n < 0$ . Последнее соответствует фотонам с высокой энергией. Учитывая, что высокочастотная область (где показатель преломления влияет на спектр излучения) становится чрезвычайно узкой в случае  $\chi \gg 1$ , это делает задачу об обнаружении влияния поляризации вакуума на синхротронное излучение очень сложной, по крайней мере, для электронов (или позитронов).

Аналогично переходу от (46) к (47) можно найти из  $d^2I/d\omega d\Omega$  [см. (66)] вероятность испускания фотона, просуммированную по всем поляризациям  $W = \sum_i |C_{e_i}|^2$ , что более удобно для численного моделирования:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{e^2 c^2 \pi \omega'^2}{4 \hbar \omega^3 V} \left[ \frac{(\epsilon^2 + \epsilon'^2)}{2\epsilon^2} \sum_e \left| \int dt \beta e \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\rho)] \right|^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar \omega m c^2}{\epsilon^2} \right)^2 \left| \int dt \exp[i\omega'(t - \mathbf{n}\rho)] \right|^2 \right]. \quad (82)
 \end{aligned}$$

Интегралы в (82) могут быть найдены аналитически в некоторых случаях, используя разложение в ряды Тейлора в фазе (68). А также некоторые аналитические результаты присутствуют в работе [63]. Однако, выражение (82) будет использоваться как есть в численных расчетах. Вычисление выражения (82) выполняется в открытом коде  $jE$  [106], где используется круговая траектория частицы. В коде  $jE$  для интегралов в (82) используется метод трапеций с фиксированным шагом по времени. Шаг по времени вычисляется как половина минимального периода колебаний, достигаемого на интервале интегрирования  $[-t_b, t_b]$  (или на двух интервалах интегрирования в случае  $\varsigma = -1$ ,  $\tau_{\perp} \gg \tau_{\parallel}$ ). Как это показано выше, численная ошибка, вызванная конечной длиной интервала интегрирования, уменьшается достаточно медленно,  $\mathcal{I}(t_b, \infty) \propto 1/t_b$ . Следовательно, для получения надлежащей точности следует выбрать  $t_b$  намного больше, чем  $t_{rf}$ , например,  $t_b \approx 100 t_{rf}$  для точности около 1%. В то же время, период колебаний и, следовательно, временной шаг резко уменьшается со временем,  $T(t_b) \sim 1/\dot{\phi}(t_b) \propto t_b^{-2}$ . Таким образом, результирующее количество шагов по времени, дающее надлежащую точность, становится чрезвычайно большим. Однако, вычисление интегралов может быть выполнено на значительно меньшем интервале, если добавить искусственное затухание  $g$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[\phi(t)] dt \approx \int_{-t_b}^{t_b} g(t) f(t) \sin[\phi(t)] dt. \quad (83)$$

Здесь  $t_b$  должно быть всего в несколько раз больше, чем  $t_{rf}$  (в коде  $t_b \approx 3t_{rf}$ ), а функция  $g$  должна плавно затухать вблизи границ интервала интегрирования от 1 до 0. Соотношение (83) можно легко доказать, оценив разницу между его левой и правой частями по формуле (76):  $(1-g)fT \approx 0$  в точке, где  $g(t)$  только начинает исчезать, а также в точке  $t_b$ . В коде выбрана следующая функция затухания:

$$g(t) = \frac{1}{4} \{1 - \tanh[8(t/t_b - 0.7)]\} \{1 + \tanh[8(t/t_b + 0.7)]\}, \quad (84)$$

что вместе с заданным шагом по времени и интервалом интегрирования дает ошибку менее 3% в сравнение с интегралами без  $g$ , вычисленными на очень широком интервале интегрирования с помощью другого численного метода, по крайней мере, для  $\varsigma\tau_{\parallel}/\tau_{\perp} \in [-48, 0.8]$ .

Для проверки кода, описанного выше, был реализован ряд тестов. Напри-

мер, в классическом пределе ( $\chi \ll 1$ ) энергия, излучаемая в единицу частотного интервала, в единичный телесный угол,  $d^2I/d\omega d\Omega$ , найденная численно, сравнивается с аналитическим результатом, а именно с (14.83) из [101]. Этот тест показывает, что ошибка, которую дает код, меньше чем 0.5% для  $|\theta| \leq 1/\gamma$  и  $\omega \leq 1.6 \times \omega_c$ . После этой точки, значение  $d^2I/d\omega d\Omega$  получается более чем в 500 раз меньше, чем максимальное значение  $d^2I/d\omega d\Omega$ , таким образом, хотя ошибка становится больше с увеличением  $\omega$  и  $\theta$ , значением  $d^2I/d\omega d\Omega$  в целом можно пренебречь на таких частотах и углах. Кроме того, также проверяется хорошо известное асимптотическое поведение полной излучаемой энергии (а именно  $cI/2\pi R \approx (1 - 55\sqrt{3}\chi/16 + 48\chi^2)P_{cl}$  в пределе  $\chi \ll 1$ , где  $P_{cl} = 2e^4B^2\gamma^2/3m^2c^2$  и  $cI/2\pi R \approx 0.37 \times e^2m^2c^4\chi^{2/3}/\hbar^2$  в  $\chi \gg 1$ , см. [7,91]).

Спектр излучения, рассчитанный численно и аналитически при  $n = 1$  и  $\chi = 3$ , изображен на рисунке 5(d), где результат работы кода  $jE$  показан сплошной красной линией, а аналитический результат пунктирной черной линией. Также написан ряд тестов, чтобы продемонстрировать, что масса излучающей частицы, спиновый член и показатель преломления рассматриваются правильно [106].

### 2.3.4 Возможные экспериментальные наблюдения поляризации вакуума

Наконец следует задаться вопросом об условиях, необходимых для измерения изменений в хорошо известном синхротронном спектре за счет поляризация вакуума. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала рассмотреть выражение для вакуумного показателя преломления в сильном поле. Этот показатель зависит от поляризации излучаемого фотона. Например, в постоянном магнитном поле  $\delta n$  для низкоэнергетических фотонов примерно в два раза больше для поляризации, перпендикулярной магнитному полю, по сравнению с параллельной поляризацией. Однако, большинство синхротронных фотонов поляризованы перпендикулярно магнитному полю, и для действительной части вакуумного показателя преломления можно использовать следующее выражение [58, 59, 65]:

$$n(\boldsymbol{x}) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{B}{B_{cr}} \right)^2 N(\boldsymbol{x}), \quad (85)$$

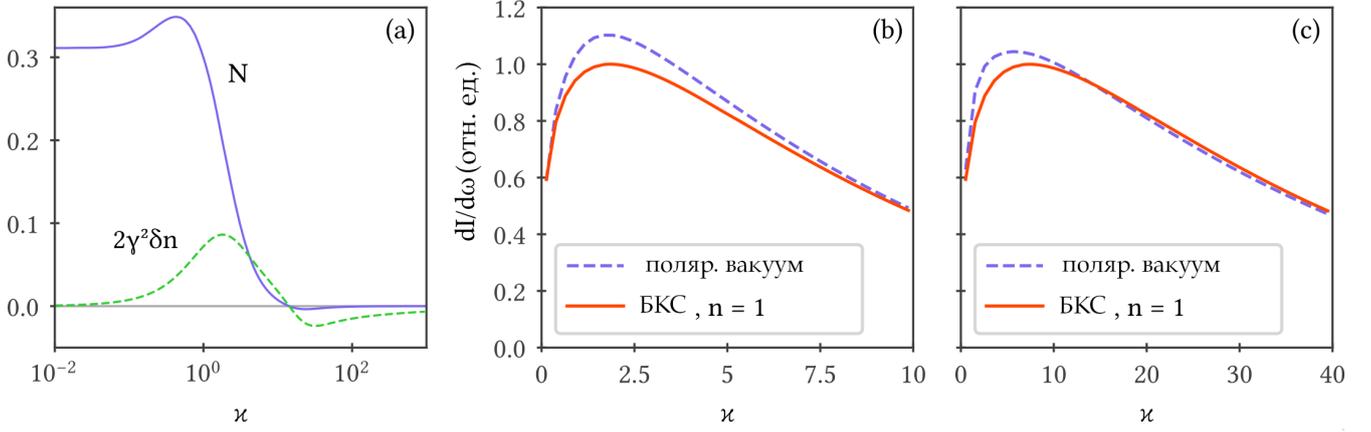


Рис. 7: Сплошная линия на (а) есть функция  $N(\kappa)$ , определяющая реальную часть вакуумного показателя преломления [58], а зеленая кривая (а) есть величина  $2\gamma^2\delta n$ , где  $\omega_c$  вычислена по классической формуле для мюонов. Заметим, что относительное изменение  $\tau_{\parallel}$  за счет поляризации вакуума для  $\theta = 0$  порядка  $2\delta n\gamma^2$ , если эта величина мала. Спектр излучения для мюонов для (b)  $\chi = 30$  и (c)  $\chi = 60$  изображены пунктирной кривой и красная кривая - спектры для  $n = 1$ .

где  $N(\kappa)$  представлено на рисунке 7(a),  $\kappa = (\hbar\omega/mc^2)(B/B_{cr})$  есть фотонный аналог параметра  $\chi$ , а  $B$  — эффективное магнитное поле. Асимптотика  $N(\kappa)$  определяется выражением:

$$N(\kappa) = \begin{cases} 14/45, & \text{при } \kappa \ll 1, \\ -1.65 \times \kappa^{-4/3}, & \text{при } \kappa \gg 1, \end{cases} \quad (86)$$

где  $\kappa = (\hbar\omega/mc^2)(B/B_{cr})$ . Как видно из рисунка 7(a) синяя кривая,  $\delta n = n - 1$  положительный для  $\kappa \lesssim 15$  и отрицательный для  $\kappa \gtrsim 15$ . Стоит еще раз отметить, что мнимая часть показателя преломления вакуума не мала, и здесь просто не рассматривается.

Как описано в предыдущих разделах, показатель преломления влияет только на временной масштаб  $\tau_{\parallel}$ , на котором электрон выходит из фазы с волной из-за различия его скорости вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$  и фазовой скорости волны. Следовательно, поляризация вакуума влияет только на линейный член в фазе (68). В то же время линейный член фазы влияет на интегралы в (66), только если временной масштаб  $\tau_{\parallel}$  меньше или порядка  $\tau_{\perp}$ . На временном масштабе  $\tau_{\perp}$  электрон выходит из фазы с волной из-за кривизны траектории (поскольку кривизна влияет на скорость электрона вдоль волнового вектора). Подводя итоги, и

с учетом (70), (71) и (72), необходимые условия изменения спектра при заданной частоте фотона  $\omega$  имеют следующий вид:

$$|\delta n(\omega)| \gtrsim 1/\gamma^2, \quad (87)$$

$$\omega' \gtrsim \omega'_c(\omega). \quad (88)$$

Если выполняется условие (87), то  $\tau_{\parallel}$  заметно меняется, а если также выполняется (88) (с  $\omega'_c$ , вычисляемым либо с учетом поляризации вакуума, либо без), то спектр изменится. Здесь  $\omega' = \omega\varepsilon/(\varepsilon - \hbar\omega)$ , а  $\omega'_c$  определяется по (73) для заданной частоты  $\omega$  (обратите внимание, что  $\delta n$  зависит от  $\omega$ ).

Следует отметить, что условия (87) и (88) очень мягкие: если  $\delta n$  равно, скажем, 10%  $1/\gamma^2$  это уже может привести к значительным изменениям в спектре. Кроме того, если величина  $\omega'$  составляет 10% от  $\omega'_c(\omega)$ , то спектр заметно меняется. Например, для  $\chi = 3$  и  $\delta n = 0.1/\gamma^2$ ,  $\omega' \approx 0.1 \times \omega'_c(\omega)$  для  $\hbar\omega \approx 0.5\varepsilon$ , однако для этой частоты изменения в спектре очевидны, как видно на рисунок 5(d).

Для фотонов низкой энергии ( $\varkappa \ll 1$ ) уравнение (87) можно переписать, используя только параметр электрона  $\chi$ :

$$\chi \gtrsim \left(\frac{90\pi}{7\alpha}\right)^{1/2} \approx 70. \quad (89)$$

Однако, условие (88) в этом случае гораздо труднее выполнить: его также можно записать в терминах  $\chi$  и при  $\varkappa = 1$  получим:

$$\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 42, \quad (90)$$

следовательно,  $\chi \gtrsim 4 \times 10^5$ . Результат (90) говорит о том, что теория возмущений [52],  $\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 1$ . Поэтому используемый здесь подход БКС и выражение для показателя преломления (86) не справедливы, если  $\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 1$  и тем более для  $\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 42$ . Таким образом, рассматриваемая теория не предсказывает изменения синхротронного спектра в области применимости пертурбативной КЭД.

Для фотонов высокой энергии ( $\varkappa \gg 1$ ) уравнение (87) дает  $\chi \gtrsim 80 \varkappa^{2/3}$ , а (88) дает  $\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 20 \varkappa(\chi - \varkappa)/\chi$ . Чтобы подогнать последнее условие к области применимости пертурбативной КЭД, можно попробовать  $\chi - \varkappa \ll \chi$ , однако первое условие в этом случае дает  $\chi^{1/3} \gtrsim 80$ , следовательно,  $\chi \gtrsim 5 \times 10^5$ , что снова на-

ходится за пределами теории возмущений КЭД. Таким образом, наблюдать поляризацию вакуума для синхротронного спектра электронов, если не учитывать мнимую часть показателя преломления, для фотонов высоких энергий также не представляется возможным. Приведенные выше оценки согласуются с результатами [66] [см. выражения (8.8e) и (8.11), которые, однако, не учитывают эффект отдачи и не обсуждают применимость пертурбативной КЭД].

Влияние поляризации вакуума на синхротронный спектр можно усилить, если использовать тяжелые заряженные частицы вместо электронов. Для определенности и ввиду недавнего прогресса в методе их ускорения [107], здесь рассматриваются мюоны. Преимущество использования мюонов заключается в двух моментах. Во-первых, их большая масса,  $m_\mu \approx 207 m$ , дает гораздо меньшую кривизну, следовательно, временной масштаб  $\tau_\perp$  намного больше, чем у электронов. Для заданной частоты фотона это делает синхротронный спектр гораздо более чувствительным к продольному синхронизму между частицей и излучаемой волной, т.е. к  $\tau_\parallel$ , которое, в отличие от  $\tau_\perp$ , зависит от показателя преломления. Во-вторых, большая масса значительно снижает критическую частоту, поэтому основная часть спектра лежит в низкочастотной области  $\varkappa \lesssim 1$ , в которой величина  $\delta n$  для вакуума максимальна.

Критическая частота мюонов, в области  $\chi \ll 1$ , равна

$$\omega_{c,\mu} = 3\omega_B \gamma^2 m/m_\mu, \quad (91)$$

тогда можно получить отношение энергии фотона к энергии мюона:  $\hbar\omega_{c,\mu}/\varepsilon_\mu = 3\chi(m/m_\mu)^2$  (при  $\chi = \gamma B/B_{cr}$  то же, что и для электронов). Поэтому это отношение мало,  $\hbar\omega_{c,\mu}/\varepsilon_\mu \ll 1$ , вплоть до  $\chi \sim 10^4$ , а радиационной отдачей для мюонов можно пренебречь. В этом случае условия, достаточные для заметной модификации синхротронного спектра за счет поляризации вакуума следующие:

$$|\delta n(\omega)| \gtrsim 1/\gamma^2, \quad (92)$$

$$\omega \gtrsim \frac{\omega_{c,\mu}}{|1 - 2\delta n(\omega)\gamma^2|^{3/2}}. \quad (93)$$

Очевидно, что эти условия можно вывести аналогично (87) и (88).

В качестве отправной точки можно рассмотреть  $\omega \sim \omega_c$ , обеспечивающую выполнение условия (93). В силу (70), разница между  $\tau_\parallel$  с учетом  $\delta n \neq 0$  и  $\tau_\parallel$  с

$\delta n = 0$  ( $\tau_{\parallel,0}$ ), определяется  $2\gamma^2\delta n$ , если эта величина мала:

$$\frac{\tau_{\parallel} - \tau_{\parallel,0}}{\tau_{\parallel}} \approx 2\gamma^2\delta n, \quad (94)$$

где предполагается  $\theta = 0$ . Можно заметить, что эта величина зависит только от  $\chi$  и  $\varkappa$ . Для  $\omega = \omega_c/3$  (что ближе к максимуму спектра, чем сама  $\omega_c$ ) параметры  $\chi$  и  $\varkappa$  связаны,  $\chi^2 = \varkappa m_{\mu}/m$ . Таким образом,  $2\gamma^2\delta n$  может быть выражена только через  $\varkappa$ , и  $2\gamma^2\delta n$  как функция  $\varkappa$  показана пунктирной зеленой линией на рисунке 7(а). Из рисунка 7(а) видно, что поляризация вакуума вызывает максимальное изменение  $\tau_{\parallel}$  около 10% для  $\varkappa \approx 2$  ( $\chi \approx 20$ ). Дальнейшее увеличение параметра  $\chi$  (отсюда  $\varkappa$ ) приводит к уменьшению отклонения  $\tau_{\parallel}$  от  $\tau_{\parallel,0}$  на этой частоте фотона.

Приведенные выше оценки показывают, что относительно небольшого значения  $\chi$  достаточно, чтобы увидеть изменение в синхротронном спектре, обусловленном поляризацией вакуума, что хорошо согласуется с численными результатами. На рисунках 7(б, в) показан спектр излучения при  $\chi = 30$  и  $\chi = 60$  соответственно, рассчитанные кодом  $jE$  (используется значение  $B/B_{cr} = 0.01$ , однако форма результирующих спектров от этого почти не зависит). При  $\chi = 30$  максимум спектра становится на 10% выше благодаря поляризации вакуума, а при более высоких  $\chi$  изменения спектра возникает на частотах ниже частоты максимума спектра. В то же время, для энергий фотонов, соответствующих  $\varkappa \gtrsim 15$ , изменение показателя преломления становится отрицательным, что вызывает небольшое подавление в синхротронном спектре.

Возвращаясь к условиям (92) и (93), можно считать что  $\chi \gtrsim 70$  обеспечивает выполнение первого из них. Затем, аналогично предыдущему разделу, можно рассматривать низкоэнергетическую часть спектра ( $\varkappa \lesssim 1$ ). В этом случае условие (93) дает

$$\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 42 \times \left(\frac{m}{m_{\mu}}\right)^{2/3} \approx 1. \quad (95)$$

Поэтому изменение низкоэнергетической части синхротронного спектра может быть ярко выражено только в области параметров, где теория возмущений уже не применима.

Рисунок 8 демонстрирует низкоэнергетическую часть спектра излучения мю-

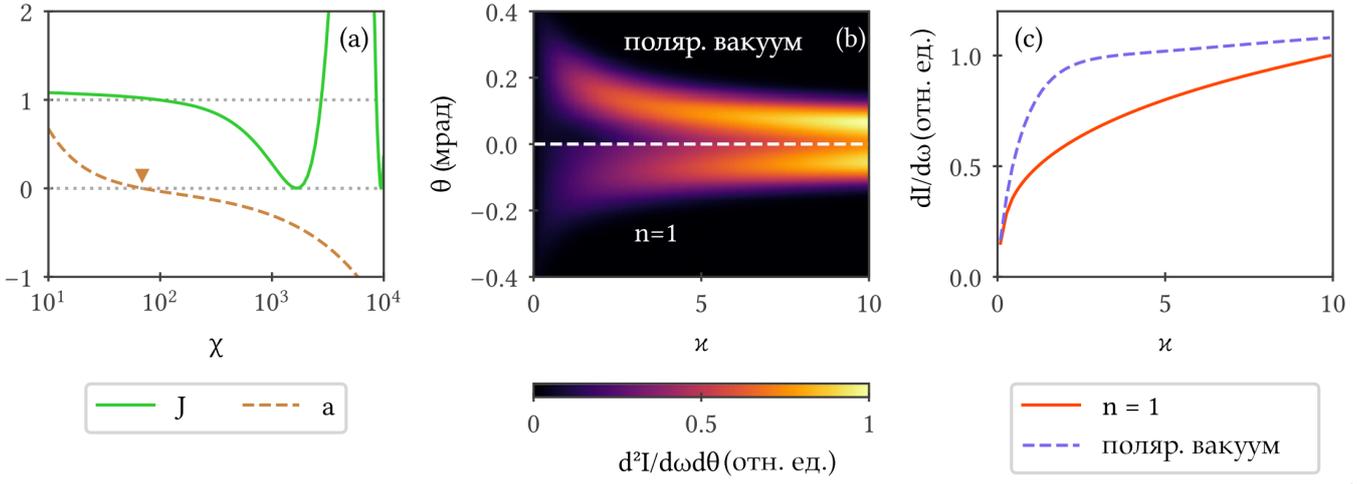


Рис. 8: Отношение (зеленая кривая, а) энергии излученной мюоном на единицу частоты в единичный телесный угол с учетом показателя преломления вакуума к аналогичной величине с  $n = 1$ . Отношение  $a = \xi\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$  (а, коричневая кривая). Обе кривые посчитаны для  $\theta = 0$  и для частоты, соответствующей  $\varkappa = 2$ . На графике (b) изображена величина  $d^2I/d\omega d\theta$ . На графике (c) изображен спектр мюонов для  $\chi = 800$  с учетом (синяя кривая) и без учета (красная кривая) вакуумного показателя преломления.

онов для  $B/B_{cr} = 0.01$ . На рисунке 8(a) соотношение

$$J = \left[ \frac{d^2I}{d\omega d\theta} \right] / \left[ \frac{d^2I}{d\omega d\theta} \right]_{\delta n=0}, \quad (96)$$

рассчитано для  $\theta = 0$  и значения  $\omega$  соответствующего  $\varkappa = 2$ . По оценке (95) значение  $J$  заметно отличается от единицы для  $\chi \sim 10^3$ . Пунктирная коричневая линия показывает отношение  $a = \xi\tau_{\perp}/\tau_{\parallel}$  для заданной частоты, которая соответствует  $\varkappa = 2$ . Из выражения для классической критической частоты видно, что:

$$\frac{\hbar\omega_{c,\mu}}{mc^2} \frac{B}{B_{cr}} = \frac{3\chi^2 m}{m_{\mu}}. \quad (97)$$

Следовательно, при  $\chi \gtrsim 10$  частота, обеспечивающая  $\varkappa = 2$ , меньше критической частоты. Таким образом, здесь ожидается  $\tau_{\perp} \lesssim \tau_{\parallel}$  при  $n = 1$ . Однако при  $\chi \sim 10^3$  шкалы времени  $\tau_{\perp}$  и  $\tau_{\parallel}$  становятся того же порядка благодаря поляризации вакуума. При еще более высоких значениях  $\chi$ ,  $\tau_{\parallel}$  становится много меньше  $\tau_{\perp}$ , что вместе с  $\zeta = -1$  приводит к интерференции аналогично тому, что изображено на рисунке 6(b). На рисунке 8(a) это выражается в виде колебаний  $J$  при высоких значениях  $\chi$ .

На рисунке 8(б) показана энергия, излучаемая в единичный частотный интервал и в единичный телесный угол  $\theta$ , с учетом показателя преломления вакуума (верхняя половина) и  $\delta n = 0$  (нижняя половина), для  $\chi = 800$  ( $B/B_{cr} = 0.01$  и  $\gamma = 8 \times 10^4$ ). Стоит заметить, что даже для такого высокого значения  $\chi$  фазовый член  $\propto (\omega^2 - c^2 k^2)$ , которым здесь пренебрегается, мал,  $\hat{r} \lesssim 2 \times 10^{-3}$ . Рисунок 8(с) показывает энергетические спектры, которые соответствуют распределениям на рисунке 8(б). Хотя разница между пунктирной и сплошной кривыми на рис. 8(с) очень большая, этот случай не подходит для наблюдения в эксперименте. Во-первых, при таком большом  $\chi$  будут проявляться КЭД эффекты более высокого порядка, которые могут дать более серьезный вклад в изменение спектра. Во-вторых, изменение в спектре возникает только для частот, для которых  $\varkappa \lesssim 10$ , что значительно ниже, чем для критической частоты, поэтому эта разница возникает для небольшой доли фотонов. Таким образом, излучение фотонов мюонами с  $\chi \approx 30$  остается наиболее перспективным для исследования эффекта поляризации вакуума в спектре излучения экспериментально.

Следует отметить еще одну интересную перспективу изучения КЭД, касающуюся испускания фотонов мюонами. Пусть мюоны и электроны имеют один и тот же Лоренц фактор  $\gamma$ . Для электронов энергия испускаемых фотонов в режиме  $\chi \gg 1$  ограничивается из-за эффекта отдачи. Несмотря на большой радиус кривизны траектории, для мюонов энергия фотона может быть намного выше, потому что эффект отдачи для них пренебрежимо мал. Можно достичь  $\alpha \varkappa^{2/3} \sim 1$  для фотонов, испускаемых мюонами уже при  $\chi \sim 300$ , для которых  $\alpha \chi^{2/3} \sim 0.3$ . Это потенциально открывает перспективы для достижения непертурбативного КЭД [52–56] в будущих экспериментах.

### 2.3.5 Заключение к подглаве

Общая формула, описывающая испускание фотона ультрарелятивистским электроном в сильном магнитном поле, может быть найдена в рамках квазиклассической теории БКС [7]. Формула БКС может быть распространена на случай постоянного показателя преломления  $n$ ,  $|n - 1| \ll 1$  [см. (66)]. Строго говоря, эта формула применима для вакуумного показателя преломления для электронов с  $\chi \lesssim 10^3$ , но для других случаев необходимо учитывать дополнительный член в фазе. Отсюда можно найти вероятность излучения фотона, обобщающую синхротронное и черенковское излучение, и учитывающую отдачу фотона и пе-

реворот спина. Из полученного выражения ясно видно, что вероятность эмиссии не является суммой вероятности синхротронного излучения и вероятности черенковского излучения. Следовательно, испускание фотона происходит в синергетическом (кооперативном) синхротронно-черенковском процессе.

Движение электрона по криволинейной траектории существенно меняет характер излучения. Кривизна траектории определяет время формирования излучения для синхротронно-черенковского излучения, что намного меньше, чем у чистого черенковского излучения (которое может быть чрезвычайно большим в случае черенковского синхронизма,  $(n\beta = 1)$ ). Кроме того, время формирования для синхротронно-черенковского излучения меньше или порядка времени формирования синхротронного излучения.

Спектр излучения чувствителен к знаку величины  $\delta n = n - 1$  в обоих случаях,  $\delta n > 0$  и  $\delta n < 0$ , однако сначала происходят изменения в спектре для частот выше критической частоты  $\omega_c$ . Если выполнено условие Черенкова,  $v > c/n$ , то общая излучаемая энергия может быть значительно больше, чем в случае  $n = 1$ . Для численного моделирования синхротронно-черенковского спектра реализован открытый код  $jE$  [106], и численные результаты хорошо согласуются с аналитическими предсказаниями.

Чтобы узнать, как изменяется синхротронный спектр за счет поляризации вакуума, можно использовать формулы для показателя преломления вакуума, поляризованного сильным внешним магнитным полем (см. ссылку [64] и ссылки в ней). Оценки и численное моделирование показывают, что в рамках рассматриваемой модели изменения спектра фотонов излученных электронами, становятся заметными далеко за черенковским порогом  $v = c/n$  и даже далеко за пределы предполагаемого нарушения пертурбативной КЭД  $\alpha\chi^{2/3} \sim 1$ . Рассматриваемая модель синхротронно-черенковского излучения основана на формулах полученных в рамках пертурбативной КЭД и применима если  $\alpha\chi^{2/3} \ll 1$ , поэтому можно сделать заключение, что в области применимости данной модели изменений в спектре не происходит. Причина этого в том, что показатель преломления вакуума зависит от частоты фотона, а для энергий фотонов больше или около  $\hbar\omega_c$  (для которых в первую очередь ожидается модификация спектра)  $\delta n$  отрицательна, а  $|\delta n|$  очень маленький. Более того, критическая частота для электронов с  $\chi \gg 1$  очень близка к энергии электрона.

Мюоны имеют гораздо больший радиус кривизны траектории в сильном по-

ле, чем электроны при одном и том же факторе Лоренца. Из-за этого спектр излучения мюонов гораздо более чувствителен к показателю преломления, чем спектр излучения электронов. В отличие от электронов с  $\chi \gg 1$ , для которых основная часть спектра лежит в области  $\kappa \gg 1$ , для мюонов это не так. Например, при  $\chi = 30$  максимум спектра соответствует области  $\kappa \approx 2$ , где величина вещественной части вакуумного показателя преломления максимальна. Спектр излучения в этом случае увеличивается до 10% благодаря вакуумному показателю преломления. С точки зрения возможных экспериментов, мюоны с  $\chi \approx 30$  являются наиболее многообещающим инструментом для исследования влияния поляризации вакуума на синхротронный спектр.

Что касается возможных экспериментов с использованием лазерных импульсов и ускорителей мюонов, то можно рассмотреть прохождение пучка мюонов через одиночный лазерный импульс. Выражение для вакуумного показателя преломления для излучаемых фотонов в этом случае весьма близко к таковому для постоянного магнитного поля [59, 65]. Однако, применять полученные здесь результаты к лазерному полю не совсем верно. Во-первых, поскольку большинство излучаемых фотонов имеют  $\kappa \gtrsim 1$ , нужно учесть фоторождение пар и испускание фотонов вторичными электронами, а также возможный эффект Соколова–Тернова. Во-вторых,  $\chi = 30$  будет достигнута скорее при  $a_0 = eE_0/mc\omega_L$  где  $m_\mu/m = 207$  (где  $E_0$  и  $\omega_L$  амплитуда электрического поля и частота фотонов лазерного импульса соответственно), т.е. при  $a_0 = 800$  (при  $\hbar\omega_L = 1$  eV) и  $\gamma = 2 \times 10^4$  (это значение находится между Лоренц фактором, достигнутым для электронов в SLAC  $\gamma \approx 10^5$ , и для протонов в LHC  $\gamma \approx 6 \times 10^3$ ). Для таких значений  $a_0$  применяемое здесь приближение локального постоянного поля следует использовать с осторожностью [4]. Это ограничение становится еще более выраженным для протонов, для которых следует рассматривать дипольно-черенковское излучение, а не синхротронно-черенковское излучение. В-третьих, в поле линейно поляризованного лазера показатель преломления неоднороден. Поэтому идея о возможном наблюдении влияния показателя преломления при столкновении лазерного импульса с тяжелыми частицами требует дальнейшего исследования.

## 3 КЭД каскады в сильном лазерном поле

### 3.1 Введение

В данной главе обсуждаются квантовоэлектродинамические (КЭД) каскады в сильных лазерных полях. Это явление представляет собой лавинообразное появление электрон-позитронных пар вследствие последовательных реакций излучения фотонов ультрарелятивистским лептоном (нелинейное обратное Комptonовское рассеяние [91]) и распада фотона на электрон-позитронную пару (нелинейный процесс Брейта-Уилера [16]). Оба этих процесса возможны только когда квантовый параметр  $\chi \gg 1$ . Численное моделирование предсказывает, что КЭД каскад может развиваться в области пересечения двух встречных лазерных импульсов мощностью 10 ПВт [108, 109]. Взаимодействию сильного лазерного излучения с веществом почти всегда сопровождается возникновением каскадов [110, 111]. Также каскады наблюдаются в атмосфере могут влиять на физику пульсаров [112, 113]. Исследование КЭД каскадов может помочь расширить понимание физики явлений в области сильнополевой квантовой электродинамики [6, 28, 34, 114].

В первой части главы рассматривается ионизационная инициация КЭД каскадов в поле двух пересекающихся лазерных импульсов, где в качестве затравки используются благородные газы. Во второй части главы рассматривается задача о формировании каскада во вращающемся электрическом поле.

### 3.2 Ионизационная инициация КЭД каскадов

#### 3.2.1 Модель ионизации

Воздействие сильного электромагнитного поля на атом может привести к ионизации. В туннельном режиме ионизации электроны атома проникают через потенциальный барьер, образованный атомным полем и внешним электрическим полем. При малых интенсивностях ионизация поля происходит в многофотонном режиме. Режим полевой ионизации определяется параметром Келдыша  $\gamma_K = a^{-1} (2I_i/m_e c^2)^{1/2}$ , где  $I_i$  потенциал ионизации иона,  $a = eE_L/(m_e c \omega_L)$  безразмерное лазерное поле,  $E_L$  и  $\omega_L$  напряженность лазерного поля и частота лазера соответственно,  $e$  и  $m_e$  есть заряд и масса электрона соответственно,  $c$  скорость

света [115]. Принято считать, что полевая ионизация происходит в туннельном режиме если  $\gamma_K \lesssim 0.5$  [116]. Скорость ионизации в статическом электрическом поле в туннельном режиме имеет вид: [38, 39, 117]:

$$\begin{aligned}
 W_{TI} &= \omega_a \kappa^2 C_{kl}^2 \left( \frac{2}{F} \right)^{2n^* - m - 1} \times \\
 &\times \frac{(l+m)!(2l+1)}{2^m m!(l-m)!} \exp\left(-\frac{2}{3F}\right), \\
 C_{kl}^2 &= \frac{2^{2n^*}}{n^* \Gamma(n^* + l^* + 1) \Gamma(n^* - l^*)},
 \end{aligned} \tag{98}$$

где  $F = E / (\kappa^3 E_a)$  нормированное электрическое поле,  $n^* = Z/\kappa$  эффективное главное квантовое число иона,  $Z$  зарядовое число иона,  $\kappa^2 = I_i/I_H$ ,  $I_H = m_e e^4 / (2\hbar^2) \simeq 13.59843$  эВ потенциал ионизации водорода,  $l^* = n^* - 1$  эффективное орбитальное квантовое число,  $l$  и  $m$  орбитальное и магнитное квантовые числа соответственно,  $E_a = m_e^2 e^5 \hbar^{-4} \approx 5.14224 \times 10^9$  В/см атомное электрическое поле,  $\omega_a = m_e e^4 \hbar^{-3} \simeq 4.13 \times 10^{16} \text{с}^{-1}$  атомная частота,  $\Gamma(x)$  гамма-функция. В пределе  $n^* \gg 1$  формула (98) сводится к скорости ионизации, приведенной в работе [118].

Формула (98) справедлива, когда невозмущенный уровень энергии в атоме намного ниже максимума потенциального барьера. Это условие выполняется, когда напряженность внешнего поля намного меньше критического поля  $E \ll E_{cr} = E_a \kappa^4 / (16Z)$  [119]. Для водородоподобных атомов и ионов с учетом эффекта Штарка  $E_{cr,H} = (2^{1/2} - 1) E_a$  [120]. Мы будем использовать выражение  $E_{cr} = E_a \kappa^4 / (16Z)$ , так как  $E_{cr} < E_{cr,H}$  и скорость ионизации, заданная  $W_{TI}$ , сильно отклоняется от результатов численного моделирования при  $E > E_{cr}$  [121].

Режим надбарьерной ионизации актуален, когда  $E > E_{cr}$ . Аналитическое описание этого режима весьма затруднительно, поскольку для  $E \sim E_{cr}$  использование теории возмущений не справедливо. Например, аналитическая формула, полученная в работе [122] для скоростей полевой ионизации в надбарьерном режиме не согласуется с численным решением уравнения Шредингера, зависящего от времени в режиме  $E > E_{cr}$  [120].

Несколько эмпирических формул для туннельной и надбарьерной ионизации, основанных на численном моделировании, были предложены в работах [120, 121,

123]. В работе [120] предлагается формула для скорости ионизации в виде кусочно заданной функции так, чтобы  $W_{TI}$  использовалось для  $E \leq E_{TIQ} \sim E_{cr}$ , а для области  $E > E_{TIQ}$  предлагается следующая квадратичная зависимость для скорости ионизации от поля:

$$W_Q(E) = 2.4\omega_a(E/E_a)^2, \quad (99)$$

где  $E_{TIQ}$  пороговое электрическое поле, определяемое условием непрерывности  $W(E)$ , т.е.  $W_{TI}(E_{TIQ}) = W_Q(E_{TIQ})$ . Другие эмпирические формулы, обеспечивающие непрерывный переход между туннельным и надбарьерным режимами представлены в работах [121, 123].

Предложенные формулы для скорости ионизации становятся неточными в пределе очень высокого поля. Например, согласно моделированию TDSE, зависимости скорости ионизации от напряженности поля близка к линейной, а не к квадратичной при  $E > 0.4E_a \gg E_{cr}$  [124]. Формула, предложенная в работе [121] предсказывает уменьшение скорости ионизации в пределе  $E \gg E_{cr}$ , что не согласуется с численным моделированием [123]. Вместе с этим, формула для скорости ионизации справедливая для  $E \gg E_{cr}$ , необходима для анализа полевой ионизации при интенсивности лазерного излучения выше  $10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>, когда возможно каскадирование КЭД. Например, уравнение (98) для туннельной ионизации предсказывает, что 90% ионизации в He в электрическом поле

$$E(t) = a \frac{mc\omega_L}{e} \sin(\omega_L t) \sin^2\left(\frac{t}{T}\right) \quad (100)$$

происходит, когда напряженность лазерного поля достигает значения  $E \approx 4E_{cr}$  (см. рис. 9), где  $0 \leq t \leq 20\lambda/c$ ,  $a = 500$ ,  $\omega_L = 2\pi c/\lambda$ ,  $T = 40\lambda/c$ ,  $\lambda = 1$  мкм есть длина волны лазера. Вероятность того, что He не будет ионизирован, можно рассчитать следующим образом  $P(t) = 1 - \exp\left\{-\int_{-\infty}^t W_{TI}(|E(\tau)|)d\tau\right\}$ . Скорость ионизации, определяемая уравнением (98), по величине больше, чем значение рассчитанное численно для  $E \gg E_{cr}$  [120, 121]. Поэтому 90% ионизация He будет достигаться даже на более высоких полях, чем  $4E_{cr}$ .

В пределе экстремально сильного лазерного поля, полем иона можно пренебречь, а электроны внутри иона можно считать несвязанными, при быстром

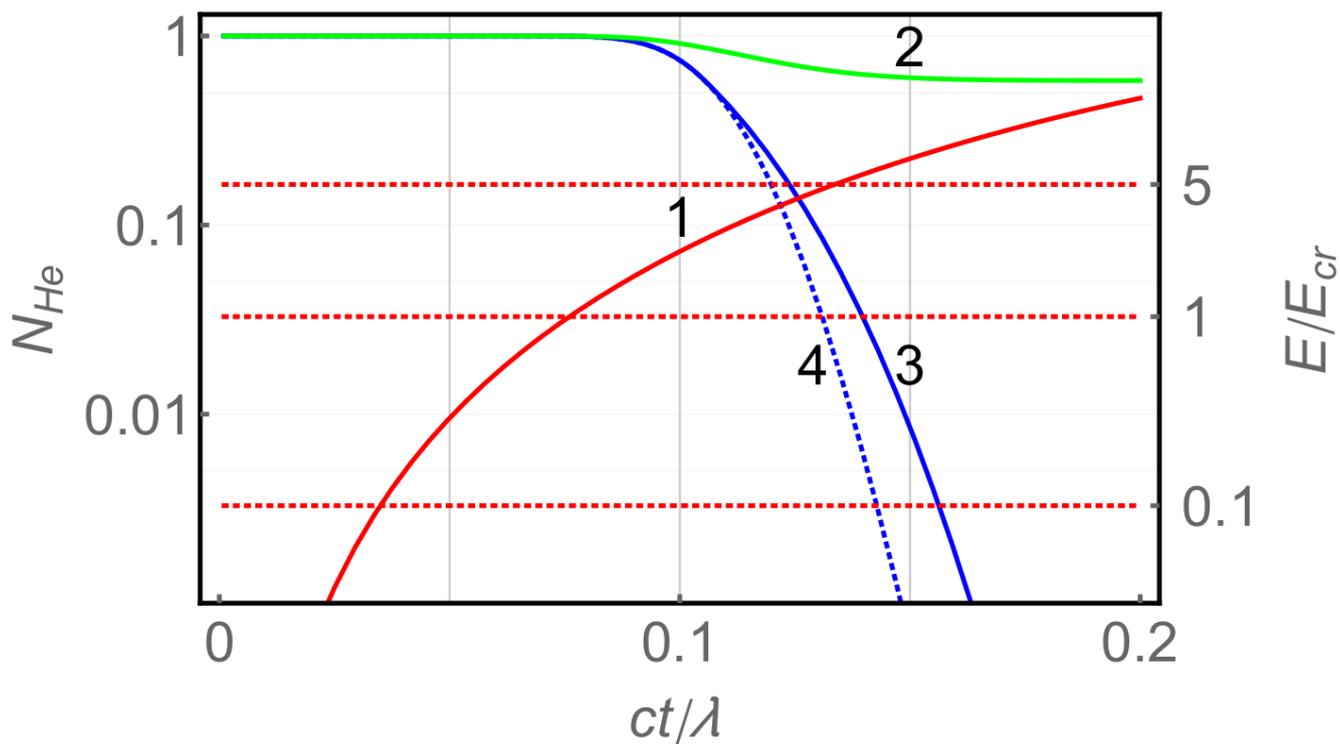


Рис. 9: Зависимость лазерного поля от времени (кривая 1) и вероятность не ионизации для атома гелия как функция времени (2-4). Вероятности посчитаны интегрируя  $W_{TI}$  (кривая 4),  $W_{PW}$  (кривая 3), а также скорость ионизации из работы [121] (кривая 2).

включения лазерного поля. Поле иона с зарядом  $Z$  в точке, где находится внешний электрон можно оценить как  $E_i(r_0) \simeq eZ/r_0^2 = 16E_{cr}$  в начале ионизации, где  $r_0 \simeq a_B Z/\kappa^2 = 4r_m(E_{cr})$  есть радиус орбиты электрона с потенциалом ионизации  $I_i$ ,  $r_m(E) = (eZ/E)^{1/2}$  есть положение максимума потенциального барьера для электрона в ионном поле и внешнем электрическом поле  $E$  и  $a_B = \hbar^2/(m_e c^2)$  есть радиус Бора. Поэтому, полем ионов можно пренебречь, если  $E \gg 16E_{cr}$ . Однако,  $16E_{cr}$  это максимальное значение ионного поля, которое ощущает электрон во время ионизации. В качестве условия, при котором можно пренебречь ионным полем, можно принять  $E \gg E_{cr}$ , поскольку в этом пределе ионизационная энергия намного выше максимума потенциального барьера.

Время ионизации можно оценить из модели свободного электрона как время, необходимое для ускорения электрона от энергии атомного уровня  $\varepsilon_e = -I_i$  в континуум  $\varepsilon_e = 0$  так, что  $I_i = m_e c^2 \left[ (1 + a^2 \omega_L^2 \tau_i^2)^{1/2} - 1 \right]$ , где  $\varepsilon_e$  есть энергия электрона,  $\tau_i$  время ионизации, а  $amc\omega_L/e = E$  есть внешнее электрическое поле, ускоряющее электрон. Поэтому, скорость ионизации в пределе очень сильного поля можно оценить следующим образом:  $W_L \approx \tau_i^{-1} = \omega_L a \left[ (1 + I_i/m_e c^2)^2 - 1 \right]^{-1/2}$ . Пренебрегая релятивистскими поправками ( $I_i \ll m_e c^2$ ), мы можем получить линейную зависимость скорости ионизации от электрического поля:

$$W_L(E) \approx \omega_L a \sqrt{\frac{m_e c^2}{2I_i}} = \omega_a \frac{E}{E_a} \sqrt{\frac{I_H}{I_i}} \quad (101)$$

Наконец, строя кусочно заданную функцию для скорости полевой ионизации, можно расширить ее до области сверхсильного электрического поля, когда потенциальный барьер сильно подавлен:

$$W_{PW}(E) = \begin{cases} W_{TI}(E), & \text{if } E \leq E_{TIL}, \\ W_L(E), & \text{if } E > E_{TIL}, \end{cases} \quad (102)$$

где значение  $E_{TIL}$  есть пороговое электрическое поле, получающееся как решение трансцендентного уравнения  $W_{TI}(E) = W_L(E)$ .

Интересно отметить, что согласно расчетам в данной работе, пересечение между  $W_{TI}(E)$  и  $W_L(E)$  происходит при напряженности поля  $E_{TIL} \sim E_{cr}$  для всех благородных газов. Например, для всех 54 электронов Хе,  $1.15E_{cr} < E_{TIL} < 1.91E_{cr}$ . Если последние два электрона ( $1s^1$  и  $1s^2$  электронов) Хе исключены, то

$1.15E_{cr} < E_{TIL} < 1.45E_{cr}$ . Формула, предложенная в работе [120], представляющая из себя комбинацию  $W_{TI}(E)$  и  $W_Q(E)$  предсказывает нефизичное значение порогового электрического поля  $E_{TIQ} = 0$  для ионизации  $1s^2$  электрона He (см. рис. 10 (а)). Также стоит отметить, что  $W_Q(E)$  для водорода начинает значительно отклоняться от численных результатов в точке  $E = E_{QL} \simeq 0.4E_a$ , где  $W_Q(E)$  пересекается с  $W_L(E)$  (см. рис. 6 в работе [120] и Рис. 10 (b)).

Для того чтобы учесть многократную ионизацию за один временной шаг в моделировании PIC кодом, используется схема, предложенная в работе [125]. Этот метод основан на решении системы дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих эволюцию зарядового состояния иона [126]. Уравнения можно решить численно [127, 128] или аналитически [125] в предположении, что распределение поля и вероятности ионизации не меняются на одном шаге по времени. События ионизации моделируются численной схемой МК как случайный процесс, в котором скорость ионизации определяется уравнением (102).

Рассмотрим алгоритм предложенный в работе [125]. Рассмотрим в некоторый момент времени ион  $A^{i+}$  (нейтральный атом при  $i = 0$ ). Вероятность однократной ионизации за шаг  $\Delta t$  можно записать как  $P_{i+1} = 1 - e^{-W_{i+1}\Delta t}$ , где  $W_{i+1}$  есть вероятность вылета из иона (атома)  $(i + 1)$ -ого электрона, а вероятность не ионизации есть  $\bar{P}_{i+1} = e^{-W_{i+1}\Delta t}$ . Будем считать, что туннельная ионизация идет за время, много меньшее лазерного периода. Назовем бесконечно малый промежуток времени за который происходит ионизация  $\delta t$ . Тогда можно записать  $P_{i+1} = W_{i+1}\delta t$ . Определим вероятность вылета одного и только одного электрона за шаг  $\Delta t$ , т.е. вероятность появления иона (если он существует)  $A^{(i+1)+}$ . Для этого необходимо выполнить следующие условия: Ионизация атома не происходит до некоторого момента  $t < \Delta t$ . На интервале  $[t, t + \delta t]$  происходит однократная ионизация,  $A^{i+} \rightarrow A^{(i+1)+}$  и появляется электрон. Дальнейшая ионизация, даже если возможна, не происходит вплоть до  $\Delta t$ . Принимая все эти условия во внимание, можно записать:

$$p_1^i = \int_0^{\Delta t} \bar{P}_{i+1}(t) W_{i+1} \bar{P}_{i+2}(\Delta t - t) dt = \frac{e^{-W_{i+2}\Delta t} - e^{-W_{i+1}\Delta t}}{1 - W_{i+2}/W_{i+1}}. \quad (103)$$

Аналогичным образом можно записать вероятность  $k$  кратной ионизации иона

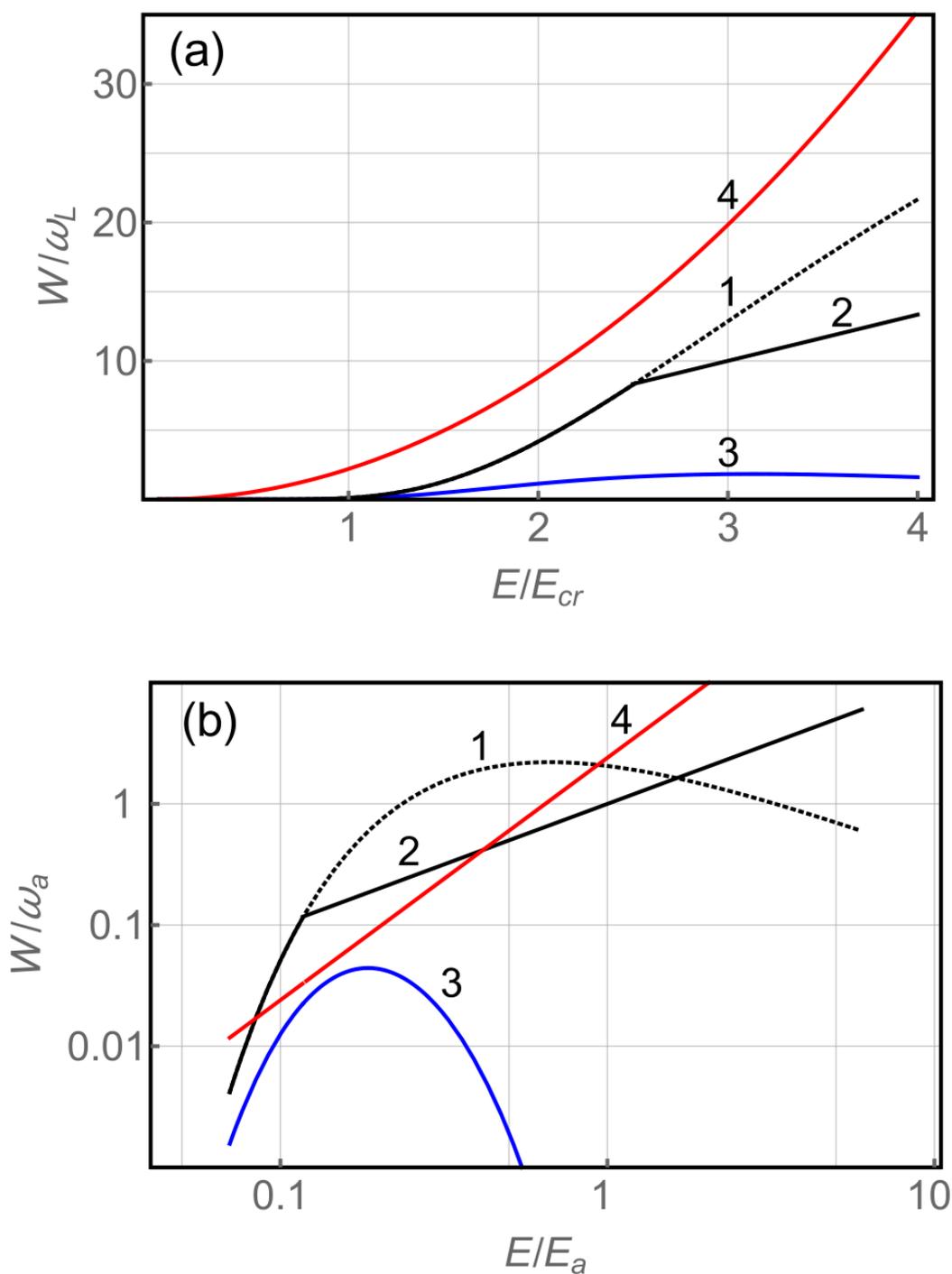


Рис. 10: Скорости ионизации (а)  $W_{TL}(E)$  (кривая 1),  $W_{PW}(E)$  (кривая 2) и  $W_Q$  (кривая 3) и скорости предложенные в работе [121] (кривая 3) как функции напряженности поля для ионизации одного электрона атома He. Аналогичные выражения представлены как функции напряженности электрического поля для атома водорода.

$A^{i+}$  (считая, что  $A^{(i+k)+}$  существует):

$$p_k^i = \sum_{p=1}^k \frac{e^{-W_{i+1+k}\Delta t} - e^{-W_{i+k}\Delta t}}{1 - W_{k+i+1}/W_{i+k}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq p}^k (1 - W_{p+i}/W_{j+i})}, \quad (104)$$

где значения  $i$  меняются от 1 до  $k_{max} - 1$ , а  $k$  меняется от 1 до  $k_{max} - i - 1$ , где  $k_{max}$  есть число протонов в ядре атома. Соответственно, вероятность того, что ион  $A^{i+}$  будет полностью ионизован есть:

$$p_{k_{max}-1}^i = 1 - \sum_{j=1}^{k_{max}-i+1} p_j^i. \quad (105)$$

Вычислив вероятности ионизации всех кратностей, можно воспользоваться следующей схемой Монте Карло [125]. Введем функцию, которая есть сумма вероятностей:

$$F_k^i(\Delta t) = \sum_{j=0}^k p_j^i(\Delta t), \quad (106)$$

где  $p_0^i(\Delta t) = e^{-W_{i+1}\Delta t}$  есть вероятность не ионизации за шаг  $\Delta t$ . По определению  $F_{k_{max}-i}^i(\Delta t) = 1$  и величина  $F_k^i(\Delta t)$  лежит в пределах от 0 до 1. Теперь можно записать ход работы алгоритма. На каждом шаге по времени вычисляются значения  $F_k^i$ , по формуле (106), и необходимые значения  $p_k^i$ , по формуле (104). Генерируется случайное число  $r$ , равномерно распределенное от 0 до 1 и происходит проверка следующего неравенства для всех допустимых  $k$ :

$$F_{k-1}^i(\Delta t) < r \leq F_k^i(\Delta t), \quad (107)$$

где  $F_{-1}^i(\Delta t) = 0$ . То значение  $k$ , при котором неравенство (107) выполнено, есть число вылетевших из иона (атома) электронов на данном шаге.

Подобные алгоритмы уже использовались в [125, 129]. В работах [126, 127] предлагается альтернативный подход к многоэлектронной ионизации. Предпола-

гаются, что ионизация происходит последовательно, и популяции для различных степеней ионизации находятся из следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dN^i}{dt} &= -W_i N^i, \\
\frac{dN^{i+1}}{dt} &= W_i N^i - W_{i+1} N^{i+1}, \\
&\dots \\
\frac{dN^{z-1}}{dt} &= W_{z-2} N^{z-2} - W_{z-1} N^{z-1}, \\
\frac{dN^z}{dt} &= W_{z-1} N^{z-1},
\end{aligned} \tag{108}$$

где  $W_i$  есть скорость ионизации иона с зарядом  $i$  (атома, если  $i = 0$ ), на некотором шаге. Используя приближение локально постоянного поля [4], можно сказать, что на каждом шаге коэффициенты  $W_i$  можно считать постоянными и решить систему аналитически. Пусть на некотором шаге  $j - 1$  известны популяции ионных состояний  $N_{j-1}^i, N_{j-1}^{i+1}, \dots, N_{j-1}^{z-1}, N_{j-1}^z$ , тогда зная поля и скорости ионизации для каждого состояния можно записать решение для популяций ионных состояний на шаге  $j$ :

$$\begin{aligned}
N_j^i &= N_{j-1}^i \exp(-W_i \Delta t), \\
N_j^{i+1} &= \left( N_{j-1}^{i+1} + \frac{W_i N_{j-1}^i}{W_i - W_{i+1}} \right) \exp[-W_{i+1} \Delta t] - \frac{W_i N_j^i}{W_i - W_{i+1}}, \\
N_j^\tau &= \left( N_{j-1}^\tau + \sum_{s=0}^{\tau-1-i} \left( N_{j-1}^s \prod_{\xi=s}^{\tau-1-i} \left( \frac{W_\xi}{W_\xi - W_\tau} \right) \right) \right) \cdot \exp[-W_\tau \Delta t] - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\tau-1-i} \left( N_j^s \prod_{\xi=s}^{\tau-1-i} \left( \frac{W_\xi}{W_\xi - W_\tau} \right) \right),
\end{aligned} \tag{109}$$

где  $\Delta t$  шаг по времени, а  $\tau$  меняется от  $i + 1$  до  $z - 1$ . Очевидно, решать последнее уравнение системы (108) не требуется, поскольку сумма популяций равна 1:

$$\sum_{s=i}^z N^s = 1. \quad (110)$$

Теперь мы можем записать алгоритм для моделирования многоэлектронной ионизации. Генерируется случайное число  $r$ , равномерно распределенное от 0 до 1 и проверяется выполнение следующего неравенства:

$$\sum_{s=i}^{k-1} N^s < r < \sum_{s=i}^k N^s, \quad (111)$$

значение  $k$ , при котором неравенство выполнено, есть новая степень ионизации иона. Оба алгоритма приводят к похожим результатам моделирования.

Потери на ионизацию можно учесть следующим образом. Если на шаге  $i$  произошла ионизация некоторых состояний, суммарный потенциал ионизации которых  $U$ , то изменение энергии поля есть:

$$\mathcal{W}_{i+1} - \mathcal{W}_i = -U, \quad (112)$$

где  $\mathcal{W}_i$  есть энергия электромагнитного поля на шаге  $i$ . Изменение энергии можно записать в виде некоторых джоулевых потерь:

$$\frac{\mathcal{W}_{i+1} - \mathcal{W}_i}{\Delta t} = -\mathbf{I}_{ion} \mathbf{E}_{i+1/2}, \quad (113)$$

где введен ток, удовлетворяющий (112). Непосредственное введение такого тока в РС моделирование приведет в нефизичному распределению зарядов согласно уравнению непрерывности. Появления такого распределения, однако, можно избежать следующим образом. Поскольку каждый электрон рассматривается отдельно, можно записать ток в следующем виде:

$$\mathbf{I}_{ion} = e \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = e \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{\Delta t}, \quad (114)$$

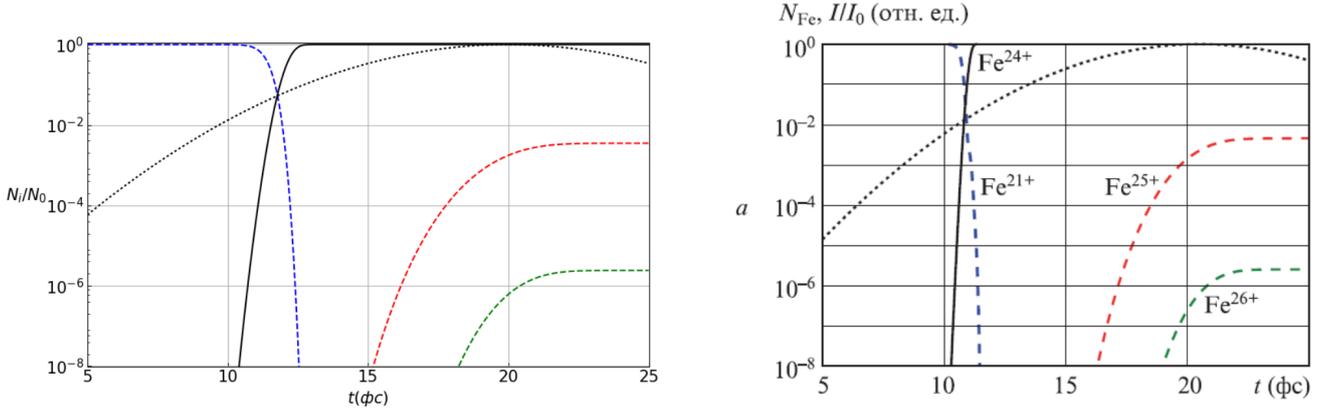


Рис. 11: Левый график есть результат работы алгоритма, разработанного в данной работе, правый график есть результат из работы [128]. Цвет и тип линий кривых соответствует одному и тому же типу ионов, черная точечная линия изображает огибающую поля по интенсивности.

где  $\mathbf{r}_{i+1}$  есть смещение рожденного электрона относительно иона от которого он оторван полем. Это смещение можно вычислить следующим образом:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \frac{\mathbf{E}_{i+1/2} U}{|\mathbf{E}_{i+1/2}| e} = \alpha^2 \frac{\lambda \mathbf{a}_0 U}{4\pi a_0^2 U_H}. \quad (115)$$

Таким образом при рождении электрона он помещается на расстояние (115) от соответствующего иона.

Для проверки работы ионизационного блока, было проведено сравнение результатов с работой [128], где рассматривалась ионизация в парах железа  $F^{21+}$ , при распространении лазерного импульса с гауссовой огибающей. Из-за отсутствия точных выражений для поля в работе [128], полученные кривые (см. рис. 11) совпадают с точностью до сдвига всей картины как целого.

Также было проведено сравнение с работой [129] (см. рис. 12), где авторы рассматривали ионизацию углерода при распространении лазерного импульса с гауссовой огибающей. Левая часть рисунка есть график, построенный в результате работы блока, разработанного в данной работе, рисунок справа есть результат авторов работы [129].

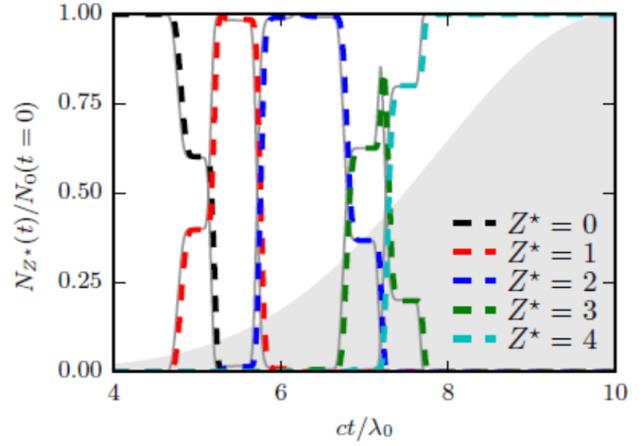
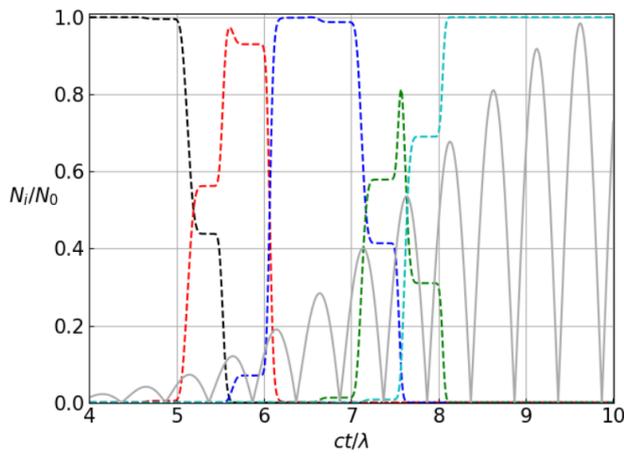


Рис. 12: Левый график есть результат работы алгоритма, разработанного в данной работе, правый график есть результат из работы [129]. Цвет и тип линий кривых соответствует одному и тому же типу ионов. Серая область на рисунке справа и серая кривая на рисунке слева есть гауссова огибающая по полю.

### 3.2.2 Численное моделирование ионизационных процессов

Для исследования возникновения каскадов в инертных газах рассматривалась следующая схема. Два лазерных импульса распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $x$  и сталкиваются в области заполненной атомами благородного газа. Центры лазерных импульсов расположены в точках  $x_0 = 16\lambda$ ,  $y_0 = z_0 = 16.5\lambda$  и  $x_0 = 40\lambda$ ,  $y_0 = z_0 = 16.5\lambda$  при  $t = 0$  соответственно, где  $\lambda = 1$  мкм. Импульсы фокусируются в точке  $x_c = 28\lambda$ , которая является центром области, заполненной газом. Лазерные импульсы имеют линейную поляризацию ( $E_z = B_y = 0$ ), а  $y$ -компонента электрического поля в начальный момент  $t = 0$

есть:

$$\begin{aligned}
E_y(\mathbf{r}) &= A(\mathbf{r}) \cos^2 \left[ \frac{\pi \sqrt{y^2 + z^2}}{2\sigma(\mathbf{r})} \right] \mathcal{Y}(\mathbf{r}), \\
\mathcal{Y}(\mathbf{r}) &= \cos^2 \frac{\pi x}{2\sigma_x} \cos \psi(\mathbf{r}) - \frac{\lambda}{4\sigma_x} \sin \psi(\mathbf{r}) \sin \frac{\pi x_s}{\sigma_x}, \\
\psi(\mathbf{r}) &= R(\mathbf{r}) - \arctan \frac{d}{x_R} - \arctan \frac{x_s - d}{x_R}, \\
R(\mathbf{r}) &= k_L \left[ x_s + \frac{(y^2 + z^2)(x_s - d)}{2(x_s - d)^2 + 2x_R^2} \right], \\
x_s &= x - x_0, \\
\sigma(\mathbf{r}) &= \frac{\pi \sigma_0}{\sqrt{2^{-2} 3 \pi^2 - 4}} \\
&\times \left[ 1 + \left( \frac{\psi(\mathbf{r}) - k_L d + \arctan x_R^{-1} d}{k_L x_R} \right)^2 \right]^{1/2}, \\
A(\mathbf{r}) &= \frac{a m c \omega_L}{e} \frac{\sqrt{x_R^2 + d^2}}{\sqrt{x_R^2 + x_0^2}} \frac{\sigma_0}{\sigma(\mathbf{r})} \frac{\pi}{\sqrt{2^{-2} 3 \pi^2 - 4}},
\end{aligned} \tag{116}$$

где  $a = 500$  есть амплитуда лазерного импульса,  $\sigma_x = 8\sqrt{2\pi}\lambda$  есть длина импульса,  $d = 12\lambda$  расстояние от центра импульса до центра области моделирования,  $x_R = \pi\sigma_0^2/\lambda$ ,  $\sigma_0 = 3\lambda$ ,  $k_L = 2\pi/\lambda$ . Остальные компоненты электрических и магнитных полей при  $t = 0$  можно рассчитать из уравнений Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Плотность газа выбирается менее  $10^{16} \text{см}^{-3}$ , чтобы столкновительными эффектами (столкновительная ионизация, тормозное излучение), на характерных временах моделирования, можно было пренебречь. Затравочные электроны для запуска каскада образуются за счет полевой ионизации атомов газа. Для изучения вклада электронов в различных атомных оболочках, плотности газов выбираются обратно пропорциональными атомным номерам так, что число электронов, образовавшихся после полной ионизации, одинаково для всех газов. Например, плотность He составляет  $9.03 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$  в расчетах, что в 27 раз выше, чем плотность Xe,  $3.35 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$ . Следовательно, в случае полной ионизации атомов, количество образующихся при ионизации электронов для обоих газов одинаковы.

Рассмотрим развитие КЭД каскада в He. Объем газовой области в моделиро-

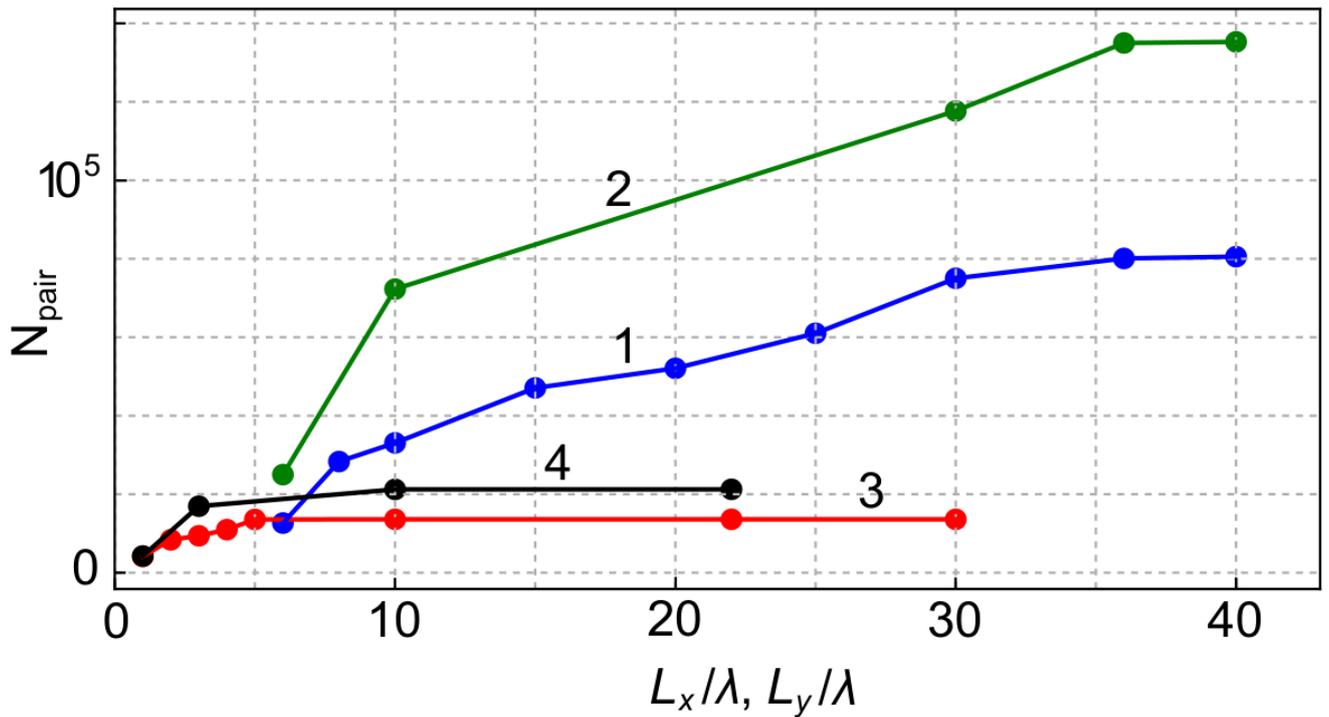


Рис. 13: Число пар в каскаде как функция размера газовой области вдоль  $x$  для He (кривая 1) и для Xe (кривая 2), и вдоль  $y$  (кривая 3 для He, кривая 4 Xe).

вании имеет длину  $40\lambda$  по оси  $x$  ( $8\lambda \leq x \leq 48\lambda$ ) и  $5\lambda$  по оси  $y$  ( $14\lambda \leq y \leq 19\lambda$ ) и оси  $z$  ( $14\lambda \leq z \leq 19\lambda$ ). Дальнейшее расширение объема газа во всех направлениях не увеличивает число пары, образующееся в каскадах (см. рис. 13). Плотность газа составляет  $9.03 \times 10^{15} \text{cm}^{-3}$ .

Распределения электронов, позитронов, ионов и поля  $E_y$  показаны на рис. 14 в разные моменты времени. Центры импульсов пересекаются в  $x = 28\lambda$  при  $t = 18\lambda/c$ . Встречные лазерные импульсы создают структуру поля, которая близка к линейно поляризованной стоячей волне вблизи  $x = 28\lambda$ . В случае с He полная ионизация атомов происходит уже на фронте лазерного импульса. При  $t \geq 10\lambda/c$  газ полностью ионизирован и новые электроны не появляются. Большая часть образовавшихся электронов выталкивается пондеромоторной силой лазерного импульса из области высокой интенсивности в поперечном направлении и, как следствие, не участвует в развитии каскада. Небольшая часть электронов движется вместе с лазерными импульсами, образуя тем самым два встречных релятивистских сгустка (см. рис. 14(a)), которые в последствии сталкиваются с распространяющимся навстречу лазерным импульсом. Часть электронов из сгустка захватываются узлами стоячей волны, соответствующими ми-

нимуму пондеромоторного потенциала (см. рис. 14(b)) [29, 130, 131].

Типичные траектории захваченных электронов, находящихся в течение длительного времени в области, близкой к максимуму лазерного поля ( $x = 28\lambda$ ,  $y = 16.5\lambda$ ,  $z = 16.5\lambda$ ), и вылетевшие за счет пондеромоторной силы электроны показаны на рис. 15. Из численного моделирования следует, что большая часть электрон-позитронной плазмы эффективно производится за интервал времени  $12\lambda/c \leq t \leq 23\lambda/c$ . Пик плотности ионов также приходится на узлы волны, поскольку там накапливается нескомпенсированный отрицательный заряд за счет электронов, притягивающих ионы (см. рис. 14(d)).

Плотность атомов Хе в моделировании составляет  $3.35 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$  что в 27 раз меньше плотности Не, так что число атомных электронов в объеме газа при полной ионизации одинаково для обоих газов. Развитие каскада в Хе показано на рис. 15. Аналогично случаю с Не, часть электронов, вылетающих с внешней оболочки атомов Хе на фронтах лазерных импульсов образуют встречные сгустки (см. рис. 16(a)). Электроны сгустка захватываются в узлах стоячей волны вблизи  $x = 28\lambda$ , где центры лазерных импульсов пересекаются друг с другом (см. рис. 16(b)).

В отличие от Не, в данном случае электроны продолжают появляться за счет полевой ионизации даже после прохождения лазерным импульсом точки ( $t \geq 18\lambda/c$ ), поскольку потенциал ионизации электронов внутренней оболочки Хе примерно на 3 порядка выше, чем для Не. Некоторые траектории  $2s^1$  электронов Хе показаны на рис. 17, часть электронов с внутренних оболочек вылетает из области высокого поля, в то время как другие электроны внутренней оболочки совершают колебания в сильном лазерном поле в течение длительного времени и излучают фотоны высокой энергии. Из рис. 16 следует, что, как и для Не, плотность электронов, позитронов и ионов также достигает максимума в узлах стоячей волны, образующейся вблизи центра газового объема.

Эволюция населенности электронов внутренних оболочек и популяции высоко зарядных ионов показана на рис. 19, где видно, что ионы с наибольшим зарядом Хе  $+52$  образуются только в области пересечения лазерных импульсов. Скорость ионизации атомов для внутренних оболочек и скорость рождения позитронов существенны при  $7\lambda/c < t < 22\lambda/c$ , когда лазерное поле максимально. Следовательно, каскад в Хе может быть инициирован не только электронами внешних оболочек, захваченных стоячей волной, но и электронами с внутренних

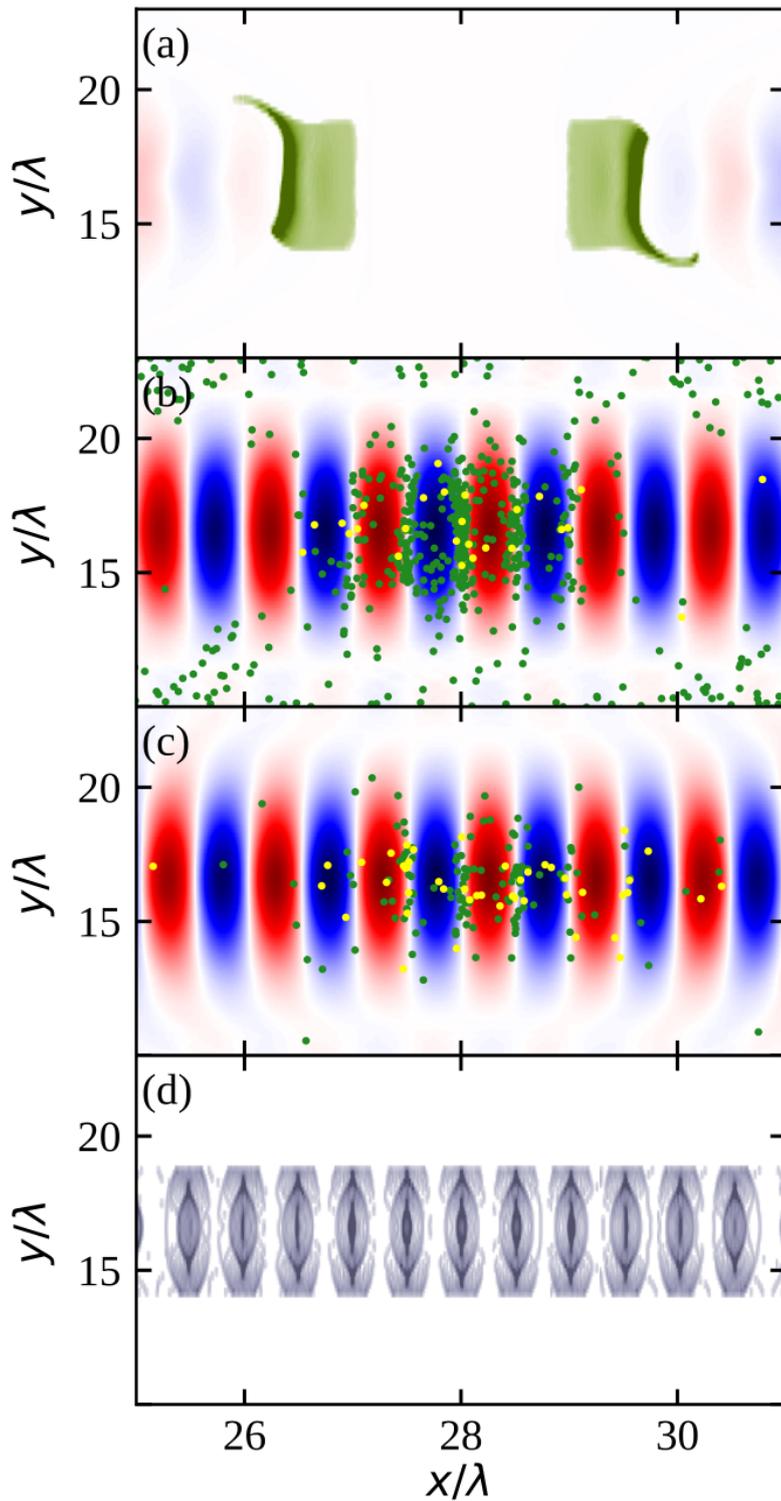


Рис. 14: Распределение электронов (зеленые точки), позитронов (желтые точки) и компоненты поля  $E_y$  (синие и красные области) в плоскости  $xy$  в момент (а)  $t = 8\lambda/c$ , (b)  $t = 15\lambda/c$  и (c)  $t = 18\lambda/c$ . Распределение (d) ионов Ne в плоскости  $xy$  в момент времени  $t = 18\lambda/c$ .

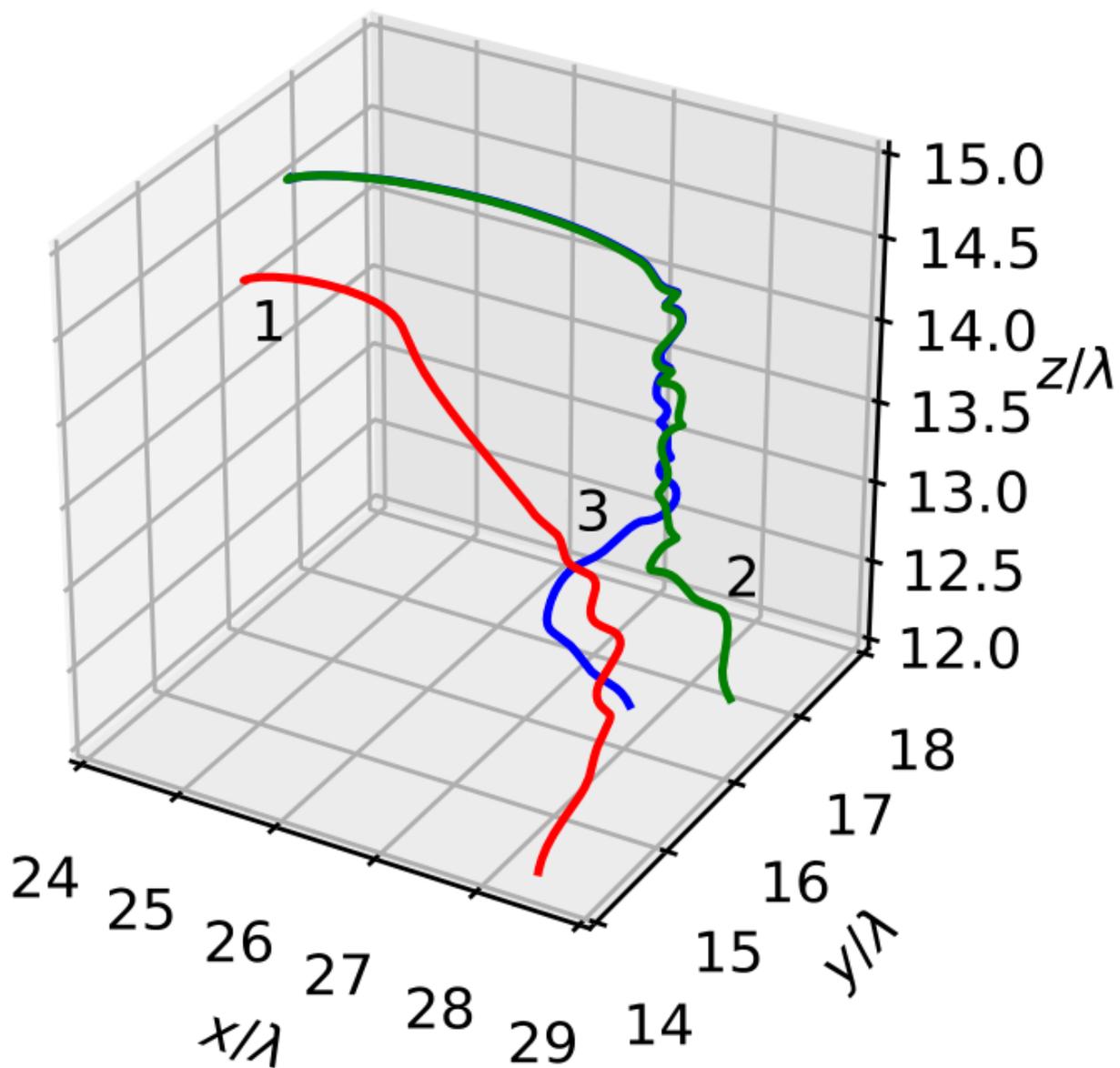


Рис. 15: Типичные траектории электронов, вылетающих с оболочек атома He, и вымываемые пондеромоторной силой (кривая 1). Траектории, захваченных электронов, которые находятся долгое время в области большого поля (кривые 2 и 3).

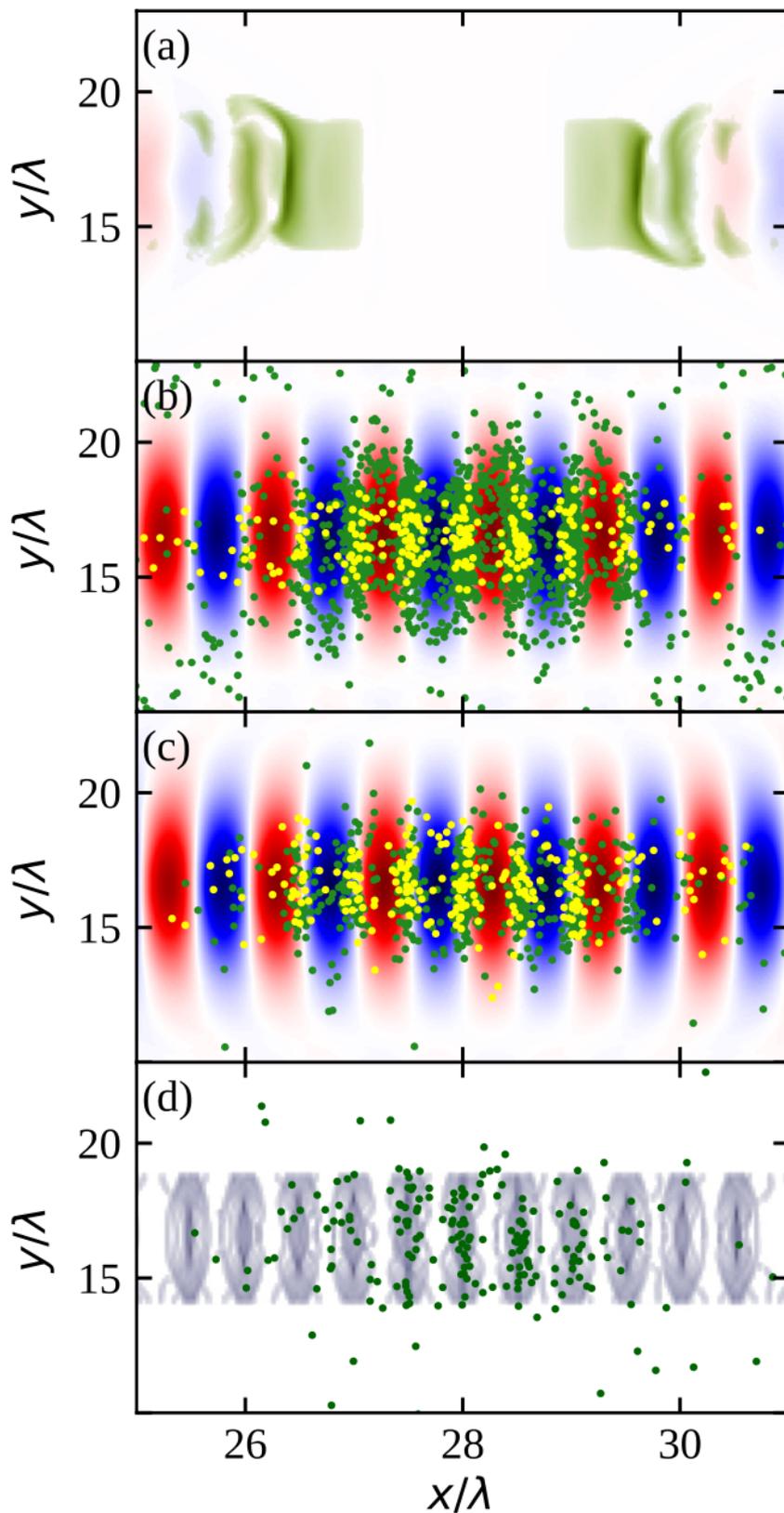


Рис. 16: Распределение электронов (зеленые точки), позитронов (желтые точки) и компоненты поля  $E_y$  (синие и красные области) в плоскости  $xy$  в момент (а)  $t = 8\lambda/c$ , (b)  $t = 15\lambda/c$  и (c)  $t = 18\lambda/c$  для атома Хе. Распределение (d) ионов Хе в плоскости  $xy$  в момент времени  $t = 18\lambda/c$  (серые области) и электронов с нижней оболочки  $2s^1$  (зеленые точки).

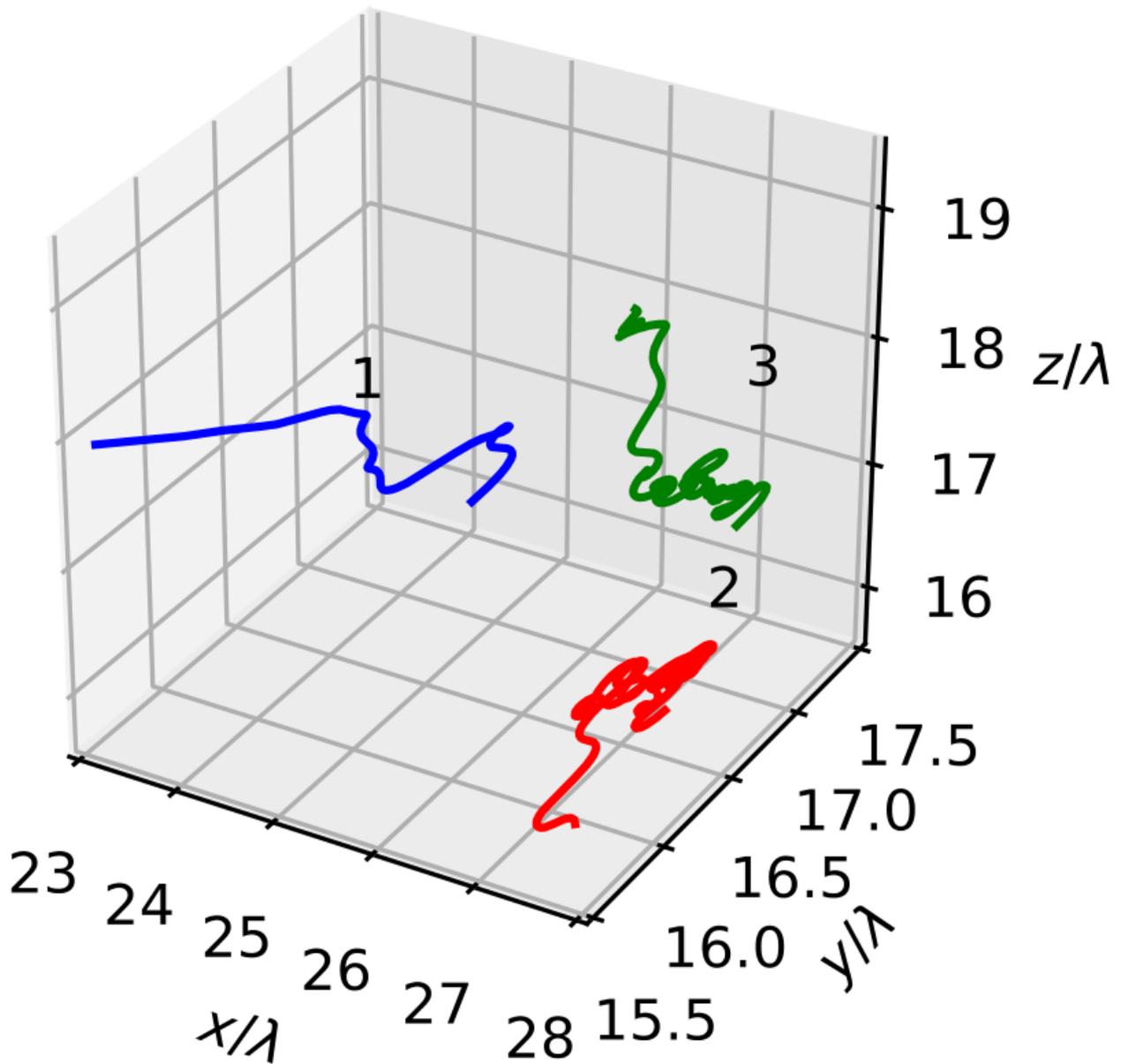


Рис. 17: Типичные траектории электронов вылетающих с оболочки  $2s^1$  атома Хе, вымываемые пондеромоторной силой (кривая 1) и захваченные, которые находятся долгое время в области большого поля (кривые 2 и 3).

оболочек, возникающих, когда лазерное поле становится достаточно сильным.

Число пар в зависимости от времени во всех благородных газах показано на рис. 18. Плотности газов нормированы на атомные номера так, чтобы плотности электронов при полной ионизации атомов были одинаковыми для всех газов. Плотности газов He, Ne, Ar, Kr и Xe составляют  $9.03 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$ ,  $1.81 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$ ,  $10^{15} \text{см}^{-3}$ ,  $5.02 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$  и  $3.34 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$  соответственно. Объем газа имеет длину  $5\lambda/c$  и ширину  $5\lambda/c$ . Из рис. 13 видно, что отношение  $N_p(Xe)/N_p(He)$  практически не меняется с увеличением объема. Таким образом, можно ожидать, что соотношение числа позитронов, представленное на рис. 18 для инертных газов, будет аналогичным для макроскопической газовой мишени ( $L \gg 40\lambda/c$ ). Несмотря на тот факт, что плотность Xe в 27 раз меньше, чем He, количество пар, образующихся в Xe, примерно в 2 раза больше, чем в He. Поэтому электроны внутренних оболочек играют важную роль в инициации каскада КЭД. Спектры электронов и фотонов, образующихся в каскаде в He и Xe показаны на рис. 20. Энергия частиц образующихся в Xe несколько выше чем в He.

### 3.2.3 Заключение и обсуждение результатов

Получена удобная феноменологическая формула для скорости полевой ионизации, охватывающая весь необходимый диапазон напряженности лазерного поля. Формула основана на комбинировании известного выражения для туннельной ионизации в пределе малых интенсивностей [38,39,117,118] и формулы для скорости ионизации в предельно сильного поля, когда зависимость от электрического поля линейная. Полученная линейная связь находится в качественном согласии с численными расчетами TDSE для водорода [124], если  $E \gg E_{cr}$ . Однако, необходима более детальная проверка предложенной формулы.

Исследованы КЭД каскады в благородных газах. Показано, что существуют два основных механизма образования затравочных электронов и иницирования каскада в газах с высоким  $Z$ , таких, как Ar, Kr и Xe. Попадание электронов с внешней оболочки, распространяющихся вместе с импульсами в область сильного поля, и вылет электронов внутренних оболочек, происходящий в момент пересечения импульсов и возникновения сильного поля. Потенциалы ионизации уровней  $2s^1$  и  $2s^2$  Xe составляют около 10 кэВ. Эти электроны могут покинуть ион только при очень высокой напряженности поля. В газах с низким  $Z$ , таких, как Ne и He возможен только первый механизм. Эти газы полностью ионизи-

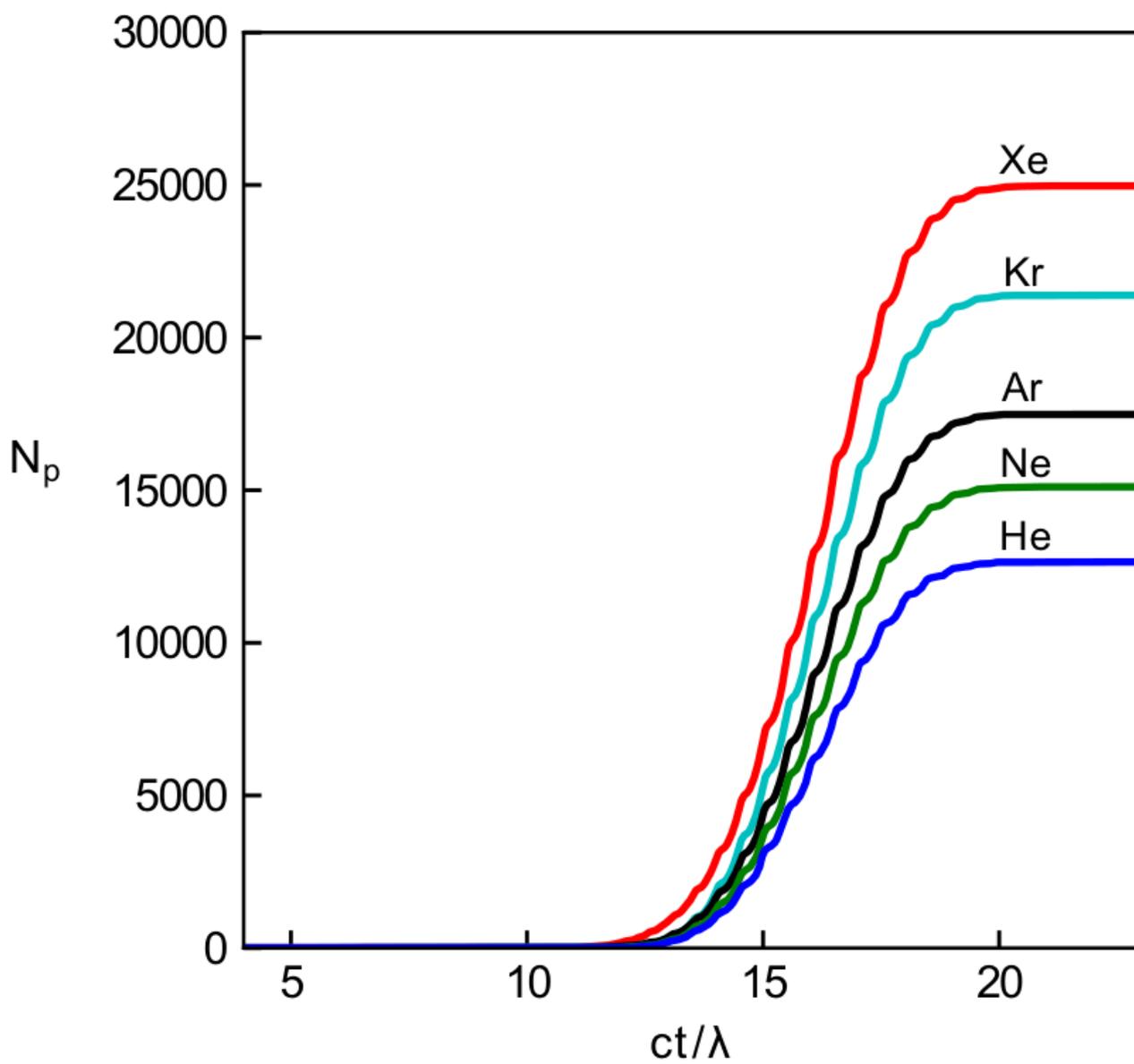


Рис. 18: Число электрон-позитронных пар как функция времени для He, Ne, Ar, Kr, Xe.

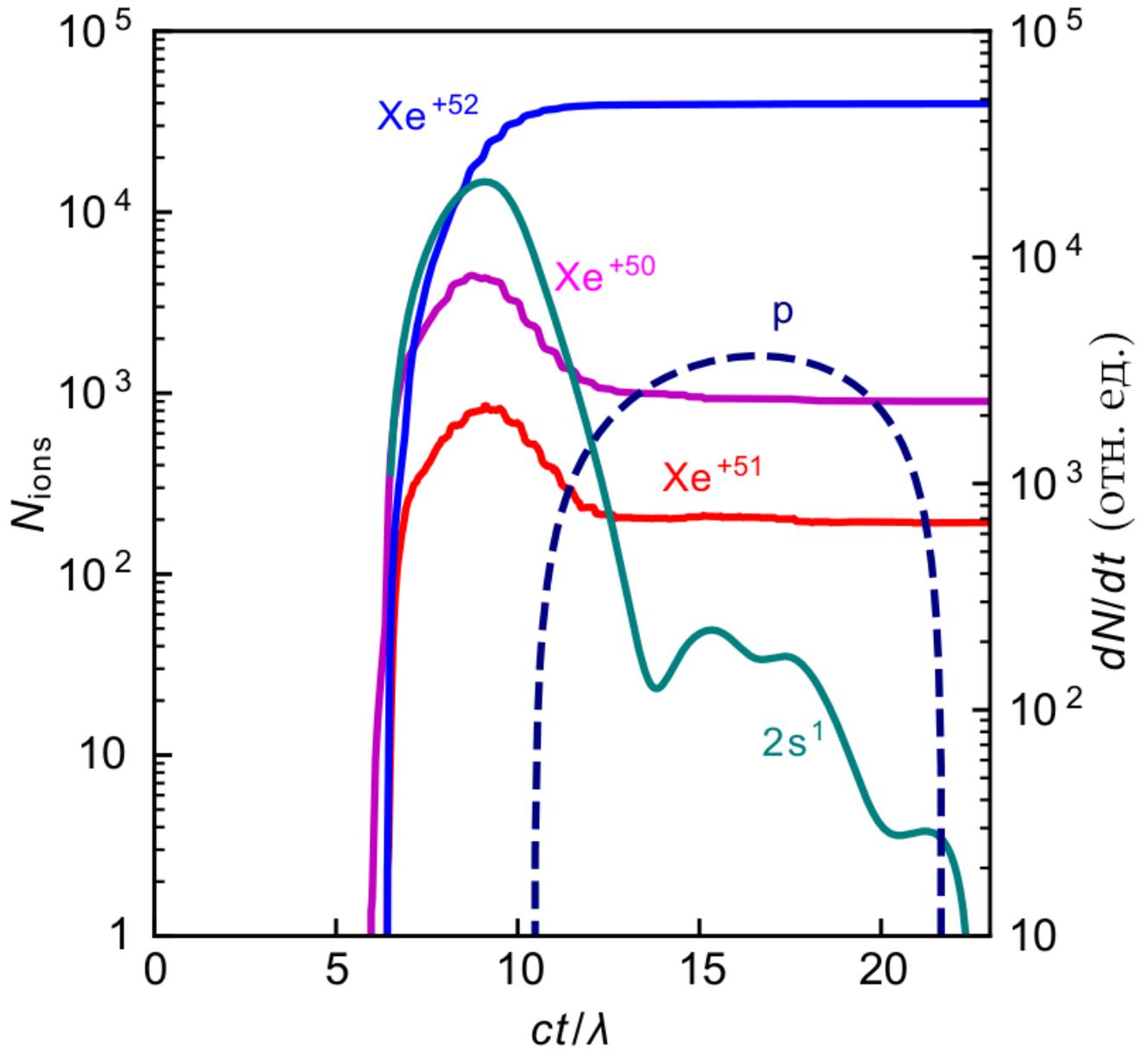


Рис. 19: Число ионов с большим зарядом, скорости ионизации для внутренних оболочек и скорость рождения позитронов как функции времени в Хе.

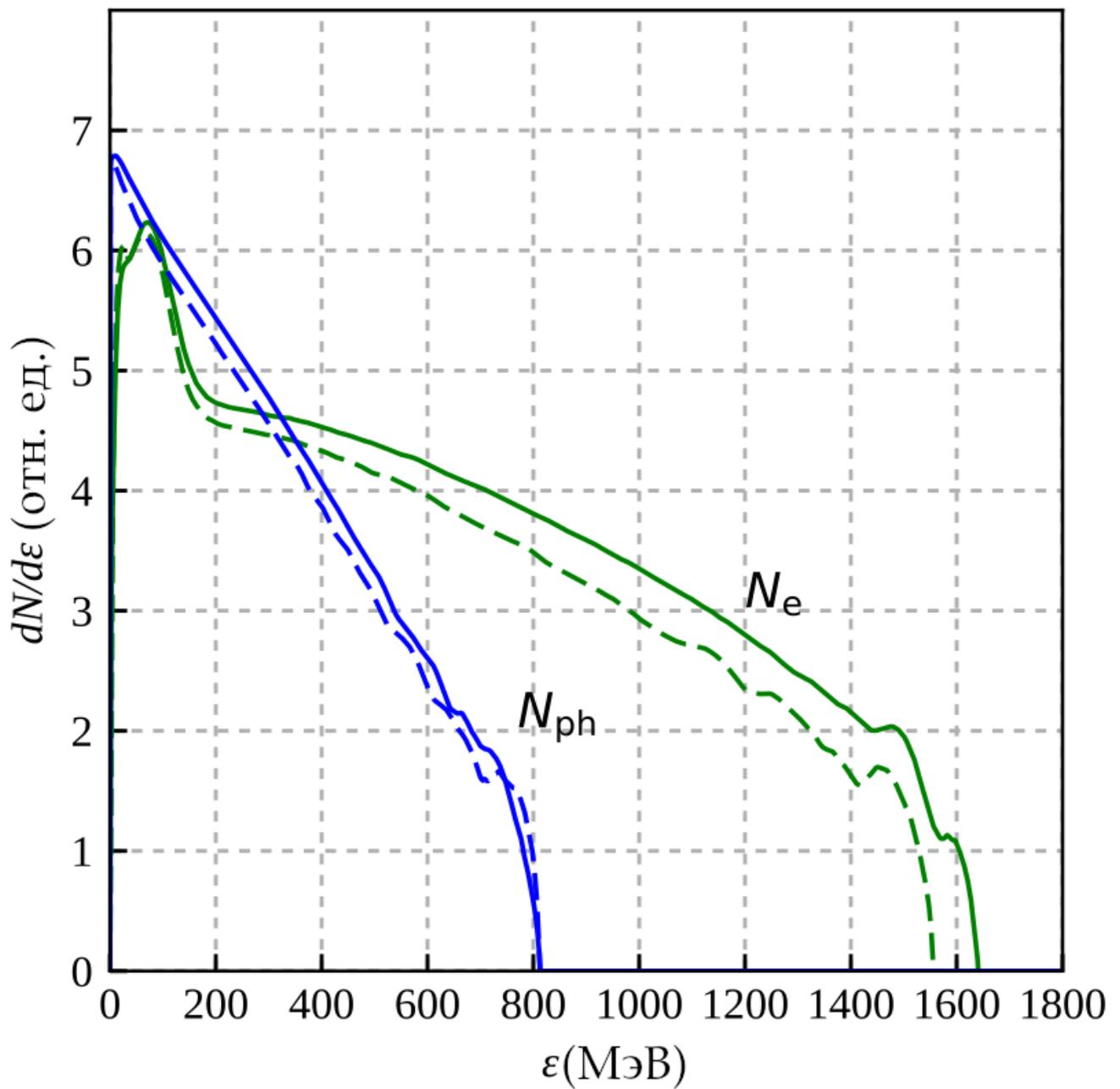


Рис. 20: Спектры фотонов в Ne (пунктирная синяя линия) и для Xe (синяя линия), спектры электронов в Ne (пунктирная зеленая линия) и в Xe (сплошная зеленая линия).

руются еще на фронте лазерного импульса. Большинство электронов выталкиваются пондеромоторной силой лазерного импульса из области интенсивности и не участвуют в инициации каскада. Небольшая часть образовавшихся электронов движется вместе с лазерными импульсами вплоть до момента времени, когда импульсы пересекаются, и лазерное поле становится достаточно сильным для каскадирования.

Первый механизм обсуждается в [29], где захват электронов в каскадной области наблюдался в численном моделировании. Показано, что часть затравочных электронов доживает до пересечения импульсов и захватывается вблизи узлов электрического поля стоячей волны, образованной встречными импульсами. Второй механизм обсуждается в работе. [33], где ионизация включена в моделирование каскада. Однако модель ионизации, используемая там, является слишком упрощенной. В этой модели не учитывается вероятностный характер ионизации и многократная ионизация электронов с разных оболочек атомов с высоким  $Z$ . Более того, согласно предложенной там модели, все электроны атома покидают его одновременно. В настоящей диссертации используется вероятностное описание полевой ионизации. Эта модель позволяет проанализировать роль обоих механизмов. Из моделирований, выполненных в данной работе, следует, что в газах с высоким  $Z$ , таких, как Ar, Kr и Xe, оба механизма важны для инициализации каскада: электроны внешней оболочки участвуют в первом механизме, а электроны внутренней оболочки - во втором. Сравнивая рождение пар в He и Xe (см. рис. 13 и 18), можно заключить, что электроны внутренних оболочек Xe увеличивают рождение пар примерно в 2 раза для рассматриваемой области параметров, несмотря на тот факт, что плотность Xe в 27 раз меньше, чем He. Результат получен, когда пиковая напряженность лазерного поля  $2a = 1000$  близка к пороговому значению каскада.

КЭД каскад развивается в результате цепных реакций испускания фотонов электроном в лазерном поле (обратное комптоновское рассеяние) и за счет фоторождения пар при рассеянии фотонов в лазерном поле (процесс Брейта-Уилера). Однако высокоэнергетические фотоны и пары могут также рождаться в ходе столкновительных процессов, которыми в моделировании пренебрегается. Фотоны могут испускаться при рассеянии электронов на ионных или атомных ядрах (тормозное излучение), в то время как электрон-позитронная пара может появиться при распаде фотона высокой энергии, взаимодействующего с ионным

или атомным ядром.

Рассмотрим сначала вклад тормозного излучения в каскад. Полное сечение тормозного излучения в пределе  $\varepsilon_e \gg \varepsilon'_e \gg m_e c_e^2 \sigma_{br} = (2^{5/2}/3) Z^2 \alpha r_e^2 \gamma_e^{1/2}$ , где  $\varepsilon_e$  и  $\varepsilon'_e$  есть энергия электрона до и после рассеяния на ионе, соответственно  $\gamma_e = \varepsilon_e / (m_e c^2)$  есть релятивистский гамма-фактор электрона,  $\alpha = e^2 / (c\hbar) \approx 1/137$  есть постоянная тонкой структуры,  $r_e = e^2 / (m_e c^2) \simeq 2.82 \times 10^{-13}$  см есть классический радиус электрона [91]. Число фотонов тормозного излучения можно оценить следующим образом:  $N_{bph} \simeq n_e N_i c \sigma_{br} \tau_c$ , где  $n_e$  есть плотность релятивистских электронов,  $N_i$  количество ионов в объеме каскада и  $\tau_c$  продолжительность каскада. В моделировании объем каскада  $V_c \sim 5\lambda \times 5\lambda \times 5\lambda$  и его длительность  $\tau_c \simeq 7\lambda/c$  (см. рис. 19). Для случая полной ионизации газа Хе с  $Z = 54$  и  $n_g = 3.34 \times 10^{14}$  см $^{-3}$  получаем  $n_e = Zn_g \simeq 1.8 \times 10^{16}$  см $^{-3}$ ,  $N_i = n_g V_c \simeq 4.18 \times 10^4$  и  $N_{bph} \simeq 9.51 \times 10^{-5}$ , где средний гамма-фактор электрона  $\gamma_e \simeq 10^3$ . Отсюда следует, что количество фотонов тормозного излучения пренебрежимо мало по сравнению с количеством каскадных фотонов ( $N_{ph} > 10^5$ ).

Число электрон-позитронных пар, создаваемых высокоэнергетическими фотонами вблизи ядер можно оценить следующим образом:  $N_{npair} \simeq n_{ph} N_i c \sigma_{npair} \tau_c$ , где  $\sigma_{br} \simeq (28/9) Z^2 \alpha r_e^2 \left[ \ln (2\varepsilon_{ph}/m_e c^2) - (109/42) - 1.2 (\alpha Z)^2 \right]$  есть сечение образования пар вблизи ядер в релятивистском пределе ( $\varepsilon_{e,ph} \gg m_e c^2$ ) и  $n_{ph} = N_{ph}/V_c$  есть плотность фотонов в объеме каскада [91]. Из моделирования следует, что количество фотонов высокой энергии ( $\varepsilon_{ph} > 1$  МэВ)  $N_{ph} < 10^6$ , поэтому количество созданных пар фотонами вблизи ядер составляет  $N_{npair} < 10^{-5}$ , что намного меньше количество пар, образующихся в каскаде  $N_{pair} > 10^4$ .

Вклад столкновительной ионизации также можно оценить аналогичным способом. Сечение ударной ионизации для релятивистских электронов можно оценить как  $\sigma_{ci} \simeq (2^{7/2} \pi^{1/2}/3) Z^2 \alpha r_e^2 L$ , где  $L$  есть кулоновский логарифм [132]. Даже для очень большого значения  $L = 20$  количество электронов, образующихся в результате столкновительной ионизации  $N_{e,ci} = n_e N_i c \sigma_{ci} \tau_c \simeq 0.016$  составляет число, намного меньшее, чем количество электронов, созданных в результате полевой ионизации  $N_e \gg N_i > 10^4$  в каскаде. Таким образом, столкновительной ионизацией можно пренебречь для рассматриваемых параметров.

Электроны также могут возникать при столкновении фотонов высокой энергии с атомами или частично ионизированными ионами (это так называемый эффект фотоионизация, схожий с фотоэффектом, при котором электрон вылетает

из атома при поглощении атомом налетающего фотона). Этот эффект однофотонной ионизации не входит в нашу численную схему для полевой ионизации. Сечение для процесса фотоионизации для фотонов с энергией  $\varepsilon_{ph} < m_e c^2$  не превышает  $\sigma_{phe} < 10^{-19} \text{cm}^{-2}$  [133]. Из рис. 20 следует, что средняя энергия каскадных фотонов больше 100 МэВ, а фотоны с энергией  $\varepsilon_{ph} < m_e c^2$  принадлежат низкоэнергетической части спектра. Количество фотонов, излучаемых электроном, движущимся в лазерном поле, на единицу времени можно оценить следующим образом:  $dN_{ph}/d\varepsilon_{ph} = \varepsilon_{ph}^{-1} dI/d\varepsilon_{ph}$  и  $dN_{ph}/d\varepsilon_{ph} \simeq \omega_L^{-1} 0,021 \alpha a_S \chi_e^{2/3} \gamma_e^{-4/3} (\varepsilon_{ph}/m_e c^2)^{-2/3}$ , где используется приближенное выражение для низкоэнергетической части синхротронного спектра,  $dI/d\varepsilon_{ph}$  есть спектр синхротронного излучения [7] и  $a_S = m_e c^2 / \hbar \omega_L$ . Количество низкоэнергетических фотонов, испускаемых при развитии каскада можно оценить как  $N_{ph}(\varepsilon_{ph} < m_e c^2) \simeq 0.063 \alpha a_S \chi_e^{2/3} \gamma_e^{-4/3} (\omega_L \tau_c) \simeq 4$ , где  $\chi_e \simeq 10$  взято из моделирования. Число электронов, созданных за счет эффекта фотоионизации в области развития каскада при  $N_{e,phe} = (N_{ph}/V_c) N_i c \sigma_{phe} \tau_c \simeq 10^{-7}$ , что намного меньше, чем число электронов, созданных полевой ионизацией  $N_e \gg N_i > 10^4$ . Таким образом, фотоионизационный эффект можно также не учитывать в рассматриваемой задаче. Потери, связанные с ионизацией, также не учитываются при моделировании, поскольку энергия ионизации ( $< 0.1 m_e c^2$ ) на несколько порядков меньше средней энергии электронов в лазерном поле ( $\sim 10^3 m_e c^2$ ).

Также показано, что Хе лучше всего подходит для инициации КЭД каскада среди благородных газов.

### 3.3 Вычисление скорости роста КЭД каскадов во вращающемся поле

#### 3.3.1 Кинетическая модель

Рассмотрим задачу о формировании КЭД каскада во вращающемся электрическом поле. Такая конфигурация поля появляется при столкновении двух лазерных импульсов с круговой поляризацией в нулях магнитного поля результирующей стоячей волны. В данном разделе будет использоваться следующая нормировка. Электрическое и магнитное поля нормированы на  $m c \omega / e$ , где  $\omega$  есть ведущая частота лазерного поля. Скорости частицы нормированы на  $c$ , импуль-

сы частицы на  $mc$  и энергия на  $mc^2$ . Время нормированно на  $1/\omega$ , а координаты на  $c/\omega$ . Динамика КЭД каскада может быть описана используя кинетические уравнения для электронов, позитронов и гамма-квантов с учетом КЭД эффектов [27, 32]:

$$\begin{aligned} \partial_t f_{e,p} + \nabla_r \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma} f_{e,p} \right) + \nabla_p (\mathbf{F} f_{e,p}) = \int d^3 \bar{\mathbf{p}} f_{ph}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{p}}, t) w_p(\bar{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}) + \\ + \int d^3 \bar{\mathbf{p}} f_{e,p}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{p}}, t) [w_r(\bar{\mathbf{p}} \rightarrow \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) - w_r(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})], \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \partial_t f_{ph} + \nabla_r \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma} f_{ph} \right) = -f_{ph}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \int d^3 \bar{\mathbf{p}} w_p(\mathbf{p} \rightarrow \bar{\mathbf{p}}) + \\ + \int d^3 \bar{\mathbf{p}} [f_e(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{p}}, t) + f_p(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{p}}, t)] w_r(\bar{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (118)$$

где  $f_e$ ,  $f_p$ ,  $f_{ph}$  функции распределения электронов, протонов и фотонов соответственно. Для функций распределения выбрана следующая нормировка:

$$\int f_{e,p,ph}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p d^3 r = N_{e,p,ph}(t), \quad (119)$$

где  $N_e$ ,  $N_p$ ,  $N_{ph}$  число электронов, протонов и фотонов соответственно, а  $\mathbf{F}_L = \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{B}/(\gamma c)$  есть сила Лоренца, действующая на лептон с импульсом  $\mathbf{p}$ . Функция  $w_r(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})$  есть дифференциальная вероятность в единицу времени излучения лептоном фотона с импульсом  $\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}$ , а функция  $w_p$  есть вероятность распада фотона с импульсом  $\mathbf{p}$  на электрон импульсом  $\bar{\mathbf{p}}$  и протон с импульсом  $\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}$ . Предполагается, что излучение происходит строго вперед и зависимостью от угла пренебрегается. Для ультрарелятивистской частицы такое приближение выполняется с хорошей точностью, поскольку все излучение заключено в конусе с углом раствора  $\sim 1/\gamma \ll 1$ . Уравнения (117), (118) представляют собой полную систему уравнений, описывающую эволюцию функций распределения КЭД каскада. Правая часть уравнений (117), (118) описывает испускание фотонов и рождение пар. Первое слагаемое в правой части уравнения (117) характеризует рождение лептона с импульсом  $\mathbf{p}$  при распаде фотонов с импульсом  $p' > p$ , второе и третье слагаемые описывают, соответственно, увеличение и уменьшение числа электронов с импульсом  $\mathbf{p}$  из-за испускания фотона. Первый член в правой части уравнения (118) характеризует распад фотона, а два последних слагаемых описывают испускание новых фотонов электронами и позитронами.

Дифференциальная скорость вероятности  $w_r$  может быть записана через вероятность в единицу времени излучения фотона с энергией, лежащей в диапазоне  $[\varepsilon_{ph}, \varepsilon_{ph} + d\varepsilon_{ph}]$ , заданную уравнением (4). Аналогично для вероятности рождения пар  $w_p$  [27]:

$$w_r(\mathbf{p} \rightarrow \bar{\mathbf{p}}) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{dW_{rad}(\mathbf{p}, \varepsilon)}{d\varepsilon} \delta\left(\bar{\mathbf{p}} - \varepsilon \frac{\mathbf{p}}{p}\right), \quad (120)$$

$$w_p(\mathbf{p} \rightarrow \bar{\mathbf{p}}) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{dW_{pair}(\mathbf{p}, \varepsilon)}{d\varepsilon} \delta\left(\bar{\mathbf{p}} - \varepsilon \frac{\mathbf{p}}{p}\right), \quad (121)$$

$$\frac{dW_{rad}(\mathbf{p}, \varepsilon_{ph})}{d\varepsilon} = -\frac{\alpha}{a_s p^2} \left[ \int_{\kappa(\varepsilon_{ph})}^\infty \text{Ai}(\xi) d\xi + \chi(\mathbf{p})^{2/3} \text{Ai}'(\kappa(\varepsilon_{ph}, \mathbf{p})) \rho_r(\varepsilon_{ph}, p) \right], \quad (122)$$

$$\frac{dW_{pair}(\mathbf{p}, \varepsilon_l)}{d\varepsilon} = -\frac{\alpha}{a_s p^2} \left[ \int_{\hat{\kappa}(\varepsilon_l)}^\infty \text{Ai}(\xi) d\xi + \varkappa(\mathbf{p})^{2/3} \text{Ai}'(\hat{\kappa}(\varepsilon_l, \mathbf{p})) \rho_r(\varepsilon_l, p) \right], \quad (123)$$

$$\kappa(\varepsilon_{ph}, \mathbf{p}) = \left( \frac{\varepsilon_{ph}}{(p - \varepsilon_{ph})\chi(\mathbf{p})} \right)^{2/3}, \quad (124)$$

$$\hat{\kappa}(\varepsilon_l, \mathbf{p}) = \left( \frac{p^2}{(p - \varepsilon_l)\varepsilon_l \varkappa(\mathbf{p})} \right)^{2/3}, \quad (125)$$

$$\rho_r(\varepsilon_{ph}, p) = 2 \left( \frac{p - \varepsilon_{ph}}{\varepsilon_{ph}} \right)^{2/3} + \frac{\varepsilon_{ph}}{p} \left( \frac{\varepsilon_{ph}}{p - \varepsilon_{ph}} \right)^{1/3} \quad (126)$$

$$\rho_p(\varepsilon_l, p) = 2 \left( \varepsilon_l \frac{p - \varepsilon_{ph}}{\varepsilon_{ph}} \right)^{2/3} - \frac{\varepsilon_{ph}}{p} \left( \frac{p^2}{\varepsilon_l(p - \varepsilon_{ph})} \right)^{1/3}, \quad (127)$$

где  $\text{Ai}(\xi) = 1/\pi \int_0^\infty \cos(\xi^3/3 + \xi x) dx$  и  $\text{Ai}'(\xi)$  есть функция Эйри и ее производная соответственно,  $\mathbf{v}$  есть скорость лептона, и  $\mathbf{n}$  – это единичный вектор вдоль направления распространения фотона,  $a_s = eB_{cr}/m\omega$  есть нормированное критическое поле. Поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  нормированы на  $m\omega/e$ , где  $\omega$  есть частота лазерного поля. Дельта функции в уравнениях (120) и (121) означают, что фотон испускается вдоль импульса лептона и электрон-позитронная пара рождается с импульсом вдоль волнового вектора фотона. Выражение (122) аналогично выражению

(4) записаному через функции Эйри. Функции  $w_r$  и  $w_p$  можно выразить через полные вероятности в единицу времени излучения фотона  $W_{rad}$  и рождения пар  $W_{pair}$ :

$$W_{rad} = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{dW_{rad}(\mathbf{p}, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \int d\hat{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}), \quad (128)$$

$$W_{pair} = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{dW_{pair}(\mathbf{p}, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \int d\hat{\mathbf{p}} w_p(\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}), \quad (129)$$

В соответствии с законом сохранения энергии:  $w_{r,p}(\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}) = 0$  для  $\hat{p} > p$  и  $dW_{rad}(\mathbf{p}, \varepsilon)/d\varepsilon = dW_{pair}(\mathbf{p}, \varepsilon)/d\varepsilon = 0$  для  $\varepsilon > p$ .

### 3.3.2 Динамика электронов и позитронов

Чтобы упростить (117) будем предполагать, что динамика лептонов описывается силой реакции излучения в форме Ландау-Лифшица с учетом КЭД поправок [13, 134, 135]. В этом случае два последних слагаемых в (117) можно записать в следующем виде:

$$\partial_t f_{e,p} + \nabla_r \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma} f_{e,p} \right) + \nabla_r ((\mathbf{F}_l - \mathbf{v}F_R) f_{e,p}) \approx \int d\hat{\mathbf{p}} f_{ph}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}, t) w_p(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}). \quad (130)$$

Если пренебречь рождением пар ( $f_{ph} = 0$ ) и КЭД поправками ( $\chi = 0$ ), то уравнение (130) упрощается:

$$\partial_t f_{e,p} + \mathbf{v} \cdot \partial_r f_{e,p} + (\mathbf{F}_L - \mathbf{v}F_R) \cdot \partial_p f_{e,p} \approx f_{e,p} \frac{4F_R}{\varepsilon_l}, \quad (131)$$

где  $F_R \approx \mu \varepsilon_l^2 ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2)$  есть основное слагаемое в силе реакции излучения и  $\mu = 2e^2\omega/(3mc^3)$ . Учет трения приводит к несохранению фазового объема [130, 136]. Можно показать, что  $\partial(\mathbf{v}F_R)/\partial\mathbf{p} \approx 4F_R/\gamma$  в пределе  $\varepsilon \gg 1$ , а оставшиеся слагаемые порядка  $\varepsilon_l^2$ . Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} F_r \mu^{-1} \varepsilon_l^{-2} &= (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2 = \\ &= E^2 + 2\mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^2 \approx \\ &\approx (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (132)$$

где слагаемое  $(1 - v^2)E^2 \approx E^2\gamma^{-2}$  отброшено. Полученное выражение совпадает с  $4^{-1}\mu^{-1}\gamma^{-1}\partial(\mathbf{v}F_R)/\partial\mathbf{p}$  посчитанным в работах [130, 136].

Кинетическое уравнение (131) может быть решено методом характеристик. Решение кинетического уравнения для вращающегося электрического поля можно записать в следующей форме:

$$f_{e,p} = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)), \quad (133)$$

где  $r_i(t)$  и  $p_i(t)$  траектории лептона во вращающемся поле:

$$\mathbf{E}(t) = a_0(\mathbf{e}_x \sin(\omega t) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t)). \quad (134)$$

Это можно проверить, подставив (133) в (131) с учетом равенства  $x\delta(x)' = -\delta(x)$ . Суммирование по индексам  $i$  означает суммирование по начальным положениям электронов  $\mathbf{r}_0$ .

В работах [13, 130, 134, 136] было показано, что из-за радиационного трения траектории лептонов во вращающемся поле притягиваются к асимптотической стационарной траектории:

$$\mathbf{r}_i^Z(t) = \mathbf{e}_x \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t + \phi), \quad (135)$$

$$\mathbf{p}_i^Z(t) = \varepsilon_l(\mathbf{e}_x \cos(\omega t + \phi) - \mathbf{e}_y \sin(\omega t + \phi)). \quad (136)$$

Энергия лептона  $\varepsilon_l$  есть решение уравнения [13, 134, 137]:

$$\varepsilon_l^2 + \mu^2 \varepsilon_l^8 - a_0^2 = 0, \quad (137)$$

где  $\mu = 2\omega e^2/3mc^3$ . Уравнение для энергии электрона с КЭД поправками:

$$\varepsilon_l^2 + \mu^2 \varepsilon_l^8 G^2(\chi) - a_0^2 = 0, \quad (138)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_l^2}{a_s}, \quad (139)$$

где

$$G(\chi) = - \int_0^\infty dx \frac{3 + 1.25 \chi x^{3/2} + 3x^3}{(1 + \chi x^{3/2})^4} Ai'(x)x \quad (140)$$

есть отношение полной интенсивности излучения фотона в КЭД режиме к классической полной интенсивности  $G(\chi) = I(\chi)/I(\chi = 0)$ .

Далее сделаны следующие предположения:

1.  $f_{e,p,ph}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \approx \exp(\Gamma t) f_{e,p,ph}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$
2. Распределение по импульсам для лептонов узкое:  $f_{e,p} \approx n_{e,p}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^Z)$
3. Поля и функции распределения не зависят от координат  $y$  и  $z$
4. Плотности электронов и позитронов одного порядка:  $n_e \approx n_p$
5. Движение лептона подавлено в направлении, перпендикулярном плоскости вращения

### 3.3.3 Скорость роста каскада

Согласно уравнению (136)  $\mathbf{p}^Z$  не зависит от начальных условий, и зависит только от локальной силы поля. Интегрируя (130) по  $\mathbf{p}$  можно получить уравнение для электронов и позитронов:

$$\Gamma n_{e,p} = \int dp d\hat{p} f_{ph}(x, \hat{\mathbf{p}}) w_p(\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}) = \int d\hat{p} f_{ph}(x, \hat{\mathbf{p}}) W_{pair}(\chi(\hat{\mathbf{p}})), \quad (141)$$

где использовалось уравнение (129) для получения правой части. Уравнения (118) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma f_{ph} + W_{pair} f_{ph} &= \int d\hat{p} [f_e(x, \hat{\mathbf{p}}) + f_p(x, \hat{\mathbf{p}})] w_r(\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}) \approx \\ &\approx 2n_p \int d\varepsilon \frac{dW_{rad}(\mathbf{p}^Z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \delta\left(\mathbf{p} - \varepsilon \frac{\mathbf{p}^Z}{p^Z}\right), \end{aligned} \quad (142)$$

где использовались уравнения (120)-(127).

Решая уравнение (142) для  $f_{ph}$ , подставляя результат в уравнение (141) и интегрируя по  $\hat{\mathbf{p}}$ , можно получить выражения для скорости роста каскада:

$$\Gamma \approx 2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{W_{pair}(\chi(\varepsilon \frac{\mathbf{p}^Z}{p^Z}))}{\Gamma + W_{pair}(\chi_{pair}(\varepsilon \frac{\mathbf{p}^Z}{p^Z}))} \frac{dW_{pair}(\mathbf{p}^Z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (143)$$

Полученное выражение похоже на выражение (10) в работе [41]. Однако, в модели, предложенной в работе [41], пренебрегается реакцией излучения в вычислении  $\mathbf{p}_l$ ,  $\chi$  и  $dW_{rad}/d\varepsilon$ . В результате  $\Gamma$  переоценивается для сильных лазерных

полей ( $a_0 \gtrsim 400$ ), где эта сила оказывает существенное влияние. В модели, используемой в данной работе для вычисления  $\Gamma$ , используются асимптотические траектории которые получаются, если учитывать силу реакции излучения. Если аппроксимировать  $W_{rad}$  и  $W_{pair}$  некими средними константными значениями  $\hat{W}_{rad,pair}$ , то уравнение (143) можно привести к выражению (20), полученному в [138].

Поскольку средняя вероятность рождения фотона выше, чем средняя вероятность распада фотона в квантовом каскаде, то можно положить  $\Gamma \gg W_{pair}$  [138] и уравнение (143) можно существенно упростить:

$$\Gamma^2 \approx 2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{dW_{rad}(\mathbf{p}^Z, \varepsilon)}{d\varepsilon} W_{pair} \left( \varkappa \left( \varepsilon \frac{\mathbf{p}^Z}{p^Z} \right) \right) \quad (144)$$

что выглядит аналогично уравнению (11) в работе [41], если пренебречь реакцией излучения. Также результат согласуется с уравнением (20) в [138] для  $\Gamma$  в пределе  $\hat{W}_{rad} \gg \hat{W}_{pair}$  где  $W_{pair}$  и  $W_{rad}$  аппроксимированы, как упоминалось ранее, некоторыми постоянными средними значениями. В модели предлагаемой в [6, 138] предполагается, что лептоны теряют практически всю энергию после излучения. Такой сценарий подходит для экстремально сильных полей  $a_0 > 10^4$  (см. рис. 3а в [41]). Модель, предложенная в данной диссертации, подходит, в основном, для полей  $400 < a_0 < 10^4$ , когда лептон теряет энергию маленькими порциями  $\varepsilon_{ph} \ll \varepsilon_l$  и классическое описание динамики лептонов с реакцией излучения уместно. Заметим, что уравнение (144) можно рассматривать как свёртку спектра фотона  $dW_{rad}/d\varepsilon$  и вероятности рождения пар  $W_{pair}$ . Это говорит о том, что маленькая часть фотонов, находящаяся в высокоэнергичной области спектра, является достаточной, чтобы инициировать каскад, поскольку  $W_{pair}$  экспоненциально увеличивается с ростом энергии фотона.

Дальнейшее упрощение уравнения (144) может быть сделано в пределе  $\varkappa \ll 1$  и  $s/(1-s) \gg \chi$  где  $s = \varepsilon_{ph}/\varepsilon_l$ . В этом пределе  $W_{pair}$  переходит в [7]:

$$W_{pair} \approx 0.23 \frac{\alpha a_s \varkappa}{\varepsilon_{ph}} \exp \left( -\frac{8}{3} \frac{1}{\varkappa} \right). \quad (145)$$

Учитывая только высокоэнергичная часть спектра фотонов, можно записать

[139]:

$$\frac{dW_{rad}}{d\varepsilon_{ph}} \approx \frac{\alpha a_s \chi^{1/2}}{6\sqrt{\pi}\varepsilon_l^2} \frac{1-s+s^2}{\sqrt{s(1-s)}} \exp\left(-\frac{2s}{3(1-s)\chi}\right). \quad (146)$$

Из уравнения (2) получаем  $\varkappa \approx \varkappa_{max} = a_0\varepsilon_{ph}/a_s = a_0s\varepsilon_l/a_s$ . Следовательно, уравнение (144) можно упростить

$$\Gamma^2 \approx C \frac{\chi^{1/2}}{\varepsilon_l} \int_0^1 A(s) \exp(B(s, \chi, \varepsilon_l)) ds, \quad (147)$$

$$A(s) = \frac{1-s+s^2}{\sqrt{s(1-s)}}, \quad (148)$$

$$B(s, \chi, \varepsilon_l) = -\frac{2s}{3(1-s)\chi} - \frac{8a_s}{3a_0 s \varepsilon_l} \quad (149)$$

$$C = \frac{3^{1/2}\alpha^2 a_0}{2^{9/2}\pi^{1/2}a_s} \quad (150)$$

Из уравнения (149) видно, что  $B(s) = -\infty$  и  $d(\Gamma^2)/ds = 0$  для  $s = 0$  ( $\varepsilon_{ph} = 0$ ) и  $s = 1$  ( $\varepsilon_{ph} = \varepsilon_l$ ). Чтобы оценить интеграл в (147), можно использовать метод перевала. Основной вклад в интеграл приходится с окрестности точки  $s = s_0$ , соответствующей  $dB/ds = 0$ . Решением последнего уравнения является  $s_0 = \epsilon/(1 + \epsilon)$ ,  $0 \leq s_0 \leq 1$  где  $\epsilon^2 = 4\chi/a_0\eta\varepsilon_l$ . Уравнение (147) можно переписать:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &\approx CA(s_0) \exp[B(s_0)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(B''(s_0)(s-s_0)^2/2) ds = \\ &= CA(s_0) \sqrt{\frac{2\pi}{B''(s_0)}} \exp B(s_0) = \\ &= C \sqrt{3\pi/2} \frac{\chi}{\varepsilon_l} \frac{1+\epsilon+\epsilon^2}{(1+\epsilon)\epsilon^{1/2}} \exp\left(-\frac{2\epsilon(2+\epsilon)}{2\chi}\right) \end{aligned} \quad (151)$$

Параметры  $\epsilon$  и  $\chi$  могут быть посчитаны из (138) и (139):

$$\epsilon \approx 2(a_0^3\mu)^{-1/8}. \quad (152)$$

Дальнейшее упрощение сложно, поскольку  $\epsilon \sim 1$ .

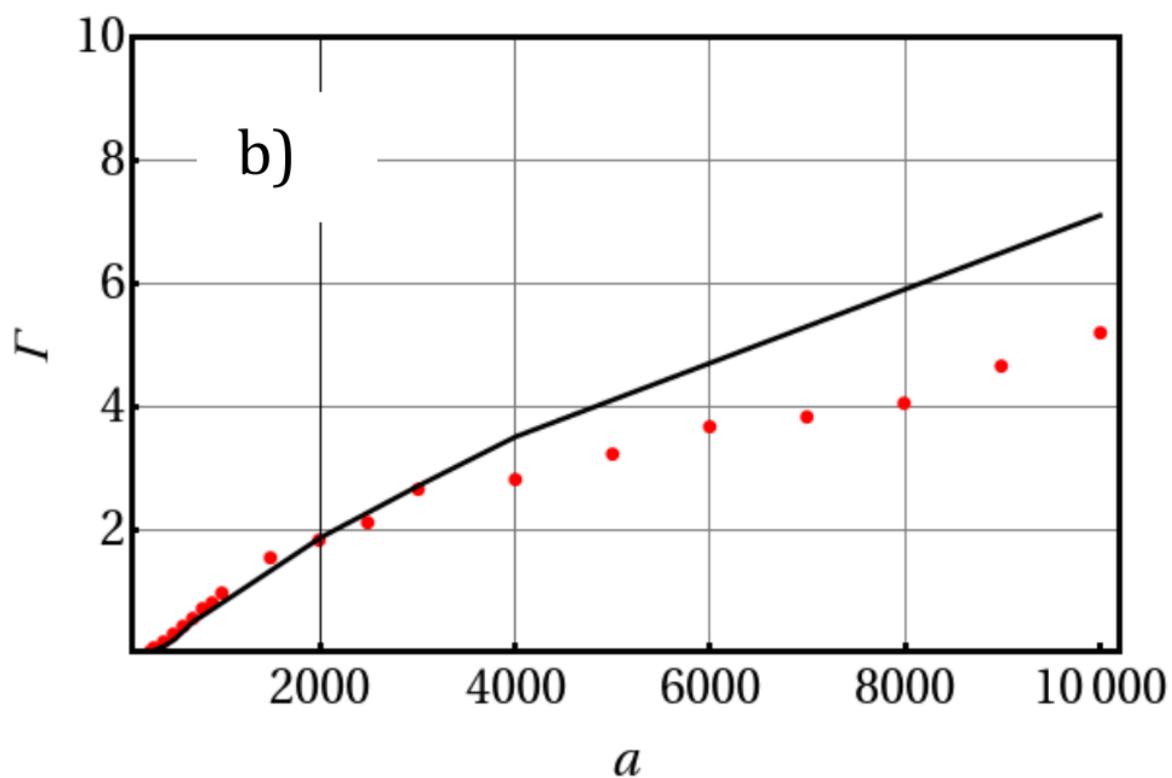
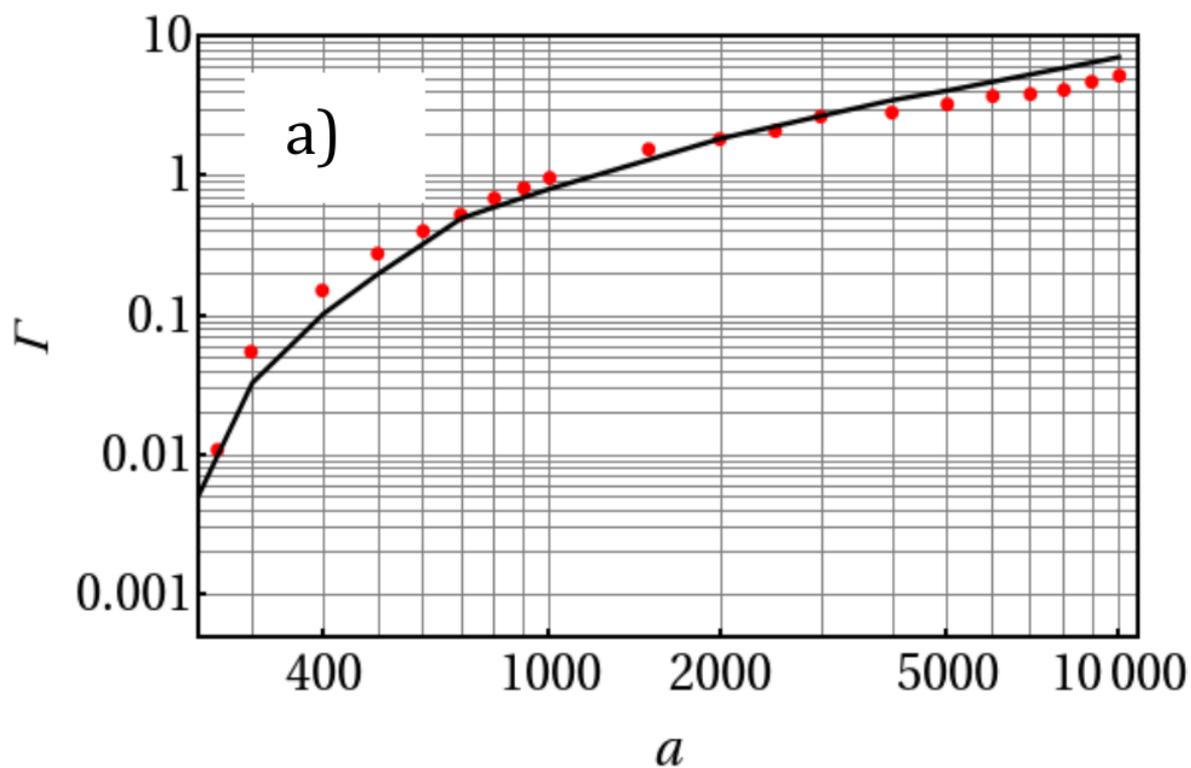


Рис. 21: Скорость роста каскада во вращающемся электрическом поле и амплитуда поля в логарифмическом (а) и в линейном (b) масштабах. Скорость роста находится численно (красные точки) и аналитически (черная кривая).

### 3.3.4 Проверка и обсуждение результатов

Для проверки полученных выражений для скорости роста каскада во вращающемся электрическом поле было проведено численное моделирование с использованием РИС кода. Частота вращения электрического поля есть  $2\pi c/\lambda$ , где длина волны выбиралась 1 мкм. Результаты моделирования представлены на рисунке 21. Из рисунка 21 видно, что аналитические результаты качественно согласуются с результатами численного моделирования. Отличие аналитических результатов от численных при большом значении  $a_0$  вызвано упрощением функции распределения лептонов. Из численного моделирования, проведенного в работе [108], следует, что в энергетический спектр лептонов в аналогичной задаче имеет существенный разброс, что следует учитывать для более точного описания скорости роста каскада при больших полях.

## 4 Динамика спина заряженных частиц в сильном лазерном поле

Достигнутые на лазерных установках некоторое время назад мощности в 10 Пвт [17, 18, 26] сподвигли новую волну обсуждений динамики спиновых степеней свободы при взаимодействии сильного лазерного излучения с веществом, в частности пучков заряженных частиц [68, 69]. Особый интерес представляет генерация поляризованных пучков электронов. Поляризованные электроны используются для получения поляризованных фотонов [140] и протонных поляризованных пучков [141], которые используются для материаловедения (исследования твердых тел) [142]. Одним из основных применений поляризованных пучков является проверка сильнополевой КЭД и исследование физики за пределами Стандартной модели [84].

В данной главе исследуется излучение электрона в постоянном магнитном поле с учетом спиновых степеней свободы. Для аналитического описания используется модель непрерывных радиационных потерь (НРП), в которой используются формулы для мощности излучения с учетом квантовых эффектов, но пренебрегается стохастической природой излучения. Подобный подход уже применялся в других работах [9, 11–13, 94], но в данной главе обсуждается применимость подобного подхода при различных параметрах и рассматривается излучение электрона, движущегося в постоянном магнитном поле, с учетом спиновых степеней свободы с использованием модели НРП и численных методов.

### 4.1 Модель непрерывных радиационных потерь

В квантовом режиме акт излучения фотона электроном представляет из себя случайное событие, энергия электрона меняется на некоторую величину вследствие эффекта отдачи, подчиняющегося распределению вероятностей, заданному уравнением (3). Излучение возникает не мгновенно, а формируется на определенном участке траектории (в течении определенного времени движения частицы по своей траектории), называемом длиной формирования излучения (временем формирования излучения) [8]. Поскольку электрон, при этом, еще и распространяется в некотором электромагнитном поле (например, в поле лазера или в плазменных полях), то описание его динамики с учетом излучения в общем слу-

чае очень сложно. Однако, если время формирования излучения много меньше характерных времен в системе, то движение электрона можно рассматривать отдельно от процесса излучения [9]. Для релятивистского электрона, движущегося в электромагнитном поле, доступном в типичных экспериментальных условиях, его динамику между событиями испускания фотонов можно рассматривать с использованием классического подхода, т.е. используя релятивистские уравнения движения. При этом параметры электрона при испускании фотона изменяются в соответствии с квантовой вероятностью. В классическом режиме  $\chi \ll 1$  вероятностный характер процесса излучения исчезает, что позволяет рассматривать излучение как некоторый детерминированный процесс и пользоваться дифференциальными уравнениями и эволюцию энергии излучающего электрона можно представить следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -P_{cl}(\varepsilon), \quad (153)$$

где  $P_{cl}$  есть мощность излучения в классическом пределе. Уравнение (153) переоценивает радиационные потери, когда приближение  $\chi \ll 1$  не применимо, это связано с тем, что при выводе выражения для  $P_{cl}(\varepsilon)$  не учитывается тот факт, что электрон не может излучить больше своей начальной энергии. В уравнение (153) можно добавить квантовые поправки [11–14], пересчитав правую часть с использованием выражения для спектра в случае произвольного  $\chi$ . Т.е. стохастическая природа излучения не учитывается, но в непрерывных уравнениях используются точные квантовые формулы, такой подход будем называть моделью непрерывных радиационных потерь или НРП.

Умножим уравнение (8) на энергию фотона  $\hbar\omega$  и проинтегрируем по  $\xi$ :

$$\frac{d\langle\varepsilon\rangle}{dt} \simeq -C_0\varepsilon_0 \int_0^1 d\xi \xi w_0(\xi, \langle\chi\rangle) \quad (154)$$

$$\simeq -\frac{C_0}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} d\bar{\omega} \bar{\omega} w_0(\bar{\omega}, \langle\varepsilon\rangle) = -P(\langle\varepsilon\rangle), \quad (155)$$

где  $\langle\varepsilon\rangle$  — усредненная энергия электронов,  $\xi = \hbar\omega/\varepsilon$ ,  $\bar{\omega} = \hbar\omega$  и  $\langle\chi\rangle = B\langle\varepsilon\rangle/(B_{cr}mc^2)$ . Для простоты в данном разделе используется усредненная по спину вероятность. Интегрирование по спектру фотонов означает усреднение всех возможных изме-

нений энергии электронов в результате испускания фотонов. Усреднение в уравнении (154) можно интерпретировать как усреднение по электронам пучка, имеющим равные начальные условия. В классическом пределе все электроны с одинаковыми начальными условиями имеют одинаковую траекторию и одинаковую энергию в каждый момент времени, что не справедливо в квантовом случае. В квантовом режиме испускание фотонов приходится рассматривать как случайный процесс. Поэтому электроны с одинаковыми начальными условиями имеют разные зависимости энергии от времени и претерпевают стохастическую диффузию в энергетическом пространстве.

Для того, чтобы формализовать рассмотренную выше процедуру усреднения можно ввести функцию распределения электронов пучка  $f(\varepsilon, \mathbf{Y}, t)$ , где  $\mathbf{Y}$  — набор параметров электронов пучка. Функция распределения электронного пучка представляет собой дельта-функцию в начальный момент времени

$$f(\varepsilon, \mathbf{Y}, t = 0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)\delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0). \quad (156)$$

После нескольких актов излучения, функция распределения примет вид

$$f(\varepsilon, \mathbf{Y}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta[\varepsilon - \varepsilon_i(\varepsilon_0, \mathbf{Y}_0, t)] \times \delta[\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_i(\varepsilon_0, \mathbf{Y}_0, t)], \quad (157)$$

где  $(\varepsilon_i, \mathbf{Y}_i)$  есть параметры  $i$ -ого электрона,  $N$  есть число электронов в пучке. Средняя энергия электрона есть

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \int d\varepsilon d\mathbf{Y} \varepsilon f(\varepsilon, \mathbf{Y}, t). \quad (158)$$

Исследуем эту модель в классическом пределе ( $\chi \ll 1$ ), где модель работает точно. Рассмотрим те электроны пучка, которые излучили только один фотон. Согласно уравнениям (8) и (154) среднюю энергию фотона можно записать сле-

дующим образом:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \bar{\omega} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega}, \quad (159)$$

$$1 = \int_0^{\varepsilon_0} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega}, \quad (160)$$

$$w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) = \frac{C_0 w_0(\bar{\omega}, \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 W(\varepsilon_0)}, \quad (161)$$

где  $W(\varepsilon_0) = W(\chi)$  есть выражение (8), проинтегрированное по всем энергиям фотона. Средняя энергия электронного пучка после излучения одного фотона есть

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1. \quad (162)$$

В классическом пределе  $\bar{\omega} \ll \varepsilon_0$ , следовательно, спектральная плотность вероятности  $w_1$  и средняя энергия фотона имеют вид [7, 143, 144]

$$w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) = \frac{3}{5\pi\bar{\omega}_c} \int_{\bar{\omega}/\bar{\omega}_c}^{\infty} K_{5/3}(s) ds, \quad (163)$$

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) = \frac{P}{W} = \frac{8\bar{\omega}_c}{15\sqrt{3}} = C_\varepsilon \varepsilon_0^2, \quad (164)$$

$$\int_0^{\varepsilon_0} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega} \simeq \int_0^{\infty} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega} = 1, \quad (165)$$

где

$$P(\varepsilon_0) = W\varepsilon_1(\varepsilon_0), \quad (166)$$

$$W_{cl} = \frac{5\alpha}{2\sqrt{3}\tau_c} \frac{B}{B_{cr}}, \quad (167)$$

$$\bar{\omega}_c = \hbar \frac{3eB}{2mc} \left( \frac{\varepsilon_0}{mc^2} \right)^2, \quad (168)$$

$$C_\varepsilon = \frac{4}{5\sqrt{3}} \frac{B}{B_{cr}} \frac{1}{mc^2}. \quad (169)$$

Теперь рассмотрим те электрон пучка, которые излучили два фотона. Спек-

тральная плотность вероятности второго фотона определяется выражением

$$w_2(\bar{\omega}, \varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_1, \quad (170)$$

$$1 = \int_0^{\varepsilon_0} w_2(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega}. \quad (171)$$

Последнее уравнение можно получить из уравнения (160), заменив  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_0 - \bar{\omega}_1$ . Средняя энергия первого фотона определяется уравнением (159), а средняя энергия второго фотона равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \bar{\omega}_2 w_1(\bar{\omega}_2, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_1 \\ &= \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon_1 (\varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_1 \\ &= C_\varepsilon \int_0^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \bar{\omega}_1)^2 w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_1 \\ &= \varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0^2} \langle \varepsilon_1^2 \rangle, \end{aligned} \quad (172)$$

где

$$\langle \varepsilon_1^2 \rangle = \int_0^{\varepsilon_0} \bar{\omega}^2 w_1(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega} = \frac{11\bar{\omega}_c^2}{27} = \frac{275}{64} \varepsilon_1^2 \quad (173)$$

и используется уравнение (164).

Средняя энергия электронов, излучивших только два фотона

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_0 \left[ 1 - 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + 2\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0^3} \langle \varepsilon_1^2 \rangle \right], \end{aligned} \quad (174)$$

Для случая трех фотонов запишем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 &= \iiint_0^{\varepsilon_0} \bar{\omega}_3 w_1(\bar{\omega}_3, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) w_1(\bar{\omega}_2, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) \\
&\times w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_3 d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_1 \\
&= \iint_0^{\varepsilon_0} \varepsilon_1 (\varepsilon_0 - \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) w_1(\bar{\omega}_2, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) \\
&\times w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_1 \\
&= C_\varepsilon \iint_0^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)^2 w_1(\bar{\omega}_2, \varepsilon_0 - \bar{\omega}_1) \\
&\times w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_1 \\
&= \varepsilon_1 \left[ 1 - 4 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + 6 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} + 2 \frac{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\varepsilon_0^2} + O\left(\frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3}\right) \right]. \tag{175}
\end{aligned}$$

Средняя энергия пучка электронов в этом случае есть

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_0 \left[ 1 - 3 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + 6 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} - 6 \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3} - 3 \frac{\varepsilon_1 \langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\varepsilon_0^3} \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_0^4}\right) \right]. \tag{176}
\end{aligned}$$

Для случая излучения  $n$  фотонов можно записать:

$$\begin{aligned}
w_n(\bar{\omega}_n, \varepsilon_0) &= \int_0^{\varepsilon_0} \cdots \int_0^{\varepsilon_0} d\bar{\omega}_1 \dots d\bar{\omega}_n w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} w_1(\bar{\omega}_{i+1}, \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^i \bar{\omega}_j), \tag{177}
\end{aligned}$$

$$1 = \int_0^{\varepsilon_0} w_n(\bar{\omega}, \varepsilon_0) d\bar{\omega}. \tag{178}$$

Для средней энергии фотона имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \varepsilon_1 \left[ 1 - 2(n-1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + 3(n-1)(n-2) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} \right. \\ & \left. + (n-1) \frac{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\varepsilon_0^2} + O\left(\frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3}\right) \right]. \end{aligned} \quad (179)$$

Средняя энергия пучка электронов после излучения  $n$  фотонов есть

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n = & \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \varepsilon_0 \left[ 1 - n \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + n(n-1) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} \right. \\ & - n(n-1)(n-2) \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3} - \frac{n(n-1)}{2} \frac{\varepsilon_1 \langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\varepsilon_0^2} \\ & \left. + O\left(\frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_0^4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (180)$$

Поскольку  $W_{cl}$  не зависит от  $\varepsilon$  в пределе  $\chi \ll 1$ , распределение электронов по числу испускаемых фотонов в момент времени  $t$  определяется распределением Пуассона

$$\mathcal{P}(n, \tau) = \frac{\tau^n e^{-\tau}}{n!}, \quad (181)$$

где  $\tau = W_{cl}t$ . Тогда средняя энергия пучка электронов в момент времени  $t = \tau/W_{cl}$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n, \tau) \mathcal{E}_n \\ = & \varepsilon_0 \left[ 1 - \tau \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \tau^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} - \tau^3 \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3} \right. \\ & \left. - \frac{\tau^2}{2} \frac{\varepsilon_1 \langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\varepsilon_0^2} + O\left(\frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_0^4}\right) \right], \end{aligned} \quad (182)$$

где  $\mathcal{E}_0 = \varepsilon_0$ .

Усредненную энергию электрона можно также рассчитать с помощью модели НРП. В главе 4.3 рассмотрена задача о движении электрона в постоянном магнитном поле, используя модель НРП. Эволюция средней энергии электрона, в такой задаче, определяется уравнением (221), которое можно переписать

следующим образом:

$$\langle \varepsilon_{CRL} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{1 + \tau \varepsilon_1 / \varepsilon_0} = \varepsilon_0 \left[ 1 - \tau \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \tau^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} - \tau^3 \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^3} + \dots \right]. \quad (183)$$

Сравнивая результат, предсказываемый моделью НРП (183), и результат, полученный из стохастического подхода, легко видеть, что разница пропорциональна  $\langle \varepsilon_1^2 \rangle$ . Этот член определяет ширину спектра фотонов, который представляет собой спектр синхротронного излучения  $\propto \bar{\omega} w_1(\bar{\omega}, \varepsilon)$  в классическом пределе [144]. Стохастическая эмиссия фотонов вызывает размытие распределения электронов по энергиям, которое не учитывается в модели НРП. Разность  $\Delta \varepsilon = \langle \varepsilon_{CRL} \rangle - \langle \varepsilon \rangle$  можно представить следующим образом

$$\Delta \varepsilon = \frac{\tau^2 \varepsilon_1 \langle \varepsilon_1^2 \rangle}{2 \varepsilon_0^3} = \frac{5^2 11}{2^7} \tau^2 \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^2} + O\left(\frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_0^3}\right), \quad (184)$$

где используется уравнение (173). Модель применима, когда

$$\varepsilon \gg \Delta \varepsilon = \frac{5^2 11}{2^7} \tau^2 \frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon_0^2}. \quad (185)$$

Используя уравнение (164), можно переписать уравнение (185) через параметр  $\chi = (\varepsilon_0 / mc^2)(B/B_{cr}) \propto \varepsilon_1 / \varepsilon_0$

$$\tau \ll \sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{11}} \chi^{-3/2} \simeq 2.17 \chi^{-3/2}. \quad (186)$$

Из этого условия следует, что модель НРП справедлива в классическом пределе для долговременной динамики, когда электрон взаимодействует с полем длительное время. Стоит отметить, что результат (186) получен в приближении, когда квантовыми поправками в выражениях (166) полностью пренебрегается. Как можно видеть из моделирования (см. Рис. 25 и Рис. 26) модель НРП может применяться даже на временах  $\tau \gg 1/\chi$ , когда разложение в ряды в формулах (182), (183) уже несправедливо. Более того, поскольку параметр  $\chi$  уменьшается со временем из-за радиационных потерь, по мере того как электрон излучает, условие (186) выполняется все лучше и лучше.

Рассмотрим сильно квантовый режим ( $\chi \gg 1$ ), когда радиационные потери

велики. Средняя энергия фотона в этом режиме есть [7, 143]

$$\varepsilon_1 = \frac{P}{W} = \delta \varepsilon_0, \quad (187)$$

$$P = \frac{32\Gamma(2/3)\alpha m^2 c^4}{243\hbar} (3\chi)^{2/3}, \quad (188)$$

$$W = \frac{14\Gamma(2/3)\alpha m^2 c^4}{27\hbar\varepsilon} (3\chi)^{-1/3}, \quad (189)$$

$$\delta = \frac{16}{63}. \quad (190)$$

Из уравнения (187) видно, что даже в квантовом режиме средняя энергия фотона всегда намного меньше энергии электрона ( $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = \delta = 16/63 \ll 1$ ). Заметим, что расчет энергии фотона может быть точным в пределе  $\chi \gg 1$ , поскольку зависимость  $\varepsilon_1$  от  $\varepsilon_0$  линейна. Средняя энергия  $n$ -го фотона равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \int_0^{\varepsilon_0} d\bar{\omega}_n \bar{\omega}_n w_n(\bar{\omega}_n, \varepsilon_0) \\ &= \int_0^{\varepsilon_0} \cdots \int_0^{\varepsilon_0} d\bar{\omega}_1 \dots d\bar{\omega}_n \bar{\omega}_n w_1(\bar{\omega}_1, \varepsilon_0) \\ &\times \prod_{i=1}^{n-1} w_1(\bar{\omega}_{i+1}, \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^i \bar{\omega}_j) \\ &= \int_0^{\varepsilon_0} \cdots \int_0^{\varepsilon_0} d\bar{\omega}_1 \dots d\bar{\omega}_{n-1} \varepsilon_1 \left( \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^i \bar{\omega}_j \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{n-2} w_1(\bar{\omega}_{i+1}, \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^i \bar{\omega}_j) \\ &= \varepsilon_1 \left( \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \right) = \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) \varepsilon_{n-1} \\ &= \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^{n-1} \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (191)$$

Средняя энергия электрона после излучения  $n$  фотонов есть

$$\mathcal{E}_n = \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^n = \varepsilon_0 (1 - \delta)^n. \quad (192)$$

Средняя энергия электрона также может быть найдена из модели НРП

$$\frac{d\langle\varepsilon\rangle}{dt} = -P(\langle\varepsilon\rangle) = -C_q\langle\varepsilon\rangle^{2/3}, \quad (193)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = W(\langle\varepsilon\rangle) = \frac{C_q}{\delta}\langle\varepsilon\rangle^{-1/3}, \quad (194)$$

$$C_q = \frac{2^5 3^{2/3} \Gamma(2/3) \alpha m^{4/3} c^{8/3} B^{2/3}}{3^5 B_{cr}^{2/3} \hbar}. \quad (195)$$

Решая уравнения (193) и (194) получаем

$$\langle\varepsilon_{CRL}\rangle = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{C_q t}{3\varepsilon_0^{1/3}}\right)^3 \quad (196)$$

$$= \varepsilon_0 e^{-\delta\tau}, \quad (197)$$

$$\tau = -\frac{3}{\delta} \ln \left(1 - \frac{C_q t}{3\varepsilon_0^{1/3}}\right). \quad (198)$$

Поскольку в пределе  $\chi \gg 1$  вероятность испускания фотона является функцией энергии электрона ( $W \propto \varepsilon^{-1/3}$ ), то распределение электронов по числу испущенных фотонов в момент времени  $t$  уже не описывается распределением Пуассона. Можно использовать подход, основанный на уравнениях баланса, который используется, например, для описания динамики многократной полевой ионизации атомов и ионов [125, 127] (см. 3.2.1). Если  $N$  электронов в пучке излучают не более  $n$  фотонов, то распределение электронов по числу испущенных фотонов определяется уравнениями баланса

$$\frac{dN_0}{dt} = -W_0 N_0, \quad (199)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_0 N_0 - W_1 N_1, \quad (200)$$

$$\dots, \quad (201)$$

$$\frac{dN_{n-1}}{dt} = W_{n-2} N_{n-2} - W_{n-1} N_{n-1}, \quad (202)$$

$$\frac{dN_n}{dt} = W_{n-1} N_{n-1}, \quad (203)$$

где  $N_i$  — количество электронов пучка, испускающих  $i$  фотонов,  $W_i = W(\mathcal{E}_i)$  — вероятность того, что электрон испустит фотон после испускания  $i - 1$  фотонов,

а  $\mathcal{E}_i$  есть средняя энергия пучка электронов после излучения  $i$ -ого фотона. Из уравнений баланса следует  $dN/dt = d(\sum_{i=0}^n N_i)/dt = 0$ . Решение системы (199) - (203) приведено в [125] (уравнение (8)) и имеет громоздкий и не информативный вид. Стоит заметить, что в пределе  $W = const$  решение сводится к распределению Пуассона.

Выполним переход к новому времени  $\tau$  в уравнениях (199) - (203), используя уравнение (198). Для дальнейшего аналитического продвижения можно использовать в уравнениях (199) - (203) новое время  $\tau$ , определенное уравнением (198) вместо  $t$ . Новое время  $\tau$  пропорционально среднему числу фотонов, испускаемых одним электроном. Если коэффициенты  $W_i$  в системе (199) - (203) не значительно меняются на характерных временах излучения, то их можно считать постоянными. Тогда можно использовать распределение Пуассона (181) в качестве распределения электронов по числу испускаемых фотонов в момент времени  $\tau$ . Тогда средняя энергия электрона в момент времени  $\tau$

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n, \tau) \varepsilon_0 (1 - \delta)^n = \varepsilon_0 e^{-\delta \tau}. \quad (204)$$

Из уравнений (197) и (204) видно, что модель НРП дает тот же результат, что и результат, полученный из стохастического подхода на основе уравнений (191), когда распределение электронов описывается распределением Пуассона. Тем не менее, модель НРП можно использовать для оценок даже в квантовом режиме ( $\chi \gg 1$ ). В этом режиме электрон очень быстро теряет энергию и переходит в классический режим, где модель НРП выполняется с хорошей точностью [145]. Также, как видно из численного моделирования, о котором пойдет речь дальше (см. 4.4 и рис. 25), модель НРП дает качественно правильное решение даже в пределе  $\chi \gg 1$ , по крайней мере для рассматриваемой задачи.

При рассмотрении спиновых степеней свободы функция распределения и выражение для мощности излучения могут зависеть от спина. Важно отметить, что вероятность излучения линейно зависит от параметров поляризации и спина [91] и усреднение спиновой части сводится к замене соответствующих переменных на средние величины, что позволяет использовать приближение НРП.

## 4.2 Спиновая динамика с учетом радиационных эффектов

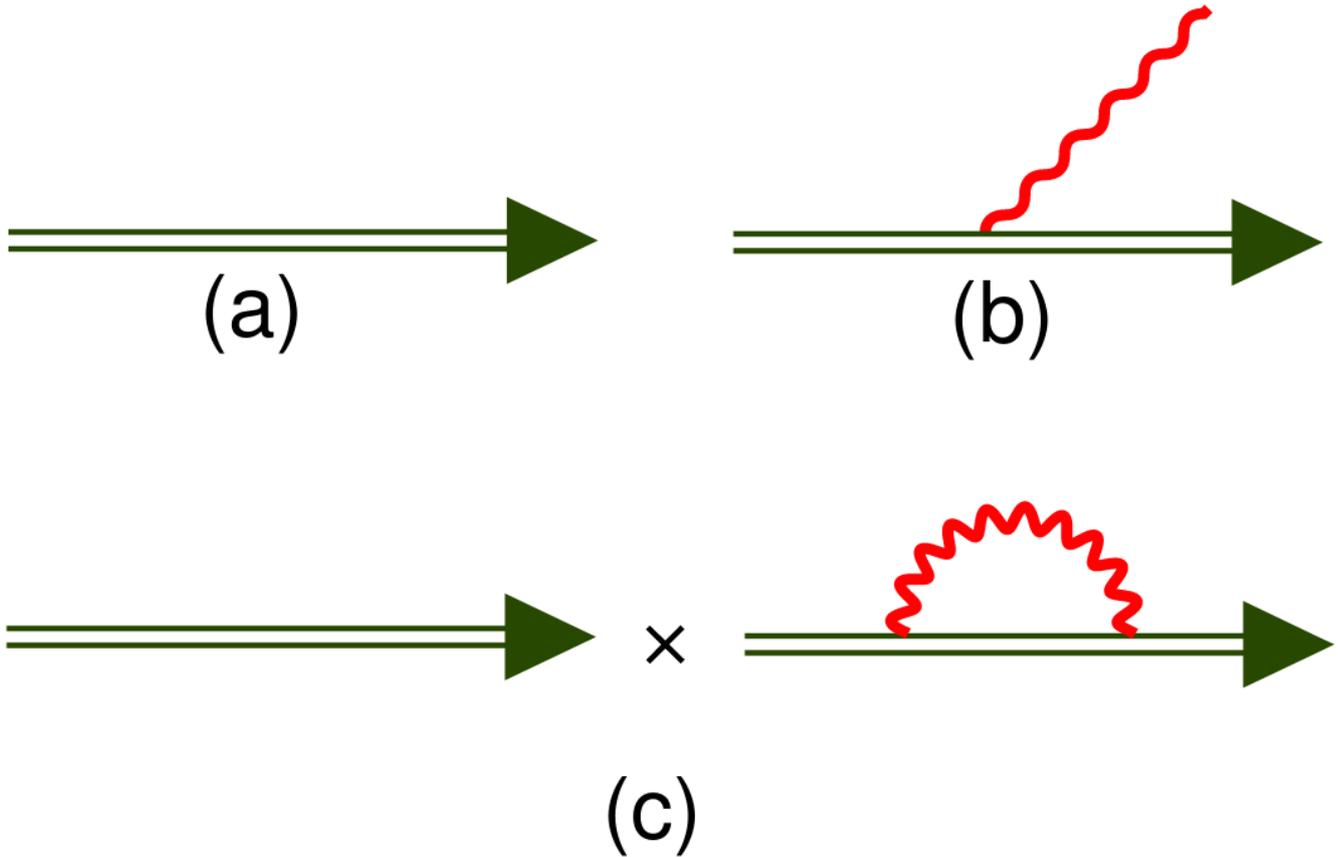


Рис. 22: Диграммы Фейнмана [146] для разных порядков теории возмущений для электрона во внешнем поле. Двойные линии означают, что до и после акта рассеяния электрон находится во внешнем электромагнитном поле. Нулевой порядок по  $\alpha$  (a) есть движение частицы в поле и прецессия спина, излучение реального фотона (b) и интерференция диаграммы нулевого порядка с самовоздействием (c).

Рассмотрим ультррелятивистский электрон с Лоренц фактором  $\gamma \gg 1$ , распространяющийся перпендикулярно постоянному, однородному магнитному полю  $B$ . Такой электрон будет излучать магнитотормозное излучение и выражение для вероятности излучения фотона с энергией  $\hbar\omega$  в единицу времени дается уравнением (3).

Для описания вектора спина используется базис [147–149]  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , где  $\mathbf{e}_0$  есть единичный вектор вдоль скорости электрона,  $\mathbf{e}_1$  есть единичный вектор вдоль поперечного ускорения и  $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_1]$ . Для электрона движущегося поперек магнитного поля, вектор  $\mathbf{e}_2$  совпадает с направлением этого поля. Если разложить вектор поляризации (здесь называемый для простоты вектором

спина) электрона по этому базису, и коэффициенты разложения  $n_{0,1,2}$  можно объединить в вектор Стокса [147–150] и для случая покоящегося электрона  $\mathbf{n}$  совпадает с направлением спина

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} u^+ \Sigma u \Big|_{p=0}, \quad (205)$$

где  $u$  есть биспинор, а  $\Sigma = i\{\gamma^2\gamma^3, \gamma^3\gamma^1, \gamma^1\gamma^2\}$ , где  $\gamma^\mu$  - есть матрицы Дирака. Если  $|\mathbf{n}| < 1$ , то состояние электрона смешанное.

Рассмотрим, как происходит поляризация электрона во внешнем электромагнитном поле, для этого удобно воспользоваться диаграммой техники. В нулевом порядке теории возмущений электрон распространяется во внешнем поле согласно релятивистским уравнениям движения [10], а спин прецессирует согласно уравнению Томаса-Баргмана-Мишеля-Телегди (Т-БМТ) [151, 152] (см. рисунок 22 (а))

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{e}{mc} \mathbf{S} \times \left[ - \left( \frac{g(\chi)}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \right. \\ \left. + \left( \frac{g(\chi)}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g(\chi)}{2} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] \right], \end{aligned} \quad (206)$$

где  $g(\chi) = 2 + 2\mu(\chi)$ , второе слагаемое связано с аномальным магнитным моментом электрона [153]

$$\mu(\chi) = \frac{\alpha}{\pi\chi} \int_0^\infty \frac{y}{(1+y)^3} L_{1/3} \left( \frac{2y}{3\chi} \right) dy, \quad (207)$$

где

$$L_{1/3}(z) = \int_0^\infty \sin \left( \frac{3}{2} z \left( x + \frac{x^3}{3} \right) \right) dx. \quad (208)$$

В пределе  $\chi \ll 1$ ,  $\mu(\chi) \approx \alpha/2\pi$ . Следующий порядок теории возмущений описывает излучение фотона с вероятностью (3) (см. рисунок 22 (b)). При этом спин электрона может перевернуться, что называют радиационной поляризацией [146]. Следствием линейности формулы (3) по спиновым слагаемым, можно записать конечный спин электрона [91]

$$\mathbf{S}_f^R = \frac{\mathbf{w}_f}{w_0 + \mathbf{w}_i \mathbf{S}_i}. \quad (209)$$

Стоит отметить, что вектор, определенный по формуле (209) может быть меньше единицы по модулю, что означает, что спиновое состояние электрона является смешанным. Третьим эффектом, влияющим на поляризацию электрона, является интерференция диаграммы нулевого порядка с петлевой диаграммой (см. рисунок 22 (с)). Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, имеет мнимую и действительную части. Действительная часть не меняет длины вектора спина и дает лишь дополнительное слагаемое в уравнение Т-БМТ, называемое аномальным магнитным моментом  $\mu(\chi)$ . Мнимая часть ответственна за нерадиационную поляризацию, которую можно продемонстрировать на простом примере [146]. Рассмотрим пучок из  $N$  электронов и пусть  $N^+$  электронов поляризовано вдоль магнитного поля, а  $N^-$  – против. Ясно, что удвоенный спин всего пучка есть  $S_i = (N^+ - N^-)/(N^+ + N^-)$ . Обозначим число излучивших электронов  $N_R$ , а число неизлучивших электронов  $N_{NR}$ . Выражение для конечного удвоенного спина неизлучивших электронов есть:

$$S_i = \frac{N_{NR}^+ - N_{NR}^-}{N_{NR}^+ + N_{NR}^-} = \frac{S_i N - (N_R^+ - N_R^-)}{N - N_R} = \frac{S_i - \Delta t C_0 \int d\xi (w_i + w_0 S_i)}{1 - \Delta t C_0 \int d\xi (w_0 + S_i w_i)}, \quad (210)$$

где использовалась формула (3) и связь между вероятностью излучения и числом излученных частиц  $N_R^\pm = N^\pm \Delta t C_0 \int d\xi (w_0 \pm w_i)$ .

Выражение для вектора спина не излучившей части можно записать в общем виде [146, 154, 155]

$$\mathbf{S}_f^{NR} = \frac{\mathbf{S}_i (1 - C_0 \Delta t \int_0^1 d\xi w_0) - C_0 \Delta t \int_0^1 d\xi \mathbf{w}_i}{1 - C_0 \Delta t \int_0^1 d\xi (w_0 + \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i)}. \quad (211)$$

Заметим, что как и в случае с уравнением (209), данное спиновое состояние является смешанным  $|\mathbf{S}_f^{NR}| < 1$ .

### 4.3 НРП модель для электрона в постоянном магнитном поле

Рассмотрим пучок ультрарелятивистских электроновдвигающихся в постоянном однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}_0$ . Пусть в начальный момент каждый электрон имеет спин либо вдоль, либо против маг-

нитного поля. Умножая уравнение (3) на  $\hbar\omega$ , суммируя по конечным спинам и интегрируя по всем частотам фотонов получим выражение для мощности [7]

$$P = C_0 \int_0^1 d\xi \hbar\omega [w_0 - w_i S_z]. \quad (212)$$

Следуя модели НРП запишем выражения для эволюции энергии электрона

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{C_0 mc^2}{3} \int_0^\infty \frac{u(4u^2 + 5u + 4)}{(1+u)^4} K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) du - S_z C_0 \int_0^1 w_i d\xi. \quad (213)$$

Рассмотрим полную вероятность излучения в единицу времени, усредненную по начальным спинам и просуммированную по конечным спинам электрона:

$$W = \frac{C_0}{3} \int_0^\infty \frac{5u^2 + 7u + 5}{(1+u)^3} K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) du. \quad (214)$$

Для случая  $\chi \ll 1$ , уравнения (213) и (214) существенно упрощаются. Пользуясь тем фактом, что параметр  $\chi$  можно переписать как  $\chi = \gamma B/B_{cr}$  имеем:

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{4}{5\sqrt{3}} \chi^2 \left( 1 - S_z \chi - \frac{55\sqrt{3}}{16} \chi \right), \quad (215)$$

$$W_{cl} = \frac{5\pi C_0}{2} \chi = \frac{5\alpha}{2\sqrt{3}\tau_c} \frac{B}{B_{cr}}, \quad (216)$$

где  $\tau = t/\tau_{ph} = W_{cl}t$  и  $\tau_{ph} = 1/W_{cl}$ . Пренебрегая слагаемыми порядка  $\chi^3$  можно записать выражение для характерного времени излучения как

$$\tau_r = \frac{5\sqrt{3}}{4} \frac{\tau_{ph}}{\chi}. \quad (217)$$

Используя выражение (3) легко найти вероятность излучения с переворотом спина [7, 86]. Проинтегрируем (3) по  $\xi$  и положим  $\mathbf{S}_f = -\mathbf{S}_i$ , тогда, в пределе  $\chi \ll 1$

$$W_{s-f} = \frac{\chi^2}{8\tau_{ph}} \left( 1 - \frac{8}{5\sqrt{3}} S_z \right), \quad (218)$$

где  $S_z$  есть проекция спина на магнитное поле. Второе слагаемое в выражении (218) ответственно за эффект Соколова-Тернова [85] и видно, что характерное время переворота спина пропорционально  $B^{-1}\chi^{-2}$ . Выражение для эволюции  $S_z$  определено в работе [86]

$$\frac{dS_z}{dt} = -\frac{1}{\tau_{sp}} \left( S_z + \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad (219)$$

где характерное время излучения фотона с переворотом спина введено как

$$\tau_{sp} = \frac{4\tau_{ph}}{3\chi^2}. \quad (220)$$

Стоит заметить, что  $\tau_{sp}/\tau_r = 16/(15\sqrt{3}\chi) \gg 1$ , т.е. излучение без переворота спина происходит гораздо чаще, чем излучение с переворотом. Другими словами, когда электрон распространяется в магнитном поле, он излучает без изменения спина и для того, чтобы наблюдать эффект Соколова-Тернова требуется наблюдать за частицей долгое время, поддерживая при этом энергию электрона постоянной. Для этого используют накопительные кольца [156].

Уравнения (215) и (219) представляют из себя систему описывающую эволюцию энергии электрона и проекции спина  $S_z$ . Пренебрегая слагаемым  $\chi^3$  в уравнении (215) можно легко получить решение

$$\chi(\tau) = \frac{\chi_0}{1 + (4/5\sqrt{3})\tau\chi_0}, \quad (221)$$

где  $\chi(0) = \chi_0$ . Подставляя уравнение (221) в уравнение (219) получаем решение

$$S_z(t) = -\frac{8}{5\sqrt{3}} \left( 1 - e^{f(t)} \right), \quad (222)$$

где

$$f(t) = -\frac{5\sqrt{3}}{8} \alpha \chi_0^2 \frac{B}{B_{cr}} \frac{\frac{t}{\tau_c}}{1 + \frac{2}{3} \alpha \chi_0 \frac{B}{B_{cr}} \frac{t}{\tau_c}}. \quad (223)$$

Можно проверить, что  $S(t \rightarrow \infty) \approx -1.5\chi_0$ , что существенно отличается от слу-

чая постоянного  $\chi$ , где  $S(t \rightarrow \infty) \approx -0.924$ . Как видим, учет реакции излучения вместе с уравнениями спиновой эволюции сильно уменьшает набор поляризации даже в классическом режиме, где  $\chi \ll 1$ . Этот результат можно понять, если сравнить характерное время поляризации пучка для эффекта Соколова-Тернова [86]  $\tau_{ST} = 8\sqrt{3}/15 \alpha\tau_c/\chi^2$  и характерное время изменения параметра  $\chi$ ,  $\tau_\chi = 2/3 \alpha\tau_c B/B_{cr}\chi$ . Видно, что  $\tau_{ST} \gg \tau_\chi$  для малых  $\chi$ . Это означает, что при малых  $\chi$ , фотоны излучаются чаще, чем происходит переворот спина, поэтому лептон потеряет значительную часть своей энергии, прежде чем сможет создать поляризацию.

Уравнения (222) и (223) могут служить еще одним эталоном для тестирования алгоритмов, направленных на моделирование спиновой динамики в лазерно-плазменных кодах.

#### 4.4 Численное моделирование спиновых и радиационных эффектов в сильных электромагнитных полях

Движение частиц моделируется путем решения релятивистского уравнения движения [10] с использованием алгоритма, разработанного в работе [157]. Прецессия спина учитывается путем решения уравнения Т-ВМТ (206). Для решения этого уравнения используется алгоритм, приведенный в работе [158, 159], называемый еще поворот Бориса. Особенностью данного алгоритма является то, что при таком подходе модуль вектора спина сохраняется с машинной точностью.

Радиационные эффекты моделируются с помощью метода Монте-Карло, основанного на работах [9, 98, 160, 161]. В начале моделирования каждой частице присваивается величина  $\tau = -\log r_1$ , называемая оптической толщиной, где  $r_1$  есть случайное число, равномерно распределенное от 0 до 1. На каждом временном шаге  $\Delta t$  моделирования из  $\tau$  вычитается значение  $\Delta t W$ , где  $W$  есть вероятность испускания фотона в единицу времени, определенная формулой (214). Когда значение  $\tau$  становится меньше или равно нулю, испускается фотон и пересчитываются параметры электрона  $\tau$ . Энергия фотона  $\hbar\omega$  определяется из урав-

нения

$$r_2 = \frac{\int_0^{\hbar\omega/\varepsilon} d\xi w_0(\xi, \chi)}{\int_0^1 d\xi w_0(\xi, \chi)}, \quad (224)$$

где генерируется второе  $r_2$ , случайное число, равномерно распределенное от 0 до 1. После излучения электрону присваивается новое число  $\tau$ , пересчитывается энергия  $\varepsilon_f = \varepsilon_i - \hbar\omega$  и импульс

$$\mathbf{p}_f = \frac{\mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_i|} \sqrt{\frac{\varepsilon_f^2}{mc^2} - 1}. \quad (225)$$

Стоит заметить, что здесь, как и в предыдущих разделах, считается, что все излучение направлено вперед, а закон сохранения выполняется точно только для энергии, для импульса закон сохранения выполняется с точностью  $1/\gamma^2$ .

Спин электрона, после излучения, определяется согласно выражению (209). Это, однако, означает, что мы должны работать со смешанными состояниями. Есть способ работать с чистыми состояниями, для этого после излучения требуется коллапсировать спиновое состояние в одно из двух чистых состояний со спином вдоль или против оси квантования, которая выбирается вдоль направления вектора, определенного формулой (209) [146, 162–165]. После того, как фотон испущен и определена его энергия, генерируется третье случайное число, равномерно распределенное от 0 до 1  $r_3$  и вычисляется следующая вероятность [166]

$$\mathcal{P}_\uparrow = \frac{1}{2} \frac{w_0 + \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i + |\mathbf{w}_f|}{w_0 + \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i}. \quad (226)$$

Если  $\mathcal{P}_\uparrow > r_3$ , спин электрона после излучения задается  $\mathbf{S}_f = \mathbf{w}_f/|\mathbf{w}_f|$ , иначе  $\mathbf{S}_f = -\mathbf{w}_f/|\mathbf{w}_f|$ . Если излучения не происходит, то спин электрона задается формулой (211). Если же мы хотим работать с чистыми состояниями, то выбирается ось квантования вдоль направления (211) и генерируется случайное число  $r_4$ , равномерно распределенное от 0 до 1, и вычисляется следующая веро-

ятность [166]

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\uparrow} = \frac{1}{2} \frac{1 - \Delta t C_0 \left( \int_0^1 d\xi w_0 + \int_0^1 d\xi (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i) \right) + \left| \mathbf{S}_i \left[ 1 - \Delta t C_0 \int_0^1 d\xi w_0 \right] - \Delta t C_0 \int_0^1 d\xi \mathbf{w}_i \right|}{1 - \Delta t C_0 \left( \int_0^1 d\xi w_0 + \int_0^1 d\xi (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{S}_i) \right)}. \quad (227)$$

Если  $\tilde{\mathcal{P}}_{\uparrow} > r_4$ , то спин электрона выбирается вдоль  $\mathbf{S}_f^{NR}$ , иначе – в противоположном направлении.

Рассмотрим случай постоянного магнитного поля и пусть до излучения спин электрона направлен вдоль  $\mathbf{e}_2$ . Пусть на данном шаге в моделировании излучения не происходит, тогда вероятность (227) в этом случае равна 1. Если же спин электрона изначально был вдоль  $-\mathbf{e}_2$ , то вероятность (227) равна 0. Таким образом, если изначально спин электрона был либо вдоль, либо против  $\mathbf{e}_2$ , нерадикационной поляризации не происходит. В случае, когда используются смешанные состояния, как видно из уравнения (211), вектор спина может быть  $|\mathbf{S}_f| < 1$  и нужно учитывать нерадикационную поляризацию.

Для проверки работы алгоритма рассмотрим несколько задач. Требуется убедиться, что алгоритм, приведенный выше, дает эффект Соколова-Тернова. Рассмотрим электронный пучок из 1000 частиц, движущийся перпендикулярно постоянному однородному магнитному полю  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}_0$ . Для моделирования эффекта Соколова-Тернова мы игнорируем изменения энергии и импульса в результате испускания фотонов, так что энергия электронов остается постоянной. Результат моделирования показан на рис. 23, где начальная энергия электронов равна  $\varepsilon = 1$  ГэВ и  $\chi = 10^{-3}$ . Временной шаг  $\Delta t$  в этом моделировании задается равным  $0.1/W$ , где  $W$  определяется уравнением (214).

Также было проведено моделирование задачи о столкновении пучка электронов в продольной поляризации с лазерным импульсом с эллиптической поляризацией. Параметры задачи выбирались аналогичными тем, что приведены в работе [87]. Электронный пучок с энергией  $\varepsilon_k = 5$  ГэВ движется в направлении  $-\mathbf{z}$  с продольной поляризацией вдоль оси  $\mathbf{z}$  и сталкивается с лазерным импульсом с эллиптической поляризацией. Лазерный импульс имеет гауссову огибающую, пиковую интенсивность  $I_0 = 5.34 \cdot 10^{21}$  W/см<sup>2</sup>, длину волны  $\lambda = 800$  нм, длительность импульса  $\tau_l = 30$  fs и эллиптичность  $\epsilon = |E_y|/|E_x| = 0.05$ . Предполагается, что радиус пучка частиц намного меньше радиуса перетяжки лазера.

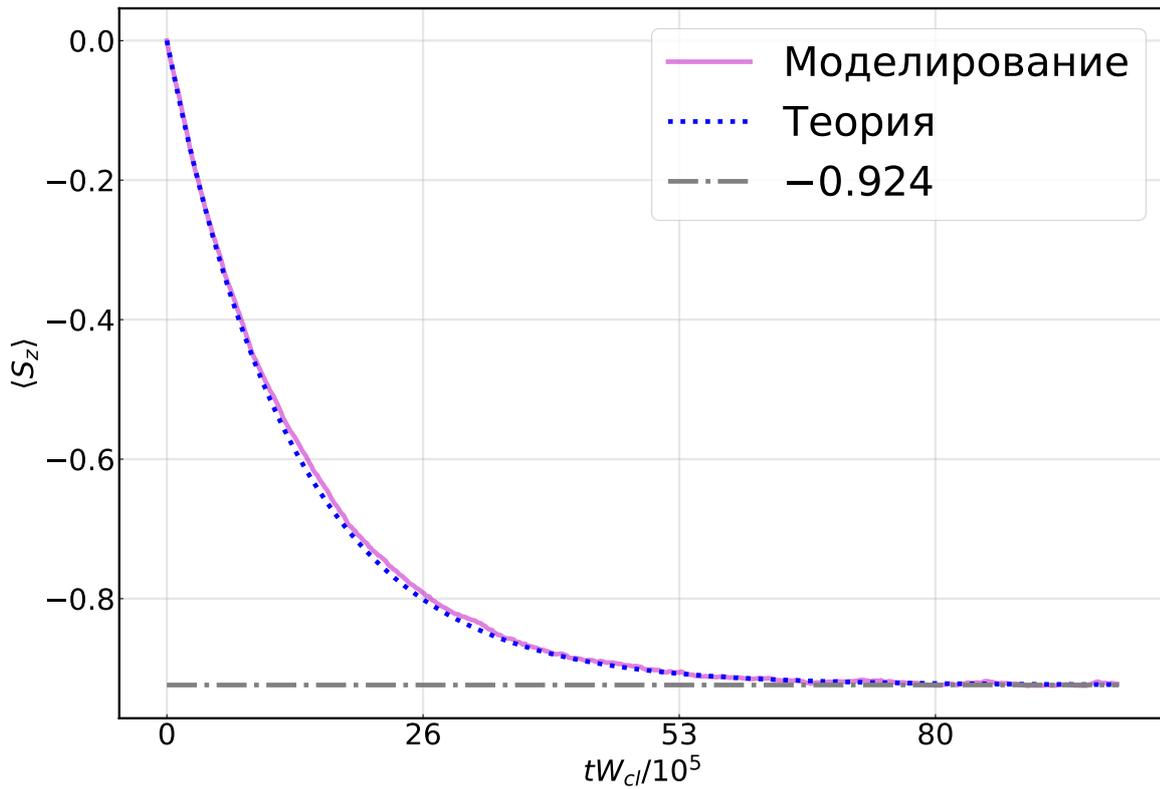


Рис. 23: Аналитическое решение уравнения (219) показано синей пунктирной линией, а результат моделирования показан сплошной розовой линией. Серая пунктирная линия показывает асимптотическое значение спина на бесконечности.

Для моделирования взаимодействия лазерного луча в статье [87] разработана модель MCPV (Monte Carlo polarization vector). Модель основана на использовании метода Монте-Карло для излучения фотонов, аналогично тому, как это сделано в данной работе, и численном решении дифференциального уравнения для импульса и поляризации электрона. MCPV модель подразумевает, что стохастическая спиновая динамика может быть аппроксимирована непрерывным уравнением, аналогичным (219). Авторы проверили модель с помощью 3D-кода, использующего метод Монте-Карло для спиновой динамики. Отметим, что в нашей численной модели также используется метод Монте-Карло для спиновой динамики. На рисунке 24 представлено сравнение результатов из работы [87] и разработанного в данной главе алгоритма.

Было проведено моделирование задачи о движении пучка электронов перпендикулярно постоянному магнитному полю, результат сравнивался с моделью



Рис. 24: Сравнение результатов моделирования кодом из 4.4 с моделью МСРВ, разработанной работе [87]. На левом графике распределение электронов по энергиям, полученное кодом из данной работы (зеленая линия), и результаты модели МСРВ (синие точки). На правом графике красной линией показано распределение средней проекции спина на ось  $x$ , а синими точками показаны результаты модели МСРВ.

НРП, заданной уравнениями (213) – (222). Моделирование проводилось для различных начальных значений  $\chi_0$  и  $\varepsilon_0$ : (i)  $\chi_0 = 0.01$ ,  $\varepsilon_0 = 1$  ГэВ; (ii)  $\chi_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon_0 = 10$  ГэВ; (iii)  $\chi_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon_0 = 50$  ГэВ с использованием во всех случаях  $10^5$  частиц. Изначально электронный пучок неполяризован, т.е. каждый электрон имеет проекцию спина  $S_z = 1$  или  $S_z = -1$  со средним для всего пучка  $\langle S_z \rangle = 0$ .

На рис. 25 показано сравнение результатов модели НРП и результатов численного моделирования. Как обсуждалось в конце раздела 4.1, нарастание поляризации существенно подавляется при учете радиационных потерь. Используя уравнение (216), можно оценить время испускания одного фотона  $\tau_{ph} = 1/W$  и сравнить его со временем нарастания поляризации для случая постоянной энергии. Для случая, представленного на рис. 25(а), имеем  $\tau_{sp}/\tau_{ph} \approx 7 \cdot 10^5$ , для случая (b)  $\tau_{sp}/\tau_{ph} \approx 7 \cdot 10^2$  и для (c)  $\tau_{sp}/\tau_{ph} \approx 5.8$ . Графики во второй и четвертой строках показывают относительную ошибку между численными результатами и моделью НРП. Пики около  $t \simeq 0$  на рис. 25 можно объяснить тем фактом, что вначале моделирования происходит мало событий переворота спина и излучения для получения хорошего усреднения и статистически значимого результата. Эти пики становятся уже по мере увеличения количества частиц в моделировании.

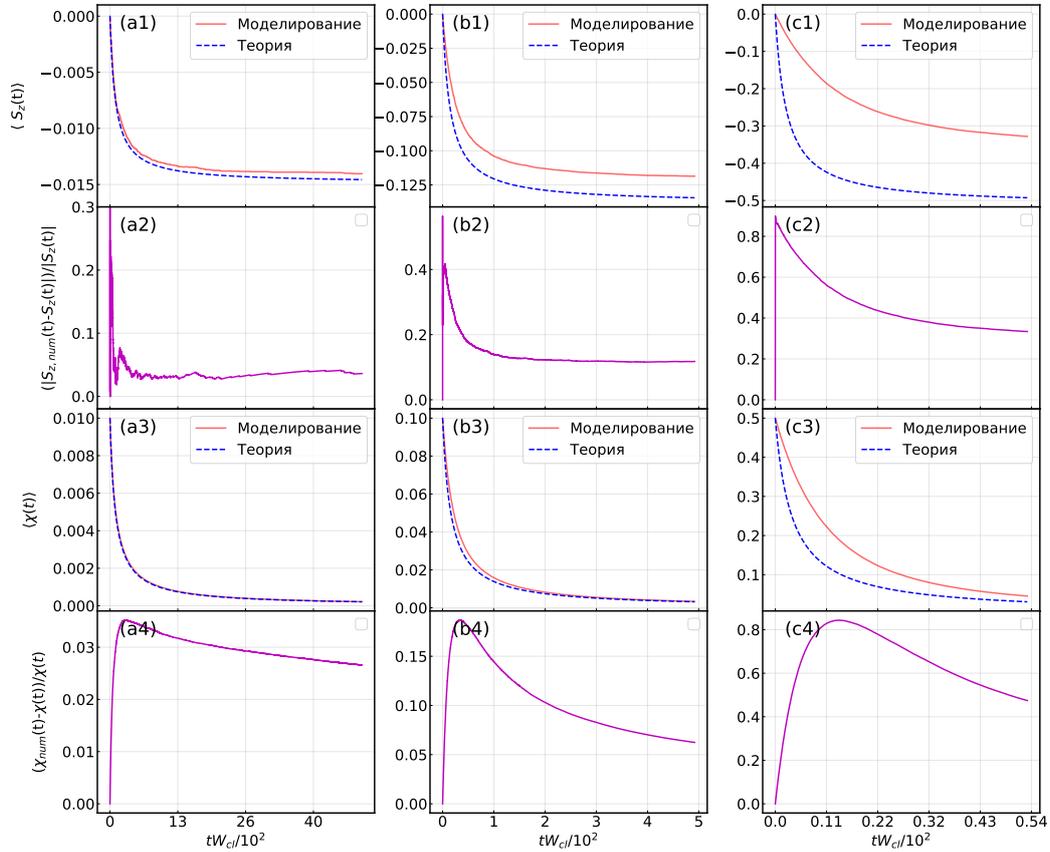


Рис. 25: Сравнение численного моделирования с аналитическим решением для эволюции среднего значения проекции спина для различных параметров: (a1-a4)  $\chi = 0.01$ ,  $\varepsilon = 1$  ГэВ, (b1-b4)  $\chi = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10$  ГэВ и (c1-c4)  $\chi = 0.5$ ,  $\varepsilon = 50$  ГэВ. Магнитное поле для всех случаев составляет  $B/B_{cr} = 0.511 \cdot 10^{-6}$ . Сплошная красная линия на графиках в первой и третьей строках представляет среднюю проекцию спина на ось z, полученную при численном моделировании. Пунктирная синяя линия представляет собой аналитическое решение уравнений (223). Фиолетовые линии на графиках a2, b2, c2 показывают разницу между численным решением и аналитическим результатом для спина. На графиках a4, b4, c4 фиолетовые линии представляют разницу между численными результатами для  $\chi$  и аналитическими результатами, полученными из уравнения (221).

## 4.5 Сильно квантовый режим

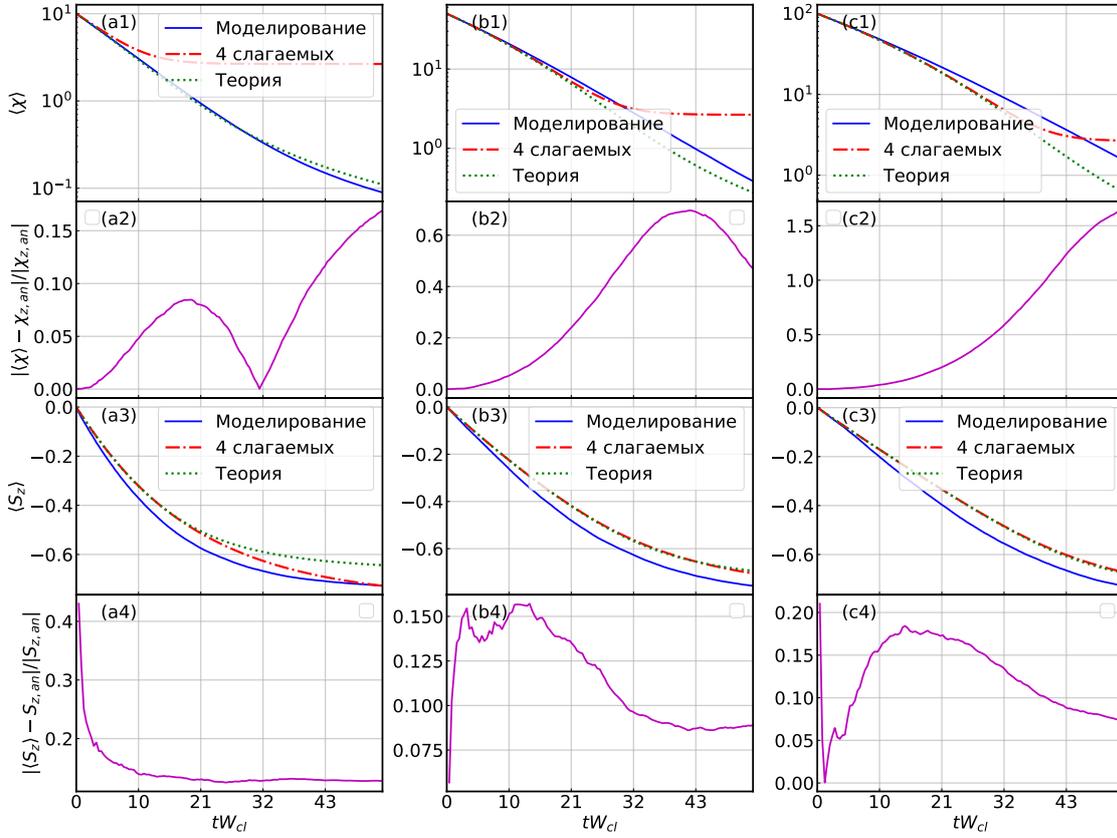


Рис. 26: На графиках сплошные синие линии a1, a3, b1, b3, c1, c3 показывают результаты численного моделирования, пунктирные зеленые линии показывают точное решение уравнений (213) и (235), а случай разложения правой части уравнения (213) показан красной штрихпунктирной линией. Для всех расчетов напряженность магнитного поля принималась равной  $B/B_{cr} = 0.511 \cdot 10^{-4}$  с исходным  $\chi_0$  10 для (a1-a4), 50 для (b1-b4) и 100 за (c1-c4). Во всех случаях начальный средний спин равен нулю. Графики a2, a4, b2, b4, c2, c4 (сплошными фиолетовыми линиями) изображают разницу между численными результатами и решением уравнений (213) и уравнений (235).

Исследуем степень применимость модели НРП в случае  $\chi \gg 1$ . Описывать спиновые состояния можно также с помощью матрицы плотности  $\rho$ . Зная матрицу  $\rho$  можно записать выражение для поляризационного вектора (или вектора Блоха)  $\mathbf{S} = tr[\boldsymbol{\sigma}\rho]$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  есть матрицы Паули. Используя  $\hat{S}$ - матрицу и зная начальную матрицу плотности  $\rho_i$ , можно записать выражение для матрицы плот-

ности конечного состояния  $\rho_f = \hat{S}\rho_i\hat{S}^\dagger$ .

Выражение для конечной матрицы плотности для случая постоянного магнитного поля получено в работе [71] и имеет вид

$$\rho = \int \rho(t, \boldsymbol{\varkappa}) dt d\boldsymbol{\varkappa} = \frac{C_0}{\chi} \int \begin{pmatrix} \rho_+ & \rho_{nd}^* \\ \rho_{nd} & \rho_- \end{pmatrix} dt d\boldsymbol{\varkappa}, \quad (228)$$

где матричные элементы

$$\begin{aligned} \rho_\pm = & (2 + 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta \pm 2S_z) K_{2/3}(\eta) - (1 \pm S_z) \int_\eta^\infty K_{1/3}(s) ds - \\ & - \left( \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\chi} \pm 1.5\chi\eta \right) K_{1/3}(\eta), \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \rho_{nd} = & S_x \left( (2 + 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta) K_{2/3}(\eta) - (1 + 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta) \int_\eta^\infty K_{1/3}(s) ds \right) + \\ & + iS_y \left( 2K_{2/3}(\eta) - \int_\eta^\infty K_{1/3}(s) ds \right), \end{aligned} \quad (230)$$

где  $\eta = 2y/(3\chi(\chi - y))$ . Заметим, что след от матрицы (228) совпадает с выражением (3), где произведено суммирование по конечным спинам. Вычисляя след от произведения матрицы (228) с матрицами Паули для всех компонентов можно получить:

$$\Delta S_x = \frac{S_x}{w_s} \left[ \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\chi} S_z K_{1/3}(\eta) - 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta \int_\eta^\infty K_{1/3}(s) ds \right], \quad (231)$$

$$\Delta S_y = \frac{S_y}{w_s} \left[ \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\chi} S_z K_{1/3}(\eta) - 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta K_{2/3}(\eta) \right], \quad (232)$$

$$\Delta S_z = \frac{1}{w_s} \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\chi} S_z^2 - 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta \right) K_{1/3}(\eta) - 1.5\boldsymbol{\varkappa}\eta K_{1/3}(\eta) \right]. \quad (233)$$

Стоит заметить, что уравнения (231)-(233) дают только изменение излучившей части пучка, для неизлучившей части пучка можно воспользоваться формулой (211). Полагая  $\Delta t \rightarrow 0$ , выражение для изменения вектора спина неизлучившей части имеет вид

$$\Delta \mathbf{S}^{NR} = -C_0 \Delta t \left( \mathbf{S}_i \int_0^1 d\xi w_0 + \int_0^1 d\xi \mathbf{w}_i \right). \quad (234)$$

Переходя к средним с уравнениях (231)-(233) в соответствии с моделью НРП, т.е. умножая каждое уравнение на (7) и интегрируя по всем энергиям фотона, получаем систему дифференциальных уравнений для эволюции вектора поляризации для излучившей части электронов. Добавляя к этому выражение (234) получаем полную систему

$$\frac{dS_z}{dt} = -S_z F_2(\chi) - F_1(\chi), \quad (235)$$

$$\frac{dS_y}{dt} = -S_y F_2(\chi), \quad (236)$$

$$\frac{dS_x}{dt} = -S_x F_3(\chi), \quad (237)$$

где коэффициенты в уравнениях (235)-(237) следующие

$$F_1 = \frac{C_0}{\chi} \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} K_{1/3}(\eta) dy, \quad (238)$$

$$F_2 = \frac{C_0}{\chi} \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} K_{2/3}(\eta) dy, \quad (239)$$

$$F_3 = \frac{C_0}{\chi} \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} \text{Int}K_{1/3}(\eta) dy. \quad (240)$$

$$(241)$$

В качестве проверки правильности системы (235)-(237) можно убедиться, что уравнение (235) переходит в уравнение (219) при  $\chi \ll 1$ . Вычисляя коэффициенты (238)-(240) для  $\chi \ll 1$  получаем

$$F_1 = C_0 \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} K_{1/3}(\eta) dy = C_0 \frac{27}{8} \chi^4 \int_0^\infty a^2 K_{1/3}(a) da = \frac{\alpha \chi^3}{\tau_c \gamma}, \quad (242)$$

$$F_2 = C_0 \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} K_{2/3}(\eta) dy = C_0 \int_0^\chi 3\chi y K_{2/3}(2y) d\chi = \frac{5\sqrt{3} \alpha \chi^3}{8 \tau_c \gamma}, \quad (243)$$

$$F_3 = C_0 \int_0^\chi \frac{y^2}{\chi(\chi - y)} \int_\eta^\infty K_{1/3}(t) dt dy = C_0 \frac{27}{8} \chi^4 \int_0^\infty a^2 \text{Int}_{1/3} K(a) da = \frac{35}{24\sqrt{3}} \frac{\alpha \chi^3}{\tau_c \gamma}. \quad (244)$$

Сравнение результатов моделирования для режимов  $\chi \gg 1$  и результатов решения системы (235)-(237) и (213) представлено на рисунке 26. Видно, что даже для достаточно больших значений  $\chi$  имеется хорошее согласие результатов кода с моделью НРП. Красная кривая на рисунке 26 соответствует разложению правой части уравнения (213) до 4-х слагаемых по параметру  $1/\chi$

$$\dot{\chi} = -0.37\alpha \frac{B}{B_{cr}} \chi^{2/3} \left( 1 - 1.798\chi^{-2/3} + 4.715\chi^{-4/3} - 6.84\chi^{-5/3} \right). \quad (245)$$

Для получения аналитического решения можно было бы ограничиться только одним слагаемым в уравнении (245), но, как показывает моделирование, этого не достаточно, и для хорошего описания решения точной задачи, требуется как минимум четыре слагаемых.

## 4.6 Обсуждение результатов

Исследовано движение релятивистского электронного пучка в присутствии постоянного однородного магнитного поля с учетом поляризационных эффектов и реакции излучения. В квазиклассическом пределе ( $\chi \ll 1$ ) получены аналитические выражения для эволюции как энергии пучка, так и его поляризации. Вывод был выполнен в рамках модели НРП. Также была разработана численная модель, использующая метод Монте-Карло для излучения фотонов с учетом спиновых степеней свободы. Аналитические результаты сравнивались с результатами, полученными в численном моделировании для различных значений начального параметра  $\chi$ . Моделирование проводилось как в квазиклассической области ( $\chi \ll 1$ ), так и в сильном квантовом режиме  $\chi \gg 1$ .

Численное моделирование и аналитические расчеты, используя модель НРП, показывают, что реакция излучения существенно препятствует нарастанию поляризации, поскольку энергия лептонов быстро теряется даже при малом параметре  $\chi$ . Численное решение хорошо согласуется с аналитическим, когда пара-

метр  $\chi$  мал, однако, когда параметра  $\chi \gtrsim 1$ , решения начинают расходиться. Использование модели НРП для больших значений  $\chi$  может служить полезным инструментом для получения качественной оценки того, как меняется энергия электрона.

Продемонстрирована справедливость модели НРП в квазиклассическом пределе. Модель оперирует усредненными величинами, при этом усреднение проводится по электронам пучка. Радиационные потери из-за многократного испускания фотонов рассматриваются, как в рамках модели НРП, так и используя стохастическую модель в квазиклассическом пределе  $\chi \ll 1$ , и в сильно квантовом режиме  $\chi \gg 1$ . Сравнение результатов моделирования с результатами модели НРП для энергии показывает, что модель НРП можно использовать для оценок даже в квантовом режиме. Более того, сильные радиационные потери в квантовом режиме приводят к быстрой релаксации к классическому режиму, в котором модель НРП работает правильно.

Эти результаты могут оказаться важными для будущих исследований, направленных на изучение свойств КЭД в сильных электромагнитных полях и поведения спиновых степеней свободы частиц в различных экспериментальных условиях. Полученное аналитическое решение также может служить способом проверки правильности работы численных алгоритмов.

## 5 Заключение

1. Найдено такое магнитное поле, при взаимодействии электронов с которым, получаемое распределение частиц по энергиям совпадает со случаем взаимодействия аналогичных электронов с заданным лазерным полем. Такая замена лазерного поля на постоянное магнитное поле во многих задачах может существенно упростить теоретический и аналитический анализ.
2. Показано, что влияние действительной части показателя преломления поляризованного вакуума на спектр излучения электрона в магнитном поле мало в области параметров, где справедливо использование теории возмущений. Продемонстрирована перспективность использования мюонов для исследования влияния действительной части показателя преломления поляризованного вакуума на параметры излучения.
3. Построена численная модель для описания полевой ионизации, учитывающая режим подавления барьера и многократную ионизацию. Результаты численного моделирования, с использованием данной модели, подтверждают предположение о том, что более тяжелые газы лучше подходят в качестве затравки для инициации КЭД каскада.
4. Построена аналитическая модель КЭД каскада во вращающемся электрическом поле. Выведено выражение для скорости роста КЭД каскада. Полученное выражение находится в хорошем согласии с результатом численного моделирования в широком диапазоне напряженности лазерного поля.
5. Модель непрерывных радиационных потерь расширена на случай спиновых степеней свободы с учетом радиационных эффектов. Показано, что времена, на которых модель НРП применима, намного больше как характерных времен диссипации энергии, так и характерных времен набора пучком электронов поляризации.

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю Евгению Николаевичу Нерушу за помощь и руководство в ходе исследований, за полезные советы в написании этой работы. Автор благодарит Игоря Юрьевича Костюкова за помощь в работе над существенной частью данной диссертации и за помощь

в публикации работ. Также автор выражает благодарность Голованову Антону Александровичу за ценные советы по разработке кода.

## 6 Список публикаций по диссертации

- A1 Artemenko, Ivan Igorevich, et al. Formation and dynamics of a plasma in superstrong laser fields including radiative and quantum electrodynamics effects. JETP letters 104 (2016): 883-891.
- A2 Kostyukov, I. Yu, I. I. Artemenko, and E. N. Nerush. Growth rate of QED cascades in a rotating electric field. Problems of Atomic Science and Technology (2018): 259-263.
- A3 Artemenko, I. I., Krygin, M. S., Serebryakov, D. A., Nerush, E. N., Kostyukov, I. Y. (2019). Global constant field approximation for radiation reaction in collision of high-intensity laser pulse with electron beam. Plasma Physics and Controlled Fusion, 61(7), 074003.
- A4 Artemenko, I. I., Nerush, E. N., Kostyukov, I. Y. (2020). Quasiclassical approach to synergic synchrotron–Cherenkov radiation in polarized vacuum. New Journal of Physics, 22(9), 093072.
- A5 Artemenko, I. I., Kostyukov, I. Y. (2017). Ionization-induced laser-driven QED cascade in noble gases. Physical Review A, 96(3), 032106.
- A6 Artemenko, I. I., Kostyukov, I. Y. (2023). Continuous-radiative-loss model for electron-spin dynamics in the radiation-dominated regime, Physical Review A, 108(5), 052206.
- A7 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Синхротрон-Черенковское Излучение в вакууме», Нелинейные волны-2018, XVIII научная школа, 26 февраля – 4 марта 2018 года, Нижний Новгород.
- A8 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Излучение ускоренных электронов в синхротрон-черенковском режиме». Радиофизическая конференция 2018 17 мая 2018 года, Нижний Новгород, ННГУ.
- A9 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Излучение ускоренных электронов в поляризованном вакууме». Двадцать третья научная конференция по радиофизике 2019, 13 мая 2019 года, Нижний Новгород, ННГУ.

- A10 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. "Синхротрон-Черенковское излучение в вакууме". Нелинейные волны-2020, XIX научная школа, 29 февраля - 4 марта 2020 года, Нижний Новгород.
- A11 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. «Новые методы ускорения частиц и экстремальные состояния материи», межинститутский онлайн-семинар, 5 июля 2020 - 22 сентября 2020.
- A12 Артеменко И.И., Костюков И.Ю., Неруш Е.Н. "Численное моделирование спиновых эффектов при взаимодействии пучков с эм полями". Нелинейные волны-2022, XIX научная школа, 7 - 13 ноября 2022 года, Нижний Новгород.

## Список литературы

- [1] Research opportunities at the upgraded HI $\gamma$ S facility / Henry R Weller, Mohammad W Ahmed, Haiyan Gao et al. // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2009. — Vol. 62, no. 1. — Pp. 257–303.
- [2] Isochronous storage ring of the New SUBARU project / A Ando, S Amano, S Hashimoto et al. // *Journal of Synchrotron Radiation*. — 1998. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 342–344.
- [3] Experimental evidence of quantum radiation reaction in aligned crystals / Tobias N Wistisen, Antonino Di Piazza, Helge V Knudsen, Ulrik I Uggerhøj // *Nature communications*. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 795.
- [4] Improved local-constant-field approximation for strong-field QED codes / A Di Piazza, Matteo Tamburini, S Meuren, Christoph H Keitel // *Physical Review A*. — 2019. — Vol. 99, no. 2. — P. 022125.
- [5] *Macchi, Andrea*. Intense laser sheds light on radiation reaction / Andrea Macchi // *Physics*. — 2018. — Vol. 11. — P. 13.
- [6] Limitations on the attainable intensity of high power lasers / AM Fedotov, NB Narozhny, Gérard Mourou, Georg Korn // *Physical review letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 8. — P. 080402.
- [7] *Katkov, VM*. Electromagnetic processes at high energies in oriented single crystals / VM Katkov, Vladimir Moiseevich Strakhovenko et al. — World Scientific, 1998.
- [8] *Baier, Vladimir N*. Concept of formation length in radiation theory / Vladimir N Baier, Valerij Mihajlovič Katkov // *Physics reports*. — 2005. — Vol. 409, no. 5. — Pp. 261–359.
- [9] Extended particle-in-cell schemes for physics in ultrastrong laser fields: Review and developments / A Gonoskov, S Bastrakov, E Efimenko et al. // *Physical review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 023305.
- [10] *Landau, Lev Davidovich*. The classical theory of fields / Lev Davidovich Landau. — Elsevier, 2013. — Vol. 2.

- [11] *Kirk, John G.* Pair production in counter-propagating laser beams / John G Kirk, AR Bell, Ioanna Arka // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2009. — Vol. 51, no. 8. — P. 085008.
- [12] Electromagnetic cascade in high-energy electron, positron, and photon interactions with intense laser pulses / SS Bulanov, CB Schroeder, E Esarey, WP Leemans // *Physical Review A*. — 2013. — Vol. 87, no. 6. — P. 062110.
- [13] *Kostyukov, I Yu.* Production and dynamics of positrons in ultrahigh intensity laser-foil interactions / I Yu Kostyukov, EN Nerush // *Physics of Plasmas*. — 2016. — Vol. 23, no. 9. — P. 093119.
- [14] Experimental signatures of the quantum nature of radiation reaction in the field of an ultraintense laser / Kristjan Poder, Matteo Tamburini, G Sarri et al. // *Physical Review X*. — 2018. — Vol. 8, no. 3. — P. 031004.
- [15] *Artemenko, II.* Continuous-radiative-loss model for electron-spin dynamics in the radiation-dominated regime / II Artemenko, I Yu Kostyukov // *Physical Review A*. — 2023. — Vol. 108, no. 5. — P. 052206.
- [16] *Breit, Gregory.* Collision of two light quanta / Gregory Breit, John A Wheeler // *Physical Review*. — 1934. — Vol. 46, no. 12. — P. 1087.
- [17] The Shanghai Superintense Ultrafast Laser Facility (SULF) Project / Zebiao Gan, Lianghong Yu, Cheng Wang et al. // *Progress in Ultrafast Intense Laser Science XVI*. — Cham: Springer International Publishing, 2021. — Pp. 199–217. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75089-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75089-3_10).
- [18] Recent Progress on the Shanghai Superintense Ultrafast Laser Facility (SULF) at SIOM / Xiaoyan Liang, Yuxin Leng, Ruxin Li, Zhizhan Xu // *OSA High-brightness Sources and Light-driven Interactions Congress 2020 (EUVXRAY, HILAS, MICS)*. — Optica Publishing Group, 2020. — P. HTh2B.2. <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=HILAS-2020-HTh2B.2>.
- [19] Extreme Light Infrastructure—Nuclear Physics (Eli-np). — <http://eli-np.ro/>.

- [20] ELI-Beamlines: extreme light infrastructure science and technology with ultra-intense lasers / Bruno Le Garrec, Stephane Sebban, Daniele Margarone et al. // High Energy/Average Power Lasers and Intense Beam Applications VII / SPIE. — Vol. 8962. — 2014. — Pp. 89–96.
- [21] Apollon Project. — <https://portail.polytechnique.edu/luli/en/cilex-apollo/apollon>.
- [22] Vulcan 2020. — <https://clf.stfc.ac.uk/Pages/Vulcan-2020.aspx>.
- [23] New horizons for extreme light physics with mega-science project XCELS / AV Bashinov, AA Gonoskov, AV Kim et al. // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2014. — Vol. 223. — Pp. 1105–1112.
- [24] Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS) / E. Khazanov, A. Shaykin, I. Kostyukov et al. // *High Power Laser Science and Engineering*. — 2023. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 1–77.
- [25] Realization of laser intensity over  $10^{23}$  W/cm<sup>2</sup> / Jin Woo Yoon, Yeong Gyu Kim, Il Woo Choi et al. // *Optica*. — 2021. — Vol. 8, no. 5. — Pp. 630–635.
- [26] The Extreme Light Infrastructure (ELI) official website. — <http://www.eli-laser.eu>.
- [27] QED cascades induced by circularly polarized laser fields / NV Elkina, AM Fedotov, I Yu Kostyukov et al. // *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*. — 2011. — Vol. 14, no. 5. — P. 054401.
- [28] Bell, AR. Possibility of prolific pair production with high-power lasers / AR Bell, John G Kirk // *Physical review letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 20. — P. 200403.
- [29] Electron dynamics and  $\gamma$  and  $e^- e^+$  production by colliding laser pulses / M Jirka, O Klimo, SV Bulanov et al. // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 2. — P. 023207.

- [30] Ultrabright GeV photon source via controlled electromagnetic cascades in laser-dipole waves / Arkady Gonoskov, Alexey Bashinov, S Bastrakov et al. // *Physical Review X*. — 2017. — Vol. 7, no. 4. — P. 041003.
- [31] Dipole pulse theory: Maximizing the field amplitude from 4  $\pi$  focused laser pulses / Ivan Gonoskov, Andrea Aiello, Simon Heugel, Gerd Leuchs // *Physical Review A*. — 2012. — Vol. 86, no. 5. — P. 053836.
- [32] Optimized multibeam configuration for observation of QED cascades / EG Gelfer, AA Mironov, AM Fedotov et al. // *Physical Review A*. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 022113.
- [33] *Tamburini, Matteo*. Laser-pulse-shape control of seeded QED cascades / Matteo Tamburini, Antonino Di Piazza, Christoph H Keitel // *Scientific reports*. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 5694.
- [34] Laser field absorption in self-generated electron-positron pair plasma / EN Nerush, I Yu Kostyukov, AM Fedotov et al. // *Physical review letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 3. — P. 035001.
- [35] *Nerush, EN*. Kinetic modelling of quantum effects in laser-beam interaction / EN Nerush, I Yu Kostyukov // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 2011. — Vol. 653, no. 1. — Pp. 7–10.
- [36] *Mironov, Arsenii Antonovich*. Generation of quantum-electrodynamic cascades in oblique collisions of ultrarelativistic electrons with an intense laser field / Arsenii Antonovich Mironov, Aleksandr Mikhailovich Fedotov, Nikolay Borisovich Narozhny // *Quantum Electronics*. — 2016. — Vol. 46, no. 4. — P. 305.
- [37] Three-dimensional parallel particle-in-cell (PIC) code. — <https://github.com/QUILL-PIC/Quill>.
- [38] *Perelomov, AM*. Ionization of atoms in an alternating electric field / AM Perelomov, VS Popov, MV Terent'Ev // *Sov. Phys. JETP*. — 1966. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 924–934.

- [39] *Popov, Vladimir S.* Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (Keldysh theory) / Vladimir S Popov // *Physics-Uspekhi*. — 2004. — Vol. 47, no. 9. — P. 855.
- [40] Seeded QED cascades in counterpropagating laser pulses / Thomas Grismayer, Marija Vranic, Joana L Martins et al. // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 95, no. 2. — P. 023210.
- [41] Laser absorption via quantum electrodynamics cascades in counter propagating laser pulses / Thomas Grismayer, Marija Vranic, Joana Luis Martins et al. // *Physics of Plasmas*. — 2016. — Vol. 23, no. 5. — P. 056706.
- [42] *Uggerhøj, Ulrik I.* The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields / Ulrik I Uggerhøj // *Reviews of modern physics*. — 2005. — Vol. 77, no. 4. — P. 1131.
- [43] Positron production in multiphoton light-by-light scattering / DL Burke, RC Field, G Horton-Smith et al. // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 79, no. 9. — P. 1626.
- [44] Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses / C Bamber, SJ Boege, T Koffas et al. // *Physical Review D*. — 1999. — Vol. 60, no. 9. — P. 092004.
- [45] *King, Ben.* A matterless double slit / Ben King, Antonino Di Piazza, Christoph H Keitel // *Nature Photonics*. — 2010. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 92–94.
- [46] *King, Ben.* Double-slit vacuum polarization effects in ultraintense laser fields / Ben King, Antonino Di Piazza, Christoph H Keitel // *Physical Review A*. — 2010. — Vol. 82, no. 3. — P. 032114.
- [47] *King, Ben.* Investigating the QED vacuum with ultra-intense laser fields / Ben King, Antonino Di Piazza // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2014. — Vol. 223, no. 6. — Pp. 1063–1068.
- [48] On the observation of vacuum birefringence / Thomas Heinzl, Ben Liesfeld, Kay-Uwe Amthor et al. // *Optics communications*. — 2006. — Vol. 267, no. 2. — Pp. 318–321.

- [49] *Ilderton, Anton*. Prospects for studying vacuum polarisation using dipole and synchrotron radiation / Anton Ilderton, Mattias Marklund // *Journal of Plasma Physics*. — 2016. — Vol. 82, no. 2. — P. 655820201.
- [50] *Nakamiya, Yoshihide*. Probing vacuum birefringence under a high-intensity laser field with gamma-ray polarimetry at the GeV scale / Yoshihide Nakamiya, Kensuke Homma // *Physical Review D*. — 2017. — Vol. 96, no. 5. — P. 053002.
- [51] High-energy vacuum birefringence and dichroism in an ultrastrong laser field / Sergey Bragin, Sebastian Meuren, Christoph H Keitel, Antonino Di Piazza // *Physical review letters*. — 2017. — Vol. 119, no. 25. — P. 250403.
- [52] *Fedotov, Alexander*. Conjecture of perturbative QED breakdown at  $\alpha\chi^{2/3} \gtrsim 1$  / Alexander Fedotov. — 2017. — Vol. 826, no. 1. — P. 012027.
- [53] Prospect of studying nonperturbative QED with beam-beam collisions / V Yakimenko, S Meuren, F Del Gaudio et al. // *Physical review letters*. — 2019. — Vol. 122, no. 19. — P. 190404.
- [54] Probing non-perturbative QED with electron-laser collisions / C Baumann, EN Nerush, A Pukhov, I Yu Kostyukov // *Scientific reports*. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 1–8.
- [55] Reaching supercritical field strengths with intense lasers / TG Blackburn, A Ilderton, M Marklund, CP Ridgers // *New Journal of Physics*. — 2019. — Vol. 21, no. 5. — P. 053040.
- [56] Testing strong field QED close to the fully nonperturbative regime using aligned crystals / A Di Piazza, TN Wistisen, Matteo Tamburini, UI Uggerhøj // *Physical review letters*. — 2020. — Vol. 124, no. 4. — P. 044801.
- [57] *Volkov, DM*. On a class of solutions of the Dirac equation / DM Volkov // *Z. Phys*. — 1935. — Vol. 94, no. 3-4. — Pp. 250–260.
- [58] *Erber, Thomas*. High-energy electromagnetic conversion processes in intense magnetic fields / Thomas Erber // *Reviews of Modern Physics*. — 1966. — Vol. 38, no. 4. — P. 626.

- [59] *BONIN, KD.* PROPOSAL, FOR AN EXPERIMENTAL, STUDY OF NONLINEAR THOMSON SCATTERING / KD BONIN, KT McDONALD, DP RUSSELL. — 1986.
- [60] *Dremin, Igor Mikhailovich.* Cherenkov radiation and pair production by particles traversing laser beams / Igor Mikhailovich Dremin // *arXiv preprint hep-ph/0202060.* — 2002.
- [61] *Macleod, Alexander J.* Cherenkov radiation from the quantum vacuum / Alexander J Macleod, Adam Noble, Dino A Jaroszynski // *Physical review letters.* — 2019. — Vol. 122, no. 16. — P. 161601.
- [62] Synergic Cherenkov-Compton radiation / Sergei V Bulanov, P Sasorov, Stepan S Bulanov, Georg Korn // *Physical Review D.* — 2019. — Vol. 100, no. 1. — P. 016012.
- [63] *Schwinger, Julian.* Classical and quantum theory of synergic synchrotron-Čerenkov radiation / Julian Schwinger, Wu-yang Tsai, Thomas Erber // *Annals of Physics.* — 1976. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 303–332.
- [64] *Tsai, Wu-yang.* Propagation of photons in homogeneous magnetic fields: Index of refraction / Wu-yang Tsai, Thomas Erber // *Physical Review D.* — 1975. — Vol. 12, no. 4. — P. 1132.
- [65] *Ritus, VI.* Radiative effects and their enhancement in an intense electromagnetic field / VI Ritus // *Sov. Phys. JETP.* — 1970. — Vol. 30, no. 1181. — Pp. 052805–20.
- [66] Experimental aspects of synchrotron-Čerenkov radiation / T Erber, D White, Wu-yang Tsai, HG Latal // *Annals of Physics.* — 1976. — Vol. 102, no. 2. — Pp. 405–447.
- [67] Observation of Interference between Čerenkov and Synchrotron Radiation / KD Bonin, KT McDonald, DP Russell, JB Flanz // *Physical review letters.* — 1986. — Vol. 57, no. 18. — P. 2264.
- [68] Ultrarelativistic electron-beam polarization in single-shot interaction with an ultraintense laser pulse / Yan-Fei Li, Rashid Shaisultanov,

- Karen Z Hatsagortsyan et al. // *Physical review letters*. — 2019. — Vol. 122, no. 15. — P. 154801.
- [69] Spin and radiation in intense laser fields / MW Walser, David J Urbach, Karen Zaven Hatsagortsyan et al. // *Physical Review A*. — 2002. — Vol. 65, no. 4. — P. 043410.
- [70] Electron spin-and photon polarization-resolved probabilities of strong-field QED processes / Yue-Yue Chen, Karen Z Hatsagortsyan, Christoph H Keitel, Rashid Shaisultanov // *Physical Review D*. — 2022. — Vol. 105, no. 11. — P. 116013.
- [71] Theory of radiative electron polarization in strong laser fields / Daniel Seipt, D Del Sorbo, CP Ridgers, AGR Thomas // *Physical Review A*. — 2018. — Vol. 98, no. 2. — P. 023417.
- [72] Electron spin polarization in realistic trajectories around the magnetic node of two counter-propagating, circularly polarized, ultra-intense lasers / Dario Del Sorbo, Daniel Seipt, Alexander GR Thomas, CP Ridgers // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2018. — Vol. 60, no. 6. — P. 064003.
- [73] Helicity transfer in strong laser fields via the electron anomalous magnetic moment / Yan-Fei Li, Yue-Yue Chen, Karen Z Hatsagortsyan, Christoph H Keitel // *Physical Review Letters*. — 2022. — Vol. 128, no. 17. — P. 174801.
- [74] Photon polarization effects in polarized electron–positron pair production in a strong laser field / Ya-Nan Dai, Bai-Fei Shen, Jian-Xing Li et al. // *Matter and Radiation at Extremes*. — 2022. — Vol. 7, no. 1. — P. 014401.
- [75] Generation of arbitrarily polarized GeV lepton beams via nonlinear Breit-Wheeler process / Kun Xue, Ren-Tong Guo, Feng Wan et al. // *Fundamental Research*. — 2022. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 539–545.
- [76] *Pugacheva, DV*. Laser wakefield acceleration of polarized electron beams / DV Pugacheva, NE Andreev, B Cros // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — Vol. 774, no. 1. — P. 012107.

- [77] *Pugacheva, Darya Valer'evna*. Effect of synchrotron radiation on the dynamics of electron spin precession in the process of laser-plasma acceleration / Darya Valer'evna Pugacheva, Nikolai Evgen'evich Andreev // *Quantum Electronics*. — 2018. — Vol. 48, no. 4. — P. 291.
- [78] *Pugacheva, Darya Valer'evna*. Precession dynamics of the relativistic electron spin in laser-plasma acceleration / Darya Valer'evna Pugacheva, Nikolai Evgen'evich Andreev // *Quantum Electronics*. — 2016. — Vol. 46, no. 1. — P. 88.
- [79] Spin filter for polarized electron acceleration in plasma wakefields / Yitong Wu, Liangliang Ji, Xuesong Geng et al. // *Physical review applied*. — 2020. — Vol. 13, no. 4. — P. 044064.
- [80] Scaling laws for the depolarization time of relativistic particle beams in strong fields / Johannes Thomas, Anna Hützen, Andreas Lehrach et al. // *Physical review accelerators and beams*. — 2020. — Vol. 23, no. 6. — P. 064401.
- [81] Spin-dependent radiative deflection in the quantum radiation-reaction regime / XS Geng, LL Ji, BF Shen et al. // *New Journal of Physics*. — 2020. — Vol. 22, no. 1. — P. 013007.
- [82] Plasma and trap-based techniques for science with positrons / JR Danielson, DHE Dubin, RG Greaves, CM Surko // *Reviews of Modern Physics*. — 2015. — Vol. 87, no. 1. — P. 247.
- [83] The deuteron spin-dependent structure function  $g_{1d}$  and its first moment / V Yu Alexakhin, Yu Alexandrov, GD Alexeev et al. // *Physics Letters B*. — 2007. — Vol. 647, no. 1. — Pp. 8–17.
- [84] Polarized positrons and electrons at the linear collider / Gudrid Moortgat-Pick, T Abe, G Alexander et al. // *Physics Reports*. — 2008. — Vol. 460, no. 4-5. — Pp. 131–243.
- [85] *Sokolov, AA*. On polarization and spin effects in the theory of synchrotron radiation / AA Sokolov, M Ternov // *Sov. Phys.-Dokl.* — Vol. 8. — 1964. — Pp. 1203–1205.

- [86] *Baier, VN.* Radiative polarization of electrons in storage rings / VN Baier // *Soviet Physics Uspekhi.* — 1972. — Vol. 14, no. 6. — P. 695.
- [87] Radiative polarization dynamics of relativistic electrons in an intense electromagnetic field / Yuhui Tang, Zheng Gong, Jinqing Yu et al. // *Physical Review A.* — 2021. — Vol. 103, no. 4. — P. 042807.
- [88] *Birdsall, Charles K.* Plasma physics via computer simulation / Charles K Birdsall, A Bruce Langdon. — CRC press, 2004.
- [89] Electromagnetic particle-in-cell code for the kinetic simulation of plasmas. — <https://github.com/SmileiPIC/Smilei>.
- [90] Global constant field approximation for radiation reaction in collision of high-intensity laser pulse with electron beam / II Artemenko, MS Krygin, DA Serebryakov et al. // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2019. — Vol. 61, no. 7. — P. 074003.
- [91] *Berestetskii, Vladimir Borisovich.* Quantum Electrodynamics: Volume 4 / Vladimir Borisovich Berestetskii, Evgenii Mikhailovich Lifshitz, Lev Petrovich Pitaevskii. — Butterworth-Heinemann, 1982. — Vol. 4.
- [92] From quantum to classical modeling of radiation reaction: A focus on stochasticity effects / F Niel, C Riconda, François Amiranoff et al. // *Physical Review E.* — 2018. — Vol. 97, no. 4. — P. 043209.
- [93] From quantum to classical modeling of radiation reaction: a focus on the radiation spectrum / F Niel, C Riconda, François Amiranoff et al. // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2018. — Vol. 60, no. 9. — P. 094002.
- [94] *Bashinov, AV.* Impact of quantum effects on relativistic electron motion in a chaotic regime / AV Bashinov, AV Kim, AM Sergeev // *Physical Review E.* — 2015. — Vol. 92, no. 4. — P. 043105.
- [95] Tool to solve 1d boltzmann's equations for electrons emitting photons. — <https://github.com/EvgenyNerush/scintillans>.
- [96] *Nerush, EN.* Weibel instability in hot plasma flows with the production of gamma-rays and electron-positron pairs / EN Nerush, DA Serebryakov,

I Yu Kostyukov // *The Astrophysical Journal*. — 2017. — Vol. 851, no. 2. — P. 129.

- [97] Experimental evidence of radiation reaction in the collision of a high-intensity laser pulse with a laser-wakefield accelerated electron beam / JM Cole, KT Behm, E Gerstmayr et al. // *Physical Review X*. — 2018. — Vol. 8, no. 1. — P. 011020.
- [98] *Duclous, Roland*. Monte Carlo calculations of pair production in high-intensity laser-plasma interactions / Roland Duclous, John G Kirk, Anthony R Bell // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2010. — Vol. 53, no. 1. — P. 015009.
- [99] Quantum radiation reaction in head-on laser-electron beam interaction / Marija Vranic, Thomas Grismayer, Ricardo A Fonseca, Luis O Silva // *New Journal of Physics*. — 2016. — Vol. 18, no. 7. — P. 073035.
- [100] Optimal parameters for radiation reaction experiments / Christopher Arran, Jason M Cole, Elias Gerstmayr et al. // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2019. — Vol. 61, no. 7. — P. 074009.
- [101] *Jackson, John David*. Classical electrodynamics. — 1999.
- [102] *Baier, VN*. Quantum theory of transition radiation and transition pair creation / VN Baier, VM Katkov // *Physics Letters A*. — 1999. — Vol. 252, no. 5. — Pp. 263–271.
- [103] *Wistisen, Tobias N*. Interference effect in nonlinear Compton scattering / Tobias N Wistisen // *Physical Review D*. — 2014. — Vol. 90, no. 12. — P. 125008.
- [104] First measurements of the unique influence of spin on the energy loss of ultrarelativistic electrons in strong electromagnetic fields / K Kirsebom, U Mikkelsen, E Uggerhøj et al. // *Physical review letters*. — 2001. — Vol. 87, no. 5. — P. 054801.
- [105] Nonlinear Compton scattering of an ultraintense laser pulse in a plasma / Felix Mackenroth, Naveen Kumar, Norman Neitz, Christoph H Keitel // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 99, no. 3. — P. 033205.

- [106] Number of algorithms calculating radiation spectra. — <https://github.com/EvgenyNerush/jE>.
- [107] Demonstration of cooling by the muon ionization cooling experiment // *Nature*. — 2020. — Vol. 578, no. 7793. — Pp. 53–59.
- [108] *Nerush, EN*. Analytical model for electromagnetic cascades in rotating electric field / EN Nerush, VF Bashmakov, I Yu Kostyukov // *Physics of Plasmas*. — 2011. — Vol. 18, no. 8. — P. 083107.
- [109] *Bashinov, AV*. Particle dynamics and spatial e- e+ density structures at QED cascading in circularly polarized standing waves / AV Bashinov, P Kumar, AV Kim // *Physical Review A*. — 2017. — Vol. 95, no. 4. — P. 042127.
- [110] *Narozhny, Nikolay Borisovich*. Quantum-electrodynamic cascades in intense laser fields / Nikolay Borisovich Narozhny, Aleksandr Mikhailovich Fedotov // *Physics-Uspekhi*. — 2015. — Vol. 58, no. 1. — P. 95.
- [111] Dense electron-positron plasmas and ultraintense  $\gamma$  rays from laser-irradiated solids / CP Ridgers, Christopher S Brady, R Ducloux et al. // *Physical review letters*. — 2012. — Vol. 108, no. 16. — P. 165006.
- [112] *Sturrock, PA*. A model of pulsars / PA Sturrock // *Astrophysical Journal*, vol. 164, p. 529. — 1971. — Vol. 164. — P. 529.
- [113] *Daugherty, JK*. Electromagnetic cascades in pulsars / JK Daugherty, Alice K Harding // *Astrophysical Journal, Part 1*, vol. 252, Jan. 1, 1982, p. 337–347. — 1982. — Vol. 252. — Pp. 337–347.
- [114] *Nerush, E*. Radiation emission by extreme relativistic electrons and pair production by hard photons in a strong plasma wakefield / E Nerush, I Kostyukov // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75, no. 5. — P. 057401.
- [115] *Keldysh, LV*. Ionization in the field of a strong electromagnetic wave / LV Keldysh et al. // *Sov. Phys. JETP*. — 1965. — Vol. 20, no. 5. — Pp. 1307–1314.
- [116] *Ilkov, FA*. Ionization of atoms in the tunnelling regime with experimental evidence using Hg atoms / FA Ilkov, JE Decker, SL Chin // *Journal of Physics*

*B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1992. — Vol. 25, no. 19. — P. 4005.

- [117] Current progress in developing the nonlinear ionization theory of atoms and ions / Boris Mikhailovich Karnakov, Vadim Davydovich Mur, Sergei Vasil'evich Popruzhenko, Vladimir S Popov // *Physics—Uspekhi.* — 2015. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 3–32.
- [118] *Ammosov, Maxim V.* Tunnel ionization of complex atoms and of atomic ions in an alternating electromagnetic field / Maxim V Ammosov, Nikolai B Delone, Vladimir P Krainov // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 1986. — Vol. 64, no. 6. — P. 1191.
- [119] *Delone, Nikolai Borisovich.* AC Stark shift of atomic energy levels / Nikolai Borisovich Delone, Vladimir P Krainov // *Physics-Uspekhi.* — 1999. — Vol. 42, no. 7. — P. 669.
- [120] *Bauer, D.* Ejection energy of photoelectrons in strong-field ionization / D Bauer // *Physical Review A.* — 1997. — Vol. 55, no. 3. — P. 2180.
- [121] *Tong, XM.* Empirical formula for static field ionization rates of atoms and molecules by lasers in the barrier-suppression regime / XM Tong, CD Lin // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 2005. — Vol. 38, no. 15. — P. 2593.
- [122] *Krainov, Vladimir P.* Ionization rates and energy and angular distributions at the barrier-suppression ionization of complex atoms and atomic ions / Vladimir P Krainov // *JOSA B.* — 1997. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 425–431.
- [123] *Zhang, Qingbin.* Empirical formula for over-barrier strong-field ionization / Qingbin Zhang, Pengfei Lan, Peixiang Lu // *Physical Review A.* — 2014. — Vol. 90, no. 4. — P. 043410.
- [124] *Bauer, D.* Exact field ionization rates in the barrier-suppression regime from numerical time-dependent Schrödinger-equation calculations / D Bauer, P Mulser // *Physical Review A.* — 1999. — Vol. 59, no. 1. — P. 569.

- [125] Field ionization model implemented in particle in cell code and applied to laser-accelerated carbon ions / R Nuter, L Gremillet, E Lefebvre et al. // *Physics of Plasmas*. — 2011. — Vol. 18, no. 3. — P. 033107.
- [126] *Rae, SC*. Detailed simulations of plasma-induced spectral blueshifting / SC Rae, K Burnett // *Physical Review A*. — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 1084.
- [127] Numerical modeling of laser tunneling ionization in explicit particle-in-cell codes / Min Chen, Estelle Cormier-Michel, Cameron GR Geddes et al. // *Journal of Computational Physics*. — 2013. — Vol. 236. — Pp. 220–228.
- [128] Генерация сверхмощным лазерным излучением пучков ускоренных многозарядных ионов с энергией порядка нескольких десятков МэВ/нуклон для задач ядерной физики / Артём Владимирович Коржиманов, Евгений Сергеевич Ефименко, Аркадий Валентинович Ким, Сергей Владимирович Голубев // *Квантовая электроника*. — 2013. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 217–225.
- [129] Smilei: A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation / Julien Derouillat, Arnaud Beck, Frédéric Pérez et al. // *Computer Physics Communications*. — 2018. — Vol. 222. — Pp. 351–373.
- [130] *Lehmann, G*. Phase-space contraction and attractors for ultrarelativistic electrons / G Lehmann, KH Spatschek // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 5. — P. 056412.
- [131] Anomalous radiative trapping in laser fields of extreme intensity / Arkady Gonoskov, A Bashinov, Ivan Gonoskov et al. // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 113, no. 1. — P. 014801.
- [132] Particle-in-cell simulations of laser–plasma interactions at solid densities and relativistic intensities: the role of atomic processes / D Wu, XT He, W Yu, S Fritzsche // *High Power Laser Science and Engineering*. — 2018. — Vol. 6. — P. e50.
- [133] *Storm, Lellery*. Photon cross sections from 1 keV to 100 MeV for elements  $Z=1$  to  $Z=100$  / Lellery Storm, Harvey I Israel // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. — 1970. — Vol. 7, no. 6. — Pp. 565–681.

- [134] *Zel'Dovich, Ya B.* Interaction of free electrons with electromagnetic radiation / Ya B Zel'Dovich // *Soviet Physics Uspekhi*. — 1975. — Vol. 18, no. 2. — P. 79.
- [135] Lorentz-Abraham-Dirac versus Landau-Lifshitz radiation friction force in the ultrarelativistic electron interaction with electromagnetic wave (exact solutions) / Sergei V Bulanov, Timur Zh Esirkepov, Masaki Kando et al. // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, no. 5. — P. 056605.
- [136] Radiation-pressure-dominant acceleration: Polarization and radiation reaction effects and energy increase in three-dimensional simulations / M Tamburini, TV Liseykina, F Pegoraro, A Macchi // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 016407.
- [137] *Bashinov, AV.* On the electrodynamic model of ultra-relativistic laser-plasma interactions caused by radiation reaction effects / AV Bashinov, AV Kim // *Physics of Plasmas*. — 2013. — Vol. 20, no. 11. — P. 113111.
- [138] Effect of laser polarization on quantum electrodynamical cascading / VF Bashmakov, EN Nerush, I Yu Kostyukov et al. // *Physics of Plasmas*. — 2014. — Vol. 21, no. 1. — P. 013105.
- [139] *Baier, Vo N.* Radiation of relativistic electrons; Izlučenje relyativistskikh elektronov / Vo N Baier, VM Katkov, VS Fadin. — 1973.
- [140] Polarization transfer of bremsstrahlung arising from spin-polarized electrons / R Martin, G Weber, R Barday et al. // *Physical review letters*. — 2012. — Vol. 108, no. 26. — P. 264801.
- [141] Production of highly polarized positrons using polarized electrons at MeV energies / D Abbott, P Adderley, A Adeyemi et al. // *Physical review letters*. — 2016. — Vol. 116, no. 21. — P. 214801.
- [142] *Schultz, Peter J.* Interaction of positron beams with surfaces, thin films, and interfaces / Peter J Schultz, Kelvin G Lynn // *Reviews of Modern Physics*. — 1988. — Vol. 60, no. 3. — P. 701.
- [143] *Ritus, V. I.* Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field / V. I. Ritus // *J. Sov. Laser Res.;(United States)*. — 1985. — Vol. 6, no. 5.

- [144] *Landau, L.* Theoretical physics. Field theory / L Landau, E Lifchitz. — Butterworth-Heinemann; 4th edition, 2004.
- [145] *Golovanov, AA.* Radiation reaction-dominated regime of wakefield acceleration / AA Golovanov, EN Nerush, I Yu Kostyukov // *New Journal of Physics*. — 2022. — Vol. 24, no. 3. — P. 033011.
- [146] Strong signature of one-loop self-energy in polarization resolved nonlinear Compton scattering / Yan-Fei Li, Yue-Yue Chen, A Di Piazza et al. // *Physical Review D*. — 2023. — Vol. 107, no. 11. — P. 116020.
- [147] *Dinu, Victor.* Single and double nonlinear Compton scattering / Victor Dinu, Greger Torgrimsson // *Physical Review D*. — 2019. — Vol. 99, no. 9. — P. 096018.
- [148] *Dinu, Victor.* Approximating higher-order nonlinear QED processes with first-order building blocks / Victor Dinu, Greger Torgrimsson // *Physical Review D*. — 2020. — Vol. 102, no. 1. — P. 016018.
- [149] *Torgrimsson, Greger.* Loops and polarization in strong-field QED / Greger Torgrimsson // *New Journal of Physics*. — 2021. — Vol. 23, no. 6. — P. 065001.
- [150] Advances in QED with intense background fields / A Fedotov, A Ilderton, F Karbstein et al. // *Physics Reports*. — 2023. — Vol. 1010. — Pp. 1–138.
- [151] *Bargmann, Valentine.* Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field / Valentine Bargmann, Louis Michel, VL Telegdi // *Physical Review Letters*. — 1959. — Vol. 2, no. 10. — P. 435.
- [152] *Thomas, Llewellyn Hilleth.* I. The kinematics of an electron with an axis / Llewellyn Hilleth Thomas // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1927. — Vol. 3, no. 13. — Pp. 1–22.
- [153] *Schwinger, Julian.* On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron / Julian Schwinger // *Physical Review*. — 1948. — Vol. 73, no. 4. — P. 416.
- [154] *Yokoya, Kaoru.* User manual of CAIN, version 2.40. — 2009.

- [155] *Ilderton, Anton*. Loop spin effects in intense background fields / Anton Ilderton, Ben King, Suo Tang // *Physical Review D*. — 2020. — Vol. 102, no. 7. — P. 076013.
- [156] Measurement of the radiative electron polarization in a 2.4-GeV storage ring / U Camerini, D Cline, J Learned et al. // *Physical Review D*. — 1975. — Vol. 12, no. 7. — P. 1855.
- [157] *Higuera, Adam V*. Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields / Adam V Higuera, John R Cary // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 5. — P. 052104.
- [158] Polarized beam conditioning in plasma based acceleration / J Vieira, C-K Huang, WB Mori, LO Silva // *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*. — 2011. — Vol. 14, no. 7. — P. 071303.
- [159] *Boris, Jay P*. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code / Jay P Boris et al. // Proc. Fourth Conf. Num. Sim. Plasmas. — 1970. — Pp. 3–67.
- [160] Modelling gamma-ray photon emission and pair production in high-intensity laser–matter interactions / Christopher Paul Ridgers, John G Kirk, Roland Duclous et al. // *Journal of computational physics*. — 2014. — Vol. 260. — Pp. 273–285.
- [161] PICSAR-QED: a Monte Carlo module to simulate strong-field quantum electrodynamics in particle-in-cell codes for exascale architectures / Luca Fedeli, Neil Zaim, Antonin Sainte-Marie et al. // *New Journal of Physics*. — 2022. — Vol. 24, no. 2. — P. 025009.
- [162] Production of highly polarized positron beams via helicity transfer from polarized electrons in a strong laser field / Yan-Fei Li, Yue-Yue Chen, Wei-Min Wang, Hua-Si Hu // *Physical Review Letters*. — 2020. — Vol. 125, no. 4. — P. 044802.
- [163] Simulations of spin/polarization-resolved laser–plasma interactions in the nonlinear QED regime / Feng Wan, Chong Lv, Kun Xue et al. // *Matter*

*and Radiation at Extremes.* — 2023. — 09. — Vol. 8, no. 6. — P. 064002.  
<https://doi.org/10.1063/5.0163929>.

- [164] Laser-driven lepton polarization in the quantum radiation-dominated reflection regime / Kai-Hong Zhuang, Yue-Yue Chen, Yan-Fei Li et al. // *Physical Review D.* — 2023. — Vol. 108, no. 3. — P. 033001.
- [165] Polarized ultrashort brilliant multi-gev  $\gamma$  rays via single-shot laser-electron interaction / Yan-Fei Li, Rashid Shaisultanov, Yue-Yue Chen et al. // *Physical review letters.* — 2020. — Vol. 124, no. 1. — P. 014801.
- [166] Production of polarized particle beams via ultraintense laser pulses / Ting Sun, Qian Zhao, Kun Xue et al. // *Reviews of Modern Plasma Physics.* — 2022. — Vol. 6, no. 1. — P. 38.