В. СМАЙТ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В. СМАЙТ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Перевод со второго американского издания
А. В. ГАПОНОВА и М. А. МИЛЛЕРА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1954

STATIC AND DYNAMIC ELECTRICITY

by

WILLIAM R. SMYTHE

SECOND EDITION

NEW YORK TORONTO LONDON

1950

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Предлагаемая вниманию советского читателя книга Смайта «Электростатика и электродинамика» содержит изложение основ классической макроскопической теории электромагнитного поля. В отличие от большинства подобных курсов в книге наряду с последовательным освещением общетеоретических вопросов значительное место отводится изложению основных методов решения электродинамических задач, а также приводятся вспомогательные математические сведения, необходимые для овладения этими методами. С этой точки зрения книга Смайта занимает промежуточное положение между учебником, где задачи, как правило, приводятся лишь для иллюстрации отдельных теоретических положений, и сборником задач, в котором если и сообщаются некоторые результаты теории, то только в весьма конспективной форме. Систематическое изложение теоретического материала и, что особенно существенно, большое количество задач, рассмотренных непосредственно в тексте, а также задач, помещенных вместе с ответами в конце каждой из глав, составляют несомненное достоинство книги и делают ее не только ценным пособием для студентов и аспирантов, изучающих теорию электромагнитного поля, но и полезным справочником для специалистов, работающих в смежных областях.

Перевод этой книги на русский язык был осуществлен благодаря инициативе покойного академика А. А. Андронова, считавшего издание такого пособия по теории электромагнитного поля весьма целесообразным. Вместе с тем А. А. Андронов отметил и некоторые присущие книге Смайта существенные недостатки, в частности: отсутствие теории электромеханических систем, имеющих большое значение в приложениях (электромашины), теории распространения радиоволн, а также до некоторой степени утилитарное изложение основ специальной теории относительности.

Не менее важным недостатком книги является также игнорирование автором достижений советских ученых, что приводит, естественно, к некоторому снижению общего уровня книги и особенно глав, относящихся к применению теории быстропеременных полей в современной радиотехнике. В этой области нашим физикам и инженерам принадлежит ряд фундаментальных результатов, позволяющих подойти к рассматриваемым вопросам с несколько иных и в научном и в педагогическом отношении позиций. Подробное комментирование соответствующих мест настолько бы отвлекло от оригинального текста, что мы сочли целесообразным оставить их вообще

без примечаний, отсылая читателя к оригинальной литературе, список которой помещен в конце книги. Сделанные нами примечания относятся лишь к некоторым допущенным автором фактическим ошибкам и неточностям. Ряд явных опечаток, замеченных при переводе, был исправлен без оговорок.

Всюду, где математические преобразования не носят принципиального характера, в книге практикуются ссылки на соответствующие формулы из математических справочников Двайта (Dwight, Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Macmillan, 1934) и Пайерса (Peirce, A Short Table of Integrals, Ginn, 1929), первый из которых имеется на русском языке (Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы). При переводе ссылки на справочник Пайерса сохранены только в тех немногих местах, где ссылки на справочник Двайта отсутствуют.

А. В. Гапонов.
М. А. Миллер.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Широкое распространение практической рационализированной системы единиц, а также возросшее значение высокочастотных колебаний заставило в корне пересмотреть первое издание книги. Во втором издании прежде всего всюду изменена система единиц.

К главам, посвященным электростатическим полям, добавлено еще 40 задач по трудности выше средней. Они охватывают главным образом примеры на такие граничные условия, которые не рассматривались в первом издании. Более подробное изложение вопросов, связанных с электромагнитными волнами, заставило переписать заново некоторые части пятой главы, касающиеся функций Бесселя, и привело к введению векторных поверхностных гармоник, что сильно упрощает ряд вычислений. Переписана также большая часть гл. XI о вихревых токах. Электромагнитным волнам посвящены три главы, из которых две совершенно новые. И в самом тексте и в 150 задачах к этим главам содержатся некоторые впервые публикуемые результаты и методы. Для приобретения навыка в решении задач на волновые поля по этой книге обучались две группы аспирантов. Многие задачи оказались чересчур трудными для аспирантов первого года обучения, но любая задача была решена, по крайней мере, хотя бы одним аспирантом старшего курса. Путь решения той или иной задачи либо непосредственно вытекает из содержания книги, либо требует некоторого почти очевидного его обобщения. Поскольку в задачах приводится ряд весьма полезных сведений, о них упоминается и в предметном указателе—это должно облегчить пользование книгой в качестве справок при решении задач. Во втором издании опущена гл. XV первого издания, так как приведение ее содержания в соответствие с современными воззрениями потребовало бы слишком много места.

Ни одна из новых тем второго издания не требует от читателя дополнительной математической подготовки по сравнению с предполагавшейся в первом издании. Опыт работы автора с первым изданием книги показал, что успешное решение электрических задач определяется в большей степени физической интуицией, чем математической. Поэтому студенты, специализировавшиеся при окончании в области математики, сильно уступают в этом отношении тем, кто кончал по физике или электротехнике.

375 студентов Калифорнийского технологического института внимательно изучили первое издание книги. Можно надеяться поэтому, что осталось незамеченным лишь незначительное число ошибок, неясностей или сомнительных утверждений.

Вильям Р. Смайт.

ИЮЛЬ 1950

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Средний специалист, окончивший высшее учебное заведение, даже если он достаточно близко знаком с современной теорией электромагнетизма, в большинстве случаев не в состоянии решать встречающиеся ему задачи, требующие некоторых отступлений от стандарта и некоторой разработки основных известных ему положений. Настоящая книга появилась в результате двенадцатилетней работы автора по обучению аспирантов первого курса—физиков, электротехников, геофизиков и математиков, которые должны были обладать в области приложений основных принципов электричества и магнетизма знаниями в объеме требований, необходимых для получения кандидатского звания. Книга может служить для справок о методах решения достаточно обширного класса задач, не решаемых путем простого применения формул из справочников. Предполагается, что читатель обладает математическими познаниями в размере обычных требований по курсу математической физики, читаемому в высших учебных заведениях, а именно, что он знаком с векторным анализом, дифференциальным и интегральным исчислениями и с элементарными дифференциальными уравнениями. Все математические вычисления, выходящие за пределы указанного курса, проводились таким образом, чтобы читатель, имеющий требуемую подготовку, мог проследить за ними. Несмотря на некоторые трудности, автору удалось избежать применения контурных интегралов на комплексной плоскости, однако он уверен, что при более глубоком изучении предмета нужно овладеть этим могучим математическим инструментом.

Как уже было упомянуто, эта книга написана скорее для физиков-экспериментаторов и инженеров, чем для теоретиков. Поэтому в нее включены лишь те разделы теории, которые имеют непосредственное применение, а изложение их сделано кратким и доступным читателю с указанной выше подготовкой.

В книге нет ни одной темы, представляющей лишь чисто исторический интерес. В самом тексте разобрано много задач—больше, чем это принято обычно. При их отборе принималась во внимание степень важности результата задачи в приложениях или то, насколько задача поясняет теорию, доказывает полезность тех или иных положений теории. Помимо этого, обширное собрание задач имеется в конце каждой главы. Они охватывают почти все положения теории, приведенные в тексте. Многие из этих задач взяты из Кэмбриджских экзаменационных вопросов и опубликованы в книге Джинса [J e a n s J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925]. Наиболее способные аспиранты решили все задачи, однако средний аспирант это сделать был не в состоянии. Читатель, занимающийся самостоятельно, может, очевидно, проверить себя на этих задачах. Многие важные результаты помещены, за недостатком места, не в тексте, а в задачах, поэтому они также перечислены в предметном указателе.

Порядок расположения материала и само изложение несколько отличаются от общепринятых. Прежде всего все рассуждения основываются непосредственно на макроскопических экспериментальных фактах, а не на представлениях о микроскопической структуре проводников и диэлектриков. Это вызвано двумя причинами: во-первых, хотя микроскопическая теория и выдержала основную проверку, а именно, дала (в пределах точности экспериментов) наблюдаемые макроскопические законы,—это еще не говорит за то, что она является единственной теорией, или за то, что верны и все другие выводы из нее; во-вторых, изложение наиболее удовлетворительной теории, опирающейся на квантовую механику, требует такой математической

техники, наличие которой не предполагается у читателя в начале изучения книги, но которой он должен обладать по прохождении двух третей ее материала. Поэтому изложение этой теории, краткое в силу необходимости, приводится лишь в последней главе. Второе отступление от общепринятого состоит в рассмотрении теории магнетизма на основе взаимодействия электрических токов и движущихся зарядов и в отказе пользоваться понятием одиночного магнитного полюса. Это логически неизбежно приводит к применению не скалярного магнитного потенциала, как обычно, а магнитного вектор-потенциала, широко (хотя и не исключительно) используемого во всей теории магнетизма и электромагнетизма. Для многих читателей может показаться удивительным, что это иногда значительно упрощает выкладки, особенно при вычислении коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции, а также при изложении теории вихревых токов и электромагнитного излучения.

Другие незначительные отклонения от обычных курсов заключаются в более широком использовании функций Бесселя, конформных преобразований, а также методов специальной теории относительности при нахождении, например, силы взаимодействия двух движущихся зарядов. Последнее позволяет, опираясь на надежное экспериментальное подтверждение, освободиться от необходимости делать те или иные гипотезы о форме и размерах электрических зарядов и отчетливо понимать пределы применимости обычных формул без привлечения этих гипотез.

Некоторые разделы, обычно включаемые в книги по электричеству и магнетизму, просто опущены. Так, совершенно не затрагиваются ни электролитическая проводимость, ни фотоэлектрические и термоэлектрические эффекты и т. д., хотя в общем и предполагаются у читателя элементарные познания в этих вопросах. Трактовка же их на том уровне, на котором написана остальная часть книги, потребовала бы знаний основ физической химии, термодинамики и квантовой теории. Также опущена теория электрических машин и приборов, включая и вакуумные лампы, так как представляется наиболее целесообразным излагать эти разделы в непосредственной связи с лабораторными курсами. За недостатком места мы не касались операторного метода Хевисайда и динамического метода анализа контуров.

Перед тем, как приступить к чтению книги, читатель должен ознакомиться со всеми употребляемыми системами электрических единиц и отдать предпочтение той или иной системе. Совершенно несущественно, какая система используется в действительности, если только об этом ясно указано. В каждом разделе курса автор выбирал ту систему единиц, с которой легче всего было работать. Так, в гл. I—V употреблялась электростатическая система CGSE, в гл. VII—XII—электромагнитная система CGSM, а в гл. XIII—XV—гауссова система. Во избежание недоразумений внизу каждой страницы указана употребляемая на ней система единиц. Кроме того, в приложении даны достаточно полные таблицы перевода величин из одной системы в другую, позволяющие результаты любых вычислений представлять в любых единицах. Чтобы увидеть, насколько употребление рационализированных единиц упрощает вычисления, были тщательно исследованы все занумерованные формулы предварительного литографического издания. При этом обнаружилось, что сложность 169 формул уменьшилась, 123—возросла, а 1 196 формул по сложности остались неизменными. Таким образом, существует очень мало данных в пользу рационализированных или нерационализированных единиц. Ответы задач с этой точки зрения не исследовались.

При взятии интегралов или производстве математических преобразований всюду практиковались ссылки (при помощи номера) на соответствующие

формулы у Пайерса [P e i r c e, A Short Table of Integrals, Ginn, 1929] или у Двайта [D w i g h t, Table of Integrals and Other Mathematical Data, Macmillan, 1934 (см. перевод: Д в а й т, Таблица интегралов и другие математические формулы, М.—Л., 1948)]. Поэтому желательно, чтобы читатель запасся хотя бы одной из этих книг. Библиография, помещенная в конце каждой главы, ни в коей мере не является полной, но включает в себя почти все те книги, которые, по мнению автора, содержат полезный дополнительный материал или поучительное изложение вопроса.

Автор принял все меры, какие только знал, чтобы исключить ошибки, однако он совершенно уверен, что они еще остались, поэтому он будет благодарен всякому, указавшему их.

Вильям Р. Смайт.

АВГУСТ 1939

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символы, напечатанные жирным шрифтом, применяются для обозначения векторов ($\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, ...) всюду, за исключением гл. X, где жирным шрифтом обозначены комплексные амплитуды ($\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\mathfrak{E}}$, ...) или сопряженные им величины ($\mathbf{I}^*$, $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^*$, ...). В последующих главах знаком $\breve{}$ отмечаются комплексные амплитуды ($\breve{I}$, $\breve{\mathscr{E}}$, ...) и комплексные векторы ($\breve{\mathbf{E}}$, $\breve{\mathbf{B}}$, $\breve{\Pi}$, ...), а знаком $\hat{}$ — комплексно-сопряженные амплитуды ($\hat{I}$, $\hat{\mathscr{E}}$, ...) и комплексно-сопряженные векторы ($\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\Pi}$, ...). Величины векторов и скаляры как зависящие, так и не зависящие от времени не отмечаются никак.

$\mathbf{A}$, A_φ, A_x и т. д.—вектор-потенциал.

A^0 —нормированный вектор-потенциал.

a_1, a_x и т. д.—квазивектор-потенциал.

$\mathbf{B}$, B_φ, B_x и т. д.—магнитная индукция.

B—реактивная проводимость.

B^0—нормированная или относительная реактивная проводимость, $B\check{Z}_h$.

C—емкость. Постоянная величина.

C^0—нормированная или относительная емкость.

c—скорость света. Длина.

c_{nn}—собственная емкость. В § 8 гл. IX—оператор.

c_{mn}—взаимная емкость. В § 8 гл. IX—оператор.

$\mathbf{D}$, D_φ, D_x и т. д.—электрическая индукция.

$\mathbf{ds}$—дифференциальный элемент длины вдоль s.

$\mathbf{dr}$—дифференциальное изменение $\mathbf{r}$.

$\mathbf{E}$, E, $\breve{\mathbf{E}}$, $\breve{E}$ и т. д.—напряженность электрического поля.

$E(k)$—полный эллиптический интеграл.

e—заряд электрона; основание натурального логарифма 2,71828.

$\boldsymbol{\mathfrak{E}}$, $\mathscr{E}$, $\breve{\boldsymbol{\mathfrak{E}}}$, $\breve{\mathscr{E}}$ и т. д.—электродвижущая сила.

$\mathscr{E}_e$—эффективное значение электродвижущей силы.

$\mathbf{F}$, F_x—сила.

G—активная проводимость, $\check{Y} = G + jB$.

g—ускорение силы тяжести.

$\mathbf{H}$, H, $\breve{\mathbf{H}}$, $\breve{H}$ и т. д.—напряженность магнитного поля.

$H_n^{(1)}$, $H_n^{(1)}(v)$, $H_n^{(2)}$, $H_n^{(2)}(v)$—функции Ханкеля.

h—постоянная Планка.

h_1, h_2, h_3—применяются в ортогональных криволинейных координатах. Элементы длины при этом равны $h_1\,du_1$, $h_2\,du_2$, $h_3\,du_3$.

$h_n^{(1)}$, $h_n^{(1)}(v)$, $h_n^{(2)}$, $h_n^{(2)}(v)$—сферические функции Ханкеля.

$\mathbf{I}$, I, $\check{I}$, $\hat{I}$ и т. д.—электрический ток.

I_e—эффективное значение силы тока.

i_e—эффективное значение плотности тока.

$\mathbf{i}$, $\check{\mathbf{i}}$, i, i_x и т. д.—плотность тока. Ток.

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$—единичные векторы по осям x, y, z.

J_n, $J_n(v)$—функции Бесселя.

$j=(-1)^{1/2}$.

j_n, $j_n(v)$—сферические функции Бесселя.

K—относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon/\varepsilon_0$.

$K(k)$—полный эллиптический интеграл.

K_m—относительная магнитная проницаемость μ/μ_0.

K_n, $K_n(v)$—модифицированные функции Бесселя.

k_n, $k_n(v)$—модифицированные сферические функции Бесселя.

k—постоянная Больтцмана.

L, L_{nn}, L_n—самоиндукция.

L_{mn}—взаимная индукция.

L^0—нормированная или относительная самоиндукция.

l, m, n—направляющие косинусы (с осями x, y, z).

$\mathbf{M}$, M—намагниченность.

M—взаимоиндукция.

$\mathfrak{m}_x$, $\mathbf{m}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$, $\hat{\mathbf{m}}$ и т. д.—момент диполя или петли.

$\mathbf{m}'$, $\mathfrak{m}'$—классический магнитный дипольный момент (гл. XII).

m—масса. Число (обычно целое).

N—поток электрической или магнитной индукции.

$\mathbf{n}$—единичный вектор в направлении нормали.

n—показатель преломления. Число.

n_n, $n_n(v)$—сферическая функция Бесселя.

$2n!!=2\cdot4\cdot6\ldots2n$.

$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\quad(2n+1)$.

$\mathbf{P}$—поляризация.

P, $\check{P}$—мощность.

$\bar{P}$—средняя мощность.

P_n^m, $P_n^m(\mu)$—присоединенная функция Лежандра.

$\mathbf{p}$, p—импульс. Количество движения.

p—число. $\omega\mu\gamma$. ω.

Q—электрический заряд. Добротность полого резонатора.

Q—квадрупольный момент.

Q_n^m, $Q_n^m(\mu)$—присоединенная функция Лежандра.

q—точечный или переменный заряд.

R, R_n, R_{nn}, R_{mn}—активное сопротивление.

R, $R(r)$—функция только r.

R_n, $R_n(v)$—решение уравнения Бесселя.

R_n^0 $R_n^0(v)$—решение модифицированного уравнения Бесселя.

$\mathbf{R}$, R—расстояние между двумя точками.

$\mathbf{r}$, r—расстояние от начала координат.

S—площадь поверхности.

S_c, S_0—поперечное сечение полости.

S, S_n, S_n^m—поверхностная гармоника.

S, S_n, S_{mn}, S_{nn}—потенциальный коэффициент.
s_{nn}—собственный потенциальный коэффициент.
s_{mn}—взаимный потенциальный коэффициент.
s—расстояние вдоль кривой. Число.
$\mathbf{T}$, T—механический момент.
T—абсолютная температура. Период.
t—время.
TE—поперечно-электрическое поле.
TM—поперечно-магнитное поле.
te—индекс для величин, относящихся к полям TE.
tm—индекс для величин, относящихся к полям TM.
U—функция потока, или потенциальная функция.
$[U]$—$\oint dU$ по кривой постоянного значения V
$\mathbf{u}$, u—скорость.
$u = \cos\theta$.
u_1, u_2, u_3—ортогональные криволинейные координаты.
V—потенциальная функция, или функция потока.
$[V]$—$\oint dV$ по кривой постоянного значения U.
$\mathbf{v}$—объем.
$\mathbf{v}$, v—скорость.
$\mathbf{W}$, W, $\check{\mathbf{W}}$, $\check{W}$—решения скалярного волнового уравнения.
W—энергия. $U + jV$
W_{te}—решения, описывающие волны TE.
W_{tm}—решения, описывающие волны TM.
X—реактивное сопротивление.
x, y, z—прямоугольные координаты.
Y_n, $Y_n(z)$—функции Бесселя.
Y, $\check{Y}$—полная проводимость, $G + jB$.
$\check{Y}^0$—нормированная или относительная полная проводимость, $\check{Y}\check{Z}_k$.
$\mathbf{Z}$, $\check{\mathbf{Z}}$—вектор Герца.
$\check{Z}$, $\mathbf{Z}$, Z, $\mathbf{Z}_{mn}$, $\mathbf{Z}_n$—полное сопротивление.
$\check{Z}_k$—характеристическое или волновое полное сопротивление.
$\check{Z}^0$—нормированное или относительное полное сопротивление, $\check{Z}/\check{Z}_k$.
Z, $Z(z)$—функция только z.
z—комплексная переменная, $x + jy$.
α, β, γ, δ, ε, θ, φ, χ, ψ—часто используются для обозначения углов.
β—отношение v/c. Отношение $(\mu - \mu_v)/(\mu + \mu_v)$.
β—волновое число для плоской волны, $\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$.
β'_{mn}—волновое число в волноводе, $(\beta^2 - \beta_{mn}^2)^{1/2}$.
β_{mn}—критическое волновое число.
β_{mnp}—собственное волновое число полого резонатора.
$\boldsymbol{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$—комплексная постоянная распространения.
γ—электрическая проводимость.
Δ, Δ_{rs}—детерминант. Малая часть чего-либо.
δ—толщина скин-слоя. Разность фаз.
δ—малая величина. Малая часть чего-либо.

δ_n^m—символ Кронекера, равный нулю при $m \neq n$, и единице при $m = n$.

ε—диэлектрическая проницаемость. Малая величина.

ε_v—диэлектрическая проницаемость вакуума.

ε, ε_n—фазовый угол.

Θ, $\Theta(\theta)$—функция только θ.

θ—полярный угол.

$\boldsymbol{\theta}$—единичный вектор в направлении θ.

θ, θ', θ''—углы падения, отражения и преломления.

$\varkappa$—магнитная восприимчивость, $(1-\beta^2)^{-1/2}$.

λ—длина волны.

λ_{mn}—критическая длина волны.

λ_g—длина волны в волноводе.

λ_{mnp}—резонансная длина волны в полом резонаторе.

μ—магнитная проницаемость, $\cos\theta$.

μ_v—магнитная проницаемость вакуума, $4\pi \cdot 10^{-7}$.

ν—частота в периодах в секунду.

ν_{mn}—критическая частота.

ν_{mnp}—резонансная частота полости.

Ξ, $\Xi(\xi)$—функция только ξ.

ξ, ζ, φ—сплюснутые сфероидальные координаты.

ξ, η, φ—вытянутые сфероидальные координаты.

$\boldsymbol{\Pi}$, $\check{\boldsymbol{\Pi}}$, Π—вектор Умова—Пойнтинга.

$\overline{\Pi}$—эффективное значение вектора Умова—Пойнтинга.

ρ—расстояние от осей z или θ. Плотность заряда.

$\boldsymbol{\rho}_1$—единичный вектор в направлении ρ.

σ—поверхностная плотность электрического заряда.

ς—площадь или удельное поверхностное сопротивление.

τ—удельное объемное сопротивление. Плотность. Время.

$\Phi(\varphi)$—функция только φ.

$\boldsymbol{\varphi}$—единичный вектор в направлении φ.

φ—азимутальный угол. Фазовый угол.

Ψ—скалярный потенциал.

Ω—магнитодвижущая сила. Телесный угол.

ω—частота в радианах в секунду.

$\boldsymbol{\nabla}$—векторный оператор, $\mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$.

$\boldsymbol{\nabla}_2$—двухмерный векторный оператор.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$—скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$—векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

∇^2—оператор Лапласа.

$[\mathbf{v}]$—запаздывающее значение $\mathbf{v}$.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

§ 1. Электризация. Проводники и изоляторы. Слово «электричество» происходит от греческого слова, означающего янтарь. Около 600-х годов до нашей эры Фалес Милетский, повидимому, первый открыл, что янтарь, если его потереть, притягивает к себе легкие тела. В настоящее время известно, что этим свойством в той или иной степени обладает большинство веществ. Если потереть куском шелка стеклянную палочку или металлическую палочку со стеклянной ручкой, то обнаружится, что они притягивают к себе маленькие кусочки бумаги. Поэтому их называют наэлектризованными. В случае металлической палочки состояние электризации может быть уничтожено прикосновением пальца. Далее, держа в руках куски различных веществ и дотрагиваясь ими до наэлектризованной металлической палочки, можно обнаружить, что металлы и влажные предметы уничтожают электризацию, а такие вещества, как стекло и шелк,—не уничтожают. Вещества, снимающие электризацию, называются проводниками, а вещества, не снимающие ее,—изоляторами. Существуют, однако, и такие вещества, которые снимают электризацию очень медленно и поэтому с одинаковым правом могут быть названы плохими проводниками или плохими изоляторами. Таким образом, нет определенной границы между этими двумя группами веществ.

§ 2. Положительное и отрицательное электричество. Потрем стеклянную палочку шелком и коснемся этой палочкой или этим шелком какого-нибудь легкого проводящего тела, например позолоченного шарика, подвешенного на шелковой нитке,—он окажется наэлектризованным. Два шарика притягиваются, если один из них наэлектризован стеклом, а другой шелком, и отталкиваются, если оба наэлектризованы стеклом или шелком. Отсюда следует, что существуют два рода электричества и что тела, одинаково наэлектризованные, отталкиваются, а противоположно наэлектризованные—притягиваются. Проводя опыты со многими веществами, мы приходим к выводу, что существуют только два рода электричества. Электричество на стеклянной палочке принято называть положительным, а на шелке—отрицательным.

§ 3а. Закон Кулона, единица заряда, диэлектрики. Далее оказывается, что сила, действующая между шариками, быстро уменьшается при удалении их друг от друга. Кулон при помощи крутильных весов исследовал эти силы и нашел, что сила взаимодействия двух наэлектризованных тел пропорциональна произведению их зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль линии, соединяющей эти тела. Этот закон известен под названием закона Кулона. Его формулировка содержит в себе определение количества электричества или электрического заряда: электростатической единицей заряда является такое количество электричества, которое отталкивает равное ему количество

электричества, находящееся в вакууме на расстоянии одного сантиметра, с силой в одну дину. Практической единицей электричества является кулон, равный $0{,}3 \cdot 10^{10}$ электростатических единиц.

Этот закон обратных квадратов остается справедливым и в однородных изотропных непроводящих средах, но там сила, действующая между одинаковыми зарядами, меньше по величине, и ее в единицах MKS можно записать в виде

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{r}_1, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F}$—сила, действующая на заряд q' кулонов со стороны заряда q, $\mathbf{r}$—вектор, направленный от q к q', r—его величина (в метрах), $\mathbf{r}_1$—единичный вектор вдоль $\mathbf{r}$, ε—диэлектрическая проницаемость, являющаяся постоянной характеристикой среды. *Для вакуума* эта величина (обозначим ее ε_v) численно равна $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *фарад/м*. Относительная диэлектрическая проницаемость K, равная отношению $\varepsilon/\varepsilon_v$, является величиной безразмерной и не зависящей от выбора системы единиц.

§ 3б. Пределы применимости закона Кулона. Точность измерений Кулона значительно превзойдена современными методами, и, как недавно было подтверждено, величина показателя у r в формуле (1.1) равна 2 с точностью до 10^{-9}. Однако нужно помнить, что закон Кулона можно применять с уверенностью лишь в пределах тех размеров, при которых он подтверждается. Закон строго применим только к заряженным телам, размеры которых значительно меньше расстояния между ними. Форма же и состав этих тел несущественны. На протяжении всей книги мы постараемся избежать построения какой бы то ни было макроскопической теории, основанной на предположении применимости закона Кулона для атомных расстояний.

§ 4. Электростатическая индукция. Электрические заряды в проводниках могут свободно перемещаться. Поэтому при поднесении электрического заряда к незаряженному проводнику заряды противоположного знака переместятся в нем ближе к поднесенному заряду, а одинакового знака—дальше от него, хотя в целом проводник останется, конечно, незаряженным. Так как по закону Кулона сила взаимодействия тем больше, чем меньше расстояние между зарядами, то в результате незаряженный проводник будет притягиваться к заряду. Появляющиеся при этом на проводнике заряды называются индуцированными. Если заряд, индуцированный на удаленных частях проводника, не снят (например, прикосновением руки), то при удалении индуцирующего заряда проводник возвращается в нейтральное состояние. Если же, оставляя индуцирующий заряд на месте, отделить друг от друга ближние и дальние части проводника, следя за тем, чтобы они оставались изолированными, то обнаружится, как и следовало ожидать, что обе части несут на себе заряды противоположного знака.

Принцип действия многих «электростатических машин» заключается в автоматическом повторении этой операции и накапливании разделенных зарядов.

Используя значительно более чувствительные методы, можно обнаружить, что заряд обладает небольшой притягивающей силой также и по отношению к незаряженным изоляторам[1]). Это показывает, что даже в изоляторах при-

[1]) Нетрудно видеть, что для обнаружения силы взаимодействия между электрическим зарядом и незаряженным изолятором нет необходимости в более чувствительных методах. При относительной диэлектрической проницаемости K, не слишком близкой к единице, эта сила того же порядка, что и сила взаимодействия заряда с металлом. См., в частности, задачу, приведенную в § 5 гл. IV. —*Прим. перев.*

сутствуют электрические заряды и что они не являются абсолютно неподвижными, а могут испытывать некоторые смещения. Мы не будем здесь обсуждать гипотез, относящихся к действительному поведению зарядов в проводниках и изоляторах. Теории этих явлений еще несовершенны, хотя и значительно продвинуты по сравнению с 1930 г.

§ 5. Элементарные электрические заряды. Как было обнаружено, электрический заряд не может быть бесконечно делимым. Наименьшим известным нам отрицательным зарядом обладают отрицательный электрон и мезон. Впервые этот заряд с большой точностью был определен Милликеном. Принятое в настоящее время его значение равно $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ кулонам. Наименьшим известным нам положительным зарядом обладают позитрон (или положительный электрон) мезон и протон. С очень высокой степенью точности все элементарные заряды равны по величине. Масса электрона, а также, повидимому, и позитрона равняется $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*. Масса протона приблизительно в 1850 раз больше массы электрона.

При рассмотрении электрических задач мы будем считать электрические заряды бесконечно делимыми и пользоваться понятием плотности заряда. Ясно, что это справедливо лишь в том случае, если приходится иметь дело с величинами зарядов, значительно превышающими $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ кулон. В пределах же атомных размеров, например, подобное рассмотрение, конечно, становится бесполезным. Как мы уже видели, электрические заряды могут свободно перемещаться в проводнике, и, поскольку они обладают инерцией, естественно ожидать, что при ускорении тела заряды будут отставать от него, создавая тем самым электрический ток, который можно обнаружить по магнитному полю. Этот эффект, оказавшийся очень незначительным, был предсказан еще Максвеллом, но обнаружен и измерен лишь вскоре после его смерти Толменом, Барнетом и другими. Результаты опытов показали, что подвижное электричество в проводнике—отрицательное и что отношение электрического заряда к его массе совпадает, в пределах погрешности эксперимента, с соответствующим отношением у электрона.

Почти все явления, с которыми нам придется иметь дело в этой книге, связаны с распределением или движением электронов, а положительные заряды проявляются лишь как недостаток электронов, хотя с математической точки зрения совершенно безразлично, осуществляется ли перенос электричества отрицательными зарядами или положительными или зарядами обоих знаков одновременно.

§ 6. Напряженность электрического поля. Если на бесконечно малый электрический заряд, помещенный в некоторую область пространства, действует сила, то говорят, что в этой области существует электрическое поле. Напряженность электрического поля в некоторой точке определяется вектором, равным силе, отнесенной к единице заряда и действующей на положительный заряд, расположенный в данной точке. Этот заряд должен быть достаточно мал, чтобы его присутствие не вызывало перераспределения других зарядов. Последнее ограничение необходимо из-за явления электростатической индукции.

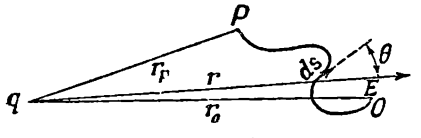
Подобно тому, как действие на тело нескольких механических сил может быть сведено к действию одной результирующей силы, являющейся их векторной суммой, результирующая напряженность электрического поля, созданного некоторым распределением зарядов, может быть получена как векторная сумма напряженности полей, созданных отдельными элементами этого распределения. Таким образом, напряженность электрического поля в точке P, созданного n зарядами, находящимися в бесконечной однородной

среде с диэлектрической проницаемостью ε, равна

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^3}\mathbf{r}_i, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{E}_P$ — напряженность электрического поля (в вольтах на метр), $\mathbf{r}_i$ — вектор, равный по модулю r_i и направленный из точки P к заряду q_i.

§ 7. Электростатический потенциал. При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Потенциалом (в вольтах) точки P электростатического поля называется работа (в джоулях на кулон) по перемещению заряда из точки нулевого потенциала в точку P. Выбор точки нулевого потенциала — дело удобства. Очень часто, хотя и не всегда, она выбирается на бесконечности. Величина заряда должна быть достаточно малой, чтобы не вызвать перераспределения электричества. Во избежание явлений неэлектростатического характера перемещать заряд нужно очень медленно.



Фиг. 1.

Вычислим потенциал поля точечного заряда q. Работа dV, необходимая для перемещения единичного заряда на расстояние $\mathbf{ds}$ в поле $\mathbf{E}$, равна $-\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}$ или $-E\,ds\cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{ds}$. В случае поля точечного заряда она равна

$$dV = -\frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\,ds,$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, направленный от заряда q к элементу пути $\mathbf{ds}$, и θ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{ds}$, как показано на фиг. 1. Очевидно, что $dr = ds\cos\theta$, поэтому для потенциала (в вольтах) имеем

$$\int_0^{V_P} dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{r_0}^{r_P}\frac{dr}{r^2} \quad \text{или} \quad V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_0}\right). \tag{1.3}$$

Если выбрать r_0 бесконечным, то

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_P}. \tag{1.4}$$

Электростатический потенциал является скалярной функцией точки и не зависит от пути, по которому заряд приносится в эту точку. Потенциал в любой точке электростатического поля может быть получен путем сложения потенциалов отдельных зарядов, создающих поле; таким образом,

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}, \tag{1.5}$$

где r_i — расстояние между P и q_i (в метрах).

Поскольку скалярная сумма значительно проще векторной, то ясно, почему при вычислениях предпочитают иметь дело с выражением (1.5), а не с (1.2). Напряженность поля в точке P можно найти из выражения (1.5)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V \tag{1.6}$$

В прямоугольных координатах компоненты напряженности поля равны

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{1.7}$$

Компоненты градиента в любой другой фиксированной координатной системе можно получить, если выразить V, x, y и z через координаты этой системы. Методы перехода от одной системы координат к другой приведены в § 4 и 5 гл. III.

Если расстояние между элементарными зарядами мало по сравнению со всеми остальными рассматриваемыми размерами (что обычно и имеет место на практике), то распределение зарядов можно считать непрерывным и можно говорить об их объемной плотности ρ (заряд на единицу объема) и о поверхностной плотности σ (заряд на единицу поверхности). Сумма (1.5) переходит в этом случае в интеграл

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dv}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma\, dS}{r}, \tag{1.8}$$

где dv — элемент объема, dS — элемент поверхности. Необходимо заметить, что эти формулы применимы только тогда, когда все окружающее пространство, а также находящиеся в нем материальные тела имеют диэлектрическую проницаемость ε. В противном случае нужно применять методы, развитые в гл. IV и V.

§ 8а. Электрические диполи и мультиполи. Сложим потенциалы поля, создаваемого зарядом $-q$, находящимся в точке x_0, y_0, z_0, и поля, создаваемого зарядом $+q$, находящимся в точке $x_0 + dx_0$, y_0, z_0. Тогда в некоторой точке P с координатами x, y, z результирующий потенциал будет равен V или

$$4\pi\varepsilon V = \frac{q}{r_{0P}} + \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{q}{r_{0P}}\right)dx_0 \quad \frac{q}{r_{0P}} = \frac{q\,dx_0}{r_{0P}^2}\frac{\partial r_{0P}}{\partial x_0} = \frac{q\,dx_0\,(x-x_0)}{r_{0P}^3} = \frac{q\,dx_0}{r_{0P}^2}\frac{\partial r_{0P}}{\partial x}$$

Если устремить $dx_0 \to 0$, а $q \to \infty$ так, чтобы их произведение $q\,dx_0$ оставалось конечным, то получится система, известная под названием электрического диполя. Мощность или момент этого диполя определяется векторной величиной $\mathbf{m} = q\,\mathbf{dx}_0$, направленной от отрицательного заряда к положительному. В полярных координатах потенциал в точке r, θ, созданный диполем, помещенным в начале координат, равен

$$V = \frac{\mathbf{m}\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{\mathbf{m}\ \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3}. \tag{1.9}$$

Очевидно, это выражение может быть обобщено, так что, если потенциал V_P в точке P, созданный системой n зарядов, дается выражением (1.5), где r_i — радиус-вектор из q_i в P, то потенциал V'_P, созданный системой n диполей, таких же по знаку и по величине и расположенных в тех же точках пространства с осями, параллельными оси x, будет равен

$$V'_P = -\frac{\partial V_P}{\partial x_P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(x_P - x_i)}{4\pi\varepsilon r_i^3} \tag{1.10}$$

Путем дифференцирования выражения для потенциала единичного электрического диполя, представленного в прямоугольных координатах, можно получить потенциал единичного квадруполя, размерность которого QL^2. Таким образом, выражения

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x\,\partial y} \text{ и т. д.}$$

представляют потенциалы линейного квадруполя (фиг. 2, *а*) и поверхностного квадруполя (фиг. 2, *б*). Дальнейшее дифференцирование приведет к по-

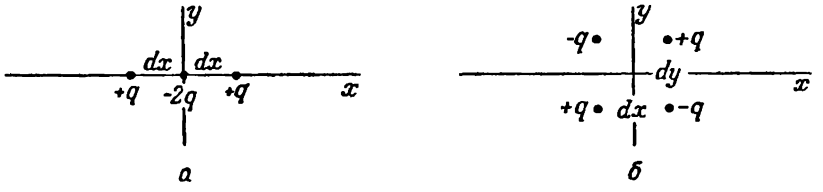
Библиотека профессора Саночкина Ю.В.

тенциалам более сложных мультипольных систем, суммарный заряд которых всегда равен нулю. Другие случаи будут рассмотрены в § 13.

Сила, действующая на диполь $\mathbf{m}$ в поле $\mathbf{E}$, равна векторной сумме сил, действующих на каждый из зарядов, образующих диполь. Так как заряды равны и противоположны, она сводится к векторной разности напряженностей полей $(\mathbf{ds}\cdot\nabla)\mathbf{E}$ на двух концах диполя, умноженной на q; таким образом,

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{ds}\cdot\nabla)\mathbf{E}=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{E}. \tag{1.11}$$

В однородном поле эта сила равна нулю.



Фиг. 2.

В однородном поле заряды находятся под действием сил $+q\mathbf{E}$ и $-q\mathbf{E}$, приложенных на расстоянии $ds\sin\theta$ (θ — угол между $\mathbf{ds}$ и $\mathbf{E}$). Поэтому на диполь действует механический момент

$$\mathbf{T}=\mathbf{t}\,Eq\,ds\sin\theta=\mathbf{t}\,\mathrm{m}E\sin\theta=\mathbf{m}\times\mathbf{E}, \tag{1.12}$$

где $\mathbf{t}$ — единичный вектор, нормальный к $\mathbf{m}$ и $\mathbf{E}$.

§ 8б. Взаимодействие диполей. Потенциальная энергия диполя в произвольном поле с потенциалом V равна суммарной работе, совершаемой при внесении в это поле каждого из зарядов в отдельности. Если потенциал поля в точке P_1, где расположен заряд $+q$, равен V_1, а в точке P_2, где расположен заряд $-q$, равен V_2, то

$$W=q(V_1-V_2)=q\overline{P_1P_2}\frac{\partial V}{\partial s}=\mathrm{m}\frac{\partial V}{\partial s}; \tag{1.13}$$

здесь m — дипольный момент, а s отсчитывается в направлении оси диполя. В векторных обозначениях это можно записать в виде

$$W=(\mathbf{m}\cdot\nabla)V \tag{1.14}$$

Пусть $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ — моменты двух диполей A и B, а $\mathbf{r}$ — вектор, направленный из A в B. Тогда потенциал в точке B, созданный диполем A, согласно (1.9), равен

$$4\pi\varepsilon V=\frac{\mathrm{m}_1\cos\theta}{r^2}=\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}}{r^3}=-\mathbf{m}_1\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.15}$$

Подстановка этого выражения для V в (1.14) дает

$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon W&=+\mathbf{m}_2\cdot\nabla(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}r^{-3})=\mathbf{m}_2\cdot(r^{-3}\nabla\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}+\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}\nabla r^{-3})=\\&=\mathbf{m}_2\cdot(\mathbf{m}_1r^{-3}-\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}3\mathbf{r}r^{-5})=\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2r^{-3}-3\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r}r^{-5}.\end{aligned}$$

Если $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ образуют с $\mathbf{r}$ углы θ и θ', а φ — угол между ними, то

$$W=\frac{\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2}{4\pi\varepsilon r^3}(\cos\varphi-3\cos\theta\cos\theta'). \tag{1.16}$$

Обозначим через ψ угол между плоскостями, содержащими $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ и пересекающимися вдоль $\mathbf{r}$; тогда, беря $\mathbf{r}$ в направлении x, а $\mathbf{m}_1$ — лежащим в

плоскости xy, для направляющих косинусов получим $l_1 = \cos\theta$, $l_2 = \cos\theta'$, $m_1 = \sin\theta$, $m_2 = \sin\theta'\cos\psi$, $n_1 = 0$. Таким образом,

$$\cos\varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\psi,$$

$$W = \frac{m_1 m_2}{4\pi\varepsilon r^3}(\sin\theta\sin\theta'\cos\psi - 2\cos\theta\cos\theta'). \tag{1.17}$$

Сила, действующая между двумя диполями, получается путем дифференцирования

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{3m_1 m_2}{4\pi\varepsilon r^4}(\sin\theta\sin\theta'\cos\psi - 2\cos\theta\cos\theta'). \tag{1.18}$$

Она имеет максимум при $\psi = 0$, $\theta = \theta' = 0$. Аналогично определяется момент, стремящийся повернуть диполь в направлении α,

$$T = -\frac{\partial W}{\partial\alpha}. \tag{1.19}$$

§ 9. Силовые линии. Одним из наиболее полезных способов наглядного представления электрического поля является изображение его при помощи «силовых линий» или «эквипотенциальных поверхностей». Силовая линия электрического поля — это такая направленная кривая, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению с напряженностью электрического поля в этой точке. Отсюда следует, что если $\mathbf{ds}$ — элемент дуги этой кривой, то

$$\mathbf{ds} = \lambda\mathbf{E}, \tag{1.20}$$

где λ — скалярный множитель. Выразив векторы через их компоненты в прямоугольной системе координат и исключив λ, мы получим дифференциальное уравнение силовых линий

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \tag{1.21}$$

Аналогичные уравнения можно написать и в других координатных системах, если воспользоваться результатами § 3 и 5 гл. III. Существуют более простые методы получения уравнений силовых линий, не требующие интегрирования этих уравнений. Однако один пример на их непосредственное интегрирование мы все же приведем здесь. Рассмотрим поле, созданное двумя зарядами: $+q$ в точке $x = a$ и $\pm q$ в точке $x = -a$. Поскольку в силу симметрии поле одинаково в любом сечении, содержащем ось x, то, в частности, за это сечение можно принять плоскость xy. Сумма x-составляющих напряженности электрических полей, созданных двумя этими зарядами в любой точке пространства, равна E_x, где

$$4\pi\varepsilon E_x = \frac{q(x-a)}{[y^2+(x-a)^2]^{3/2}} \pm \frac{q(x+a)}{[y^2+(x+a)^2]^{3/2}}.$$

Или, произведя замену

$$u = \frac{x+a}{y} \quad \text{и} \quad v = \frac{x-a}{y} \tag{1.22}$$

получим

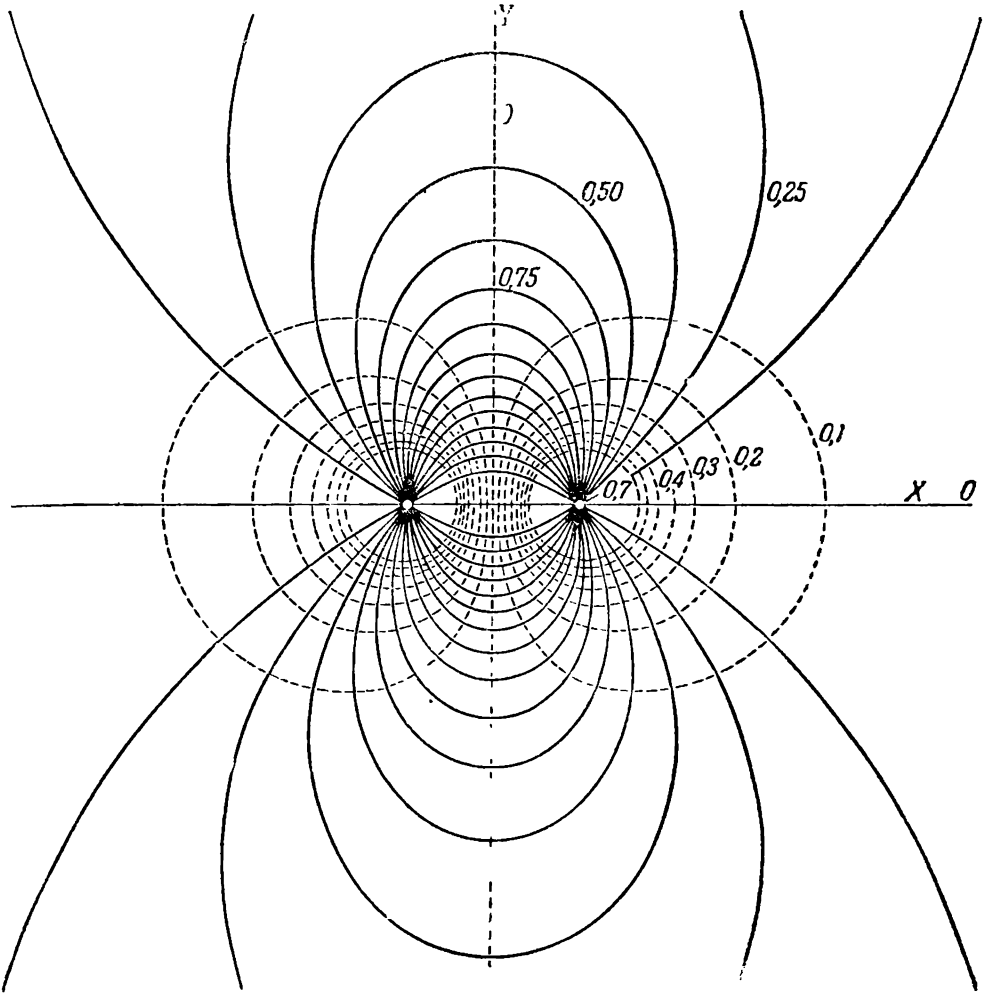
$$4\pi\varepsilon E_x = \frac{qv}{y^2(1+v^2)^{3/2}} \pm \frac{qu}{y^2(1+u^2)^{3/2}}$$

Аналогично

$$4\pi\varepsilon E_y = \frac{q}{y^2(1+v^2)^{3/2}} \pm \frac{q}{y^2(1+u^2)^{3/2}}.$$

Уравнение (1.21) примет вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x}=\frac{(1+v^2)^{3/2}\pm(1+u^2)^{3/2}}{u(1+v^2)^{3/2}\pm v(1+u^2)^{3/2}}.$$



Фиг. 3. Поле двух равных зарядов противоположного знака.
Силовые линии изображены сплошными кривыми, а эквипотенциальные линии—пунктирными

Решив (1.22) относительно y и x и взяв отношение их дифференциалов, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv-du}{udv-vdu}.$$

Сравнивая эти два выражения для dy/dx, мы видим, что

$$\frac{du}{dv}=\mp\left(\frac{1+u^2}{1+v^2}\right)^{3/2}$$

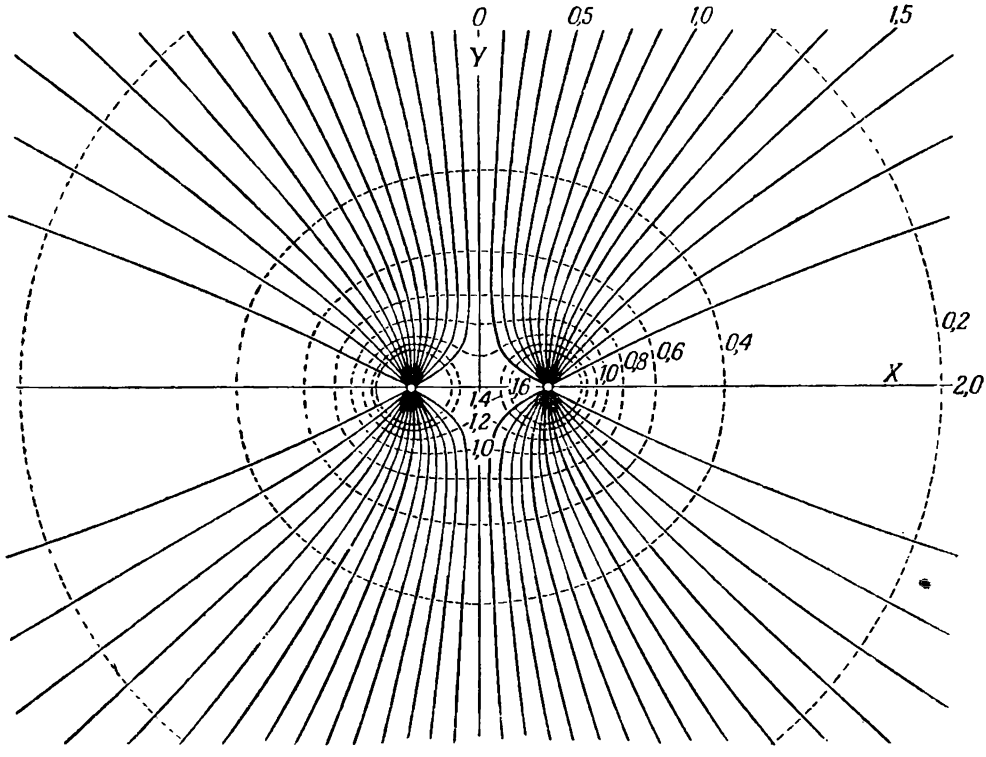
Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$u(1+u^2)^{-1/2}\pm v(1+v^2)^{-1/2}=C.$$

Или, возвращаясь к x и y,

$$(x+a)\,[(x+a)^2+y^2]^{-1/2} \pm (x-a)\,[(x-a)^2+y^2]^{-1/2} = C. \qquad (1.23)$$

На фиг. 3 и 4 показаны силовые линии, описываемые этим уравнением; на каждой из них указаны соответствующие значения величин C. Более простой метод получения этого уравнения при помощи теоремы Гаусса о потоке электрической индукции приводится в § 11б.



Фиг. 4. **Поле двух равных зарядов одного знака.**
Силовые линии изображены сплошными кривыми, а эквипотенциальные линии—пунктирными

Левую часть уравнения (1.23) можно переписать в виде

$$(x+a)\,r^{-1}\,(1+2axr^{-2}+a^2r^{-2})^{-1/2} - (x-a)\,r^{-1}\,(1-2axr^{-2}+a^2r^{-2})^{-1/2},$$

здесь $r^2 = x^2+y^2$. Если устремить $a \to 0$ и представить радикалы в виде рядов по степеням a (см. Двайт, 9.03), а затем пренебречь членами порядка a^2 и выше, то, введя новую постоянную C' вместо $C/(2a)$, мы получим уравнение

$$\frac{y^2}{r^3} = C' = \frac{\sin^2\theta}{r}, \qquad (1.24)$$

являющееся уравнением силовых линий электрического диполя, показанных на фиг. 5.

§ 10. Эквипотенциальные поверхности. Эквипотенциальной поверхностью называется такая поверхность в электрическом поле, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Следовательно, эквипотенциальная

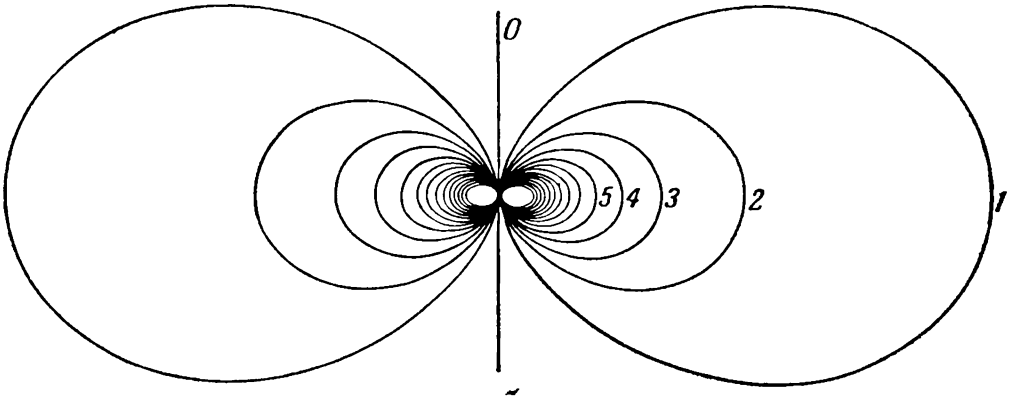
поверхность описывается уравнением

$$V = C, \tag{1.25}$$

где C — постоянная. В последующих главах будут приведены картины различных электрических полей с нанесенными на них эквипотенциальными и силовыми линиями. Заметим, что поскольку при движении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности не затрачивается никакой работы, силовые линии должны быть к ним ортогональны. В качестве примера использования уравнения (1.25) возьмем только что рассмотренный случай. Точки, потенциал которых равен C, определяются уравнением

$$q\,[(x-a)^2+y^2]^{-1/2} \mp q\,[(x+a)^2+y^2]^{-1/2} = 4\pi\varepsilon C. \tag{1.26}$$

Это уравнение эквипотенциальных поверхностей, сечение которых показано



Фиг. 5. Силовые линии электрического диполя.

на фиг. 3 и 4 при помощи пунктирных линий. Значения C даны для величины заряда $q = 4\pi\varepsilon$.

В электростатическом поле часто можно отыскать такие точки или линии, где эквипотенциальные поверхности имеют по крайней мере двойное пересечение и где, следовательно, ∇V становится равным нулю. Их называют нейтральными, равновесными или сингулярными (особыми) точками или линиями. Такой точкой является, например, начало координат на фиг. 4. В § 24е гл. V будут рассмотрены некоторые свойства этих точек.

§ 11а. Теорема Гаусса о потоке электрической индукции[1]. Мы будем доказывать эту теорему, исходя из закона обратных квадратов и предполагая, что все пространство заполнено однородным диэлектриком. Последнее предположение будет в дальнейшем снято.

Рассмотрим малый элемент dS замкнутой поверхности (фиг. 6), внешняя нормаль к которой образует угол α с радиус-вектором из точки P, в которой расположен точечный заряд q. Каждую точку границы элемента dS соединим прямой линией с точкой P, так чтобы образовался малый конус. Этот конус имеет сечение $d\sum$ со сферической поверхностью, проходящей через точку Q и имеющей центр в точке P; поэтому $d\sum = dS\cos\alpha$. Нормальная составляющая напряженности поля, созданного в точке Q зарядом q,

[1]) Определение вектора электрической индукции будет дано в § 14. В оригинале автор пользуется понятием электрического потока (electric flux).—*Прим. перев.*

находящимся в точке P, равна

$$E_n = \frac{q\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon r^2}$$

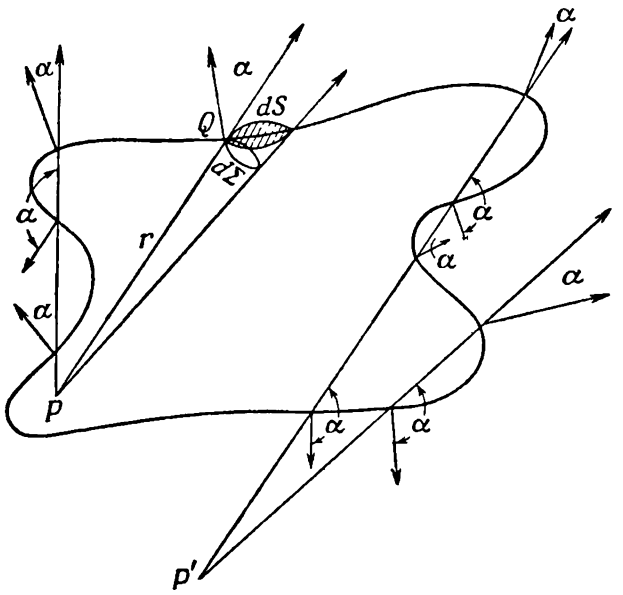
Нормальная компонента потока сквозь площадку dS определяется, как

$$dN = \varepsilon E_n dS = \frac{q\cos\alpha\, dS}{4\pi r^2} = \frac{q d\sum}{4\pi r^2}$$

Телесный угол, под которым видна площадка dS из точки P, равен $d\Omega = d\sum r^{-2}$, так что

$$4\pi dN = q d\Omega.$$

Если точка находится внутри замкнутой поверхности, то конус пересекает



Фиг. 6.

поверхность n раз, причем n — число нечетное; угол α оказывается $\frac{1}{2}(n+1)$ раз острым и $\frac{1}{2}(n-1)$ раз тупым, так что суммарная величина потока в конусе равна $(q/4\pi)\,d\Omega$. Если же точка находится вне поверхности, то n — число четное, и количество отрицательных и положительных значений $d\Omega$ одинаково; поэтому их суммарный вклад равен нулю. Чтобы получить полный поток сквозь поверхность, окружающую заряд, нужно проинтегрировать по ней нормальную компоненту E_n, что дает

$$4\pi \int_S dN = q \int_0^{4\pi} d\Omega \quad \text{или} \quad N = q.$$

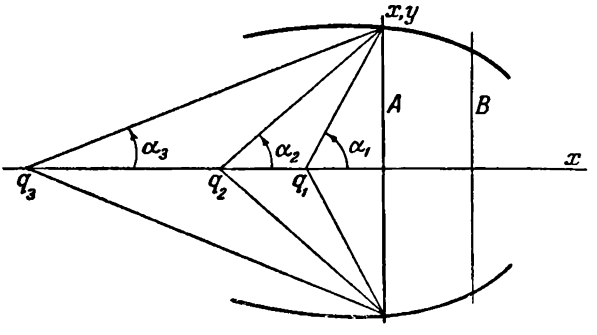
Добавляя сюда поток, обусловленный всеми зарядами, находящимися внутри S, мы получаем теорему Гаусса, гласящую, что если на произвольной замкнутой поверхности задана напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, то

$$\varepsilon \int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS = q, \tag{1.27}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности, а интегрирование производится по всей поверхности, охватывающей заряд q.

Если пространство вне рассматриваемой поверхности является неоднородным и содержит различные диэлектрические и проводящие тела, то необходимо ввести определенные предположения относительно электрических свойств веществ в электростатических полях. Поэтому при рассмотрении таких полей мы будем считать, что природа всех тел чисто электрическая и что они состоят из положительных и отрицательных зарядов, поля которых подчиняются закону обратных квадратов. Эта гипотеза позволяет объяснить электростатические явления в любом материальном теле путем сложения полей всех составляющих его зарядов. Следовательно, уравнение (1.27) остается в силе независимо от природы диэлектрических или проводящих веществ, находящихся вне рассматриваемой поверхности, так как оно учитывает поля, созданные внешними зарядами. Принятая нами гипотеза содержится в явном или неявном виде в большинстве курсов по электростатике.

§ 11б. Силовые линии системы коллинеарных зарядов. Для иллюстрации применения этой теоремы воспользуемся ею при нахождении уравнения силовых линий системы коллинеарных электрических зарядов q_1, q_2, q_3, расположенных в точках x_1, x_2, x_3, оси x. Из симметрии системы ясно, что ни одна силовая линия не может пересечь поверхность, образованную вращением вокруг оси x силовой линии, лежащей в плоскости xy. Применяя теорему Гаусса к объему, ограниченному этой поверхностью вращения и плоскостями $x = A$ и $x = B$ (фиг. 7), мы получим, что полный поток N, входящий через сечение A, равен полному потоку N, выходящему через сечение B, так как поток сквозь боковые стенки равен нулю. Для получения уравнения поверхности необходимо, таким образом, приравнять N постоянной величине. Как следует из (1.2), N равняется сумме потоков от каждого из зарядов в отдельности, поэтому, по только что доказанной теореме Гаусса, получаем



Фиг. 7

$$4\pi N = q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2 + q_3\Omega_3 + \ldots;$$

здесь Ω_1, Ω_2, Ω_3, — телесные углы, под которыми видно сечение из x_1, x_2, x_3, Переходя к углам α_1, α_2, α_3, (см. фиг. 7), получим

$$N = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} q_i (1 - \cos\alpha_i) = C' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \cos\alpha_i.$$

Объединив постоянные в левой части уравнения и выразив косинусы через координаты x, y плоскости xy, мы приходим к уравнению силовых линий

$$C = \sum_{i=1}^{n} q_i (x - x_i)[(x - x_i)^2 + y^2]^{-1/2}. \qquad (1.28)$$

Уравнение (1.23) является его частным случаем.

§ 11в. Силовые линии на бесконечности. Введем $\bar{r} = [(x-x)^2 + y^2]^{1/2}$ и будем пренебрегать значениями $[(\bar{x}-x_i)/\bar{r}]^n$ при $\bar{x}-x_i \ll \bar{r}$ и $n \geqslant 2$, тогда можно написать

$$C = \frac{x-\bar{x}}{\bar{r}} \sum_{i=1}^{n} q_i + \left[\frac{1}{\bar{x}} - \frac{(x-\bar{x})^2}{\bar{r}^3}\right] \sum_{i=1}^{n} q_i (\bar{x}-x_i) = \frac{x-\bar{x}}{\bar{r}} \sum_{i=1}^{n} q_i, \qquad (1.29)$$

где $\bar{x}$ — координата «центра тяжести» зарядов. Таким образом, поле на бесконечности совпадает с полем заряда, помещенного в центре тяжести зарядов и равного их алгебраической сумме. Это положение можно распространить и на неколлинеарные заряды. Действительно, разбивая произвольную систему зарядов на пары и применяя в каждой паре формулу (1.29), а затем группируя попарно центры тяжести предыдущих пар и т. д., мы придем в конце концов к центру тяжести всей системы.

§ 12. Максимумы и минимумы потенциала. Теорема Ирншоу. Рассмотрим маленькую сферическую поверхность, охватывающую точку P электрического поля. Среднее значение потенциала на этой поверхности равно

$$\bar{V} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S V\, dS = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} V \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Беря производную и применяя теорему Гаусса, получим

$$\frac{d\bar{V}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dr} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \frac{dV}{dr}\, dS = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2},$$

где q — заряд внутри сферы. После интегрирования приходим к результату

$$\bar{V} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + C.$$

В случае $q = 0$ среднее значение потенциала на малой сфере, охватывающей точку P, такое же, как и в точке P. Отсюда вытекает теорема о том, что потенциал не может иметь ни максимума, ни минимума в тех точках пространства, где отсутствуют электрические заряды. Из определения потенциала следует, что для устойчивого равновесия положительный заряд должен находиться в точке минимума потенциала, а отрицательный — в точке, где потенциал максимален; при этом потенциал самого заряда, очевидно, исключается из рассмотрения. Поскольку по доказанному выше в электростатическом поле нет ни максимумов, ни минимумов потенциала, то отсюда следует также теорема Ирншоу, утверждающая, что заряд в электрическом поле не может удерживаться в равновесии одними электрическими силами. Следовательно, если мы считаем природу вещества чисто электрической, т. е. все тела состоящими из положительных и отрицательных зарядов, между которыми действуют электрические силы, то эти силы взаимодействия должны быть отличны от электростатических.

§ 13. Потенциал двойного электрического слоя. В § 8а мы видели, что потенциал диполя можно получить из потенциала одиночного заряда путем дифференцирования в направлении оси диполя. Подобным же образом мы получаем, что если потенциал точки P, созданный элементом поверхности dS с плотностью заряда σ, равен

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon r}\, dS,$$

где r — расстояние от dS до P, то

$$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} dS \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

является потенциалом точки P, созданным диполем с моментом σdS, направленным вдоль n. Итак, потенциал двойного электрического слоя с моментом Φ (на единицу площади) равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \Phi \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS. \tag{1.30}$$

Но $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}r^{-3}dS = d\Omega$, где $d\Omega$ — телесный угол, под которым виден элемент поверхности dS из точки P (см. § 11а). Поэтому

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \Phi\, d\Omega. \tag{1.31}$$

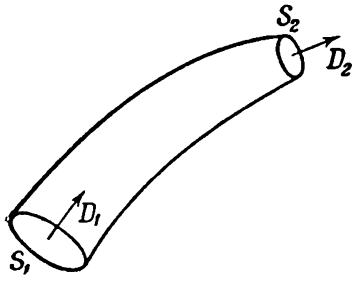
В случае двойного слоя с постоянным моментом Ψ это дает

$$V = \frac{\Psi\Omega}{4\pi\varepsilon}, \tag{1.32}$$

где Ω — полный телесный угол, под которым виден двойной слой из P.

§ 14. Вектор электрической индукции и силовые трубки. Очень часто приходится иметь дело с произведением диэлектрической проницаемости на напряженность электрического поля. В случае изотропных диэлектриков это произведение называют вектором электрической индукции $\mathbf{D}$ или вектором электрического смещения; таким образом,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{1.33}$$



Фиг. 8.

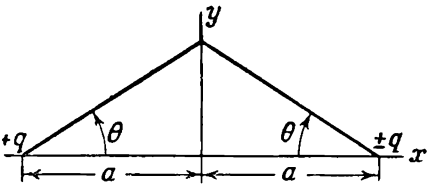
В системе единиц MKS индукция $\mathbf{D}$ измеряется в кулонах на квадратный метр, а напряжение электрического поля $\mathbf{E}$ — в вольтах на метр.

Линии электрической индукции аналогичны линиям напряженности электрического поля; в изотропных диэлектриках они совпадают по направлению, но в силу того, что ε больше ε_0, линии электрической индукции расположены плотнее. Взяв малый элемент площади, нормальный к линии индукции, и проведя линии индукции через все точки его границы, мы выделим в пространстве некоторую область, называемую силовой трубкой (см. фиг. 8). Применим теорему Гаусса о потоке вектора $\varepsilon\mathbf{E}$, т. е. о потоке электрической индукции, к свободному от зарядов пространству, ограниченному двумя нормальными сечениями такой силовой трубки. Поскольку интеграл по боковой поверхности равен нулю, поток, входящий в один конец трубки, равен потоку, выходящему из другого конца, так что если S_1 и S_2 — площади поперечных сечений, то поток в трубке равен

$$N = S_1 D_1 = S_2 D_2.$$

В последующих главах будет приведено много фигур, на которых показаны силовые трубки. Единичной силовой трубкой называется трубка, поток сквозь любое сечение которой равен единице. Сфера единичного радиуса, окружающая заряд q, имеет площадь 4π м^2, поэтому на ней $D = q/4\pi$. Следовательно, из заряда q выходит q единичных силовых трубок. Таким образом, заряд на конце единичной силовой трубки равен одному кулону.

§ 15. Натяжения в электрическом поле[1]. Понятие о силовых линиях и силовых трубках было введено нами лишь для более наглядного представления электрического поля. Возможно, однако, следуя Фарадею, пойти значительно дальше в развитии этих идей, а именно — рассматривать трубки как средство передачи электрических сил. Поскольку при решении ряда задач такая точка зрения может быть чрезвычайно полезной, посмотрим, какую систему натяжений надо постулировать для получения наблюдаемых электрических сил. Выясним, как должно зависеть натяжение вдоль силовой трубки от напряженности электрического поля для того, чтобы сила взаимодействия между двумя равными зарядами противоположного знака, расположенными на расстоянии $2a$ друг от друга, выражалась бы законом Кулона. Обозначим эту зависимость через $\Phi(E)$. Из формулы (1.2) напряженность поля в плоскости симметрии (см. фиг. 9) равна



Фиг. 9.

$$E = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon\,(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q\cos^3\theta}{2\pi\varepsilon a^2},$$

а кольцевой элемент площади

$$dS = \frac{2\pi a^2 \sin\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta.$$

Выписав силу Кулона в левой части, а натяжения в плоскости yz в правой части уравнения и разделив обе части на $2\pi a^2$, получим

$$\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon a^4} = \frac{1}{2\pi a^2}\int \Phi(E)\,dS = \int_0^{\pi/2} \Phi\left(\frac{q\cos^3\theta}{2\pi\varepsilon a^2}\right)\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^3\theta}. \qquad (1.34)$$

Положим $x = q/(2\pi\varepsilon a^2)$ и представим Φ в виде степенного ряда по E; тогда

$$\frac{\varepsilon x^2}{8} = \frac{1}{2\pi a^2}\int \sum_{n=0} C_n E^n dS = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \int_0^{\pi/2} \cos^{3(n-1)}\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Это равенство должно иметь место для любых значений q и a и, следовательно, для любых значений x. Поэтому все $C_n = 0$, за исключением $n = 2$. Сокращая на x^2, получаем

$$\frac{\varepsilon}{8} = C_2 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{C_2}{4}$$

Итак,

$$\Phi(E) = \frac{\varepsilon E^2}{2}. \qquad (1.35)$$

Это и есть то натяжение вдоль силовой линии, которое требуется для создания в соответствии с законом Кулона силы притяжения двух зарядов противоположного знака.

---

[1]) В английской литературе различаются два термина: stress — напряжение и tension — натяжение. Во избежание путаницы с напряжением электрического поля оба слова всюду переведены как натяжение. — *Прим. перев.*

Очевидно, что если бы в исследованном нами случае имели место только силы натяжения, действующие вдоль силовых трубок, то эти трубки стремились бы, по возможности, укоротиться и расположились бы в конце концов вдоль линии, соединяющей заряды. Однако мы знаем, что при равновесии силовые линии заполняют все пространство вокруг зарядов, следовательно, между ними должны существовать некоторые силы отталкивания, препятствующие их стягиванию. Для определения этого давления $\Psi(E)$ рассмотрим силу, действующую между двумя зарядами одного знака. Этот случай отличен от только что рассмотренного, потому что теперь силовые линии оканчиваются на бесконечности. Натяжение, приходящееся на единичную площадку сферы большого радиуса, убывает с расстоянием обратно пропорционально четвертой степени радиуса, как это ясно из выражения (1.35) и из закона обратных квадратов. Площадь поверхности сферы возрастает пропорционально квадрату радиуса, так что по этому направлению не передается никаких сил. Поэтому полную силу можно рассматривать как результат отталкивания силовых линий в плоскости симметрии. Из выражения (1.2) для напряженности поля в этой плоскости имеем

$$E=\frac{2qy}{4\pi\varepsilon\,(a^2+y^2)^{3/2}}=\frac{q\cos^2\theta\sin\theta}{2\pi\varepsilon a^2}. \tag{1.36}$$

Выполняя действия, аналогичные предыдущим, вместо выражения (1.34) получим

$$-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon a^4}=\frac{1}{2\pi a^2}\int\Psi(E)\,dS=\int_0^{\pi/2}\Psi\left(\frac{q\cos^2\theta\sin\theta}{2\pi\varepsilon a^2}\right)\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^3\theta}. \tag{1.37}$$

На том же основании, что и раньше, $\Psi(E)$ можно представить в виде C_2E^2 и тот же самый путь вычисления C_2 приводит к

$$-\frac{\varepsilon}{8}=C_2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{C_2}{4}.$$

Таким образом,

$$\Psi(E)=-\frac{\varepsilon E^2}{2}. \tag{1.38}$$

Эта величина представляет собой силу отталкивания (на единицу площади) между двумя соседними силовыми линиями, необходимую для получения закона Кулона в случае двух зарядов одинакового знака. Эти результаты можно записать в следующих эквивалентных друг другу формах:

$$\frac{\varepsilon E^2}{2}=\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon}. \tag{1.39}$$

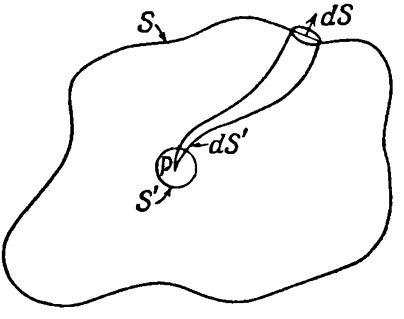
Так как Φ и Ψ являются функциями только ε и E, то они имеют одинаковый вид для любых полей независимо от их источников.

§ 16. Теорема Гаусса о потоке электрической индукции для неоднородных сред[1]. Теперь мы уже подготовлены для обобщения теоремы Гаусса о потоке электрической индукции на случай изотропной среды с ме-

[1]) Оставаясь в рамках макроскопической электродинамики, невозможно доказать теорему Гаусса о потоке электрической индукции для неоднородной среды, исходя только из закона Кулона. В частности, приведенный здесь вывод непоследователен, так как при применении теоремы Гаусса к силовой трубке с переменной диэлектрической проницаемостью ε автор уже предполагает, что для незаряженного диэлектрика $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$. Вывод теоремы Гаусса о потоке электрической индукции можно найти в книге И. Е. Тамма, Основы теории электричества, 1946.—*Прим. перев.*

няющейся от точки к точке диэлектрической проницаемостью. Предположим, что в такой среде, внутри замкнутой поверхности S, в точке P расположен точечный заряд q. Окружим точку P столь малой сферой S', чтобы внутри ее величину ε' можно было бы считать постоянной. Затем на поверхности S выделим элемент dS тоже настолько малый, чтобы величина ε на нем оставалась постоянной, и рассмотрим силовую трубку, имеющую своими сечениями элементы dS на S и dS' на S' и оканчивающуюся на заряде q. Применим теорему Гаусса к свободному от зарядов диэлектрику внутри трубки между dS и dS'. Так как нормальная составляющая $\mathbf{D}$ на стенках равна нулю, то единственный вклад в поверхностный интеграл дадут dS и dS', поэтому

$$\varepsilon' \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}' dS' = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$



Фиг. 10.

Интегрируя по двум поверхностям, мы имеем

$$\varepsilon' \int_{S'} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}'\, dS' = \int_{S} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

так как ε' одинакова для всех элементов dS'. Но в § 11а было доказано, что интеграл, стоящий в левой части, равен q, так что

$$\int_{S} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = q, \tag{1.40}$$

где и ε и $\mathbf{E}$ являются функциями координат. Это выражение, как и раньше, нетрудно обобщить на тот случай, когда q включает в себя все заряды внутри S.

Сложные поля могут быть суммой полей простых источников. Применение выражения (1.40) в таких случаях упрощается, если сначала вычислить потоки от отдельных источников, а затем просуммировать их:

$$\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{n}\, dS =$$

$$= \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}\, dS + \int \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}\, dS + \ldots + \int \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{1.41}$$

Иногда этого бывает достаточно для решения задачи.

§ 17. Граничные условия и натяжения на поверхности проводников. Если заряд находится на проводнике в статическом равновесии, то ни внутри проводника, ни вдоль его поверхности не существует никаких полей: в противном случае, поскольку по определению заряды в проводнике могут свободно перемещаться, возникло бы движение зарядов, что противоречило бы постулированному состоянию равновесия. Отсюда следует, что проводник целиком находится под одним потенциалом и что силовые линии подходят нормально к его поверхности и оканчиваются на ней.

Пусть σ – плотность поверхностного заряда (в кулонах на квадратный метр). На каждую единицу заряда приходится одна единичная силовая трубка, выходящая при положительном значении σ из поверхности. Поэтому

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \sigma. \tag{1.42}$$

Поскольку силовые линии выходят из проводящей поверхности нормально к ней, то они могут взаимно пересекаться только на бесконечно острых краях или остриях. Мы видели, что это происходит в математических точках

или ребрах. Ясно, что имеет место и обратное утверждение. На дне V-образного желобка или конической впадины $\mathbf{D}$ и σ равны нулю.

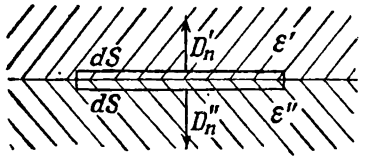
Из § 15 следует, что вдоль силовых линий существует натяжение, равное по величине

$$F = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}. \tag{1.43}$$

Очевидно, это есть сила, действующая на квадратный метр заряженной проводящей поверхности. Она направлена всегда в сторону внешней нормали, независимо от знака поверхностного заряда.

Следует заметить, что мы не рассматривали гидростатических сил, могущих присутствовать в диэлектрике благодаря его способности расширяться или сжиматься в электрических полях. Выражение учитывающее такие силы, будет получено позже в § 10 гл. II.

§ 18. Граничные условия и натяжения на поверхности диэлектрика. Применим теорему Гаусса о потоке электрической индукции к малому дискообразному объему, плоские поверхности которого имеют площадь dS и расположены с двух противоположных сторон границы раздела двух диэлектриков ε' и ε'' (фиг. 11). Этот диск настолько сплюснут, что площадь его боковой поверхности исчезающе мала по сравнению с площадью оснований. Если на поверхности границы раздела двух сред свободные заряды отсутствуют, то, обозначив нормальные компоненты электрической индукции через D'_n и D''_n, из § 16 найдем



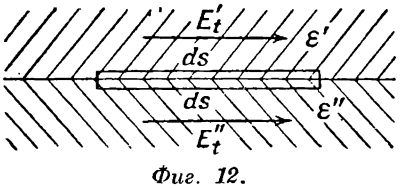
Фиг. 11.

$$D'_n dS = D''_n dS \quad \text{или} \quad D'_n = D''_n. \tag{1.44}$$

Натяжение на границе, созданное нормальными компонентами индукции, должно равняться разности натяжения по обе стороны от границы; поэтому, пользуясь выражением (1.39), получаем

$$T_n = \frac{D'^2_n}{2\varepsilon'} - \frac{D''^2_n}{2\varepsilon''} = -\frac{D'^2_n(\varepsilon' - \varepsilon'')}{2\varepsilon' \varepsilon''} = -\frac{D'^2_n}{2\varepsilon_v}\frac{K' - K''}{K' K''}. \tag{1.45}$$

Рассмотрим работу, совершаемую при перемещении единичного заряда вдоль пути, показанного на фиг. 12; участки этого пути, перпендикулярные к границе, предполагаются исчезающе малыми. Поскольку энергия сохраняется, то работа, совершаемая при перемещении единичного заряда вдоль этого пути, равна нулю, и, следовательно, $E'_t ds = E''_t ds$ или



Фиг. 12.

$$E'_t = E''_t. \tag{1.46}$$

Давление на границу равно разности давлений по обе стороны от нее; поэтому из выражения (1.38) имеем

$$P_n = \frac{1}{2}\varepsilon' E'^2_t - \frac{1}{2}\varepsilon'' E''^2_t = \frac{1}{2}E'^2_t(\varepsilon' - \varepsilon'') = \frac{1}{2}E'^2_t \varepsilon_v (K' - K''). \tag{1.47}$$

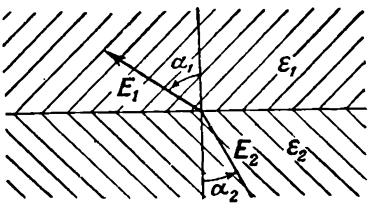
Таким образом, можно сформулировать следующее положение: на незаряженной границе раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора электрической индукции и тангенциальная составляющая напря-

женности электрического поля непрерывны. Эти граничные условия можно записать при помощи потенциалов

$$\varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial n} = \varepsilon'' \frac{\partial V''}{\partial n} \quad \text{или} \quad K' \frac{\partial V'}{\partial n} = K'' \frac{\partial V''}{\partial n}, \tag{1.48}$$

$$V' = V'', \tag{1.49}$$

где V' и V'' — потенциалы в средах ε' и ε''. Условие (1.49) означает, что нуль потенциала в обеих средах выбран так, чтобы в некоторой точке границы соблюдалось равенство $V' = V''$. Далее, путем интегрирования соотношения (1.46) убеждаемся в справедливости условия (1.49) для всех точек границы раздела.



Фиг. 13.

Пользуясь соотношениями (1.45) и (1.47), можно выразить нормальные натяжения, возникающие на границе раздела двух диэлектриков и направленные из ε' в ε'', в виде

$$F_n = T_n - P_n = -\frac{K' - K''}{2\varepsilon_0 K'}\left\{\frac{D_t'^2}{K'} + \frac{D_n'^2}{K''}\right\} = -\frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{2\varepsilon'}\left(\frac{D_t'^2}{\varepsilon'} + \frac{D_n'^2}{\varepsilon''}\right). \tag{1.50}$$

При выводе этой формулы не было принято во внимание, что некоторые диэлектрики обладают способностью сжиматься или расширяться в присутствии электрического поля. В таких средах на границу раздела будут действовать дополнительные силы гидростатического происхождения. Выражение, учитывающее эти силы, будет получено в § 10 гл. II.

На границе раздела двух изотропных диэлектриков силовые линии и линии электрической индукции преломляются одинаковым образом. В среде с ε_1 обозначим угол между $\mathbf{E}_1$ (или $\mathbf{D}_1$) и нормалью к границе через α_1, а соответствующий угол в среде ε_2 — через α_2 (фиг. 13). Тогда из соотношений (1.44) и (1.46) получим

$$D_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2,$$

$$D_1 \varepsilon_1^{-1} \sin\alpha_1 = E_1 \sin\alpha_1 = D_2 \varepsilon_2^{-1} \sin\alpha_2 = E_2 \sin\alpha_2.$$

Разделив первое уравнение на второе, найдем

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 = \varepsilon_2 \operatorname{ctg}\alpha_2. \tag{1.51}$$

Это и есть закон преломления векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ на границе раздела двух изотропных сред с различными диэлектрическими проницаемостями.

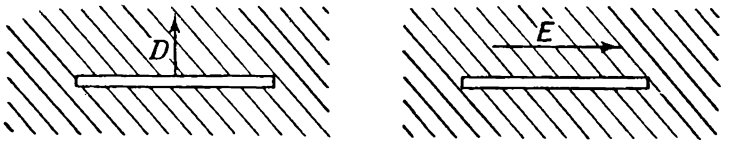
§ 19. Электрическая индукция и напряженность поля в твердых диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость была впервые введена нами при формулировке закона Кулона (1.1) в качестве множителя, характеризующего среду, в которой измеряются электрические силы. На первый взгляд трудно представить себе, каким образом могут быть выполнены эти гипотетические измерения в твердых диэлектриках. Однако, используя только что полученные граничные условия, можно предложить метод определения электрической индукции и напряженности поля, а следовательно, и диэлектрической проницаемости в таких средах.

Для определения электрической индукции и напряженности поля в твердом диэлектрике сделаем в нем маленькую безвоздушную дискообразную полость, толщина которой несоизмеримо мала по сравнению с радиусом. Напряженность поля внутри полости вдали от ее краев полностью

определяется граничными условиями на плоской границе раздела, как показано на фиг. 14, *а*.

Для определения индукции ориентируем полость так, чтобы напряженность поля внутри нее была нормальна к плоскости основания (см. фиг. 14, *а*). Из § 18 известно, что электрическая индукция в диэлектрике и в полости в этом случае одинаковы; поэтому, измеряя напряженность поля в полости и умножая ее на ε_0, можно найти электрическую индукцию в диэлектрике.

Для определения напряженности поля в твердом диэлектрике надо ориентировать длинную тонкую цилиндрическую полость так, чтобы вектор напряженности поля внутри нее был параллелен оси (см. фиг. 14, *б*). Но из равенства (1.46) следует, что напряженность поля внутри полости такая же, как и в твердом диэлектрике. Отношение индукции к напряжен-



Фиг. 14.

ности поля дает диэлектрическую проницаемость; при этом необходимо, чтобы размеры полости были значительно меньше размеров окружающего диэлектрика и чтобы внешнее поле оставалось постоянным.

Найденные таким путем величины электрической индукции и напряженности поля, конечно, не представляют собой истинных молекулярных полей внутри диэлектрика, а являются результатом их усреднения. Всякие другие значения средних величин будут находиться в противоречии с результатами макроскопических наблюдений.

§ 20. Кристаллические диэлектрики. Применим теперь экспериментальный метод § 19 к нахождению отношения электрической индукции **D** и напряженности поля **E** в однородном кристаллическом диэлектрике. От граней большого диэлектрического куба, плоскости которого перпендикулярны к осям x, y и z, отрежем три плоскопараллельные пластинки толщиной d. На поверхности этих пластинок нанесем проводящий слой и приложим к каждой из пластинок разность потенциалов V. Рассмотрим участки пластинок, достаточно далекие от краев. Граничные условия для потенциалов на всех таких участках для всех пластинок одинаковы, следовательно, одинаково и распределение потенциалов на центральных участках всех пластинок. Таким образом, эквипотенциальные поверхности вблизи центра пластинок параллельны проводящим плоскостям, и напряженность электрического поля **E**, согласно формуле (1.6), равна V/d. Проводя далее опыты с дискообразной полостью, размеры которой несоизмеримо малы по сравнению с d (во избежание нарушения распределения зарядов на проводящих поверхностях), находим, что **D** пропорционально **E**, но направления их различны. Поэтому для x, y и z пластинок соответственно имеем

$$\begin{array}{lll} (D_x)_x = \varepsilon_{11}E_x, & (D_y)_x = \varepsilon_{12}E_x, & (D_z)_x = \varepsilon_{13}E_x, \\ (D_x)_y = \varepsilon_{21}E_y, & (D_y)_y = \varepsilon_{22}E_y, & (D_z)_y = \varepsilon_{23}E_y, \\ (D_x)_z = \varepsilon_{31}E_z, & (D_y)_z = \varepsilon_{32}E_z, & (D_z)_z = \varepsilon_{33}E_z. \end{array} \qquad (1.52)$$

Даже если напряженность **E** одинакова во всех пластинках, нормальная составляющая **D**, вообще говоря, может быть различной. Однако, как пока-

зывает эксперимент, в любом случае имеет место

$$(D_x)_y E_x = (D_y)_x E_y, \quad (D_x)_z E_x = (D_z)_x E_z, \quad (D_y)_z E_y = (D_z)_y E_z. \tag{1.53}$$

Из выражения (1.52) следует

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{21} E_y + \varepsilon_{31} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{12} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{32} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{13} E_x + \varepsilon_{23} E_y + \varepsilon_{33} E_z. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Сравнивая соотношения (1.53) и (1.52), мы видим, что

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}. \tag{1.55}$$

Таким образом, если в изотропной среде величины D и E связаны простым множителем ε, то в кристаллах вместо него появляется величина, известная под названием симметричного тензора, имеющего девять компонент, шесть из которых различны между собой.

Посмотрим, нельзя ли так ориентировать оси, чтобы по возможности упростить вид соотношений (1.54). Произведение $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$, будучи величиной скалярной, не должно зависеть от выбора осей координат. Представляя его через значения компонент E и используя соотношения (1.54) и (1.55), имеем

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \varepsilon_{11} E_x^2 + \varepsilon_{22} E_y^2 + \varepsilon_{33} E_z^2 + 2\varepsilon_{12} E_x E_y + 2\varepsilon_{13} E_x E_z + 2\varepsilon_{23} E_y E_z. \tag{1.56}$$

Это уравнение поверхности второго порядка относительно E_x, E_y и E_z. Поворотом осей координат можно менять величины E_x, E_y, E_z, сохраняя постоянным $E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$. В частности, будем ориентировать оси так, чтобы исчезли все смешанные произведения $E_x E_y$, $E_x E_z$ и $E_y E_z$. Уравнение квадратичной формы относительно новых осей можно записать в виде

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_2 E_y^2 + \varepsilon_3 E_z^2, \tag{1.57}$$

а компоненты электрической индукции относительно этих осей будут соответственно равны

$$D_x = \varepsilon_1 E_x, \quad D_y = \varepsilon_2 E_y, \quad D_z = \varepsilon_3 E_z. \tag{1.58}$$

Направления координатных осей в соотношениях (1.58) совпадают с направлениями электрических осей кристалла. Если величины ε_1, ε_2 и ε_3 одинаковы, то среда изотропная. В случае равенства только двух величин кристалл называется одноосным. Если же все три величины различны, мы имеем дело с двухосным кристаллом.

ЗАДАЧИ [1])

1. Два тонких параллельных коаксиальных проводящих кольца одинакового радиуса a находятся на расстоянии b друг от друга. Работа, которую необходимо затратить при внесении точечного заряда q в центр каждого из колец, равна соответственно W_1 и W_2. Показать, что величины зарядов на кольцах равны

$$Q_{1,2}^* = \frac{4\pi\varepsilon a}{b^2 q}\,(a^2+b^2)^{1/2}\,[(a^2+b^2)^{1/2} W_{1,2} - a W_{2,1}].$$

2. Четыре одинаковых параллельных линейных заряда расположены вдоль ребер квадратной призмы, причем заряды, лежащие на концах одной диагонали, положи-

[1]) Здесь и в дальнейшем задачи, отмеченные звездочкой (*), заимствованы, как указывает автор, из экзаменационных вопросов Кэмбриджского университета в том виде, в каком они были приведены в книге Джинса (J. H. Jeans, The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925). При переводе этих задач мы пользовались современной терминологией и практической системой единиц (MKS). — *Прим. перев.*

тельные, а на концах другой — отрицательные. Найти часть полного потока индукции, входящую внутрь призмы.

3. Заряд q находится в точке $x=a$, $y=0$, $z=0$. Найти величину заряда, который нужно поместить в точку $x=-a$, $y=0$, $z=0$ для того, чтобы поток индукции, проходящий в положительном направлении сквозь круг $x=0$, $y^2+z^2=a^2$, был равен N.

4. Два тонких концентрических кольца лежат в одной плоскости. Радиусы колец равны 1 и 2, а заряды соответственно $-Q$ и $+(27)^{1/2}Q$. Показать, что единственные нейтральные точки (точки равновесия) в поле находятся в $x=0$ и $\pm 2^{-1/2}$.

5. Показать, что уравнение силовых линий двух параллельных линейных зарядов q и $-q$ (на единицу длины), расположенных в $x=a$ и $x=-a$, можно записать через поток индукции (на единицу длины) N между силовой линией и осью x в виде

$$\left[y-a\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi N}{q}\right)\right]^2+x^2=a^2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2\pi N}{q}\right).$$

6*. Заряды $+4q$, $-q$ находятся в точках A и B, точка же C является точкой равновесия. Доказать, что силовая линия, проходящая через точку C, пересекает линию AB в точке A под углом 60°, а в точке C под прямым углом. Найти угол в точке A между линией AB и той силовой линией, которая выходит из точки B под прямым углом к AB.

(Выписать выражение для потенциала в полярных координатах с центром в C для малой окрестности точки C.)

7*. Два положительных заряда q_1 и q_2 расположены соответственно в точках A и B. Показать, что касательная на бесконечности к той силовой линии, которая выходит из q_1 под углом α к BA, образует с линией BA угол

$$2\arcsin\left(q_1^{1/2}(q_1+q_2)^{-1/2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

и пересекает ее в точке C такой, что

$$AC:CB=q_2:q_1.$$

8*. В точках A и B находятся точечные заряды $+q$, $-q$. Силовая линия, выходящая из A под углом α к AB, пересекает плоскость, проходящую через середину отрезка AB, перпендикулярно к нему, под прямым углом в точке P. Показать, что

$$\sin\frac{\alpha}{2}=2^{1/2}\sin\frac{1}{2}\angle PAB.$$

9*. Показать, что на произвольной замкнутой поверхности S, не содержащей внутри себя заряженных тел, существует замкнутая линия, в каждой точке которой S пересекается под прямым углом с эквипотенциальной поверхностью, проходящей через эту точку.

10*. Заряды $3q$, $-q$, $-q$ расположены соответственно в точках A, B и C, причем B находится в середине AC. Нарисовать примерную картину силовых линий. Показать, что силовая линия, выходящая из точки A под углом α к AB, бо́льшим, чем $\arccos(-1/3)$, не может достигнуть ни точки B, ни точки C. Показать, что асимптота силовой линии, соответствующей углу $\alpha=\arccos(-2/3)$, перпендикулярна к AC.

11*. На прямой линии имеются три заряженные точки A, B, C причем $AC=f$, $BC=a^2/f$; заряды в этих точках равны соответственно q, $-qa/f$, $4\pi\varepsilon Va$. Показать, что в поле этих зарядов всегда существует сферическая эквипотенциальная поверхность. Найти положение точки равновесия на линии ABC в случае $4\pi\varepsilon V=q(f+a)/(f-a)^2$ и в случае $4\pi\varepsilon V=q(f-a)/(f+a)^2$.

12*. Сферические проводники A и C несут на себе заряды, равные соответственно $(q+q')$ и $-q$. Показать, что зависимости от относительных размеров и расположения сфер, а также от отношения q'/q существует либо точка, либо линия равновесия. Нарисовать для каждого случая картину силовых линий и сечений эквипотенциальных поверхностей плоскостью, проходящей через центры сферы.

13*. Заряженное тело расположено вблизи проводника, поверхность которого имеет непрерывную кривизну. Показать, что на любой силовой линии, проходящей от тела к проводнику, в точке, где сила минимальна, главные радиусы кривизны соответствующей эквипотенциальной поверхности равны по величине и противоположны по знаку.

14*. Если две заряженные концентрические проводящие сферы соединить проводом, то внутренняя сфера полностью разрядится. Доказать, что если бы сила взаимодействия зарядов была пропорциональна $r^{-(2+p)}$, то на внутреннем проводнике остался бы заряд B такой, что приближенно

$$2gB=-Ap[(f-g)\ln(f+g)-f\ln f+g\ln g],$$

где A — заряд на внешнем проводнике, а f и g — соответственно сумма и разность радиусов сфер.

15*. Три бесконечных параллельных провода, несущих заряды (на единицу длины) q, q, $-q'$, пересекают перпендикулярную к ним плоскость в точках A, B, C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Доказать, что крайняя силовая линия, идущая из A в C, образует с линией AC углы

$$(2q-5q')\,\pi\,(6q)^{-1} \quad \text{и} \quad (2q+q')\,\pi\,(6q)^{-1},$$

если только $q' \gtrless 2q$.

16*. Отрицательный точечный заряд $-q_2$ лежит на линии, соединяющей два положительных точечных заряда q_1 и q_3, на расстоянии α и β от каждого из этих зарядов соответственно. Показать, что если величины зарядов удовлетворяют соотношению

$$q_1\beta^{-1} = q_3\alpha^{-1} = q_2\lambda^3\,(\alpha+\beta)^{-1},$$

причем

$$1 < \lambda^2 < (\alpha+\beta)^2\,(\alpha-\beta)^{-2},$$

то в поле существует такая окружность, в каждой точке которой сила равна нулю. Найти (в общем виде) эквипотенциальную поверхность, на которой находится эта окружность.

17*. Электрические заряды q_1, $-q_2$, q_3 $(q_3 > q_1)$ расположены на одной прямой; отрицательный заряд — на середине отрезка между положительными. Показать, что если

$$(q_3^{1/3}-q_1^{1/3})^3 < 4q_2 < (q_3^{1/3}+q_1^{1/3})^3,$$

то число единичных силовых трубок, приходящих из q_1 в q_2, равно

$$\frac{1}{2}(q_1+q_2-q_3) + 3\,(2^{1/2}4)^{-1}\,(q_3^{2/3}-q_1^{2/3})\,(q_1^{2/3}-2^{1/3}q_2^{2/3}+q_3^{2/3})^{1/2}.$$

18*. Точка P находится на расстоянии 1 *см* от бесконечной плоскости, поверхностная плотность заряда которой равна σ. Показать, что половина полной напряженности поля $2\pi\sigma$ в точке P обусловлена зарядами, расположенными в пределах 2 *см* от точки P, а половина — всеми остальными.

19*. Эбонитовый (непроводящий) диск радиусом 10 *см* заряжен при помощи трения равномерно распределенным поверхностным зарядом. Найти напряженность электрического поля на оси диска на расстояниях 2, 6, 10, 14 *см* от его поверхности.

20. Два параллельных коаксиальных кольца радиусами a и b несут на себе равномерно распределенные заряды Q_1 и Q_2. Расстояние между плоскостями колец равно c. Показать, что между кольцами действует сила

$$F = \frac{ck^3Q_1Q_2}{16\pi^2\varepsilon\,(ab)^{3/2}}\left(\frac{E}{1-k^2}\right), \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{4ab}{c^2+(a+b)^2}$$

и E — полный эллиптический интеграл модуля k.

21. Показать, что на больших расстояниях поле кольцевого заряда $-Q$ радиуса b и концентрического, копланарного с ним другого кольцевого заряда Q радиуса c совпадает с полем линейного квадруполя, у которого крайние заряды $-Q$ отстоят от центрального $2Q$ на расстоянии a; при этом $b^2-c^2=4a^2$.

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абраам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, Berlin, 1927.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.

Poor V. C., Electricity and Magnetism, Wiley, 1931.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Thomson J. J., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1921.

Thomson W., Papers on Electrostatics and Magnetism, Macmillan, 1884.

Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

Глава II

КОНДЕНСАТОРЫ, ДИЭЛЕКТРИКИ, СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

§ 1. Теорема единственности. Прежде чем решать задачу о нахождении потенциалов в системе проводников с заданными зарядами или обратную задачу о нахождении зарядов по заданным потенциалам, полезно убедиться в том, что обе они имеют единственное правильное решение.

Предположим сначала, что двум различным распределениям поверхностной плотности заряда на проводниках σ и σ' соответствуют одинаковые потенциалы. Тогда потенциал точки P на поверхности одного из проводников, обусловленный разностной плотностью поверхностных зарядов $\sigma-\sigma'$ окажется, согласно формуле (1.8), равным

$$V_P=\int\limits_S \frac{\sigma-\sigma'}{4\pi\varepsilon r}\,dS=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_S \frac{\sigma}{r}\,dS-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_S \frac{\sigma'}{r}\,dS,$$

где r — расстояние от P до элемента поверхности dS и интегрирование производится по поверхности всех проводников. Так как стоящие в правой части интегралы по условию равны между собой, то $V_P=0$, т. е. все проводники имеют нулевой потенциал. Но это означает, что в такой системе вообще не существует электрического поля и $\sigma-\sigma'=0$. Следовательно, $\sigma=\sigma'$ и распределение одинаковое. Заданное распределение является, таким образом, единственным.

Предположим теперь, что одной и той же величине полного заряда Q на проводниках могут соответствовать различные плотности распределения σ и σ'. В этом случае при разностной плотности $\sigma-\sigma'$ полный заряд любого проводника будет равен нулю, а поэтому плотность заряда $\sigma-\sigma'$ может или равняться нулю всюду, или же на одной части поверхности проводника быть положительной, а на другой отрицательной. Последнее, однако, невозможно, потому что при этом силовые трубки, оканчивающиеся на отрицательно заряженных участках, должны были бы исходить из точек с более высоким потенциалом, а оканчивающиеся на положительно заряженных участках — из точек с более низким потенциалом. Это рассуждение применимо к любому находящемуся в поле проводнику. Поэтому ни один из проводников с поверхностной плотностью заряда $\sigma-\sigma'$ не может быть расположен в точке максимума или минимума потенциала. Следовательно, их потенциалы просто равны, что опять приводит к исчезновению поля и к равенству $\sigma=\sigma'$ Итак, если на каждом проводнике задан полный заряд, то соответствующее ему распределение плотности поверхностного заряда единственно.

§ 2. Емкость. Вследствие того, что электрические натяжения в среде зависят (§ 15 гл. I) от напряженности поля всюду одинаковым образом, равновесие системы не нарушается при изменении напряженности поля всюду в одно и то же число раз. Так, при удвоении поверхностной плот-

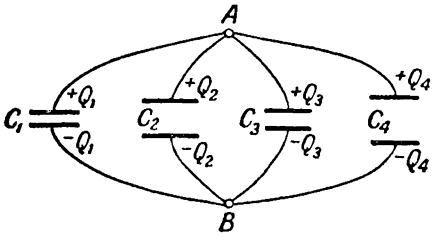
ности заряда в каждой точке системы заряженных проводников конфигурация поля остается неизменной, а напряженность увеличивается вдвое, и, следовательно, возрастает в два раза работа, совершаемая при перемещении малого заряда от одного проводника к другому. Это постоянное отношение заряда изолированного проводника к его потенциалу называется емкостным коэффициентом или емкостью, а обратное ему отношение называется потенциальным коэффициентом. Если в поле находятся другие проводники, то эти термины становятся неточными, за исключением того случая, когда все эти другие проводники заземлены и незаряжены. Пусть C — емкость (в фарадах), S — потенциальный коэффициент (в фарадах$^{-1}$), V — потенциал (в вольтах), а Q — заряд (в кулонах), тогда, по определению,

$$Q = CV, \quad V = SQ. \tag{2.1}$$

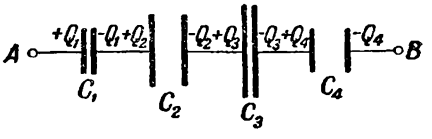
Два близко расположенных изолированных проводника образуют простейший конденсатор. Пусть они несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды, тогда емкость конденсатора есть отношение заряда на одном из проводников к разности потенциалов между ними. (Отношение берется всегда таким, чтобы емкость была положительной.) Таким образом, для конденсатора имеем

$$Q = C(V_1 \quad V_2), \quad V_1 - V_2 = SQ. \tag{2.2}$$

§ 3. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Возьмем n простых незаряженных конденсаторов; одну из пластин каждого из них подсоединим к клемме A, а другие соединим с клеммой B, как



Фиг. 15.



Фиг. 16.

это показано на фиг. 15. Приложим теперь между A и B разность потенциалов V, тогда

$$Q_1 = C_1V, \quad Q_2 = C_2V, \qquad Q_n = C_nV,$$

где C_1 C_2, ..., C_n — емкости конденсаторов, а Q_1, Q_2, Q_n — заряды на них. Полный заряд, очевидно, равен

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = V(C_1 + C_2 + \ldots + C_n).$$

Таким образом, эти конденсаторы (их принято называть соединенными параллельно) ведут себя подобно одиночному конденсатору, имеющему емкость

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь n простых незаряженных конденсаторов, соединенных так, как показано на фиг. 16; одна пластина конденсатора *1* подключена к A, а другая соединена с первой пластиной конденсатора *2*, вторая пластина конденсатора *2* соединена с первой пластиной конденсатора *3* и т. д. и наконец, вторая пластина n-го конденсатора подключена к B. Такое соединение конденсаторов называется последовательным. Прикладывая

разность потенциалов между A и B, имеем

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = S_1Q_1 + S_2Q_2 + \ldots + S_nQ_n.$$

Здесь V_i — разность потенциалов между пластинами i-го конденсатора. Поскольку любая пара соединенных проводников остается изолированной, ее суммарный заряд равен нулю. Но если все силовые трубки, выходящие из одной пластины конденсатора, сканчиваются на другой пластине того же конденсатора, то

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = Q$$

и величину Q, являющуюся общим множителем, можно вынести за скобки в правой части равенства. Таким образом, конденсаторы, соединенные последовательно, ведут себя подобно одному конденсатору, имеющему емкость C и потенциальный коэффициент S, соответственно равные

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \qquad S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n. \tag{2.4}$$

Полученная формула является приближенной, так как в общем случае нельзя ограничиться рассмотрением только полей подобного рода. Однако если пластины конденсатора расположены близко друг к другу и если диэлектрическая проницаемость между пластинами значительно превышает проницаемость окружающего пространства, то дополнительной «распределенной» емкостью, обусловленной полями рассеяния, можно пренебречь. Формула (2.4), в частности, теряет смысл в случае воздушного конденсатора с далеко разведенными пластинами.

§ 4. Сферический конденсатор. Рассмотрим две концентрические проводящие сферы: внутреннюю - радиуса a, несущую на себе заряд $+Q$, и внешнюю — радиуса b, несущую заряд $-Q$. Пространство между ними будем считать заполненным однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. В силу симметрии вектор электрической индукции должен быть направлен по радиусу, а его величина может зависеть только от r. Следовательно, применяя теорему Гаусса о потоке электрической индукции к концентрической сферической поверхности радиуса r ($b > r > a$), получим

$$\int_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = 4\pi r^2 \varepsilon E = Q,$$

откуда

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Поэтому разность потенциалов между сферами окажется равной

$$V_a - V_b = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{4\pi\varepsilon ab}Q,$$

что приводит к следующему значению для емкости сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}. \tag{2.5}$$

Устремляя $b \to \infty$, можно получить из формулы (2.5) емкость одиночной сферы радиуса a, помещенной в среду с диэлектрической проницаемостью ε:

$$C = 4\pi\varepsilon a. \tag{2.6}$$

Следует заметить, что при выводе формулы (2.5) предполагалось, что вне радиуса b нет никаких зарядов. Это было необходимо для того, чтобы сфера с $r=b$ была под нулевым потенциалом. В противном случае необходимо учитывать дополнительную емкость между внешней поверхностью сферы радиуса b и бесконечностью, вычисленную по формуле (2.6)[1]).

§ 5. Цилиндрический конденсатор. Рассмотрим теперь два круглых концентрических проводящих цилиндра бесконечной длины: внешний — радиуса b с зарядом $-Q$ (на единицу длины) и внутренний — радиуса a с зарядом $+Q$ (на единицу длины). Обозначим через ε диэлектрическую проницаемость однородной изотропной среды между цилиндрами. В силу симметрии вектор электрической индукции должен быть направлен по радиусу (в направлении внешней нормали) и лежать в плоскости, перпендикулярной к оси, причем величина его должна зависеть только от r. Применяя теорему Гаусса к объему, ограниченному концентрическим круглым цилиндром радиуса r, $b>r>a$, и двумя перпендикулярными к оси плоскостями, расположенными на расстоянии одного метра друг от друга, и учитывая, что последние не дадут никакого вклада в поверхностный интеграл, получим

$$\int_S \varepsilon \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS = 2\pi\varepsilon r E = Q,$$

откуда

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r}, \tag{2.7}$$

а разность потенциалов между цилиндрами равна

$$V_a - V_b = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a}{b}. \tag{2.8}$$

Таким образом, для емкости (на единицу длины) длинного цилиндрического конденсатора имеем

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \tag{2.9}$$

Если теперь устремить $b\to\infty$, то $C\to 0$. Следовательно, конечный заряд (на единицу длины) на круговом цилиндре конечного радиуса и бесконечной длины создает бесконечную разность потенциала между поверхностью этого цилиндра и бесконечностью. Так как в действительности мы имеем дело только с цилиндрами конечной длины, то эта трудность и не возникает; однако это свидетельствует о том, что результаты настоящего параграфа применимы лишь в тех случаях, когда расстояние до поверхности цилиндра мало по сравнению с расстоянием до его оснований.

§ 6. Плоский конденсатор. Пусть две бесконечные параллельные проводящие плоскости, несущие на себе заряды $+Q$ и $-Q$, расположены на расстоянии a друг от друга, а пространство между ними заполнено однородным изотропным диэлектриком. Тогда из соображений симметрии поле внутри должно быть однородным и нормальным к проводящим плоскостям.

[1]) В общем определении емкости (2.2) предполагается, что два проводника, из которых состоит конденсатор, имеют равные по величине и противоположные по знаку заряды. В противном случае введение емкости, вообще говоря, не имеет смысла, и следует пользоваться емкостными или потенциальными коэффициентами (см. § 16—18). Однако если один из проводников полностью охватывает другой, как это имеет место в случае сферического конденсатора, то емкость, определенная как отношение заряда на внутреннем проводнике к разности потенциалов между проводниками, не зависит, очевидно, от наличия зарядов во внешнем пространстве.—*Прим. перев.*

Обозначим через σ заряд, приходящийся на 1 $м^2$. Тогда, как следует из § 14 гл. I, с каждого квадратного метра проводящей поверхности должно выходить σ единичных силовых трубок. Таким образом, для электрической индукции и напряженности поля между плоскостями мы получаем

$$D = \varepsilon E = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} = \sigma,$$

а для разности потенциалов между плоскостями

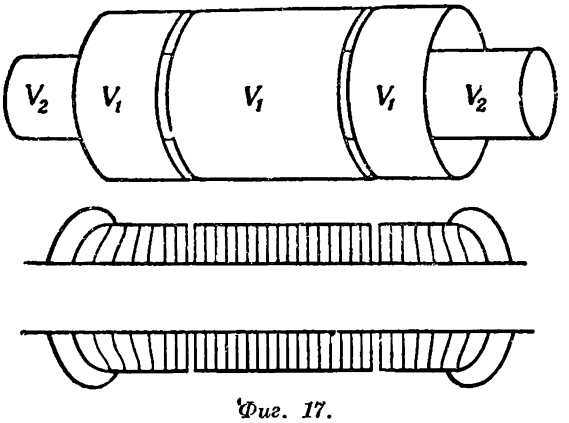
$$V_2 - V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^a dx = \frac{\sigma a}{\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Поэтому емкость (на единицу площади) равна ε/a, а емкость, соответствующая площади A,

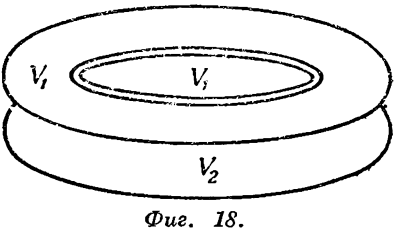
$$C = \frac{\varepsilon A}{a}. \tag{2.11}$$

На практике поле может быть однородно только вдали от краев конденсатора. Поэтому формула (2.11) представляет лишь приближение к действительности и тем лучшее, чем меньше a по сравнению со всеми размерами плоской поверхности и чем больше проницаемость диэлектрика между плоскостями по сравнению с проницаемостью внешнего пространства.

§ 7. **Защитные кольца.** При получении формулы (2.9) для емкости на единицу длины цилиндрического конденсатора, а также формулы (2.11) для емкости плоского конденсатора размеры проводников предполагались бесконечными. Чтобы эти формулы можно было бы применить к реальным конденсаторам, используется



Фиг. 17.



Фиг. 18.

приспособление, известное под названием защитного кольца. В цилиндрических конденсаторах, как показано на фиг. 17, крайние участки одной из пластин отделены от центральной части узким зазором, но поддерживаются под одним и тем же потенциалом. Искаженное поле вблизи краев, таким образом, не оказывает влияния на поле в центральной части, за исключением очень незначительного искажения вблизи зазора, поэтому отношение заряда центральной части конденсатора к разности потенциалов будет определяться формулой (2.8).

Аналогичное устройство применяется и в случае плоского конденсатора: в поверхности одной из пластин прорезается узкая щель, отделяющая, как показано на фиг. 18, центральную часть пластины от ее краев, причем по обе стороны от щели поддерживается один и тот же потенциал. Поле между центральными участками является однородным, если не учитывать незна-

чительного влияния узкой щели, поэтому отношение заряда на центральном участке к разности потенциалов можно определять по формуле (2.10).

§ 8. Энергия заряженного конденсатора. Взаимную энергию любой системы зарядов можно вычислить непосредственно из определения потенциала. Работа (в джоулях), требуемая для помещения j-го заряда на его место, согласно формуле (1.5), равна

$$W_j = q_j V_j = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{ij}}, \qquad \text{где } i \neq j.$$

Полная работа, необходимая для того, чтобы все заряды разместились по их местам, будет

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \qquad \text{где } i \neq j. \tag{2.12}$$

Введение множителя $^1/_2$ обусловлено тем, что при суммировании учитывается не только работа, совершаемая при помещении i-го заряда на его место в поле j-го заряда, но и работа, совершаемая при помещении j-го заряда на его место в поле i-го заряда, что, очевидно, есть одно и то же. Если через V_i обозначить потенциал в точке, где расположен i-й заряд, то, согласно формуле (1.5), выражение (2.12) можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i. \tag{2.13}$$

Когда все заряды расположены на одном и том же проводнике a, они находятся под одним потенциалом. Поэтому, обозначив их сумму через Q_a, получим

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{\text{по } a} q_i V_i = \frac{V_a}{2} \sum_{\text{по } a} q_i = \frac{1}{2} Q_a V_a. \tag{2.14}$$

Введя емкость проводника C и пользуясь соотношениями (2.1), мы придем к следующим эквивалентным друг другу выражениям для энергии заряженного проводника

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2. \tag{2.15}$$

В конденсаторе, пластины которого несут на себе заряды Q и $-Q$ и имеют потенциалы V_1 и V_2 соответственно, эта энергия равна

$$W = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2 = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2), \tag{2.16}$$

что можно, учитывая формулы (2.2), записать и в форме, аналогичной (2.15).

§ 9а. Энергия электрического поля. Выше было показано, что законы электростатики согласуются с наглядными представлениями о передаче электрических сил посредством натяжений, имеющихся всюду, где есть поле. Но где существуют натяжения, там должна быть запасена потенциальная энергия, плотность которой мы сейчас и вычислим. Для этого рассмотрим бесконечно малый дискообразный элемент объема с основаниями, совпадающими с эквипотенциальными поверхностями. В силу достаточной малости объема эти основания можно считать плоскими и параллельными друг другу, а поле между ними — однородным полем бесконечно малого плоского конденсатора. Пусть ds — толщина диска, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к его

поверхности ($\mathbf{E} = E\mathbf{n}$). Тогда разность потенциалов между основаниями будет равна $(\partial V/\partial s)\,ds = -E\,ds$, а заряд на основании, имеющем площадь dS, равен

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{E}\,dS.$$

Учитывая, что объем конденсатора $d\mathrm{v} = ds\,dS$, из формулы (2.15) для энергии получим

$$dW = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}\,d\mathrm{v}.$$

И для плотности энергии электрического поля окончательно имеем

$$\frac{dW}{d\mathrm{v}} = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}. \tag{2.17}$$

В изотропном диэлектрике $\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = DE$ и

$$\frac{dW}{d\mathrm{v}} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}. \tag{2.18}$$

В кристаллическом диэлектрике, согласно соотношению (1.56),

$$\frac{dW}{d\mathrm{v}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}E_1^2 + \varepsilon_{22}E_2^2 + \varepsilon_{33}E_3^2 + 2\varepsilon_{12}E_1E_2 + 2\varepsilon_{13}E_1E_3 + 2\varepsilon_{23}E_2E_3), \tag{2.19}$$

или, если оси координат совпадают с направлением электрических осей кристалла [см. выражение (1.57)],

$$\frac{dW}{d\mathrm{v}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1E_x^2 + \varepsilon_2E_y^2 + \varepsilon_3E_z^2). \tag{2.20}$$

§ 9б. Плоский конденсатор с кристаллическим диэлектриком. Вычислим емкость плоского конденсатора, приходящуюся на 1 $м^2$ площади пластин; в качестве диэлектрика в конденсаторе служит кристаллическая пластинка толщиной d. Диэлектрические проницаемости в направлении осей кристалла x, y и z обозначим соответственно через ε_1, ε_2 и ε_3, а направляющие косинусы углов, образуемых нормалью к пластинам конденсатора и этими осями, — через l, m и n. Так как с электрической точки зрения один участок конденсатора ничем не отличается от другого, то эквипотенциальные поверхности должны быть параллельны плоскостям конденсатора и располагаться на одинаковом расстоянии друг от друга, а напряженность электрического поля должна быть направлена вдоль нормали. Таким образом,

$$E = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} = \frac{V}{d},$$

где V — разность потенциалов, приложенная к конденсатору. Отсюда

$$X = \frac{lV}{d}, \quad Y = \frac{mV}{d}, \quad Z = \frac{nV}{d}. \tag{2.21}$$

Подставив эти выражения в формулу (2.20), умножив на d объем конденсатора, приходящийся на 1 $м^2$ поверхности пластины, и воспользовавшись соотношениями (2.15), находим

$$\frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{d}{2}\left[\varepsilon_1l^2\left(\frac{V}{d}\right)^2 + \varepsilon_2m^2\left(\frac{V}{d}\right)^2 + \varepsilon_3n^2\left(\frac{V}{d}\right)^2\right]$$

Откуда емкость, приходящаяся на 1 $м^2$ равна

$$C_1 = \frac{l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3}{d}. \tag{2.22}$$

§ 10. Натяжения в случае зависимости диэлектрической проницаемости от плотности среды. До сих пор при рассмотрении натяжений

в диэлектрике (§ 17 и 18 гл. I) мы не учитывали того, что диэлектрическая проницаемость может в действительности меняться при изменении плотности вещества τ, т. е. что в среде могут существовать еще и натяжения гидростатического происхождения, стремящиеся сжать или растянуть диэлектрик. Оперируя с элементом объема точно такой формы и ориентации, что и в § 9а, мы можем упростить наши исследования, сведя их к изучению маленького плоского конденсатора с зазором δ и площадью пластин ΔS. Комбинируя формулы (2.15) и (2.11) и предполагая, что диэлектрик изотропный (проницаемость равна ε), для энергии конденсатора будем иметь

$$\Delta W = \frac{\delta}{2\varepsilon\Delta S} Q^2 = \frac{m}{2\varepsilon\tau\Delta S} Q^2 = \frac{mD^2}{2\varepsilon\tau}\Delta S,$$

где через m обозначена масса диэлектрика, приходящаяся на единицу площади между пластинами конденсатора, так что $m = \tau\delta$. Если предположить, что масса m постоянна, а проницаемость ε является функцией плотности τ, то сила, действующая на площадь пластины конденсатора ΔS, определится следующим образом:

$$\Delta F = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\delta} = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\delta} = -\frac{D^2}{2\varepsilon^2}\frac{\partial(\varepsilon\tau)}{\partial\tau}\Delta S.$$

Итак, натяжение или сила, действующая на единицу площади и стремящаяся растянуть поверхность диэлектрика, равна

$$-\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{D^2}{2\varepsilon^2}\frac{\partial(\varepsilon\tau)}{\partial\tau}. \tag{2.23}$$

Произведя дифференцирование и сравнив с выражением (1.43), мы определим дополнительное гидростатическое натяжение

$$-\frac{D^2}{2\varepsilon^2}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -\frac{E^2}{2}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -\frac{\varepsilon_v E^2}{2}\tau\frac{\partial K}{\partial\tau}. \tag{2.24}$$

На границе между двумя диэлектриками наряду с теми натяжениями, которые уже были рассмотрены нами, необходимо учитывать разность гидростатических давлений, что вместо соотношения (1.50) даст нам следующее выражение для полного натяжения, направленного от K' к K'':

$$F_n = \frac{1}{2\varepsilon_v}\left[\frac{K'-K''}{K'}\left(\frac{D_t'^2}{K'}+\frac{D_n'^2}{K''}\right) - \frac{D'^2\tau'}{K'^2}\frac{\partial K'}{\partial\tau'} + \frac{D''^2\tau''}{K''^2}\frac{\partial K''}{\partial\tau''}\right]. \tag{2.25}$$

На границе диэлектрика с пустотой, положив $K''=1$ и $\partial K''/\partial\tau''=0$, получим

$$F_n = \frac{1}{2\varepsilon_v}\left[\frac{K'-1}{K'}\left(\frac{D_t'^2}{K'}+D_n'^2\right) - \frac{D'^2\tau'}{K'^2}\frac{\partial K'}{\partial\tau'}\right] =$$
$$= \frac{\varepsilon_v E'^2}{2}\left[(K'-1) - \tau'\frac{\partial K'}{\partial\tau'}\right] - \frac{\varepsilon_v E_n'^2}{2}(K'-1)^2, \tag{2.26}$$

где

$$E'^2 = E_t'^2 + E_n'^2 = \left(\frac{D_t'}{\varepsilon'}\right)^2 + \left(\frac{D_n'}{\varepsilon'}\right)^2$$

Знак $\partial K'/\partial\tau'$ может быть либо положительным, либо отрицательным; поэтому в тех случаях, когда этот член является преобладающим в выражении (2.26), диэлектрик под действием поля может сжиматься или растягиваться. Это явление известно под названием электрострикции, его наблюдал Квинке и другие.

§ 11. Электрострикция в жидких диэлектриках. Существует соотношение, известное под названием формулы Клазиуса — Мозотти, связывающее плотность жидкости с ее относительной диэлектрической

проницаемостью

$$\frac{K-1}{K+2}=C\tau, \tag{2.27}$$

где C — некоторая постоянная, характеризующая жидкость.

Хотя теоретический вывод этой формулы основан на некоторых неточных утверждениях, тем не менее во многих случаях она очень хорошо подтверждается экспериментально [1]). Дифференцируя ее, получим

$$\frac{\partial K}{\partial \tau}=\frac{(K+2)^2}{3}C=\frac{(K+2)(K-1)}{3\tau}.$$

Подставляя в соотношение (2.24), мы находим гидростатическое давление, стремящееся сжать жидкость

$$P=\frac{\varepsilon_v E^2}{2}\,\frac{(K+2)(K-1)}{3}. \tag{2.28}$$

(Заметим, что мы всюду жидкость считали почти несжимаемой, т. е. τ — почти постоянной.) Таким образом, при погружении, например, заряженной сферы в большой по объему жидкий диэлектрик давление, определяемое по формуле (2.28), будет меняться обратно пропорционально четвертой степени расстояния от центра сферы. В частности, если диэлектрик слегка сжимаем, то он будет иметь наибольшую плотность около поверхности сферы (конечно, без учета других явлений, таких, например, как гравитация).

§ 12. Силы, действующие на проводник в диэлектрике. При нахождении силы, действующей на заряженную границу раздела диэлектрика и проводника, предполагалось, что заряд расположен на диэлектрической стороне границы, поэтому все поле находилось внутри диэлектрика и сила (на единицу площади), без учета электрострикции, согласно формуле (1.43), равнялась $D^2/(2\varepsilon)$. Рассмотрение энергии заряженного конденсатора подтверждает правильность этого результата. Исследуем теперь силу при предположении, что заряд расположен на проводящей стороне границы. Если диэлектрическую проницаемость проводника обозначить через ε', то эта сила будет равна $D^2/(2\varepsilon')$. Но поверхность диэлектрика должна считаться теперь находящейся в электрическом поле, поэтому на ней существует натяжение, определяемое формулой (2.25), которое стремится сжать проводник. Пренебрегая электрострикцией и помня, что поле всюду направлено нормально к поверхности, мы получаем суммарную силу натяжения в виде

$$F_2=\frac{K-K'}{2\varepsilon_v KK'}D^2=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2\varepsilon\varepsilon'}D^2.$$

Тогда полная сила, действующая на проводник, будет равна

$$F=F_1-F_2=\frac{K-K+K'}{2\varepsilon_v KK'}D^2=\frac{D^2}{2\varepsilon}. \tag{2.29}$$

Итак, различные предположения относительно места нахождения заряда приводят к одним и тем же результатам.

Если относительная диэлектрическая проницаемость не претерпевает скачка, а непрерывно, хотя и быстро, меняется в некотором пограничном участке, то натяжения должны быть определены путем интегрирования. Полное результирующее натяжение получится таким же, как и раньше, однако распределение натяжения вблизи границы может быть, вообще говоря, различным.

---

[1]) Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, 1927, S. 518.

§ 13. Теорема взаимности Грина. Докажем, что если проводники при зарядах на них $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ имеют потенциалы $V_1, V_2, \ldots, V_n$, а при зарядах $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n$ — потенциалы $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$, то справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i V'_i = \sum_{i=1}^{n} Q'_i V_i. \tag{2.30}$$

Рассмотрим систему точечных зарядов и напишем для нее матрицу, состоящую из n^2 членов, каждый из которых представляет собой произведение величины одного точечного заряда на потенциал другого точечного заряда. Воспользовавшись формулой (1.5), запишем сумму каждого столбца в нижнем ряду, а сумму каждой горизонтальной строки — в крайнем правом столбце. Тогда

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & + \frac{q'_2 q_1}{4\pi\varepsilon r_{21}} & + \frac{q'_3 q_1}{4\pi\varepsilon r_{31}} & + \ldots & + \frac{q'_n q_1}{4\pi\varepsilon r_{n1}} & = q_1 V'_1, \\
\frac{q'_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} & + 0 & + \frac{q'_3 q_2}{4\pi\varepsilon r_{32}} & + \ldots & + \frac{q'_n q_2}{4\pi\varepsilon r_{n2}} & = q_2 V'_2, \\
\frac{q'_1 q_3}{4\pi\varepsilon r_{13}} & + \frac{q'_2 q_3}{4\pi\varepsilon r_{23}} & + 0 & + \ldots & + \frac{q'_n q_3}{4\pi\varepsilon r_{n2}} & = q_3 V'_3, \\
\cdot & & & & & \\
\frac{q'_1 q_n}{4\pi\varepsilon r_{1n}} & + \frac{q'_2 q_n}{4\pi\varepsilon r_{2n}} & + \frac{q'_3 q_n}{4\pi\varepsilon r_{3n}} & + \ldots & + 0 & = q_n V'_n, \\
\overline{q'_1 V_1} & \overline{q'_2 V_2} & \overline{q'_3 V_3} & & \overline{q'_n V_n} &
\end{array}$$

Так как порядок суммирования произволен, то, складывая все члены в нижнем ряду или складывая все члены в крайнем правом столбце, мы должны получить одинаковые результаты

$$\sum_{s=1}^{n} q'_s V_s = \sum_{s=1}^{n} q_s V'_s. \tag{2.31}$$

Следует заметить, что величина V_s является потенциалом, создаваемым в точке расположения заряда q_s всеми нештрихованными зарядами, за исключением самого q_s. Все заряды, расположенные на одном проводнике, должны быть умножены на один и тот же потенциал, что позволяет просуммировать эти заряды

$$\sum q'_i V = V \sum q'_i = Q' V,$$

откуда и следует формула (2.30). Рассмотрим один важный частный случай этой теоремы. Если в формуле (2.30) положить $Q'_1, Q'_3, \ldots, Q'_n = 0$, $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n = 0$, а $Q_1 = Q'_2$, то $V'_1 = V_2$. При помещении заряда Q на проводник B потенциал незаряженного проводника A меняется точно на такую же величину, на какую изменился бы потенциал незаряженного проводника B при помещении заряда Q на проводник A. Как будет доказано в § 8 гл. III, эта теорема остается в силе и при наличии границ раздела двух или нескольких диэлектриков с различными проницаемостями.

§ 14. Суперпозиция полей. Прибавим к обеим частям формулы (2.30) $\sum Q_i V_i$ или $\sum Q'_i V'_i$ и сравним результаты с первоначальным соотношением (2.30). Мы видим, что если заряды $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ создают потенциалы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и т. д., то заряды $Q_1 + Q'_1, Q_2 + Q'_2, \ldots, Q_n + Q'_n$ создают потенциалы $V_1 + V'_1, V_2 + V'_2, \ldots, V_n + V'_n$. Путем такого сложения уже

известных решений можно решить большое количество новых задач. Рассмотрим в качестве примера n концентрических проводящих сфер радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_n$ с зарядами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Пусть требуется найти потенциал какой-нибудь, скажем, s-й сферы. Для этого можно сложить потенциалы, создаваемые на s-й сфере каждой из сфер в отдельности,

$$4\pi\varepsilon V_s = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_s) r_s^{-1} + Q_{s+1} r_{s+1}^{-1} + \ldots + Q_n r_n^{-1}, \quad (2.32)$$

где учтено, что внутри заряженной проводящей сферы радиуса a потенциал равен $Q(4\pi\varepsilon a)^{-1}$, а снаружи он не зависит от a и равен $Q(4\pi\varepsilon r)^{-1}$ (r — расстояние до центра).

§ 15. Индуцированные заряды на заземленных проводниках. При помещении точечного заряда q в некоторую точку P, находящуюся вблизи системы заземленных проводников, на последних появляются индуцированные заряды. Величину заряда Q, индуцированного на одном из проводников, можно определить из формулы (2.30), если известен потенциал V'_P точки P в том случае, когда заряд в ней отсутствует, а потенциал этого проводника равен V' Действительно, из формулы (2.30) имеем

$$QV' + qV'_P + q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + \ldots = Q' \cdot 0 + 0 \cdot V_P + q'_1 \cdot 0 + q'_2 \cdot 0 + \ldots$$

откуда

$$Q = -\frac{V'_P}{V'} q. \quad (2.33)$$

Например, пусть единственным проводником в поле является проводящая сфера, а точка P находится на расстоянии r от ее центра. Тогда из формулы (2.6) находим $V' = q_1(4\pi\varepsilon a)^{-1}$ и $V'_P = q_1(4\pi\varepsilon r)^{-1}$, и величина заряда, индуцированного на сфере точечным зарядом q, расположенным в точке P, будет равна

$$Q = -\frac{aq}{r}. \quad (2.34)$$

Если теперь точка P находится между двумя проводниками, один из которых расположен внутри другого, и известен ее потенциал V'_P в том случае, когда потенциалы проводников равны V'_1 и V'_2, то при заземлении этих проводников заряды Q_1 и Q_2, индуцированные на них точечным зарядом q, помещенным в точку P, можно найти по формуле (2.30)

$$Q_1 V'_1 + Q_2 V'_2 + qV'_P = 0.$$

Но так как все силовые трубки, исходящие из q, должны кончаться на проводниках, между зарядами имеет место соотношение $Q_1 + Q_2 = -q$. Разрешая относительно Q_1 и Q_2, получим

$$Q_1 = \frac{V'_2 - V'_P}{V'_1 - V'_2} q \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{V'_1 - V'_P}{V'_2 - V'_1} q. \quad (2.35)$$

Так, например, если точка P находится между двумя заземленными сферами (см. § 4), заряды, индуцированные на внутреннем и внешнем проводниках, соответственно равны

$$Q_1 = -\frac{r_1(r_2 - r)}{r(r_2 - r_1)} q \quad \text{и} \quad Q_2 = -\frac{r_2(r - r_1)}{r(r_2 - r_1)} q. \quad (2.36)$$

Здесь r — расстояние от точки P до центра ($r_1 < r < r_2$).

Если же точка P находится между двумя заземленными цилиндрами (см. § 5), то заряды, индуцированные на внутреннем и внешнем проводниках, соответственно равны

$$Q_1 = -\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)} q \quad \text{и} \quad Q_2 = -\frac{\ln(r_1/r)}{\ln(r_1/r_2)} q. \quad (2.37)$$

И, наконец, если точка P находится между двумя заземленными плоскостями (см. § 6) на расстоянии a от одной и на расстоянии b от другой, то

$$Q_1 = -\frac{bq}{a+b} \quad \text{и} \quad Q_2 = -\frac{aq}{a+b}. \tag{2.38}$$

§ 16. Потенциальные коэффициенты. Рассмотрим n заряженных проводников, форма и расположение которых неизменны. Мы знаем, что заряд, помещенный на один из проводников, определенным образом изменяет потенциалы всех других проводников и что это изменение зависит только от геометрической конфигурации системы и от ее диэлектрической проницаемости. Отношение изменения потенциала V_r r-го проводника к заряду Q_s, помещенному на s-й проводник и вызвавшему это изменение, называется потенциальным коэффициентом s_{sr}. Из теоремы взаимности Грина (§ 13) следует, что $s_{sr} = s_{rs}$. Суперпозиция решений для зарядов Q_r, Q_s, Q_t и т. д., расположенных на проводниках r, s, t, дает

$$\begin{aligned} V_1 &= s_{11}Q_1 + s_{21}Q_2 + \ldots + s_{n1}Q_n, \\ V_2 &= s_{12}Q_1 + s_{22}Q_2 + \ldots + s_{n2}Q_n, \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ V_n &= s_{1n}Q_1 + s_{2n}Q_2 + \ldots + s_{nn}Q_n. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Таким образом, s_{sr} является потенциалом, приобретаемым r-м проводником при помещении единичного заряда на s-й проводник, если заряды на всех других проводниках при этом равны нулю. Помещение положительного заряда на проводник всегда повышает потенциал соседних изолированных проводников, поэтому коэффициент s_{rs} всегда положителен. Коэффициент s_{rr} называется собственным потенциальным коэффициентом.

§ 17. Собственная и взаимная емкости. Решив систему уравнений (2.39), мы получим выражение для зарядов на проводниках через их потенциалы. Эти решения будут иметь вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{21}V_2 + \ldots + c_{n1}V_n, \\ Q_2 &= c_{12}V_1 + c_{22}V_2 + \ldots + c_{n2}V_n, \\ &\cdot \\ Q_n &= c_{1n}V_1 + c_{2n}V_2 + \ldots + c_{nn}V_n, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} s_{22}s_{32} & \ldots & s_{n2} \\ s_{23}s_{33} & \ldots & s_{n3} \\ \\ s_{2n}s_{3n} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix}, \qquad c_{12} = c_{21} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} s_{21}s_{31} & & s_{n1} \\ s_{23}s_{33} & & s_{n3} \\ \\ s_{2n}s_{3n} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{11}s_{21} & & s_{n1} \\ s_{12}s_{22} & \ldots & s_{n2} \\ \\ s_{1n}s_{2n} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix}, \tag{2.41}$$

так что c_{rs} является минором s_{rs} в Δ, деленным на Δ.

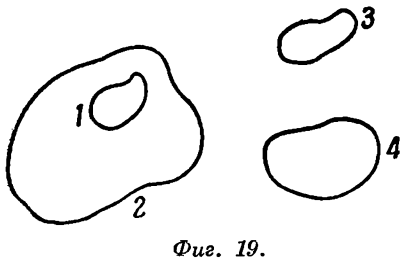
Величина c_{rr} называется собственным емкостным коэффициентом, или собственной емкостью, и определяется как отношение заряда к потенциалу на r-м проводнике при условии, что все другие проводники заземлены. Знаки потенциалов и зарядов всегда совпадают, поэтому коэффициент c_{rr} всегда положителен.

Величина c_{sr} называется емкостным коэффициентом, коэффициентом индукции, или взаимной емкостью, и определяется как отношение индуцированного заряда на r-м проводнике к потенциалу s-го проводника при условии, что все проводники, кроме s-го, заземлены. Знаки индуцирующего и индуцированного зарядов всегда противоположны, поэтому коэффициент c_{rs} либо отрицателен, либо равен нулю.

§ 18. **Электростатическая экранировка.** Предположим, что проводник *1* окружен, как это показано на фиг. 19, проводником *2*. Все силовые трубки, исходящие из проводника *1*, оканчиваются на проводнике *2*, поэтому если потенциал $V_2 = 0$, то заряд на проводнике *1* зависит только от его собственного потенциала. Это означает, что в уравнениях (2.40)

$$c_{31} = c_{41} = \ldots = c_{n1} = 0. \tag{2.42}$$

Таким образом, между проводником *1* и любым проводником вне *2* не существует никакого взаимодействия. Эти проводники, как говорят в таком случае, экранированы, т. е. защищены от проводника *1*. Заметим также, что поскольку $Q_2 = -Q_1$ и все проводники, кроме проводника *1*, заземлены, то $c_{11} = -c_{12}$.



Фиг. 19.

Ввиду полной однотипности уравнений (2.39) и (2.40) потенциальные коэффициенты можно выразить через емкостные простой заменой s на c в формулах (2.41). В интересующем нас случае экранирования проводника *1* проводником *2*, учитывая соотношение (2.42), получим

$$s_{1r} = s_{2r}, \qquad 1 < r. \tag{2.43}$$

Заменяя в первом уравнении (2.39) s_{1r} на s_{2r} и вычитая из него второе, находим

$$V_1 - V_2 = (s_{11} - s_{12}) Q_1.$$

Если $V_1 > V_2$, то силовые трубки идут от V_1 к V_2 и заряд Q_1 положителен, но тогда $s_{11} - s_{12} > 0$. Из соотношения (2.43) следует $s_{12} = s_{22}$, поэтому

$$s_{11} > s_{12} \quad \text{и} \quad s_{11} > s_{22}. \tag{2.44}$$

§ 19. **Потенциальные и емкостные коэффициенты в случае двух отдаленных проводников.** Пусть одиночный проводник *1* имеет емкость C_1, а другой одиночный проводник *2* — емкость C_2. Считая проводник *1* незаряженным, поднесем к нему проводник *2*, несущий на себе заряд Q_2, на некоторое расстояние r, значительно превосходящее линейные размеры (порядка a) каждого из проводников. При этом потенциал проводника *1* увеличится на величину $Q_2(4\pi\varepsilon r)^{-1}$ [если пренебречь незначительным (порядка $a/4\pi\varepsilon r^2$) изменением потенциала на участке, занимаемым самим проводником *1*]. Сопоставив это с первым уравнением (2.39), получим $s_{21} = (4\pi\varepsilon r)^{-1}$. На ближней части проводника *1* будет индуцироваться заряд, противоположный по знаку заряду Q_2 и равный по порядку величины $Q_2 a (4\pi\varepsilon r)^{-1}$. Такой же заряд, но только того же знака, что и Q_2, будет находиться на отдаленной части проводника *1*. На больших расстояниях r поле этих двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов, отстоящих друг от друга не дальше, чем на a ($a \ll r$), по существу является полем диполя, потенциал которого на проводнике *2* [см. формулу (1.9)] по крайней мере имеет порядок величины $Q_2 a^2 (4\pi\varepsilon r^3)^{-1}$. Следовательно, с точностью до членов

этого порядка присутствие незаряженного проводника *1* не оказывает влияния на величину потенциала проводника *2*, так что из второго уравнения (2.39) мы имеем $s_{22}=V_2Q_2^{-1}=C_2^{-1}$ и аналогично $s_{11}=C_1^{-1}$. Таким образом, в первом приближении

$$s_{11}=\frac{1}{C_1},\quad s_{12}=s_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon r},\quad s_{22}=\frac{1}{C_2}. \tag{2.45}$$

Решив детерминант (2.41) и опустив члены порядка r^{-3}, для собственных и взаимных емкостей будем иметь

$$c_{11}=\frac{16\pi^2\varepsilon^2r^2C_1}{16\pi^2\varepsilon^2r^2-C_1C_2},\quad c_{12}=c_{21}=-\frac{C_1C_2}{4\pi\varepsilon r},\quad c_{22}=\frac{16\pi^2\varepsilon^2r^2C_2}{16\pi^2\varepsilon^2r^2-C_1C_2} \tag{2.46}$$

§ 20. Энергия системы зарядов. Если известны напряженность поля и электрическая индукция во всех точках вокруг заряженных проводников, то энергию всей системы можно получить путем интегрирования выражения (2.17), а именно:

$$W=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dV, \tag{2.47}$$

где интегрирование распространяется на всю область вне проводников.

Часто, однако, известными являются не поля во всех точках, а заряды и потенциалы проводников, а также их собственные и взаимные емкости. Для нахождения энергии в этом случае предположим, что заряды $Q_1\alpha$, $Q_2\alpha$, ..., $Q_n\alpha$ доставляются на проводники бесконечно малыми порциями $Q_1\,d\alpha$, $Q_2\,d\alpha$, ..., $Q_n\,d\alpha$, начиная от того состояния, когда проводники не заряжены, т. е. $\alpha=0$, и кончая значением $\alpha=1$. При зарядах $Q_1\alpha$, $Q_2\alpha$, ..., $Q_n\alpha$ потенциалы проводников равны $V_1\alpha$, $V_2\alpha$, ..., $V_n\alpha$, поэтому работа, совершаемая при внесении очередной порции заряда, равна

$$dW=V_1Q_1\alpha\,d\alpha+V_2Q_2\alpha\,d\alpha+\ldots+V_nQ_n\alpha\,d\alpha.$$

А энергия системы в конечном состоянии будет

$$W=\sum_{i=1}^{n}V_iQ_i\int_0^1\alpha\,d\alpha=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}V_iQ_i. \tag{2.48}$$

Или, заменяя Q_i в соответствии с соотношением (2.40), имеем

$$W_V=\frac{1}{2}(c_{11}V_1^2+2c_{12}V_1V_2+c_{22}V_2^2+\ldots). \tag{2.49}$$

Аналогично, заменяя V_i в соответствии с соотношением (2,39), получим

$$W_Q=\frac{1}{2}(s_{11}Q_1^2+2s_{12}Q_iQ_2+s_{22}Q_2^2+\ldots). \tag{2.50}$$

§ 21. Силы и моменты сил, действующие на заряженные проводники. Если известны напряженность поля и электрическая индукция в каждой точке поверхности проводника, то суммарную результирующую силу, действующую на проводник в направлении единичного вектора $\mathbf{p}$, можно получить путем интегрирования выражения (2.29) по всей поверхности проводника, что дает

$$F_p=\int_S\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{2.51}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу поверхности dS.

Если известны заряды и потенциальные коэффициенты системы проводников, то ее потенциальная энергия определяется по формуле (2.50), где s_{11}, s_{12} и т. д. зависят от конфигурации системы. Точно так же, как и в меха-

нике, мы определим силу или момент, стремящиеся произвести изменения какого-либо параметра, характеризующего эту конфигурацию как производную потенциальной энергии по этому параметру, взятую со знаком минус:

$$-\frac{\partial W}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_{11}}{\partial \eta} Q_1^2 + 2\frac{\partial s_{12}}{\partial \eta} Q_1 Q_2 + \quad\right) \tag{2.52}$$

В зависимости от того, является ли η длиной или углом, это выражение определяет соответствующую компоненту силы или момента, стремящихся увеличить значения η. В рассматриваемом случае заряды остаются неизменными и изменение электрической энергии равно совершаемой механической работе. Если же пользоваться выражением (2.49), поддерживая при помощи батареи или каким-нибудь другим путем потенциалы постоянными, то энергия системы увеличится. Сила же в обоих случаях должна быть одинаковой, так как она зависит только от начального состояния системы, которое можно описать и при помощи зарядов, и при помощи потенциалов.

Чтобы выразить силу через потенциалы, объединим формулы (2.48)—(2.50) в следующее равенство:

$$\Psi = W_Q + W_V - \sum V_i Q_i = 0, \tag{2.53}$$

дифференцируя которое получим

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} dV_i + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_s} d\eta_s = 0. \tag{2.54}$$

Но из соотношений (2.53), (2.50) и (2.39)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} = \frac{\partial W_Q}{\partial Q_i} - V_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} Q_j - V_i = 0$$

и из соотношений (2.53), (2.49) и (2.40)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial V_i} = \frac{\partial W_V}{\partial V_i} - Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} V_j - Q_i = 0.$$

Подстановка в соотношение (2.54) дает

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_s} d\eta_s = 0.$$

Поскольку сумма равна нулю для совершенно произвольных значений $d\eta_s$, то каждый из членов этой суммы в отдельности должен равняться нулю. Поэтому, заменив Ψ через соответствующее выражение (2.53), получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_s} d\eta_s = \frac{\partial W_Q}{\partial \eta_s} d\eta_s + \frac{\partial W_V}{\partial \eta_s} d\eta_s = 0. \tag{2.55}$$

Но нам известно, что $-\partial W_Q/\partial \eta_s$ есть сила (или момент), стремящаяся увеличить η_s, так что она выразится через потенциалы следующим образом:

$$+\frac{\partial W_V}{\partial \eta_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_{11}}{\partial \eta_s} V_1^2 + 2\frac{\partial c_{12}}{\partial \eta_s} V_1 V_2 + \ldots\right) \tag{2.56}$$

Итак, при постоянных зарядах работа, совершаемая при малых перемещениях, дается выражением (2.52), а при постоянных потенциалах — выражением (2.56). Разность этих выражений составляет работу, совершаемую тем прибором, который поддерживает потенциал постоянным:

$$\left(\frac{\partial W_V}{\partial \eta_s} - \frac{\partial W_Q}{\partial \eta_s}\right) d\eta_s = 2\frac{\partial W_V}{\partial \eta_s} d\eta_s. \tag{2.57}$$

ЗАДАЧИ

1. Центры трех одинаковых сфер радиуса a расположены на одной прямой на расстояниях r_1 и r_2 друг от друга. Сначала только центральная сфера *2* имела заряд Q. Затем ее соединили со сферой *1*, а потом, отсоединив от сферы *1*, подсоединили к сфере *3*. Показать, что если расстояния между сферами значительно больше a, то заряд на сфере *3* равен

$$Q_3=\frac{Q}{4}\left[\frac{ar_2^2}{r_1(r_1+r_2)(r_2-a)}+1\right]$$

2. Четыре одинаковые незаряженные проводящие сферы расположены по углам квадрата. Заряд Q сообщается проводнику *1*, затем при помощи тонкой проволочки проводник *1* соединяется на мгновение по очереди с проводниками *2*, *3* и *4* (нумерация проводников циклическая). Показать, что в результате

$$Q_4=\frac{Q}{8}\frac{s_{11}-s_{24}}{s_{11}-s_{14}},\quad Q_1=\frac{Q}{8}\frac{s_{11}-2s_{14}+s_{24}}{s_{11}-s_{14}}$$

3. Пусть сферы *1* и *2* (см. предыдущую задачу) сначала несут на себе заряды, соответственно равные $+Q$ и $-Q$, и пусть, как и раньше, сфера *1* подключается на мгновение по очереди к сферам *3* и *4*. Показать, что если сторона квадрата r значительно больше радиуса сфер a, то сфера *4* окажется заряженной зарядом Q_4, приближенно равным

$$Q_4=\frac{2^{-5/2}Q\,[2^{1/2}r-(2^{5/2}-3)\,a]}{(r-a)}.$$

Найти также заряды Q_3 и Q_1.

4. Три одинаковые сферы расположены по углам равностороннего треугольника на очень большом расстоянии друг от друга. Сначала каждая сфера имела заряд Q. Затем по очереди сферы на мгновение заземлялись. Показать, что после этого заряд на сфере *3* стал равен

$$a^2r^{-2}Q\left(3-\frac{2a}{r}\right)$$

и найти также заряды на сферах *1* и *2*.

5. Четыре одинаковых проводника расположены по углам правильного тетраэдра, причем каждый из проводников совершенно симметричен по отношению к трем другим. Первоначально все они не были заряжены. Затем один из проводников приобрел заряд Q от батареи с напряжением V, которую от него тотчас же отключили. После этого его на мгновение по очереди подключали к каждому из трех проводников, а потом заземлили. На проводнике остался заряд $-Q_1$. Показать, что все взаимные емкости равны

$$56Q^2Q_1/[V(24Q_1+7Q)(8Q_1-7Q)],$$

кроме того, найти потенциальные коэффициенты.

6. Два проводника, являющиеся зеркальными изображениями друг друга, первоначально незаряжены. Сфера с зарядом Q сначала соединяется с некоторой точкой на одном из проводников, а затем с ее зеркальным отображением на другом. В каждом из этих случаев заряд поровну распределяется между сферой и проводником. Показать, что после большого числа таких попеременных подключений заряд равномерно распределяется между тремя проводниками.

7. Три одинаковых изолированных проводника расположены так, что любой из них совершенно симметричен относительно двух других. Проволочкой, подключенной к батарее, напряжение которой неизвестно, по очереди касаются каждого проводника. Заряды на первых двух оказываются после этого равными Q_1 и Q_2. Найти заряд на третьем.

8. Из трех концентрических проводящих сферических оболочек радиусов a, b и c внутренняя и внешняя заземлены, а средняя разрезана на две половины и заряжена. Найти, сколь велик должен быть радиус a ($a<b<c$), чтобы воспрепятствовать отделению друг от друга этих половин.

9. Три проводника соединены тонкой проволокой и заряжены. Определить, как распределяются между ними заряды, если известно, что

$$s_{11}=s_{33}\neq s_{22},\quad s_{12}=s_{23}\neq s_{13},\quad s_{11}+s_{13}=s_{12}+s_{22}.$$

10. Два концентрических сферических проводника, радиусы которых равны a и b, соединены проволокой. От внутреннего проводника отделяется точечный заряд q и движется радиально по направлению к внешнему с постоянной скоростью v. Показать, что скорость перемещения индуцированного заряда с внутренней сферы на внешнюю равна

$$\frac{dQ}{dt}=-qab(b-a)^{-1}v(a+vt)^{-2}.$$

11. Кольцо радиуса a, несущее на себе полный заряд Q, расположено внутри заземленной сферы радиуса b, так что ось кольца совпадает с диаметром сферы, а его плоскость отстоит от центра сферы на расстоянии c. Найти потенциал в центре.

12. Точечный заряд q, помещенный на оси тонкого заземленного проводящего кольца радиуса a на расстоянии b от его центра, индуцирует на кольце заряд $-Q$. Показать, что емкость кольца равна $4\pi\varepsilon Qq^{-1}(a^2+b^2)^{1/2}$.

13. Проводящая сфера радиуса a находится внутри концентрического с ней диэлектрического шара радиуса b, относительная диэлектрическая проницаемость которого равна K. Показать, что емкость проводящей сферы равна

$$4\pi\varepsilon_0 Kab\,(Ka+b-a)^{-1}.$$

14. Пусть (см. предыдущую задачу) проводящая сфера заземлена, а на расстоянии r от ее центра ($r > b > a$) находится точечный заряд q. Показать, что на сфере будет индуцирован заряд

$$-\frac{Kabq}{r\,[b+(K-1)\,a]}$$

15. Сферический конденсатор, радиус внутреннего проводника которого a, а внешнего b, заполнен двумя концентрическими сферическими слоями диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2. Радиус r их границы раздела равен $\frac{1}{2}(a+b)$. Найти отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, если известно, что точечный заряд, расположенный на этой границе, индуцирует одинаковые заряды на внутренней и внешней проводящих сферах, когда они обе заземлены.

16. Незаряженная проводящая сфера массы M плавает в диэлектрической жидкости с проницаемостью ε, погрузившись в нее на одну четверть своего объема. До какого потенциала нужно зарядить сферу, чтобы она плавала погруженной наполовину?

17*. Показать, что если алгебраическая сумма зарядов системы проводников положительна, то поверхностная плотность заряда, по крайней мере на одном из них, всюду положительна.

18*. Пусть имеется несколько изолированных проводников, положение которых задано и неизменно. Собственные емкости двух каких-нибудь проводников в этой системе равны C_1 и C_2, а взаимная емкость равна B. Доказать, что если эти проводники соединить тонкой проволокой, то емкость объединенного проводника будет равна

$$C_1+C_2+2B.$$

19*. В системе изолированных проводников заряженных произвольным образом, заряды переносятся с одного проводника на другой до тех пор, пока все проводники не окажутся под одним и тем же потенциалом V. Показать, что $V=E/(s_1+2s_2)$, где s_1 и s_2 — алгебраические суммы соответственно собственных и взаимных емкостей (коэффициентов индукции), а E — сумма всех зарядов.

20*. Доказать, что в результате операции, описанной в предыдущей задаче, электростатическая энергия системы уменьшается на величину, равную уменьшению энергии при понижении потенциала каждого проводника на V.

21*. Два одинаковых сферических конденсатора, радиусы внутренних и внешних проводников которых равны a и b, изолированы и находятся на большом расстоянии r друг от друга. Внутренним сферам сообщаются заряды e и e', а затем внешние сферы соединяются проволокой. Показать, что убыль энергии при этом приближенно будет равна

$$(16\pi\varepsilon)^{-1}(e-e')^2(b^{-1}-r^{-1}).$$

22*. Конденсатор образован двумя тонкими концентрическими оболочками радиусов a и b. Во внешней оболочке имеется небольшое отверстие, сквозь которое проходит изолированный провод, соединяющий внутреннюю сферу с третьим проводником, расположенным на большом расстоянии r от конденсатора и имеющим емкость c. Внешняя оболочка конденсатора подключена к земле, а суммарный заряд соединенных проводников равен E. Доказать, что сила, действующая на третий проводник, приближенно равна

$$ac^2E^2(4\pi\varepsilon r^3)^{-1}[4\pi\varepsilon ab\,(a-b)^{-1}+c]^{-2}.$$

23*. Замкнутая эквипотенциальная поверхность потенциала V_1 содержит внутри себя другую замкнутую поверхность потенциала V_0. Потенциал некоторой точки P, лежащей между этими поверхностями, равен V_P. Если в точку P поместить заряд E, а обе эквипотенциальные поверхности заменить проводящими сферами, соединенными с землей, то заряды E_1 и E_0, индуцированные на них, будут удовлетворять соотношению

$$E_1(V_0-V_P)^{-1}=E_0(V_P-V_1)^{-1}=E(V_1-V_0)^{-1}.$$

24*. Проводник заряжается от электрофора путем повторяющихся подсоединений к пластинке, которая после каждого подсоединения снова заряжается от электрофора до заряда E. Пусть e — заряд на проводнике после первой операции. Доказать, что конечный заряд равен

$$Ee\,(E-e)^{-1}.$$

25*. Четыре одинаковых незаряженных заземленных проводника расположены симметрично по углам правильного тетраэдра. При помощи подвижного заряженного сферического проводника касаются по очереди каждого из них, дотрагиваясь лишь до наиболее близко расположенных к центру тетраэдра точек. Показать, что получаемые при этом проводниками величины зарядов e_1, e_2, e_3, e_4 образуют геометрическую прогрессию.

26*. Заменив в задаче 25* тетраэдр на квадрат, доказать, что

$$(e_1-e_2)(e_1e_3-e_2^2)=e_1(e_2e_3-e_1e_4).$$

27*. Два неподвижных изолированных проводника несут на себе заряды E_1 и E_2 и имеют некоторые заданные значения потенциалов. Их потенциальные коэффициенты равны s_{11}, s_{12}, s_{22}. Если эти проводники окружить сферическим проводником, имеющим очень большой радиус R и центр вблизи них и находящимся под нулевым потенциалом, то для сохранения на проводниках тех же значений потенциалов их нужно зарядить зарядами E_1' и E_2'. Доказать, пренебрегая величиной R^{-2}, что

$$(E_1'-E_1)(E_2'-E_2)^{-1}=(s_{22}-s_{12})(s_{11}-s_{12})^{-1}.$$

28*. Показать, что геометрическое место точек, из которых единичный заряд индуцирует на некотором заземленном проводнике постоянный заряд, совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля этого проводника в отсутствие точечного заряда.

29*. Показать 1) что если изолированный проводник, находящийся в свободном пространстве и имеющий единичный потенциал, создает в какой-нибудь точке P потенциал (P), то единичный заряд, помещенный в точку P, будет индуцировать на этом проводнике (теперь заземленном) заряд $-(P)$; 2) что если (PQ) — потенциал, созданный в точке Q индуцированным зарядом, то (PQ) является симметричной функцией положения P и Q.

30*. Две маленькие заземленные сферы расположены рядом друг с другом между двумя большими параллельными пластинами, одна из которых заряжена, а другая соединена с землей. Представить графически характер возмущений, вносимых сферами в однородное поле в случае, когда линия их центров 1) перпендикулярна к пластинам, 2) параллельна пластинам.

31*. Полый проводник A находится под нулевым потенциалом и содержит внутри себя еще два других изолированных проводника B и C — один внутри другого. Проводник B положительно заряжен, а проводник C не заряжен. Проанализировать различные типы силовых линий, которые могут существовать внутри полости, классифицируя их согласно тому, на каком проводнике они начинаются и на каком оканчиваются. Доказать невозможность существования тех типов линий, которые хотя геометрически и допустимы, но почему-либо отвергаются. Доказать, что потенциалы проводников B и C положительны и что потенциал C меньше B.

32*. От проводника, емкость которого равна C, отделена некоторая часть P. На большом расстоянии от всех других проводников емкость этой отделенной части равна c. Сам проводник остается изолированным, а часть его P на большом расстоянии от него заряжается зарядом e, и ей предоставляется возможность свободно двигаться под действием сил взаимного притяжения вплоть до достижения проводника. Описать и объяснить изменения, которые произойдут в электрической энергии системы.

33*. Проводник, несущий на себе заряд Q_1, окружен проводящей оболочкой с зарядом Q_2. Внутренний проводник при помощи проволоки соединяется с очень далеким незаряженным проводником. Затем проволока отсоединяется от внутреннего проводника и присоединяется к внешней оболочке. Показать, что заряды Q_1' и Q_2' станут равными

$$Q_1'=\frac{mQ_1-nQ_2}{m+n+mn},\qquad Q_2'=\frac{(m+n)Q_2+mnQ_1'}{m+n},$$

где C, $C(1+m)$ — собственные емкостные коэффициенты близких проводников, а Cn — удаленного проводника.

34*. Показать, что если из общего числа $n+1$ проводников один проводник содержит внутри себя n других, то существует n соотношений между потенциальными или емкостными коэффициентами. Показать также, что если потенциал самого большого проводника равен V_0, а потенциалы остальных равны V_1, V_2, $\ldots$ V_n, то наиболее общее выражение для энергии будет равняться сумме $\frac{1}{2}CV_0^2$ и некоторой

квадратичной функции V_1-V_0, V_2-V_0, V_n-V_0, где C — постоянная, не зависящая от положения внутренних проводников.

35*. Внутренняя обкладка сферического конденсатора (радиусы a, b) несет на себе постоянный заряд E, а внешняя находится под нулевым потенциалом. Под действием внутренних сил внешний проводник сжимается от радиуса b до радиуса b_1. Доказать, что совершаемая электрическими силами работа равна

$$E^2(b-b_1)/(8\pi\varepsilon_v bb_1).$$

36*. Пусть (см. предыдущую задачу) потенциал V внутреннего проводника поддерживается постоянным, а заряд может меняться. Показать, что совершаемая работа равна

$$2\pi\varepsilon V^2a^2(b-b_1)/[(b_1-a)(b-a)].$$

Найти величину энергии, затраченной батареей.

37*. Пользуясь обычными обозначениями, доказать, что

$$(s_{11}+s_{23})>(s_{12}+s_{13}),\quad s_{11}s_{23}>s_{12}s_{13}.$$

38*. Показать, что если после внесения в систему проводников нового проводника потенциальные коэффициенты s_{rr}, s_{rs}, s_{ss} становятся равными s'_{rr}, s'_{rs}, s'_{ss}, то

$$(s_{rr}s_{ss}-s'_{rr}s'_{ss})\leqslant(s_{rs}-s'_{rs})^2.$$

39*. Система состоит из $p+q+2$ проводников $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_q, C, D$. Доказать, что при известных зарядах на всех проводниках A и C и при известных потенциалах на всех проводниках B и C не может существовать более одного равновесного распределения зарядов, если только проводник C не экранирован электрически от проводника D.

40*. Имеются четыре проводника A, B, C и D, причем проводник B окружает проводник A, а проводник D окружает проводник C. Найти собственные и взаимные емкостные коэффициенты 1) для A и B, если C и D удалены; 2) для C и D, если A и B удалены; 3) для B и D, если A и C удалены, и, наконец, определить эти коэффициенты для полной системы из четырех проводников.

41*. Два одинаковых проводника A и B одинаково заряжены и расположены симметрично по отношению друг к другу; третий, подвижный проводник C последовательно занимает два положения: одно находится практически целиком внутри проводника A, другое — в пределах проводника B. Оба положения симметричны относительно друг друга, и в любом из них потенциальные коэффициенты для C, расположенные в порядке возрастания, равны p, q, r. В каждом из этих положений C по очереди соединяется сначала с окружающим его проводником, потом заземляется и, наконец, изолируется. Определить заряды на проводниках в результате произвольного числа таких операций и показать, что конечные величины зарядов будут находиться в отношении $1:-\beta:\beta^2-1$, где β — положительный корень уравнения $rx^2-qx+p-r=0$.

42*. Собственная емкость одного проводника равна C_1, а другого C_2. Они находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют потенциалы V_1 и V_2. Доказать, что сила отталкивания между ними определится выражением

$$\frac{C_1C_2(4\pi\varepsilon rV_1-C_2V_2)(4\pi\varepsilon rV_2-C_1V_1)}{4\pi\varepsilon(16\pi^2\varepsilon^2r^2-C_1C_2)^2}.$$

С точностью до какой степени r^{-1} справедливо это выражение?

43*. Два одинаковых изолированных проводника расположены симметрично относительно друг друга, причем один из них не заряжен. При помощи третьего изолированного проводника симметричным образом попеременно касаются каждого из этих двух проводников, начиная с заряженного. Пусть e_1 и e_2 — заряды на проводниках после первого касания каждого из них. Показать, что после того, как произойдет r касаний, эти заряды будут равны

$$\frac{e_1^2}{2e_1-e_2}\left[1+\left(\frac{e_1-e_2}{e_1}\right)^{2r-1}\right]\quad\text{и}\quad\frac{e_1^2}{2e_1-e_2}\left[1-\left(\frac{e_1-e_2}{e_1}\right)^{2r}\right]$$

(Для задач 43* и 44* см. разностные уравнения § 9б гл. V.)

44*. Имеются три проводника A_1, A_2 и A_3, причем проводник A_3 практически находится внутри проводника A_2. Проводник A_1 при помощи тонкой проволоки попеременно соединяется с проводниками A_2 и A_3, начиная с A_3. Первоначально проводник A_1 имел заряд E, а A_2 и A_3 были не заряжены. Показать, что заряд на проводнике A_1 после n соединений с A_3 будет равен

$$\frac{E\beta}{\alpha+\beta}\left[1+\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\beta(\alpha+\gamma)}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}\right)^{n-1}\right],$$

где через α, β, γ обозначены соответственно $s_{11}-s_{12}$, $s_{22}-s_{12}$, $s_{33}-s_{12}$.

45*. Пространство между обкладками сферического конденсатора радиусов a и b заполнено воздухом. На внутреннюю сферу наносится слой краски постоянной толщины t и диэлектрической проницаемости K. Найти происшедшее при этом изменение емкости конденсатора.

46*. Заряд проводника равен e, а V_1 и V_2 — потенциалы двух полностью окружающих его эквипотенциальных поверхностей ($V_1 > V_2$). Пространство между этими двумя поверхностями заполняется диэлектриком с относительной проницаемостью K. Показать, что изменение энергии системы равно

$$\frac{1}{2} e (V_1 - V_2) (K-1)/K.$$

47*. Воздушный конденсатор образован двумя концентрическими сферами. Половина пространства между сферами заполнена твердым диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью K. Граница раздела между ним и воздухом есть плоскость, проходящая через центр сфер. Показать, что емкость такого конденсатора будет равна емкости конденсатора, все пространство между сферами которого заполнено диэлектриком, имеющим относительную проницаемость $\frac{1}{2}(1+K)$.

48*. Радиусы внутренних и внешних оболочек двух одинаковых сферических конденсаторов, удаленных один от другого и помещенных в бесконечную диэлектрическую среду проницаемости K, равны соответственно a и b, а относительная проницаемость диэлектрика внутри конденсаторов равна K_1 и K_2. Обе поверхности первого конденсатора изолированы и заряжены, а второго — не заряжены. Внутренняя поверхность второго конденсатора заземляется, а внешняя при помощи проволоки с пренебрежимо малой емкостью соединяется с внешней поверхностью первого конденсатора. Показать, что убыль энергии будет равна

$$\frac{Q^2 [2(b-a)K + aK_2]}{8\pi b\varepsilon [(b-a)K + aK_2]},$$

где Q — количество электричества, протекшего по проводу.

49*. Внешняя обкладка длинного цилиндрического конденсатора представляет собой тонкую оболочку радиуса a; диэлектрик между цилиндрами по одну сторону от плоскости, проходящей через ось, имеет проницаемость K, а по другую — проницаемость K'. Показать, что если внутренний цилиндр заземлен, а внешний имеет на единицу длины заряд q, результирующая сила, действующая на внешний цилиндр, равна

$$\frac{q^2 (K-K')}{\pi^2 \varepsilon_v a (K+K')^2} \text{ (на единицу длины)}.$$

50*. Неоднородная диэлектрическая среда состоит из n концентрических сферических слоев с относительными диэлектрическими проницаемостями K_1, K_2, ..., K_n. Первый слой имеет форму шара, а внешний, n-й, простирается до бесконечности. Радиусы границ раздела диэлектриков равны соответственно a_1, a_2, ..., a_{n-1}. Доказать, что потенциал, создаваемый зарядом Q, расположенным в центре, будет на расстоянии r от него (в среде с проницаемостью K_s) равен

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_v}\left[\frac{Q}{K_s}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a_s}\right)+\frac{Q}{K_{s+1}}\left(\frac{1}{a_s}-\frac{1}{a_{s+1}}\right)+\quad +\frac{Q}{K_n}\frac{1}{a_{n-1}}\right]$$

51*. Конденсатор образован двумя прямоугольными параллельными проводящими пластинами, ширина которых b, а площадь A и которые расположены на расстоянии d друг от друга. Между пластинами параллельно им помещена плитка из диэлектрика толщиной t, площадь которой равна площади пластины. Эта плитка выдвигается из конденсатора, так что между пластинами остается только часть ее, имеющая длину, равную x. Доказать, что сила, стремящаяся возвратить плитку в первоначальное положение, определяется по формуле

$$\frac{E^2 dbt'(d-t')}{2\varepsilon_v [A(d-t')+xbt']^2},$$

где $t' = t(K-1)/K$, K — относительная диэлектрическая проницаемость плитки, E — заряд конденсатора. При решении пренебречь влиянием краев.

52*. Три замкнутые поверхности *1*, *2*, *3* являются эквипотенциальными поверхностями электрического поля. Пространство между поверхностями *1* и *2* заполнено диэлектриком с проницаемостью ε, а между поверхностями *2* и *3* — диэлектриком с проницаемостью ε'. Показать, что емкость конденсатора, образованного поверхностями *1* и *3*, равна величине C, определяемой выражением

$$1/C = \varepsilon_v/(\varepsilon A) + \varepsilon_v/(\varepsilon' B),$$

где A и B — емкости воздушных конденсаторов, образованных соответственно поверхностями *1*, *2* и *2*, *3*.

53*. Граница раздела двух диэлектриков (K_1, K_2) имеет плотность заряда σ (на единицу площади). Напряженности электрического поля по разные стороны от границы равны F_1, F_2 и образуют с общей нормалью к границе углы c_1, c_2. Указать, как определить величину F_2, и доказать, что

$$K_2 \operatorname{ctg} c_2 = K_1 \operatorname{ctg} c_1 \left[1 - \frac{\sigma}{K_1 F_1 \cos c_1} \right]$$

54*. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов a и b, потенциалы которых поддерживаются равными A и B, заполнено неоднородным диэлектриком. Его диэлектрическая проницаемость меняется, как n-я степень расстояния от общего центра сфер. Показать, что потенциал в любой точке между поверхностями равен

$$\frac{Aa^{n+1} - Bb^{n+1}}{a^{n+1} - b^{n+1}} - \left(\frac{ab}{r}\right)^{n-1} \frac{A-B}{a^{n+1} - b^{n+1}}.$$

55*. Конденсатор образован двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии h друг от друга. Одна из пластин имеет нулевой потенциал. Пространство между пластинами заполнено диэлектриком, проницаемость которого линейно возрастает от одной пластины к другой. Показать, что емкость на единицу площади равна

$$\varepsilon_v (K_2 - K_1)/[h \ln (K_2/K_1)],$$

где K_1 и K_2 — значения диэлектрических проницаемостей на поверхности пластин. Искажения в распределении поля на краях пластин не учитываются.

56*. Сферический проводник радиуса a окружен концентрической с ним сферической проводящей оболочкой, внутренний радиус которой b. Пространство между ними заполнено диэлектриком с проницаемостью, меняющейся по закону $(c+r)/r$, где r — расстояние от центра. Доказать, что если внутренняя сфера изолирована и имеет заряд E, а внешняя заземлена, то потенциал в диэлектрике на расстоянии r от центра будет равен

$$\frac{E}{4\pi\varepsilon c} \ln\left(\frac{b}{r}\,\frac{c+r}{c+b}\right).$$

57*. Сферический проводник радиуса a окружен концентрической с ним сферической оболочкой радиуса b. Пространство между ними заполнено диэлектриком, проницаемость которого на расстоянии r от центра равна $\mu e^{-p^2} p^{-3}$, где $p = ra^{-1}$. Доказать, что емкость такого конденсатора будет

$$8\pi\varepsilon_v \mu a/(e^{b^2/a^2} - e).$$

58*. Показать, что емкость конденсатора, состоящего из двух проводящих сфер $r = a$ и $r = b$, между которыми находится неоднородный диэлектрик с проницаемостью $K = f(0, \varphi)$, равна

$$\varepsilon_v ab\,(b-a)^{-1} \iint f(0, \varphi) \sin 0\, d0\, d\varphi.$$

59*. Пусть в некоторой воображаемой кристаллической среде молекулы имеют форму дисков, расположенных параллельно плоскости xy. Показать, что компоненты напряженности поля и электрической индукции связаны между собой уравнениями вида

$$4\pi f = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{21} Y, \quad 4\pi g = \varepsilon_{12} X + \varepsilon_{22} Y, \quad 4\pi h = \varepsilon_{33} Z.$$

60*. Плитка из диэлектрика проницаемости K и толщины x помещена внутрь плоского конденсатора, параллельно его пластинам. Показать, что натяжение на поверхности диэлектрика равно

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2/\varepsilon_v\right)[1 \quad K^{-1} - x d(K^{-1})/dx].$$

61*. Для газа $K = 1 + 0\rho$, где ρ — плотность, а 0 — малая величина. В газ помещен проводник. Пренебрегая членами порядка 0^2, показать, что механическая сила, действующая на единицу поверхности проводника, равна $\frac{1}{2}\sigma^2/\varepsilon_v$. Дать физическую интерпретацию этого результата.

62*. При вращении кривой

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{9a}{16}\left\{\frac{a+x}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{a-x}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}\right\} = \frac{1}{a}$$

вокруг оси x образуется замкнутая поверхность, которую принимают за границу проводника. Показать, что его емкость равна $4\pi\varepsilon_0 a$, а поверхностная плотность заряда на конце оси равна $e/(3\pi a^2)$, где e—полный заряд.

63. Отношения потенциалов P_{rs} системы n проводников можно определить выражениями

$$V_1 = P_{11}V_1 + P_{12}V_2 + \ldots + P_{1n}V_n,$$
$$V_2 = P_{21}V_1 + P_{22}V_2 + \ldots + P_{2n}V_n,$$

$$V_n = P_{n1}V_1 + P_{n2}V_2 + \ldots + P_{nn}V_n.$$

Показать, что P_{rs} выражаются через потенциальные и емкостные коэффициенты следующим образом:

$$P_{rs} = s_{r1}c_{1s} + s_{r2}c_{2s} + \ldots + s_{rs}c_{sr} + \ldots + s_{rn}c_{nr}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, Berlin, 1927.

Gray A., Absolute Measurements in Electricity and Magnetism, Macmillan, 1888.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.

Planck M. K. E. L., Theorie der Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.

Thomson J. J., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1921.

Thomson W., Papers on Electrostatics and Magnetism, Macmillan, 1884.

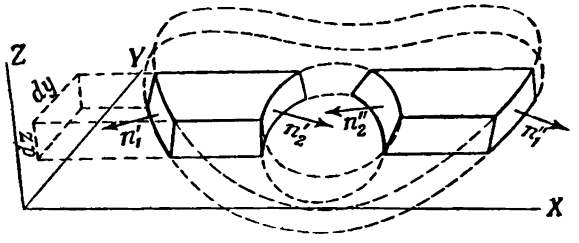
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

Глава III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Теорема Остроградского — Гаусса. Приступим теперь к нахождению связи между интегралом от нормальной компоненты некоторого непрерывного в пространстве вектора A, взятым по замкнутой поверхности S и по $(m-1)$ замкнутым поверхностям, лежащим внутри S, и интегралом от дивергенции вектора A, взятым по объему v между этими поверхностями. Пусть компоненты вектора A в прямоугольных координатах равны A_x, A_y, A_z, тогда дивергенцию A, которую мы будем обозначать ∇ A, можно представить в виде



Фиг. 20.

$$\nabla \quad \mathrm{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{3.1}$$

Предположим, что объем v разделен на тонкие призмы с прямоугольным поперечным сечением $dydz$. Одна из них (см. фиг. 20) вырезает из поверхности S_j элементы dS_j', dS_j'', координаты которых равны соответственно x_j' и x_j'', а единичные векторы нормали $\mathbf{n}_j'$ и $\mathbf{n}_j''$ направлены наружу. В поверхностном интеграле элементам dS_j' и dS_j'' будут соответствовать значения подинтегральной функции, равные

$$A_{x_j'}\mathbf{i} \quad \mathbf{n}_j' \, dS_j' + A_{x_j''}\mathbf{i} \quad \mathbf{n}_j'' \, dS_j''$$

Но из фиг. 20 следует, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_j' \, dS_j' = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_j'' \, dS_j'' = dy\,dz$, поэтому общий вклад всех сечений призмы, составляющей часть объема v и пересекающей $(q-p)$ поверхностей, равен

$$\sum_{j=p}^{q} dy\,dz\,(A_{x_j'} - A_{x_j''}) = \sum_{j=p}^{q} dy\,dz \int_{x_j'}^{x_j''} \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx.$$

Теперь просуммируем по всем призмам, на которые разделен объем v,

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} A_x \mathbf{i} \quad \mathbf{n}_j \, dS_j = \int_{\mathrm{v}} \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Составляя подобные выражения для A_y и A_z и складывая их, после подстановки $\nabla \cdot \mathrm{A}$ из соотношения (3.1) мы получим окончательно

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \mathrm{A} \cdot \mathbf{n}_j \, dS_j = \int_{\mathrm{v}} \nabla \cdot \mathrm{A} \, d\mathrm{v}, \tag{3.2}$$

где $dv = dx\,dy\,dz$. Эта формула известна под названием теоремы Остроградского — Гаусса

§ 2. Теорема Стокса. Непосредственно из теоремы Остроградского — Гаусса можно получить другую важную теорему. Применим формулу (3.2) к бесконечно малому прямому цилиндру, имеющему высоту h, площадь основания S, периметр основания s и площадь боковой поверхности S' Обозначим через $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ единичные векторы нормали к основанию и к боковой поверхности, а через $\mathbf{F}$ некоторую векторную функцию и заменим $\mathbf{A}$ на $\mathbf{n} \times \mathbf{F}$. Поскольку $\mathbf{n}$ — постоянный вектор, то в выражении

$$\nabla \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \quad \nabla \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = 0$, но на плоских поверхностях и $[\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \quad \mathbf{n} = 0$, поэтому поверхностный интеграл от этого выражения по S исчезает и формула (3.2) принимает вид

$$\int_{S'} \mathbf{n} \times \mathbf{F} \quad \mathbf{n}_1\, dS' = \int_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}\, dS' = - \int_{\mathbf{v}} \mathbf{n} \quad \nabla \times \mathbf{F}\, dv.$$

В силу того, что $dv = h\ dS$ и $dS' = h\ ds$, поверхностный и объемный интегралы превращаются соответственно в линейный и поверхностный

$$\oint \mathbf{F} \quad \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}\, ds = - \int_{S} \mathbf{n} \quad \nabla \times \mathbf{F}\, dS.$$

Далее, $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}$ является единичным вектором, направленным вдоль границы, поэтому, выбрав его положительным для положительного направления $\mathbf{s}$, мы получим $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}\, ds = -\mathbf{ds}$ и после суммирования по всем бесконечно малым цилиндрам, охватываемым поверхностью, будем иметь

$$\sum \oint \mathbf{F} \quad \mathbf{ds} = \sum \int_{S} \mathbf{n} \quad \nabla \times \mathbf{F}\, dS.$$

При суммировании линейных интегралов обход всех внутренних контуров совершается дважды в противоположных направлениях, и, следовательно, интегралы по ним взаимно уничтожаются. Остается только интеграл по наружному контуру всей области. Сумма поверхностных интегралов равна, естественно, интегралу по всей поверхности, так что

$$\oint \mathbf{F} \quad \mathbf{ds} = \int_{S} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, dS. \tag{3.3}$$

Это и есть теорема Стокса. Она может быть сформулирована следующим образом: линейный интеграл от вектора $\mathbf{F}$ по некоторому замкнутому контуру равен поверхностному интегралу от ротора вектора $\mathbf{F}$ по поверхности, опирающейся на этот контур.

§ 3. Уравнения Пуассона и Лапласа. Пусть в теореме Остроградского — Гаусса вектор $\mathbf{A}$ будет вектором электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Если к поверхностному интегралу применить теорему Гаусса о потоке индукции (1.40), то

$$\int_{\mathbf{v}} \nabla \quad \mathbf{D}\, dv = Q = \int_{\mathbf{v}} \rho\, dv,$$

где ρ — плотность электрического заряда. Таким образом, для исчезающе малого объема dv будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \quad \mathbf{D} = \frac{dQ}{\partial \mathbf{v}} = \rho. \tag{3.4}$$

Обозначим $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon \operatorname{grad} V = -\varepsilon\nabla V$, тогда

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \nabla \cdot (\varepsilon\nabla V) = -\rho. \tag{3.5}$$

Мы получили уравнение Пуассона для неоднородного диэлектрика. В случае однородного диэлектрика ε — постоянная величина и ее можно вынести из-под знака дифференцирования, что дает

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} V = \nabla \quad \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

При $\rho = 0$ это уравнение называется уравнением Лапласа. Для неоднородного, но изотропного диэлектрика уравнение Лапласа можно записать в прямоугольных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Если диэлектрик однородный, но не изотропный, и если координатные оси направлены вдоль главных осей кристалла [см. соотношение (1.58)], то

$$\varepsilon_1\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon_2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \varepsilon_3\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3.8}$$

Если же диэлектрик и изотропный и однородный, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3.9}$$

§ 4. Ортогональные криволинейные координаты. В большинстве электростатических задач заданными величинами являются: заряды или потенциалы всех проводников системы, величины остальных зарядов и их расположение, а также диэлектрическая проницаемость среды как функция точки. Задача считается решенной, если определен потенциал во всех точках. Для этого необходимо найти решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Обычно существует такая система координат, в которой эти условия можно выразить наиболее просто и которой естественно поэтому пользоваться при решении уравнения. Наиболее употребительными являются криволинейные ортогональные системы координат.

Рассмотрим три семейства взаимно ортогональных поверхностей таких, что через каждую точку данной области проходит одна из поверхностей каждого семейства. Любая из поверхностей первого семейства характеризуется определенным численным значением величины u_1, а второго и третьего семейств — численными значениями величин u_2 и u_3. Бесконечно малый прямоугольный параллелепипед образуется шестью поверхностями u_1, $u_1 + du_1$, u_2, $u_2 + du_2$, u_3, $u_3 + du_3$. Поскольку лишь в немногих случаях величины u_1, u_2, u_3 непосредственно выражают расстояния, для получения истинных длин ребер параллелепипеда необходимо, вообще говоря, умножить du_1, du_2 и du_3 соответственно на множители h_1, h_2, h_3 [1].

Последние могут меняться от точки к точке, т. е. являться функциями u_1, u_2 и u_3. Таким образом, длины ребер параллелепипедов (см. фиг. 21) равны

$$ds_1 = h_1 du_1, \qquad ds_2 = h_2 du_2, \qquad ds_3 = h_3 du_3. \tag{3.10}$$

---

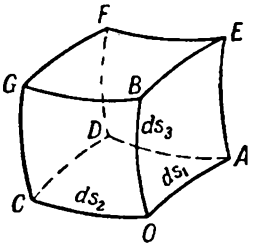
[1]) Эти обозначения совпадают с обозначениями, приводимыми в книгах: Houston, Principles of Mathematical Physics, Abraham M., Becker R., Klassische Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.) В справочниках Peirce и Smithsonian Tables, а также в книге Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925, через h_1, h_2, h_3, обозначены обратные величины.

Если V есть некоторая скалярная функция, то, по определению, компонентами ее градиента будут

$$\frac{\partial V}{\partial s_1}=\frac{\partial V}{h_1\partial u_1},\qquad \frac{\partial V}{\partial s_2}=\frac{\partial V}{h_2\partial u_2},\qquad \frac{\partial V}{\partial s_3}=\frac{\partial V}{h_3\partial u_3}. \tag{3.11}$$

Для вычисления дивергенции в этих координатах нужно применить теорему Остроградского—Гаусса (3.2) к бесконечно малому объему, показанному на фиг. 21. Нормальная составляющая потока вектора A, выходящего через грани $OCGB$ и $ADFE$, равна

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(A_1\,ds_2\,ds_3)\,ds_1=\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)\,du_1du_2du_3=$$
$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)\,dv.$$



Фиг. 21.

Добавляя соответствующие два слагаемые для четырех других граней и сравнивая полученное выражение с формулой (3.2), находим

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\ \mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{3.12}$$

Далее, заменяя $\mathbf{A}=\varepsilon\nabla V$ и подставляя в уравнение Пуассона (3.5), имеем

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3\varepsilon}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1\varepsilon}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2\varepsilon}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right]=-\rho,$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla V)=-\rho. \tag{3.13}$$

При $\rho=0$ соотношение (3.13) дает уравнение Лапласа для неоднородного изотропного диэлектрика. Если диэлектрик однородный и изотропный, то ε — постоянная величина и ее можно вынести из-под знака дифференцирования.

§ 5. Представление ротора в ортогональных криволинейных координатах. Применим теорему Стокса к грани $OADC$ элементарного криволинейного куба, изображенного на фиг. 21. Пусть F_1, F_2 и F_3 являются компонентами вектора F вдоль u_1, u_2 и u_3. Тогда из соотношения (3.11) линейный интеграл вдоль OA и DC окажется равным

$$[h_1(u_1,\,u_2)F_1(u_1,\,u_2)-h_1(u_1,\,u_2+du_2)F_1(u_1,\,u_2+du_2)]\,du_1=$$
$$=-\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_2}du_1\,du_2,$$

а вдоль AD и CO

$$[h_2(u_1+du_1,\,u_2)F_2(u_1+du_1,\,u_2)-h_2(u_1,\,u_2)F_2(u_1,\,u_2)]\,du_2=$$
$$=\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_1}du_1\,du_2.$$

Суммирование этих выражений дает линейный интеграл вдоль $OADCO$, который по теореме Стокса равен интегралу от нормальной компоненты ротора F по площади $h_1h_2\,du_1\,du_2$ этой грани. Сокращая на $du_1\,du_2$, получим

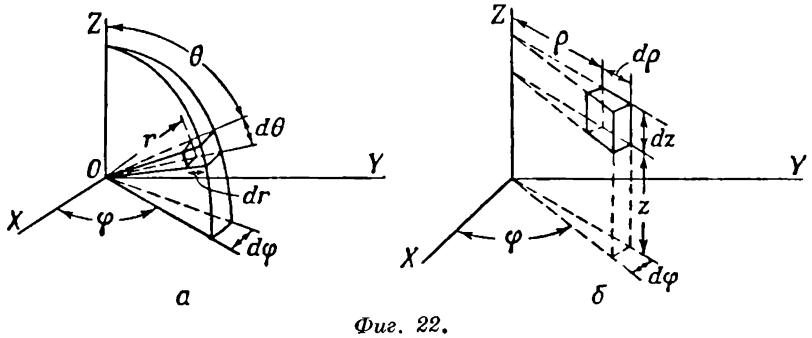
$$(\nabla\times\mathbf{F})_3=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_2}\right]. \tag{3.14}$$

Аналогично и для других граней

$$(\nabla\times\mathbf{F})_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_3}\right] \tag{3.15}$$

$$(\nabla\times\mathbf{F})_2=\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_1}\right] \tag{3.16}$$

§ 6. Представление оператора $\nabla\cdot(\varepsilon\nabla)$ в различных системах координат. В сферических координатах, где $r=u_1$ — расстояние до начала коор-



Фиг. 22.

динат, $\theta=u_2$ — полярный угол и $\varphi=u_3$ — азимутальный угол (см. фиг. 22,*а*), мы имеем

$$ds_1=h_1\,du_1=dr, \qquad h_1=1,$$
$$ds_2=h_2\,du_2=r\,d\theta, \qquad h_2=r,$$
$$ds_3=h_3\,du_3=r\sin\theta\,d\varphi, \quad h_3=r\sin\theta.$$

Согласно соотношению (3.13), уравнение Лапласа принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varepsilon\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varepsilon\partial V}{\partial\varphi}\right)=0. \tag{3.17}$$

В цилиндрических координатах, где $\rho=u_1$ — расстояние от оси z, $\varphi=u_2$ — азимутальный угол, $z=u_3$ — расстояние до плоскости xy (см. фиг. 22, *б*), имеем

$$ds_1=h_1\,du_1=d\rho, \qquad h_1=1,$$
$$ds_2=h_2\,du_2=\rho\,d\varphi, \quad h_2=\rho,$$
$$ds_3=h_3\,du_3=dz, \qquad h_3=1.$$

Уравнение Лапласа, согласно формуле (3.13), в этих координатах можно записать в виде

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla V)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varepsilon\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0. \tag{3.18}$$

Позже, в связи со специальными задачами, мы встретимся с некоторыми другими системами координат, например с эллипсоидальной.

§ 7. Теорема Грина. Положим в выражении (3.2) $\mathbf{A}=(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\Phi)\Psi=\Psi\varepsilon\nabla\Phi$, где Ψ и Φ — скалярные функции, конечные и непрерывные в области интегрирования и дважды дифференцируемые, а ε — дифференцируемая скалярная величина, которая может иметь разрывы на некоторых границах внутри области. Исключим эти границы, окружив их узкими областями,

тесно примыкающими к ним с двух сторон. Пусть $\mathbf{n}'_p$ и $\mathbf{n}''_p$ — единичные векторы нормали с двух сторон p-й границы, а $\mathbf{A}'_p$ и $\mathbf{A}''_p$ — значения $\mathbf{A}$ по обе стороны от нее. Если имеются q таких областей, включающих q разрывов непрерывности, то интеграл по ним равен

$$\sum_{p=1}^{q} \int_S (\mathbf{A}'_p \cdot \mathbf{n}'_p + \mathbf{A}''_p \cdot \mathbf{n}''_p)\, dS_p,$$

где dS_p — элемент поверхности разрыва. Прибавив эти члены к формуле (3.2) и подставив $\mathbf{A} = \Psi\varepsilon\nabla\Phi$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \varepsilon\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n_j}\, dS_j + \sum_{p=1}^{q} \int_{S_p} \left(\varepsilon'_p \Psi'_p \frac{\partial\Phi'_p}{\partial n'_p} + \varepsilon''_p \Psi''_p \frac{\partial\Phi''_p}{\partial n''_p} \right) dS_p =$$
$$= \int_V \varepsilon\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi\, dv + \int_V \Psi\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\Phi)\, dv. \qquad (3.19)$$

Напишем теперь подобное же выражение, поменяв местами Ψ и Φ, и вычтем одно из другого. Тогда

$$\sum_{p=1}^{q} \int_{S_p} \left[\varepsilon'_p \left(\Psi'_p \frac{\partial\Phi'_p}{\partial n'_p} - \Phi'_p \frac{\partial\Psi'_p}{\partial n'_p} \right) + \varepsilon''_p \left(\Psi''_p \frac{\partial\Phi''_p}{\partial n''_p} - \Phi''_p \frac{\partial\Psi''_p}{\partial n''_p} \right) \right] dS_p +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \varepsilon \left(\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n_j} - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n_j} \right) dS_j = \int_V [\Psi\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\Phi) - \Phi\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\Psi)]\, dv. \qquad (3.20)$$

Если ε — постоянна и непрерывна, то выражение (3.19) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n_j}\, dS_j = \int_V (\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi)\, dv. \qquad (3.21)$$

И из выражения (3.20) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \left(\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n_j} - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n_j} \right) dS_j = \int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\, dv. \qquad (3.22)$$

Стрэттоном был предложен следующий полезный векторный аналог этих формул. Заменим в выражении (3.2) $\mathbf{A}$ на $\Psi \times (\nabla \times \Phi)$, где Ψ и Φ — конечные, непрерывные в области интегрирования и дважды дифференцируемые векторы. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} [\Psi \times (\nabla \times \Phi)] \cdot n_j\, dS_j = \int_V \nabla \cdot [\Psi \times (\nabla \times \Phi)]\, dv,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \Psi \cdot [(\nabla \times \Phi) \times \mathbf{n}]\, dS_j = \int_V [(\nabla \times \Psi) \cdot (\nabla \times \Phi) - \Psi \cdot \nabla \times (\nabla \times \Phi)]\, dv. \qquad (3.23)$$

Вычитая из выражения (3.23) аналогичное выражение с переставленными Ψ и Φ, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} [\Psi \times (\nabla \times \Phi) - \Phi \times (\nabla \times \Psi)] \cdot \mathbf{n}\, dS_j =$$
$$= \int_V \{\Phi \cdot [\nabla \times (\nabla \times \Psi)] - \Psi \cdot [\nabla \times (\nabla \times \Phi)]\}\, dv. \qquad (3.24)$$

§ 8. Теорема взаимности Грина для диэлектрических сред. Пусть имеется два распределения электрических зарядов. Обозначим в выражении (3.20) через $\Psi = V$ потенциал одного из них, через $\Phi = V'$ — потенциал другого, а через ε — диэлектрическую проницаемость среды. Если поверхность раздела двух сред с разными ε незаряжена, то на ней, согласно условию (1.48),

$$\varepsilon'_p \frac{\partial \Phi'}{\partial n'_p} = \varepsilon''_p \frac{\partial \Phi''}{\partial n'_p} = -\varepsilon''_p \frac{\partial \Phi''}{\partial n''_p}$$

и из условия (1.49)

$$\Psi'_p = \Psi''_p \quad \text{и} \quad \Phi'_p = \Phi''_p.$$

Подобное же соотношение можно написать и для Ψ, так что интегралы по поверхностям разрыва исчезают. При отсутствии объемных зарядов, т. е. при $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Psi) = 0$ и $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = 0$, исчезает и объемный интеграл, поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \left(V_j \varepsilon \frac{\partial V'}{\partial n_j} - V'_j \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n_j} \right) dS_j = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} \left(V_j \int_{S_j} \sigma' \, dS_j - V'_j \int_{S_j} \sigma \, dS_j \right) = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j V'_j = \sum_{j=1}^{m} Q'_j V_j. \tag{3.25}$$

Таким образом, теорема взаимности Грина (2.30) остается в силе и в присутствии диэлектриков.

§ 9. Функция Грина. Пусть Ψ — потенциал, создаваемый единичным зарядом, находящимся в точке P, а Φ — потенциал, создаваемый индуцированным поверхностным зарядом плотности ρ, расположенным на некоторой замкнутой заземленной поверхности S, окружающей точку P. Единичный заряд в точке P можно рассматривать как заряд, объемная плотность которого всюду равна нулю, за исключением бесконечно малого объема dv вблизи P, в котором Φ можно считать величиной постоянной и равной Φ_p. Учитывая, что $\Psi = (4\pi\varepsilon r)^{-1}$, где r — расстояние от P, и что $\nabla^2 \Phi = 0$ всюду внутри v, а $\nabla^2 \Psi = -\rho/\varepsilon$ внутри dv, а вне dv равно нулю, и принимая во внимание, что $\Psi = -\Phi$ на поверхности S, из выражения (3.22) получим

$$\int_S \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial [\Phi + (4\pi\varepsilon r)^{-1}]}{\partial n} \right\} dS = \Phi_p \int_v \rho \, dv = \Phi_p,$$

где, как и в § 1 и 7, за положительное направление n принято направление из объема v. Обозначим $\Phi + (4\pi\varepsilon r)^{-1}$ через G. Тогда

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\sigma}{r} dS. \tag{3.26}$$

Мы будем называть функцию G функцией Грина, хотя многие авторы именуют функцией Грина функцию Φ. Очевидно, что G является решением уравнения Лапласа, равным нулю на границе S и имеющим простой полюс в точке P. С электрической точки зрения это решение представляет потенциал, создаваемый единичным зарядом, находящимся в некоторой точке P

внутри заземленной проводящей поверхности S. Как правило, по формуле (3.26), совпадающей с формулой (1.8), нельзя определить G, так как очень редко плотность заряда на проводнике σ оказывается известной. В последующих главах будет приведено много методов определения функции G для систем с различными формами границ.

Силу F_1, действующую вдоль направления u_1 на заряд q, находящийся в точке с координатами u_1', u_2', u_3' (см. § 4), можно выразить через функцию $G(u_1, u_2, u_3)$ по формуле

$$\frac{q}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\left[\frac{\partial G(u_1, u_2', u_3')}{h_1\partial u_1}\right]_{u_1'+\delta} + \left[\frac{\partial G(u_1, u_2', u_3')}{h_1\partial u_1}\right]_{u_1'-\delta}\right\} = \frac{q}{2}\frac{\partial G(u_1', u_2', u_3')}{h_1\partial u_1'}. \quad (3.27)$$

Первое выражение имеет место в силу того, что при малых δ создаваемые индуцированными зарядами поля в точках $u_1'+\delta$ и $u_1'-\delta$ одинаковы, в то время как поля, создаваемые самим зарядом, равны по величине и противоположны по направлению и, таким образом, уничтожаются. Второе выражение следует из формулы (2.13), так как изменение u_1' не вызывает изменения энергии самого заряда, а влияет только на энергию индуцированных зарядов.

§ 10. Решение уравнения Пуассона. Потенциал точки P, созданный в вакууме зарядом плотности ρ, находящимся в объеме $d\mathrm{v}$, согласно формуле (1.4), равен $dV = \rho(4\pi\varepsilon r)^{-1}d\mathrm{v}$, где r — расстояние от объема $d\mathrm{v}$ до точки P. Таким образом, потенциал в точке P, созданный всеми зарядами, будет равен

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathrm{v}}\frac{\rho\, d\mathrm{v}}{r}. \quad (3.28)$$

Но из формулы (3.6) следует, что этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (3.29)$$

Таким образом, выражение (3.28) является решением уравнения (3.29).

Однако уравнение (3.29) можно решить непосредственно при помощи теоремы Гаусса. Применим ее к области v, заключенной между двумя концентричными сферами с центрами в точке P, одна из которых мала и имеет поверхность σ, а другая, большая, имеет поверхность $\sum$ и радиус R. Пусть функция Ψ в соотношении (3.22) равна r^{-1}, а $\Phi = V$, тогда

$$\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS + \int_\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS =$$
$$= \int_{\mathrm{v}}\left[\frac{1}{r}\nabla^2 V - V\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\mathrm{v}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим первый из этих интегралов. На малой сфере $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ и телесный угол, под которым виден элемент dS из точки P, равен $d\Omega = r^{-2}dS$. Поэтому в силу конечности $\partial V/\partial r$

$$-r\int\frac{\partial V}{\partial r}d\Omega - \int V d\Omega \xrightarrow[r\to 0]{} -4\pi V_P. \quad (3.31)$$

Если весь заряд Q, создающий потенциал V, расположен в конечной области, то при $R\to\infty$ $V\to Q(4\pi\varepsilon R)^{-1}$ и на поверхности $\sum$ оба члена в подинтегральном выражении стремятся к $Q(4\pi\varepsilon R^3)^{-1}$, в то время как площадь поверхности равна $4\pi R^2$. Следовательно, второй интеграл стре-

мится к нулю как $Q(\varepsilon R)^{-1}$. Поскольку r^{-1} является решением уравнения Лапласа ($\nabla^2 r^{-1} = 0$), то, учитывая уравнение (3.29), выражение (3.30) можно переписать в виде

$$-4\pi V_P = \int_{\mathrm{v}} \frac{\nabla^2 V}{r}\, d\mathrm{v} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathrm{v}} \frac{\rho}{r}\, d\mathrm{v}, \tag{3.32}$$

откуда опять следует решение (3.28) уравнения (3.29).

§ 11. Теорема единственности при наличии диэлектрических сред. Если уравнение Лапласа имело бы несколько решений, удовлетворяющих одинаковым граничным условиям, то нужное решение пришлось бы выбирать путем эксперимента и от всей теории потенциала было бы очень мало пользы. Пусть в некоторой области заданы величины и положения всех фиксированных зарядов и известен также потенциал по всей границе области, за исключением, может быть, некоторых замкнутых проводящих поверхностей, на которых заданы полные заряды. Докажем, что в этом случае потенциал V определен однозначно. Предположим, что существуют два значения V и V', удовлетворяющие граничным условиям и уравнению Лапласа. Тогда и разность их также должна удовлетворять уравнению Лапласа, т. е., согласно формуле (3.5),

$$\nabla \cdot [\varepsilon \nabla (V - V')] = 0,$$

что справедливо, так как фиксированные заряды выпадают. Положим в соотношении (3.19) $\Phi = \Psi = V - V'$ Согласно § 8, интегралы по границе раздела двух диэлектриков исчезают, если на границах нет поверхностных зарядов. Подстановка дает

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \varepsilon (V - V') \frac{\partial}{\partial n_j}(V - V')\, dS_j = \int_{\mathrm{v}} \varepsilon [\nabla (V - V')]^2\, d\mathrm{v}. \tag{3.33}$$

Те поверхностные интегралы в левой части, которые соответствуют границам с заданным потенциалом, исчезают в силу того, что $V = V'$ в каждой точке. Поверхности же с заданным зарядом являются, по условию, проводящими, т. е. на них V и V' постоянны и могут быть вынесены за знак интегрирования. Поэтому для s-й поверхности имеем

$$(V_s - V'_s) \int_{S_s} \varepsilon \frac{\partial}{\partial n_s}(V_s - V'_s)\, dS_s = (V_s - V'_s)(Q_s - Q'_s).$$

По предположению, полный заряд на этой поверхности фиксирован, так что $Q_s - Q'_s = 0$ и вся левая часть выражения (3.33) обращается в нуль. Поскольку подинтегральное выражение справа всегда положительно, то величина $\nabla (V - V')$ всюду должна быть равна нулю. Таким образом, разность $V - V'$ должна быть постоянной, но на границе она равна нулю, значит она равна нулю во всей области. Теорема доказана.

§ 12. Внесение нового проводника. Докажем, что если при внесении незаряженного или заземленного проводника в электрическое поле, созданное некоторой системой заряженных проводников, величины зарядов всех проводников остаются неизменными, то энергия системы уменьшается. Обозначим энергию поля в начальном состоянии через W, напряженность поля через E, а объем через v. Те же величины после внесения проводника

обозначим через W', E', v' Тогда имеем

$$W - W' = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{v}} E^2\,d\mathrm{v} - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{v}'} E'^2\,d\mathrm{v} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{v}-\mathrm{v}'} \mathbf{E}^2\,d\mathrm{v} + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{v}'} [(\mathbf{E}-\mathbf{E}')^2 - 2\mathbf{E}'\cdot(\mathbf{E}'-\mathbf{E})]\,d\mathrm{v}. \qquad (3.34)$$

Подставляя теперь в соотношение (3.21) $\Psi = V'$ и $\Phi = V - V'$ и помня, что во всем объеме $\nabla^2\Phi = 0$, получим

$$\int_{\mathrm{v}'} \nabla V'\cdot\nabla(V-V')\,d\mathrm{v} = \int_{\mathrm{v}'} \mathbf{E}'\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}')\,d\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{m}\int_{S_j} V'\left(\frac{\partial V}{\partial n_j} - \frac{\partial V'}{\partial n_j}\right)dS_j =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{m} V_j'\int_{S_j}(\sigma-\sigma')\,dS_j = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{m} V_j'(Q_j - Q_j') = 0,$$

так как $Q_j' = Q_j$. Таким образом, второй член в последнем интеграле (3.34) равен нулю и, следовательно, $W - W'$ является величиной положительной. Поскольку при заземлении никакой работы не совершается, то любое возникающее при этом перераспределение зарядов должно происходить за счет электрического поля и вызывать уменьшение его энергии.

§ 13. Эквивалентный слой Грина. Обозначим через V_P потенциал в точке P, находящейся вне замкнутой поверхности S, созданный зарядом, распределенным с плотностью $\rho(x, y, z)$ в объеме v, ограниченном этой поверхностью S. Положим в соотношении (3.22) $\Psi = r^{-1}$ и $\Phi = V$, так что, согласно формуле (3.6), $\nabla^2\Psi = -\rho/\varepsilon$. Используя формулу (1.8), получаем

$$\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\,dS - \int_S V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathrm{v}}\frac{\rho\,d\mathrm{v}}{r} = -4\pi V_P, \qquad (3.35)$$

где r — расстояние от точки P до объема $d\mathrm{v}$. Отсюда видно, что потенциал V_P в точке P можно выразить либо в виде объемного интеграла от плотности заряда в объеме v, либо в виде двух интегралов по поверхности S, ограничивающей объем v. Сравнение соотношения (3.35) с (1.8) и (1.30) показывает, что V_P не изменится, если убрать объемный заряд ρ и заменить его поверхностным слоем, совпадающим с S и несущим заряд $-\varepsilon(\partial V/\partial n)$ (на единицу поверхности) и, кроме того, некоторое распределение диполей с моментом εV (на единицу площади), ориентированных вдоль внешней нормали к S.

Пусть S совпадает с эквипотенциальной поверхностью. Тогда в соответствии с формулой (3.2), вынося V за знак интеграла, второму интегралу можно придать вид

$$V\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dS = V\int_{\mathrm{v}}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\mathrm{v}. \qquad (3.36)$$

Так как $1/r$ является потенциалом точечного заряда $4\pi\varepsilon$, находящегося в точке P, то интеграл (3.36) равен нулю, и, следовательно, внутри v $\nabla^2(1/r) = 0$. В этом случае двойного (дипольного) слоя не требуется. Следовательно, любой участок эквипотенциальной поверхности в электрическом поле можно заменить очень тонким незаряженным проводящим листом, так как последний можно рассматривать как две бесконечно близкие эквипотенциальные поверхности. Чтобы потенциал V_P остался неизменным, эти

поверхности, как видно из соотношения (3.35), должны иметь на внешних своих сторонах равные по величине и противоположные по знаку плотности зарядов.

§ 14. Энергия диэлектрического тела в электрическом поле. Из предыдущего параграфа следует, что силы, действующие на неподвижные внешние заряды со стороны заданного объемного распределения или эквивалентного ему поверхностного слоя, одинаковы. По закону Ньютона справедливо и обратное утверждение. Это упрощает вычисление работы, совершаемой при перемещении незаряженного диэлектрического тела в поле, созданном неподвижными источниками в среде с проницаемостью ε_0. Если слой вносится в уже полностью сформированное поле, то энергия элемента поверхности dS в этом поле определяется выражением (1.14) с учетом результатов § 7 гл. I, а именно:

$$dW = [\sigma V + (\mathbf{m}\cdot\nabla)V]\,dS, \tag{3.37}$$

где σ — плотность заряда, $\mathbf{m}$ — плотность дипольного момента, а V — потенциал, созданный внешними неподвижными зарядами. Поляризация диэлектрика, а следовательно, и величины σ и $\mathbf{m}$ эквивалентного слоя пропорциональны в этом случае напряженности внешнего поля; они создаются этим полем и равны нулю при его отсутствии. Поэтому полная работа составляет половину той, которая дается выражением (3.37). Подставляя значения σ и $\mathbf{m}$, приведенные в § 13, и интегрируя по поверхности слоя, получим

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_S (-V\mathbf{n}\cdot\nabla V_0 + V_0\mathbf{n}\cdot\nabla V)\,dS. \tag{3.38}$$

где V_0 — результирующий потенциал на внешней стороне эквивалентного слоя или поверхности диэлектрика. Согласно условиям (1.48) и (1.49), потенциал на внутренней стороне слоя связан с V_0 соотношениями

$$V_c = V_i \quad \text{и} \quad \varepsilon_0\mathbf{n}\cdot\nabla V_0 = \varepsilon\mathbf{n}\cdot\nabla V_i, \tag{3.39}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость тела. Подставляя соотношения (3.39) в (3.38) и применяя теорему Остроградского — Гаусса (3.2), получим

$$W = \frac{1}{2}\int_S (\varepsilon_0 V_i\mathbf{n}\cdot\nabla V - \varepsilon V\mathbf{n}\cdot\nabla V_i)\,dS = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_0 - \varepsilon)\,\nabla V\cdot\nabla V_i\,dv, \tag{3.40}$$

ибо $\nabla^2 V = \nabla^2 V_i = 0$. Пусть напряженность электрического поля, создаваемого некоторым фиксированным распределением зарядов в объеме v однородной изотропной среды с проницаемостью ε_0, равна $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}_i$ — напряженность поля в этом же объеме, заполненном однородным изотропным диэлектриком ε. Тогда разность энергий равна

$$W = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_0 - \varepsilon)\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_i\,dv. \tag{3.41}$$

Момент или сила, действующие на тело в направлении 0, равны

$$F = -\frac{\partial W}{\partial 0}. \tag{3.42}$$

§ 15. Изменение электрической энергии системы при увеличении диэлектрической проницаемости. Если заряды на проводниках, создающие электрическое поле, сохраняются постоянными, то при увеличении

диэлектрической проницаемости в какой-либо точке среды энергия всей системы уменьшается. Чтобы доказать это, введем следующие обозначения: W — энергия системы, Q_j — заряд на j-м проводнике, ρ — объемная плотность заряда, V — потенциал произвольной точки и ε — диэлектрическая проницаемость. Предположим, что при изменении ε Q_j и ρ остаются постоянными, а V и W меняются. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon (\nabla V)^2\, dv,$$

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_v \delta\varepsilon (\nabla V)^2\, dv + \int_v \varepsilon \nabla V \cdot \nabla (\delta V)\, dv. \tag{3.43}$$

Заменим в соотношении (3.19) Ψ на δV и Φ на V, подставим $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = -\rho$ и предположим, что границы раздела различных диэлектриков незаряжены (соответствующие им поверхностные интегралы обращаются в нуль)

$$\int_v \varepsilon \nabla (\delta V) \cdot \nabla V\, dv = \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \delta V \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n_j}\, dS_j + \int_v \delta V \rho\, dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \delta V_j \int_{S_j} \sigma\, dS_j + \int_v \delta V \rho\, dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta V_j + \int_v \delta V \rho\, dv = 2\delta W,$$

потому что

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} Q_j V_j + \frac{1}{2}\int_v \rho V\, dv.$$

Подставляя результат в соотношение (3.43) и перенося $2\delta W$ в левую часть, находим

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int_v \delta\varepsilon (\nabla V)^2\, dv. \tag{3.44}$$

Таким образом, δW — отрицательно при положительном $\delta\varepsilon$.

§ 16. Потенциал аксиально-симметричного поля. Путем непосредственной подстановки в уравнение (3.18) и проведения соответствующего интегрирования по частям можно убедиться, что если ε — постоянная величина и потенциал V не зависит от угла φ, уравнение Лапласа имеет следующее решение:

$$V(z, \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z + j\rho \sin\theta)\, d\theta, \tag{3.45}$$

где $\Phi(z)$ — действительная функция z. Разложение этой функции в ряд Тейлора (см. Двайт, 39) имеет вид

$$\Phi(z, \rho) = \Phi(z) + \Phi'(z)\, j\rho \sin\theta + (2!)^{-1}\Phi''(z)(j\rho \sin\theta)^2 + \ldots \tag{3.46}$$

Подставляя ряд (3.46) в выражение (3.45) и интегрируя от 0 до 2π, получим

$$V(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}\Phi(z)}{\partial z^{2n}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \tag{3.47}$$

Отсюда видно, что $V(z, 0)$ совпадает с $\Phi(z)$. При отсутствии зарядов на оси решение (3.47) дает значение V, однозначное во всех точках, не отделенных от оси заряженной поверхностью.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что компоненты ротора в цилиндрической системе координат равны

$$\mathrm{rot}_\rho \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$\mathrm{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho},$$

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]$$

2. Показать, что компоненты ротора в сферической системе координат равны

$$\mathrm{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right],$$

$$\mathrm{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]$$

$$\mathrm{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{(\partial rA)_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

3. Показать, что для эллипсоидальной системы координат (см. § 2 гл. V) коэффициенты h_1, h_2, h_3 в выражении (3.10) можно записать в виде

$$4h_1^2 = (u_1-u_2)(u_1-u_3)D_1,\quad 4h_2^2 = (u_2-u_3)(u_2-u_1)D_2,\quad 4h_3^2 = (u_3-u_1)(u_3-u_2)D_3,$$

где

$$D_{1,2,3} = [(a^2+u_{1,2,3})(b^2+u_{1,2,3})(c^2+u_{1,2,3})]^{-1},$$

причем $c > b > a$, $-b^2 < u_2 < -a^2$, $-a^2 < u_1 < \infty$. О частных случаях сплюснутого и вытянутого сфероидов см. § 28 и 29 гл. V.

4. Пусть три семейства ортогональных поверхностей заданы концентрическими сферами $u_1^2 = x^2+y^2+z^2$ и двумя семействами конусов: $x^2u_2^{-2} + y^2(u_2^2-b^2)^{-1} + z^2(u_2^2-c^2)^{-1} = 0$ и $x^2u_3^{-2} + y^2(u_3^2-b^2)^{-1} + z^2(u_3^2-c^2)^{-1} = 0$. Показать, что

$$h_1 = 1,\quad h_2^2 = u_1^2(u_2^2-u_3^2)[(u_2^2-b^2)(c^2-u_2^2)]^{-1}$$

и

$$h_3^2 = u_1^2(u_2^2-u_3^2)[(b^2-u_3^2)(c^2-u_3^2)]^{-1}.$$

5. Три семейства ортогональных поверхностей выражаются уравнениями: $x^2c^{-2}u_1^{-2} + y^2c^{-2}(u_1^2-1)^{-1} = 1$, $x^2c^{-2}u_2^{-2} - y^2c^{-2}(1-u_2^2)^{-1} = 1$ и $z = u_3$. Показать, что

$$h_1^2 = c^2(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-1)^{-1},$$

$$h_2^2 = c^2(u_1^2-u_2^2)(1-u_2^2)^{-1} \quad \text{и} \quad h_3 = 1.$$

6. Показать, что если ортогональные поверхности заданы уравнениями $y^2 = 4cu_1x + 4c^2u_1^2$, $y^2 = -4cu_2x + 4c^2u_2^2$ и $z = u_3$, то

$$h_1^2 = u_1^{-1}(u_1+u_2),\quad h_2^2 = u_2^{-1}(u_1+u_2),\quad h_3 = 1.$$

7. Показать, что если семейство ортогональных поверхностей задано уравнениями $z = c(u_1-u_2)$, $x^2+y^2 = 4c^2u_1u_2$ и $y = x\,\mathrm{tg}\,u_3$, то

$$h_1 = c[u_1^{-1}(u_1+u_2)]^{1/2},\quad h_2 = c[u_2^{-1}(u_1+u_2)]^{1/2} \quad \text{и} \quad h_3 = 2c(u_1u_2)^{1/2}.$$

8. Доказать, что в случае, когда ортогональные поверхности заданы уравнениями $(x^2+y^2)^{1/2} = c\,\mathrm{sh}\,u_1(\mathrm{ch}\,u_1-\cos u_2)^{-1}$, $y = x\,\mathrm{tg}\,u_3$ и $z = c\sin u_2(\mathrm{ch}\,u_1-\cos u_2)^{-1}$, коэффи-

циенты равны

$$h_1 = c\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1},$$

$$h_2 = h_1 \quad \text{и} \quad h_3 = c\,\mathrm{sh}\,u_1\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1}.$$

Эта система координат известна под названием тороидальной. Ортогональные поверхности представляют собой тороиды, сферы и плоскости.

9. Доказать, что для ортогональных поверхностей, заданных уравнениями $(x^2+y^2)^{1/2} = c \sin u_2\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1}$, $y = x\,\mathrm{tg}\,u_3$, $z = c\,\mathrm{sh}\,u_1\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1}$, коэффициенты равны

$$h_1 = c\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1}, \quad h_2 = h_1 \quad \text{и} \quad h_3 = c \sin u_2\,(\mathrm{ch}\,u_1 - \cos u_2)^{-1}.$$

Это—биполярные координаты, так как если $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$—векторы, направленные из точки P в точки $z = +c$ и $z = -c$, то $u_1 = \ln(r_2 r_1^{-1})$ и $\cos u_2 = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\, r_1^{-1} r_2^{-1}$.

10*. Пусть относительная диэлектрическая проницаемость среды меняется по закону $e^{-r/a}$, где r—расстояние от некоторой фиксированной точки. Требуется убедиться в том, что решением дифференциального уравнения для потенциала будет функция

$$a^2 r^{-2}\left[e^{-r/a} - 1 - ra^{-1} - r^2(2a^2)^{-1}\right]\cos\theta.$$

Найти потенциал внутри диэлектрического шара, помещенного в однородное поле при условии, что диэлектрическая проницаемость шара является вышеуказанной функцией расстояния от центра.

11*. Пусть в электрическом поле, созданном системой проводников с заданными потенциалами, диэлектрическая проницаемость среды ε произвольным образом изменилась, но так, что в любой точке среды величина ε по крайней мере не уменьшилась, и ее изменения были всюду малы. Доказать, что энергия поля при этом возросла.

12. Найти условие, при котором из семейства двухмерных эквипотенциальных линий $V_2 = f(z, y)$ можно путем вращения вокруг оси z образовать семейство эквипотенциальных поверхностей. Показать, что если это возможно, выражение для потенциала будет иметь вид

$$V = A \int e^{-\int F(V_2)\,dV_2}\,dV_2 + B, \quad \text{где} \quad F(V_2) = \frac{1}{y\,(\nabla V_2)^2}\,\frac{\partial V_2}{\partial y}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. III and XII, Berlin, 1927, 1928.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.

Peirce B. O., Newtonian Potential Function, Ginn, 1902.

Planck M. K. E. L., Theorie der Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

Глава IV

ДВУХМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Двухмерные поля и потенциалы. Задача о нахождении потенциала называется двухмерной тогда, когда все эквипотенциальные поверхности в поле цилиндрические, т. е. все они могут быть образованы путем перемещения бесконечной прямой линии параллельно некоторой фиксированной линии. Под единичным зарядом в этом случае мы будем понимать линейный заряд, равномерно распределенный вдоль некоторой оси и равный по величине одному кулону на метр. Как уже было показано [см. формулу (2.7)], напряженность поля, созданного линейным зарядом на расстоянии r от него, в однородном изотропном диэлектрике имеет лишь радиальную составляющую, равную

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}. \tag{4.1}$$

Отсюда, интегрируя, получаем выражение для потенциала

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r + C. \tag{4.2}$$

Ясно, что теперь уже нельзя положить потенциал равным нулю на бесконечности, так как это приведет к бесконечному значению постоянной C. Как правило, мы будем выбирать значения C так, чтобы по возможности упростить вычисления.

Строго говоря, задача о двухмерных электростатических полях не может возникнуть в действительности, так как все проводники имеют конечные размеры. Однако существует очень много важных задач о нахождении поля в системе параллельных цилиндрических проводников, длина которых значительно превышает расстояния между ними, так что вдали от краев, где краевые эффекты сказываются несущественно, такую задачу можно трактовать как двухмерную.

§ 2. Круговые гармоники. Термин «гармоника» в наиболее общем смысле этого слова употребляется по отношению к любому решению уравнения Лапласа. Обычно, однако, его применяют к более узкому классу решений, именно к таким решениям, которые можно в определенных координатных системах записать в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Решение задачи, удовлетворяющее заданным граничным условиям, образуется путем суммирования некоторого числа таких гармоник, взятых с надлежащими коэффициентами.

В обычных цилиндрических координатах, описанных в § 6 гл. III, цилиндрические гармоники записываются в виде

$$V = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z). \tag{4.3}$$

В частном случае, когда функция $Z(z)$ — постоянная величина, задача сводится к двухмерной и гармоники называются круговыми. В дальнейшем

мы будем вместо ρ употреблять r, а вместо φ употреблять θ. В этих обозначениях уравнение Лапласа (3.18) для однородной изотропной диэлектрической среды, если его умножить на r^2, примет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0. \tag{4.4}$$

Будем искать его решения в виде

$$V=R(r)\,\Theta(\theta). \tag{4.5}$$

Подставляя решение (4.5) в уравнение (4.4), получим

$$\frac{1}{R}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}=0.$$

Очевидно, что этому уравнению удовлетворяют решения следующих уравнений:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-n^2\Theta, \tag{4.6}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}=n^2\frac{R}{r^2}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.6) является уравнением гармонического осциллятора; его решением будет

$$\Theta=A\cos n\theta+B\sin n\theta. \tag{4.8}$$

Легко убедиться, что решением уравнения (4.7) при $n\neq 0$ является функция

$$R=Cr^n+Dr^{-n}, \tag{4.9}$$

а при $n=0$

$$\Theta=A\theta+B, \tag{4.10}$$

$$R=C\ln r+D. \tag{4.11}$$

Число n называется показателем гармоники. Круговые гармоники бывают с показателем, равным нулю,

$$V=(A\theta+B)(C\ln r+D), \tag{4.12}$$

и с показателем, отличным от нуля,

$$V=(A\cos n\theta+B\sin n\theta)(Cr^n+Dr^{-n}). \tag{4.13}$$

Сумма таких гармоник, взятых с различными множителями для каждого n, или интеграл по n тоже, очевидно, являются решением уравнения (4.4)

$$V=\sum_n \Theta_n R_n \quad \text{или} \quad V=\int f(n)\,\Theta_n R_n\,dn. \tag{4.14}$$

Следует заметить, что мы не накладывали никаких ограничений на значение n.

Если для любых значений θ при n — целых числах, имеет место равенство

$$\sum(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=\sum(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta), \tag{4.15}$$

то из него вытекает, что

$$A_n=C_n \quad \text{и} \quad B_n=D_n \tag{4.16}$$

Чтобы доказать это утверждение, необходимо помножить правую и левую части равенства (4.15) на $\cos m\theta$, а затем проинтегрировать в пределах от 0 до 2π, что даст

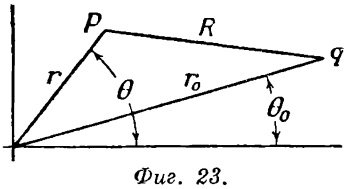
$$\sum\left(A_n\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta+B_n\int_0^{2\pi}\sin n\theta\cos m\theta\,d\theta\right)=$$
$$=\sum\left(C_n\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta+D_n\int_0^{2\pi}\sin n\theta\cos m\theta\,d\theta\right).$$

Все члены, для которых $m\neq n$, равны нулю (см. Двайт, стр. 445 и 465). При $m=n$ (см. Двайт, 450.11 и 858.4) мы имеем

$$\tfrac{1}{2}\pi A_n=\tfrac{1}{2}\pi C_n.$$

При помощи аналогичной процедуры, используя только $\sin m\theta$, легко доказать, что $B_n=D_n$.

§ 3. Представление потенциала поля линейного заряда в виде ряда по гармоникам. При использовании круговых гармоник часто бывает необходимо иметь разложение потенциала поля линейного заряда, координаты которого мы обозначим через r_0, θ_0. Пусть R — расстояние между линейным зарядом q и точкой P (фиг. 23). Тогда, полагая в выражении (4.2) постоянную C равной нулю, для потенциала V в точке P имеем



Фиг. 23.

$$4\pi\varepsilon V=-2q\ln R=-q\ln\left[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)\right]=$$
$$=-2q\ln r-q\ln\left[1-\frac{r_0}{r}e^{j(\theta-\theta_0)}\right]\left[1-\frac{r_0}{r}e^{-j(\theta-\theta_0)}\right]$$

При $r_0<r$ (Двайт, 601) получаем

$$-2q\ln r+q\left\{\frac{r_0}{r}\left[e^{j(\theta-\theta_0)}+e^{-j(\theta-\theta_0)}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left[e^{j2(\theta-\theta_0)}+e^{-j2(\theta-\theta_0)}\right]+\dots\right\}=$$
$$=-2q\left[\ln r-\frac{r_0}{r}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\cos 2(\theta-\theta_0)-\dots\right]$$

Перепишем это в виде суммы, разложив $\cos n(\theta-\theta_0)$ (см. Двайт, 401.04), тогда

$$V=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n(\cos n\theta_0\cos n\theta+\sin n\theta_0\sin n\theta)-\ln r\right] \qquad (4.17)$$

Это справедливо для $r>r_0$. Соответствующее выражение для $r<r_0$ можно получить из (4.17), если в нем поменять местами r и r_0, а именно:

$$V=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n(\cos n\theta_0\cos n\theta+\sin n\theta_0\sin n\theta)-\ln r_0\right] \qquad (4.18)$$

Это и есть искомые нами разложения.

§ 4. Проводящий или диэлектрический цилиндр в однородном поле. В качестве примера, в котором используются граничные условия на поверхности металла и на границе раздела двух диэлектриков, рассмотрим задачу о бесконечном проводящем цилиндре радиуса a, покрытом слоем диэлектрика

$a \leqslant r \leqslant b$ с относительной проницаемостью K и помещенном в однородное электрическое поле E, перпендикулярное к оси цилиндра. Потенциал этого первоначального поля вне цилиндра можно представить в виде

$$V = Ex = Er\cos\theta.$$

Потенциал, обусловленный индуцированными зарядами в цилиндре, должен исчезать на бесконечности, поэтому выражение для него не может содержать членов типа r^n. Кроме того, поскольку этот потенциал должен быть симметричным относительно оси x, в выражении отсутствуют члены, содержащие $\sin n\theta$. Таким образом, окончательное выражение для потенциала вне цилиндра должно иметь вид

$$V_0 = Er\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n}\cos n\theta. \tag{4.19}$$

Потенциал поля внутри диэлектрического слоя также не может содержать членов вида $\sin n\theta$, но члены r^n и r^{-n} могут в него входить, так как значения $r = 0$ и $r = \infty$ находятся вне пределов этого слоя

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n})\cos n\theta. \tag{4.20}$$

Если начало координат выбрано на оси цилиндра, то потенциал проводника $V = 0$. Таким образом, мы нашли решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие условиям на бесконечности и обладающие симметрией относительно оси x. Теперь необходимо удовлетворить граничным условиям на поверхности металла и на границе раздела двух диэлектриков, что позволит определить коэффициенты A_n, B_n и C_n. Граничными условиями при $r = b$, согласно соотношениям (1.48) и (1.49), будут

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V_0}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial V_i}{\partial r} \quad \text{или} \quad \frac{\partial V_0}{\partial r} = K\frac{\partial V_i}{\partial r} \quad \text{и} \quad V_0 = V_i. \tag{4.21}$$

Подстановка выражений (4.19) и (4.20) в уравнение (4.21) дает

$$E\cos\theta - \sum nA_n b^{-n-1}\cos n\theta = K\sum n(B_n b^{n-1} - C_n b^{-n-1})\cos n\theta,$$

$$Eb\cos\theta + \sum A_n b^{-n}\cos n\theta = \sum (B_n b^n + C_n b^{-n})\cos n\theta.$$

Для $n \neq 1$ из соотношений (4.16) мы имеем

$$-A_n b^{-n-1} = KB_n b^{n-1} - KC_n b^{-n-1}, \tag{4.22}$$

$$A_n b^{-n} = B_n b^n + C_n b^{-n}. \tag{4.23}$$

На поверхности проводника $r = a$, $V_i = 0$, поэтому

$$0 = B_n a^n + C_n a^{-n}. \tag{4.24}$$

Умножая уравнение (4.22) на b и складывая с (4.23), получаем

$$(K+1)B_n = (K-1)C_n b^{-2n}. \tag{4.25}$$

Системе уравнений (4.24) и (4.25) можно удовлетворить, либо полагая $B_n = C_n$ 0, либо $(K+1)/(K-1) = -(a/b)^{2n}$. Последнее, однако, невозможно в силу независимости величин K и a. Поэтому, учитывая первое соотношение и подставляя его в уравнение (4.23), имеем

$$A_n = B_n = C_n = 0. \tag{4.26}$$

Для $n=1$ вместо уравнений (4.22) — (4.24) получаем

$$E-A_1b^{-2}=KB_1-KC_1b^{-2},$$
$$E+A_1b^{-2}=B_1+C_1b^{-2},$$
$$0=B_1a+C_1a^{-1}.$$

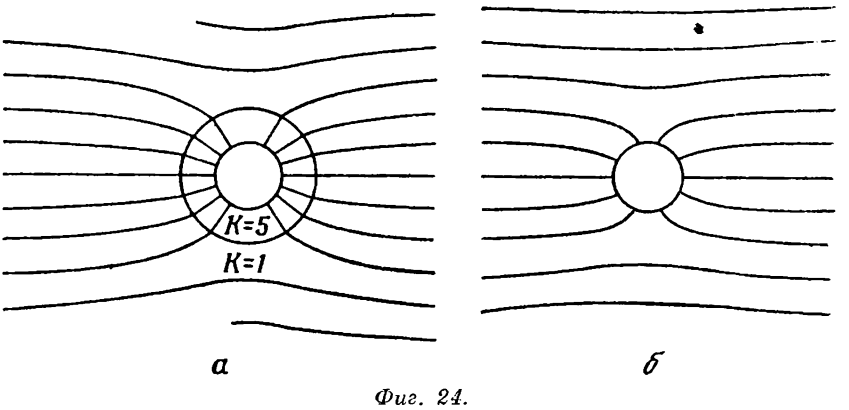
Решая эти уравнения относительно A_1, B_1 и C_1, имеем

$$A_1=-Eb^2\frac{(K+1)a^2+(K-1)b^2}{(K+1)b^2+(K-1)a^2},$$
$$B_1=\frac{2Eb^2}{(K+1)b^2+(K-1)a^2}, \qquad (4.27)$$
$$C_1=\frac{-2Ea^2b^2}{(K+1)b^2+(K-1)a^2}.$$

Следовательно, потенциалы (4.19) и (4.20) соответственно равны

$$V_0=\left(Er+\frac{A_1}{r}\right)\cos\theta, \quad V_i=\left(B_1r+\frac{C_1}{r}\right)\cos\theta. \qquad (4.28)$$

На фиг. 24,*а* показаны линии электрической индукции.



Фиг. 24.

Полагая в соотношениях (4.27) $K=1$, мы получим решение для металлического цилиндра радиуса a

$$A_1=C_1=-Ea^2, \quad B_1=E,$$
$$V_0=E\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta. \qquad (4.29)$$

Поле для этого случая показано на фиг. 24,*б*.

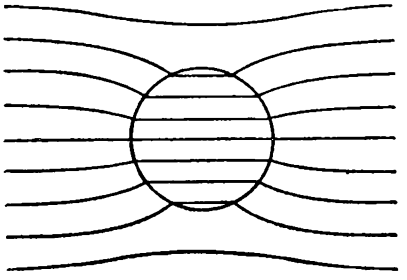
Решение для диэлектрического цилиндра радиуса b получим, если положим в соотношениях (4.27) $a=0$

$$A_1=-\frac{K-1}{K+1}b^2E, \quad B_1=\frac{2E}{K+1}, \quad C_1=0,$$
$$V_0=E\left(r-\frac{K-1}{K+1}\frac{b^2}{r}\right)\cos\theta, \quad V_i=\frac{2E}{K+1}r\cos\theta. \qquad (4.30)$$

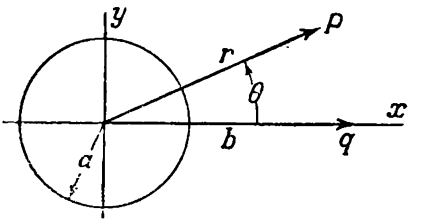
Заметим, что внутри диэлектрического цилиндра поле однородно. Линии индукции изображены на фиг. 25 для $K=5$.

§ 5. Диэлектрический цилиндр. Метод изображений. Рассмотрим теперь, как влияет диэлектрический цилиндр радиуса a на поле линейного

заряда q, расположенного в точке $r=b$, $\theta=0$ (см. фиг. 26). Потенциал, обусловленный самим линейным зарядом, определяется по формуле (4.18), в которой нужно положить $r_0=b$, $\theta_0=0$. К нему необходимо добавить потенциал, обусловленный поляризацией диэлектрика. Этот потенциал должен исчезать на бесконечности и быть симметричным относительно оси x. Таким



Фиг. 25.



Фиг. 26.

образом, полный потенциал в области $a<r<b$ равен

$$V_0=\frac{q}{2\pi\varepsilon_v}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{r}{b}\right)^n+\frac{A_n}{r^n}\right]\cos n\theta-\ln b+C_1\right\} \tag{4.31}$$

Так как потенциал внутри цилиндра остается конечным при $r=0$ и симметричным относительно оси x, его можно представить в виде

$$V_i=\frac{q}{2\pi\varepsilon_v}\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^n\cos n\theta+C_2\right) \tag{4.32}$$

Полагая $V_0=V_i$ при $r=a$, получим

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{A_n}{a^n}=a^nB_n \quad \text{и} \quad C_2=-\ln b+C_1. \tag{4.33}$$

Кроме того, $\varepsilon_v(\partial V_0/\partial r)=\varepsilon(\partial V_i/\partial r)$ при $r=a$ или $(\partial V_0/\partial r)=K(\partial V_i/\partial r)$, что дает

$$\frac{a^{n-1}}{b^n}-\frac{n}{a^{n+1}}A_n=nKa^{n-1}B_n. \tag{4.34}$$

Решим уравнения (4.33) и (4.34) относительно A_n и B_n:

$$A_n=\frac{1-K}{1+K}\frac{a^{2n}}{nb^n}, \qquad B_n=\frac{2}{(1+K)nb^n}.$$

Итак, для потенциала вне цилиндра имеем

$$V_0=\frac{q}{2\pi\varepsilon_v}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^n+\frac{1-K}{1+K}\left(\frac{a^2}{b}\right)^n\frac{1}{r^n}\right]\cos n\theta-\ln b+C_1\right\}, \tag{4.35}$$

и внутри цилиндра —

$$V_i=\frac{q}{\pi\varepsilon_v(1+K)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{b}\right)^n\cos n\theta-\frac{q}{2\pi\varepsilon_v}(\ln b-C_1). \tag{4.36}$$

Если теперь положить

$$C_1=0=-\frac{1-K}{1+K}\ln r+\frac{1-K}{1+K}\ln r,$$

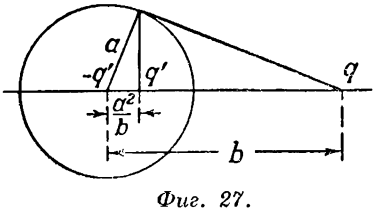
то выражение (4.35) в точности совпадает с формулами разложения потенциала (4.17) и (4.18), создаваемого тремя линейными зарядами, расположенными на оси x: зарядом q' в точке $x=a^2/b$, зарядом $-q'$ в точке $x=0$ и зарядом q в точке $x=b$. Точно так же потенциал (4.36) совпадает с потенциалом линейного заряда q'', расположенного в точке $x=b$, причем

$$q'=\frac{1-K}{1+K}q \quad \text{и} \quad q''=\frac{2}{1+K}q. \tag{4.37}$$

Таким образом, незаряженный диэлектрический цилиндр радиуса a, помещенный на расстоянии b от параллельного его оси линейного заряда q, по своему действию на поле вне цилиндра эквивалентен двум параллельным оси линейным зарядам, один из которых $(-q')$ распределен вдоль оси цилиндра, а другой (q') находится между линейным зарядом q и осью цилиндра на расстоянии a^2/b от последней. Этот заряд q' можно рассматривать как «изображение» заряда q в цилиндре радиуса a. Потенциал внутри цилиндра с точностью до постоянной совпадает с потенциалом поля в отсутствие цилиндра при замене линейного заряда q на q''. Некоторые авторы в числителе выражения для q'' вместо 2 ставят $2K$. Тогда потенциал внутри цилиндра нужно вычислять как потенциал линейного заряда q'' в однородном пространстве, заполненном диэлектриком с проницаемостью K.

Отсюда следует, что при внесении диэлектрического цилиндра в любое электрическое поле, созданное любым двухмерным распределением линейных зарядов, параллельных оси цилиндра, структура этого поля внутри цилиндра не меняется, а напряженность поля уменьшается в $2/(K+1)$ раз.

§ 6. Изображение в проводящем цилиндре. Из соотношения (1.51) следует, что при $K\to\infty$ силовые линии подходят нормально к поверхности диэлектрика, что является граничным условием на поверхности проводника. Поэтому закон изображения в проводящем незаряженном цилиндре можно получить, положив в формуле (4.37) $K\to\infty$; это дает $q'=-q$. Таким образом, если линейный заряд q расположен параллельно оси незаряженного проводящего цилиндра радиуса a на расстоянии b от нее, то дополнительный потенциал вне цилиндра, обусловленный присутствием цилиндра, совпадает с потенциалом поля, создаваемого двумя параллельными линейными зарядами, один из которых равен q и распределен вдоль оси, а другой равен $-q$ и находится между линейным зарядом q и осью на расстоянии a^2/b от последней.



Фиг. 27.

Как это показано на фиг. 27, для определения положения изображения необходимо из точки q провести касательную к диэлектрическому или проводящему цилиндру. Тогда перпендикуляр, опущенный из точки касания на линию $-qq'$, пересечет последнюю в искомой точке q'.

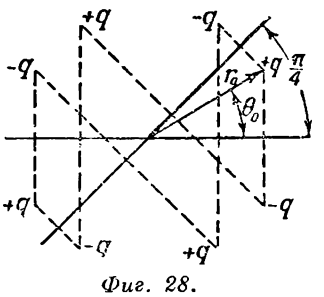
§ 7. Изображение в плоской поверхности проводника или диэлектрика. Пересекающиеся проводящие плоскости. Устремим радиус цилиндра к бесконечности, сохраняя постоянным расстояние $d=b-a$ между линейным зарядом и поверхностью цилиндра. Тогда расстояние между изображением q' и этой поверхностью будет

$$a-a^2b^{-1}=ab^{-1}(b-a)\to d.$$

Таким образом, полученный нами закон изображения можно распространить и на случай линейного заряда, расположенного параллельно

плоской поверхности полубесконечной диэлектрической среды или проводящей пластинки. Изображенный заряд располагается на таком же расстоянии от поверхности, что и действительный, но только по другую сторону от нее. Для проводника $q' = -q$, для диэлектрика q' и q'' определяются из выражения (4.37).

Из фиг. 28 очевидно, что две плоскости, пересекающиеся в начале координат под углом π/m, где m — целое число, будут являться эквипотенциальными плоскостями в поле линейных зарядов, параллельных линии пересечения плоскостей и расположенных на поверхности цилиндра $r = r_0$ под углами θ_0, $2\pi m^{-1} + \theta_0$, $4\pi m^{-1} + \theta_0, \ldots, 2(m-1)\pi m^{-1} + \theta_0$ (заряды $+q$) и $2\pi m^{-1} - \theta_0$, $4\pi m^{-1} - \theta_0, \ldots, 2\pi - \theta_0$ (заряды $-q$).



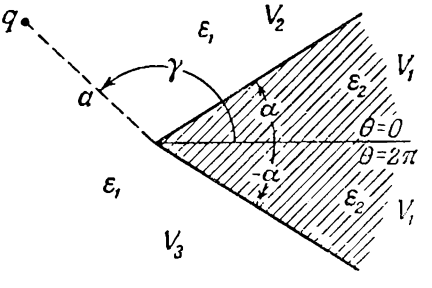
Фиг. 28.

§ 8. **Задача о диэлектрическом клине.** Уравнение (4.4) имеет еще одно решение, соответствующее значениям $n \neq 0$. Для получения его необходимо в соотношениях (4.6) — (4.9) постоянную n заменить на jn. Тогда

$$\Theta_n = A \operatorname{ch} n\theta + B \operatorname{sh} n\theta, \tag{4.38}$$

$$R_n = C'_{1,2} r^{\pm jn} = C'_{1,2} e^{\pm jn \ln r} = C \cos(n \ln r) + D \sin(n \ln r). \tag{4.39}$$

Это решение периодично не по θ, а по $\ln r$, поэтому в интеграле и в ряде (4.14) взаимно ортогональными будут теперь функции R_n, а не Θ_n. Эти гармоники можно использовать при решении задачи о диэлектрическом клине, ограниченном двумя плоскостями $\theta = -\alpha$ и $\theta = \alpha$, имеющем диэлектрическую проницаемость ε_2 и находящемся в поле линейного заряда q, распределенного вдоль линии $\theta = \gamma$, $r = a$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 (см. фиг. 29). Поскольку в такой системе отсутствуют цилиндрические границы, на которых должны исчезать члены, содержащие синусы или косинусы в решении (4.39), нельзя ограничиваться дискретными значениями n, а следует считать n меняющимся непрерывно, и поэтому решение задачи искать по форме интеграла (4.14). Обозначим величину $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ через β и запишем потенциалы в виде



Фиг. 29.

$$V_1 = (1 + \beta) \int_0^\infty [A(k) e^{k\theta} + B(k) e^{-k\theta}] \cos\left[k \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] dk + C_0, \tag{4.40}$$

$$V_2 = \int_0^\infty [C(k) e^{k\theta} + D(k) e^{-k\theta}] \cos\left[k \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] dk + C_0, \tag{4.41}$$

$$V_3 = \int_0^\infty [E(k) e^{k\theta} + F(k) e^{-k\theta}] \cos\left[k \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] dk + C_0, \tag{4.42}$$

где V_1 относятся к области $-\alpha < \theta < \alpha$, V_2 — к области $\alpha < \theta < \gamma$ и V_3 — к области $\gamma < \theta < 2\pi - \alpha$. Постоянную C_0 можно выбрать так, чтобы потенциал V равнялся нулю в любой заданной точке. Если в качестве такой

точки выбрать точку $r=a$, $\theta=0$, то постоянная C_0 будет равна величине

$$-(1+\beta)\int_0^\infty [A(k)+B(k)]\,dk.$$

Окружность $r=a$ проходит через точку q и является силовой линией, потому что всюду вдоль нее $\partial V/\partial r=0$. Отсюда следует, что половина полного потока индукции приходится на долю силовых линий, уходящих в бесконечность, другая же половина связана с силовыми линиями, оканчивающимися в точке $r=0$, где, таким образом, находится заряд $-\frac{1}{2}q$. По теореме об интегралах Фурье, если два из интегралов вида (4.40)—(4.42) равны между собой при любых значениях $\ln(r/a)$, то равны между собой и их подинтегральные функции. Используя граничные условия (1.48) и (1.49) при $\theta=\alpha$, после некоторых преобразований подинтегральных выражений для V_1 и V_2 получим

$$C=A+\beta e^{-2k\alpha}B, \qquad D=\beta e^{2k\alpha}A+B. \tag{4.43}$$

Аналогичная процедура для V_1 при $\theta=-\alpha$ и для V_3 при $\theta=2\pi-\alpha$ дает

$$E=(A+\beta Be^{2k\alpha})\,e^{-2k\pi}. \qquad F=(\beta Ae^{-2k\alpha}+B)\,e^{2k\pi}. \tag{4.44}$$

Теперь остается удовлетворить еще одному условию при $\theta=\gamma$. Для этого напишем выражение для плотности потока индукции сквозь плоскость $\theta=\gamma$

$$\frac{\varepsilon_1}{r}\left(\frac{\partial V_2}{\partial\theta}-\frac{\partial V_3}{\partial\theta}\right)=\frac{\varepsilon_1}{r}\int_0^\infty k\,[Ce^{k\gamma}-De^{-k\gamma}-Ee^{k\gamma}+Fe^{-k\gamma}]\cos\left(k\ln\frac{r}{a}\right)dk.$$

Умножим обе части на $\cos[t\ln(r/a)]\,dr$ и проинтегрируем в пределах от $r=0$ до $r=\infty$. Тогда выражение, стоящее слева, по теореме Гаусса равно q, так как интегральная функция отлична от нуля только вблизи $r=a$; правая же часть находится по теореме о разложении в интеграл Фурье. В результате получим

$$q=\frac{1}{2}\pi\varepsilon_1 k\,[(C-E)\,e^{k\gamma}-(D-F)\,e^{-k\gamma}].$$

Кроме того, V_2^D равно V_3^D при $\theta=\gamma$, поэтому

$$(C-E)\,e^{k\gamma}=-(D-F)\,e^{-k\gamma}.$$

Исключив D и F или C и E из этих уравнений, получим

$$C=E+\frac{q}{\pi\varepsilon_1 k}e^{-k\gamma}, \qquad D=F-\frac{q}{\pi\varepsilon_1 k}e^{k\gamma}. \tag{4.45}$$

Из выражений (4.43)—(4.45) для A и B имеем

$$A,\,B=\frac{q\,[e^{\mp k(\gamma-\pi)}\operatorname{sh}k\pi-e^{\pm k(\gamma-\pi)}\operatorname{sh}k(\pi-2\alpha)]}{2\pi\varepsilon_1 k\,[\operatorname{sh}^2 k\pi-\beta^2\operatorname{sh}^2 k(\pi-2\alpha)]}, \tag{4.46}$$

где верхние знаки относятся к A, а нижние — к B. В частном случае, когда система симметрична относительно плоскости $\gamma=\pi$, потенциал внутри диэлектрического клина равен

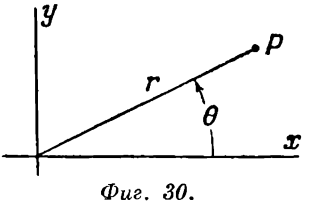
$$V_1=\frac{q(1+\beta)}{\pi\varepsilon_1}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}k\theta\cos[k\ln(r/a)]-1}{k\,[\operatorname{sh}k\pi+\beta\operatorname{sh}k(\pi-2\alpha)]}\,dk. \tag{4.47}$$

Подинтегральное выражение остается конечным при $k=0$ и экспоненциально убывает с ростом k. Построив график этой функции в зависимости от k, можно вычислить интеграл (4.47) при помощи планиметра. Если существует только один заряд в точке $r=a$, $\theta=\gamma$, то члены, обусловленные зарядом $-\frac{1}{2}q$, расположенным в начале координат, и входящие в решение (4.40)—(4.42), можно исключить из него путем добавления к V_1, V_2 и V_3 члена

$$\frac{1}{4}q\ln\frac{r}{a}[\alpha(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\pi\varepsilon_1]^{-1}. \tag{4.48}$$

Если на некотором цилиндре $r=b$ потенциал поддерживается равным нулю, то решение находится в виде суммы двух решений: одного для линейного заряда q, расположенного в точке $r=a$, $\theta=\gamma$, а другого — для линейного заряда $-q$, расположенного в точке $r=b^2/a$, $\theta=\gamma$. Если же нулевой потенциал имеют два цилиндра $r=b$ и $r=c$, то необходимо применять дискретный набор величин n в соотношении (4.39) и искать решение для потенциальной функции не в виде интеграла, а в виде ряда.

§ 9. Комплексные величины. Прежде чем переходить к сопряженным функциям и конформным преобразованиям, напомним вкратце некоторые наиболее важные свойства комплексных величин. Если $z=x+jy$, то очевидно, что каждой точке плоскости xy, называемой в связи с этим z-плоскостью, соответствует одно значение z. В полярных координатах (см. фиг. 30) величина z записывается в виде (Двайт, 408.04)



Фиг. 30.

$$z=x+jy=r\cos\theta+jr\sin\theta=re^{j\theta}. \tag{4.49}$$

Длина вектора r называется модулем z и обозначается через $|z|$. Угол θ называют аргументом, амплитудой[1]), фазой или углом z. При возведении комплексного числа z в степень n получается

$$z^n=r^ne^{jn\theta}, \tag{4.50}$$

т. е. модуль величины z^n равен n-й степени модуля z, а аргумент z^n равен аргументу z, помноженному на n. Аналогично и для произведения двух комплексных чисел

$$zz_1=rr_1e^{j(\theta+\theta_1)}, \tag{4.51}$$

т. е. модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме их аргументов. Заменив теперь в формуле (4.51) z_1 на z_1^{-1}, получаем, что модуль частного от деления двух комплексных чисел равен частному от деления их модулей, а аргумент равен разности их аргументов.

Пусть $z_1=x_1+jy_1=f(z)=f(x+jy)$, тогда величина $z_1^*=x_1-jy_1=f(x-jy)$ называется комплексно-сопряженной z. Последнее соотношение, имеющее место для аналитических функций, можно доказать путем разложения функции $f(x\pm jy)$ в степенной ряд с действительными коэффициентами: всюду, где $\pm j$ возводится в четную степень, соответствующий член

[1]) Этот термин широко употребляется математиками для обозначения угла θ. Однако амплитудой называют также максимальное отклонение некоторой переменной величины, например в теории переменных токов. В этом случае при использовании комплексных обозначений амплитуда практически совпадает с модулем соответствующей комплексной величины.

ряда будет действительным и одинаковым при любом знаке перед j, там же, где $\pm j$ возводится в нечетную степень, соответствующий член ряда будет чисто мнимым, а знак перед j остается прежним. Для $|z_1|^2$ имеем

$$|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = z_1 z_1^* = f(x+jy) f(x-jy).$$

Таким образом, для получения модуля функции комплексной переменной необходимо помножить эту функцию на комплексно-сопряженную ей и извлечь квадратный корень.

§ 10. Сопряженные функции. Напишем двухмерное уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{4.52}$$

Это уравнение второго порядка в частных производных. Его общее решение должно содержать две произвольные функции и, как легко убедиться путем дифференцирования, может быть записано в виде

$$U = \Phi(x+jy) + \Psi(x-jy).$$

Заметим, что для того, чтобы Φ и Ψ были решениями уравнения (4.52), они должны иметь конечные производные в той области, где справедливо это уравнение, и, следовательно, должны являться аналитическими функциями, т. е. функциями, разлагаемыми в степенной ряд[1]). Величина U, являющаяся электростатическим потенциалом, должна быть действительной, что возможно только, если мнимая часть Φ равна по величине и противоположна по знаку мнимой части Ψ, т. е. если $\Phi(x+jy) = u + jv$, а $\Psi(x-jy) = w - jv$, где u, v, w — действительные величины. Аналитические функции Φ и Ψ разлагаются в степенной ряд

$$\Phi(x+jy) = \Phi(re^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n e^{jn\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + j \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta,$$

$$\Psi(x-jy) = \Psi(re^{-j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n e^{-jn\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \cos n\theta - j \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta.$$

В силу того, что мнимые части Φ и Ψ равны по величине и противоположны по знаку при любых θ, мы получаем, что $A_n = B_n$ [см. соотношение (4.16)], и, следовательно, реальные части этих функций в точности равны между собой, т. е. $u = w$. Поэтому $U = 2u$.

Пусть V — другая действительная величина, такая, что $V = 2v$, тогда

$$U + jV = 2(u + jv) = 2\Phi(x+jy) = f(x+jy). \tag{4.53}$$

Функция V также удовлетворяет уравнению Лапласа, что можно показать, либо воспользовавшись написанным выше разложением, являющимся разложением в ряд по круговым гармоникам, либо путем умножения выражения (4.53) на $-j$:

$$V - jU = -jf(x+jy) = F(x+jy).$$

Отсюда ясно, что V равна реальной части функции $F(x+jy)$, точно так же как U является реальной частью функции $f(x+jy)$. В дальнейшем мы будем $U + jV$ обозначать через W, а $x + jy$ через z, т. е.

$$W = f(z). \tag{4.54}$$

Функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ называются сопряженными.

---

[1]) Whittaker, Watson, Modern Analysis, Ch. V. (См. перевод Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, 1933, ч. I, гл. V.)

§ 11. Функции потока. Продифференцируем выражение (4.54) по x и y:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}+j\frac{\partial V}{\partial x}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=f'(z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}+j\frac{\partial V}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=jf'(z).$$

Умножим второе соотношение на j и прибавим к нему первое, тогда из равенства нулю реальной и мнимой частей суммы получим

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}\quad\text{и}\quad\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{4.55}$$

Но это есть условие взаимной ортогональности семейств кривых $U(x, y)=$ $=\text{const}$ и $V(x, y)=\text{const}$. Как мы уже видели, любое из этих семейств можно выбрать в качестве эквипотенциальных линий; тогда функция, описывающая это семейство, называется потенциальной. Другое же семейство кривых, ортогонально пересекающееся с первым, будет представлять в этом случае силовые линии. Функция, соответствующая этому семейству, называется функцией потока.

§ 12. Напряженность электрического поля. Поток электрической индукции. Рассмотрим производную

$$\frac{dW}{dz}=\frac{dU+j\,dV}{dx+j\,dy}=\frac{(\partial U/\partial x)\,dx+(\partial U/\partial y)\,dy+j\,[(\partial V/\partial x)\,dx+(\partial V/\partial y)\,dy]}{dx+j\,dy}.$$

В соответствии с соотношениями (4.55) заменим $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$, тогда

$$\frac{dW}{dz}=\frac{(\partial V/\partial y)\,(dx+j\,dy)+j\,(\partial V/\partial x)\,(dx+j\,dy)}{dx+j\,dy}=\frac{\partial V}{\partial y}+j\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}-j\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{4.56}$$

Таким образом, если в качестве потенциальной функции выбрана V, то мнимая часть выражения dW/dz равна x-составляющей напряженности электрического поля, а реальная часть dW/dz равна его y-составляющей. Независимо от того, выбрана ли в качестве потенциальной функции U или V, амплитуда вектора E в данной точке определяется модулем функции dW/dz в этой точке. Обозначим через dn элемент длины в направлении максимального увеличения потенциала, а через ds — элемент длины в направлении, полученном при повороте dn на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, тогда из соотношений (4.56) получим

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|=\frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial s}\quad\text{или}\quad\left|\frac{dW}{dz}\right|=\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{\partial U}{\partial s} \tag{4.57}$$

в зависимости от того, являются ли потенциальными функциями U или V Пусть, например, V — потенциальная функция. Найдем поток индукции сквозь произвольный участок эквипотенциальной поверхности, ограниченный кривыми U_1 и U_2. Для этого воспользуемся формулой (1.27):

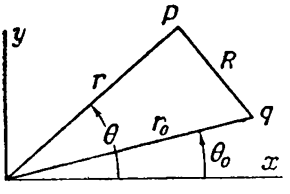
$$\text{Поток}=-\varepsilon\int_{U_1}^{U_2}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds=\varepsilon\int_{U_1}^{U_2}\frac{\partial U}{\partial s}\,ds=\varepsilon\,(U_2-U_1). \tag{4.58}$$

Таким образом, подобно тому как разность потенциалов между любыми двумя точками определяется разностью значений потенциальных функций в этих двух точках, так и полный поток индукции, проходящий сквозь линию, соединяющую две произвольные точки в поле, равен произведению диэлектрической проницаемости ε на разность значений функции потока в этих двух точках.

Если поверхности V_1 и V_2 являются замкнутыми и если при этом все заряды расположены на одной стороне одной из поверхностей и на противоположной стороне другой поверхности, то в области между V_1 и V_2 все силовые линии проходят от одной поверхности к другой и, следовательно, такая система, как это следует из § 2 гл. II, образует конденсатор. Заряд Q на любой из поверхностей равен полному потоку сквозь нее (на единицу длины). Из выражения (4.58) этот поток определяется как произведение ε на приращение U за один оборот вдоль кривой V (обозначим это приращение через $[U]$). Поскольку разность потенциалов равна $|V_2 - V_1|$, то емкость в случае вакуума будет

$$C = \frac{|Q|}{|V_2 - V_1|} = \frac{\varepsilon |U|}{|V_2 - V_1|}. \tag{4.59}$$

§ 13. Функции U и V для поля линейного заряда. Прежде чем приступать к описанию общих методов нахождения функции $f(x+jy)$, рассмотрим один из наиболее простых примеров, когда вид этой функции почти очевиден. В полярных координатах (Двайт, 408.04) для величины z мы имеем



Фиг. 31.

$$z = x + jy = r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta}. \tag{4.60}$$

По формуле (4.2) потенциал линейного заряда, расположенного в начале координат, равен $U = -\frac{1}{2}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln r$. Ясно, что это выражение является реальной частью $-\frac{1}{2}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln z$, поэтому искомую нами функцию можно записать в виде

$$W = U + jV = -\frac{q\ln z}{2\pi\varepsilon} = -\frac{q\ln r}{2\pi\varepsilon} - \frac{jq\theta}{2\pi\varepsilon} =$$

$$= -\frac{q\ln(x+jy)}{2\pi\varepsilon} = -\frac{q\ln(x^2+y^2)^{1/2}}{2\pi\varepsilon} - \frac{jq\operatorname{arctg}(y/x)}{2\pi\varepsilon}. \tag{4.61}$$

Для проверки будем менять угол θ от 0 до -2π (см. фиг. 31). Тогда функция εV будет пробегать значения от 0 до q и, следовательно, полный поток индукции, создаваемый линейным зарядом q, равен q, как это и требуется в § 12 настоящей главы.

Нетрудно теперь написать выражение для $f(z)$ в случае линейного заряда, расположенного в произвольной точке r_0, θ_0 или z_0. Потенциал такого заряда равен

$$U = -\frac{1}{2}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln R = -\frac{1}{4}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)] =$$

$$= -\frac{1}{4}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln[(r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2 + (r\sin\theta - r_0\sin\theta_0)^2] =$$

$$= -\frac{1}{2}q(\pi\varepsilon)^{-1}\ln(A^2+B^2)^{1/2}.$$

Но из формулы (4.61), заменив в ней x на A и y на B, мы видим, что $\ln(A^2+B^2)^{1/2}$ является реальной частью $\ln(A+jB)$, поэтому искомая функция имеет вид

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln(A+jB) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln(re^{j\theta} - r_0e^{j\theta_0}) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln(z - z_0). \tag{4.62}$$

В случае n линейных зарядов, расположенных в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, функция W будет равна

$$W = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\sum_{s=1}^{n} q_s \ln(z - z_s). \tag{4.63}$$

§ 14. Емкость между двумя круглыми цилиндрами. В § 6 мы видели, что эквипотенциальные поверхности в поле двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку линейных зарядов представляют собой круглые цилиндры. Рассмотрим поле, создаваемое двумя линейными зарядами: зарядом $2\pi\varepsilon$, расположенным в точке $y = a$, и зарядом $-2\pi\varepsilon$, расположенным в точке $y = -a$. Такой выбор величины q упрощает коэффициенты. Выражение (4.63) для W можно несколько видоизменить, а именно (Двайт, 601.2 и 505.1):

$$W = \ln\frac{z + ja}{z - ja} = 2j \operatorname{arctg}\frac{a}{z} = 2j \operatorname{arcctg}\frac{z}{a}. \tag{4.64}$$

Решая это уравнение относительно z (Двайт, 408.19), имеем

$$z = a \operatorname{ctg}\frac{U + jV}{2j} = \frac{-a\sin(U/j) + a\sin V}{\cos(U/j) - \cos V}.$$

Выделим теперь отдельно действительные и мнимые части:

$$x = \frac{a\sin V}{\operatorname{ch} U - \cos V}, \qquad y = \frac{a \operatorname{sh} U}{\operatorname{ch} U - \cos V}. \tag{4.65}$$

Исключив из этих уравнений V, получим

$$x^2 + y^2 - 2ay \operatorname{cth} U + a^2 = 0, \tag{4.66}$$

что можно записать следующим образом:

$$x^2 + (y - a \operatorname{cth} U)^2 = a^2 \operatorname{cosech}^2 U. \tag{4.67}$$

Как и следовало ожидать, эквипотенциальные линии образуют семейство окружностей с центрами на оси y. При $y > 0$ значения потенциала положительны, а при $y < 0$ значения потенциала отрицательны. Если из уравнений (4.65) исключить U, то получим уравнение

$$x^2 - 2ax \operatorname{ctg} V + y^2 - a^2 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(x - a \operatorname{ctg} V)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 V \tag{4.68}$$

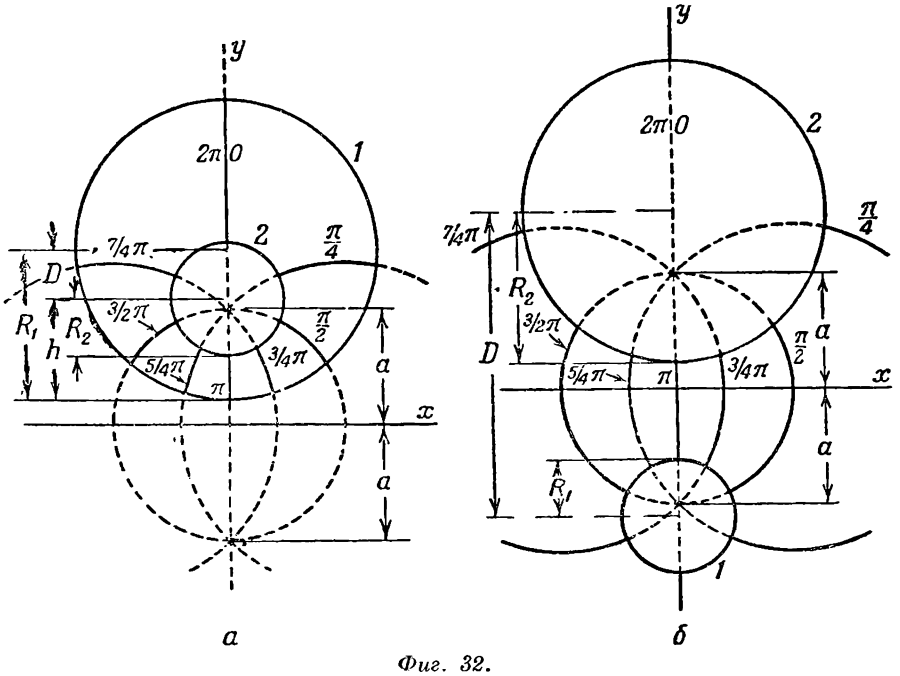
Итак, силовые линии тоже образуют семейство окружностей, проходящих через точки оси y ($y = +a$ и $y = -a$).

Для определения емкости (на единицу длины) между двумя цилиндрами $U = U_1$ и $U = U_2$ необходимо, как это следует из формулы (4.59), разделить заряд $2\pi\varepsilon$ на разность потенциалов $U_2 - U_1$. Пусть нам заданы радиусы этих двух цилиндров R_1 и R_2 и расстояние D между их осями. Сначала нужно выразить через них величины a, U_1 и U_2. Из уравнения (4.67) имеем $R_1 = a|\operatorname{cosech} U_1|$, $R_2 = a|\operatorname{cosech} U_2|$ и $D = a(|\operatorname{cth} U_1| \pm |\operatorname{cth} U_2|)$, причем нижний знак относится к случаю положительных значений и U_1 и U_2, т. е. когда один цилиндр находится внутри другого, а верхний знак соответствует случаю отрицательного значения U_1, т. е. когда ни один из цилиндров не охватывает другого. Руководствуясь далее этим правилом выбора знака, можно написать (Двайт, 651.02)

$$\operatorname{ch}(U_2 - U_1) = \operatorname{ch} U_2 \operatorname{ch} U_1 \pm |\operatorname{sh} U_2 \operatorname{sh} U_1| = (|\operatorname{cth} U_2 \operatorname{cth} U_1| \pm 1)\,|\operatorname{sh} U_2 \operatorname{sh} U_1|.$$

Подставляя вместо ± 1 равное ей выражение $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$ (Двайт, 650.08), получим

$$\operatorname{ch}(U_2-U_1)=\Big[\,|\operatorname{cth}U_1\operatorname{cth}U_2|\pm\frac{1}{2}(\operatorname{cth}^2U_2-\operatorname{cosech}^2U_2)\pm$$
$$\pm\frac{1}{2}(\operatorname{cth}^2U_1-\operatorname{cosech}^2U_1)\Big]\,|\operatorname{sh}U_1\operatorname{sh}U_2|=$$
$$=\frac{+(\operatorname{cth}U_2+\operatorname{cth}U_1)^2\mp\operatorname{cosech}^2U_1\mp\operatorname{cosech}^2U_2}{2\,|\operatorname{cosech}U_1\operatorname{cosech}U_2|}.$$



Фиг. 32.

Подставим сюда значения D, R_1 и R_2, что дает

$$\operatorname{ch}(U_2-U_1)=\pm\frac{D^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}.$$

Таким образом, емкость (на единицу длины) между двумя цилиндрами равна

$$C=2\pi\varepsilon\left[\operatorname{ar\,ch}\left(\pm\frac{D^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)\right]^{-1} \qquad (4.69)$$

где нижний знак относится к случаю, когда один цилиндр находится внутри другого, а верхний знак — к случаю, когда ни один из цилиндров не охватывает другого. Оба эти случая показаны на фиг. 32, *а* и *б*.

§ 15. Емкость между цилиндром и плоскостью. Емкость между двумя одинаковыми цилиндрами. Устремим величину $R_1=D+h$, показанную на фиг. 32, *а*, к бесконечности, тогда окружность внешнего цилиндра совпадает, по крайней мере, в некоторой конечной области с осью x. Пренебрегая R_2^2 по сравнению с R_1^2 и D^2 и h по сравнению с $2R_1$, получим $R_1+D=2R_1-h\approx 2R_1$. Поэтому

$$\frac{R_1^2+R_2^2-D^2}{2R_1R_2}\to\frac{(R_1-D)(R_1+D)}{2R_1R_2}\to\frac{h}{R_2}.$$

Таким образом, емкость (на единицу длины) между проводящим цилиндром радиуса R и бесконечной проводящей плоскостью, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии h от нее, равна

$$C = 2\pi\varepsilon \left(\operatorname{ar\,ch} \frac{h}{R} \right)^{-1} \tag{4.70}$$

Два одинаковых цилиндра, расстояние между центрами которых $D = 2h$, имеют емкость (на единицу длины) в два раза меньшую, чем емкость, определяемая по формуле (4.70), так как их можно рассматривать как два таких конденсатора, соединенных последовательно. Окончательное выражение для емкости двух одинаковых цилиндров можно получить и непосредственно из формулы (4.69), полагая $R_1 = R_2$ и $D = 2h$:

$$C = \pi\varepsilon \left(\operatorname{ar\,ch} \frac{D}{2R} \right)^{-1} \tag{4.71}$$

§ 16. Конформные преобразования. Очевидно, что метод сопряженных функций является могучим средством решения двухмерных задач о распределении потенциала. Но для того чтобы им пользоваться, надо уметь находить нужные функции. Прежде чем излагать общие методы их отыскания, мы сейчас изучим некоторые специфические свойства функций комплексных переменных. Нанесем на одну из плоскостей значения $z = x + jy$, а на другую — значения $z_1 = x_1 + jy_1$ и предположим, что z является аналитической функцией z_1, так что каждой точке на плоскости z_1 соответствует по крайней мере одна точка на плоскости z. Если функция $z = f(z_1)$ — непрерывная, то при перемещении точки по плоскости z_1 вдоль некоторой кривой соответствующая ей точка на плоскости z тоже опишет некоторую кривую. Если же функция $f(z_1)$ не является непрерывной функцией, то точка на плоскости z будет перескакивать при этом с одного места в другое. Пусть, когда точка на плоскости z_1, описав замкнутую кривую, возвращается в первоначальное положение, соответствующая точка на плоскости z также возвращается в первоначальное положение; тогда в той области плоскости z, где это имеет место, функцию $f(z_1)$ называют однозначной. По правилу деления двух комплексных чисел (см. § 9) имеем

$$\left| \frac{dz}{dz_1} \right| = \frac{|dz|}{|dz_1|} = \frac{ds}{ds_1} = h, \tag{4.72}$$

где ds — длина элемента dz дуги кривой в плоскости z, а ds_1 — длина соответствующего элемента dz_1 соответствующей дуги кривой в плоскости z_1. Таким образом, модуль dz/dz_1 служит мерой изменения элемента длины вблизи некоторой точки плоскости z при преобразовании этой точки в соответствующую точку плоскости z_1.

Построим теперь бесконечно малый треугольник, образованный пересечением трех кривых на плоскости z_1, и обозначим длины сторон этого треугольника через ds_1, ds_1', ds_1''. Тогда длины сторон треугольника, трансформированного на плоскость z, будут $ds = h\,ds_1$, $ds' = h\,ds_1'$, $ds'' = h\,ds_1''$, откуда $ds_1 : ds_1' : ds_1'' = ds : ds' : ds''$, т. е. эти треугольники оказываются подобными. Отсюда ясно, что углы, образованные при пересечении соответствующих кривых, при таких преобразованиях не меняются. Эти преобразования называются конформными.

При делении двух комплексных чисел их аргументы вычитаются, поэтому аргумент отношения dz/dz_1 равен углу, на который поворачивается при преобразовании элемент кривой.

§ 17. Уравнение границы в параметрической форме. Пусть $f(x, y) = 0$ является уравнением одной из интересующих нас эквипотенциальных поверх-

ностей, причем x и y могут быть представлены в виде действительных аналитических функций некоторого действительного параметра t, который меняется в таких пределах, что x и y описывают всю поверхность проводника. Тогда существует очень простой метод получения решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничному условию $V=0$ на этой поверхности. Действительно, если

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \tag{4.73}$$

то искомым решением будет

$$x+jy=f_1(bW)+jf_2(bW). \tag{4.74}$$

На поверхности проводника $V=0$, потому что при подстановке этого значения в соотношение (4.74) получаем параметрическое уравнение поверхности, в котором только вместо параметра t используется bU.

К сожалению, число задач, при решении которых можно применять этот метод, чрезвычайно ограниченно. Среди них следует упомянуть задачи о нахождении поля в системе конфокальных конусов или в системе проводников с различными циклоидальными поверхностями. В качестве примера определим, насколько исказится однородное электрическое поле при внесении в него волнистой металлической поверхности, образующая которой описывается уравнением циклоиды

$$x=a(\theta-\sin\theta), \quad y=a(1-\cos\theta). \tag{4.75}$$

Отсюда $z=a(bW-\sin bW)+aj(1-\cos bW)=a(bW+j-je^{-jbW})$, что дает $x=a(bU-e^{bV}\sin bU)$, $y=a(bV+1-e^{bV}\cos bU)$. При больших отрицательных значениях потенциала $x=abU$, $y=+abV$, так что мы действительно получаем однородное поле, направленное вдоль y, его напряженность равна $E=+\partial V/\partial y=a^{-1}b^{-1}$. Отсюда находится постоянная b, и выражение для z принимает вид

$$z=a\left(\frac{W}{aE}+j-je^{-j(W/aE)}\right)$$

Для определения поля в любой точке продифференцируем это выражение, в результате получим

$$1=\frac{1}{E}\frac{dW}{dz}-\frac{1}{E}e^{-j(W/aE)}\frac{dW}{dz},$$

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|=|E(1-e^{-j(W/aE)})^{-1}|=E\left(1-2e^{V/aE}\cos\frac{U}{aE}+e^{2V/aE}\right)^{-1/2}$$

На поверхности проводника $V=0$ и $y=a[1-\cos(U/aE)]$, поэтому для плотности заряда на ней имеем

$$\sigma=\varepsilon\left|\frac{dW}{dz}\right|_{V=0}=\left(\frac{a}{2y}\right)^{1/2}\varepsilon E.$$

Этот результат относится к полю с той стороны поверхности, на которой имеются острые края. С другой стороны поверхности поле отсутствует, так что на поверхности происходит разрыв непрерывности.

§ 18. Нахождение сопряженных функций. В большинстве случаев поиски функции W, удовлетворяющей заданным граничным условиям в плоскости z, начинаются с поисков такого преобразования, которое упростило бы формы границ. Если и новые граничные условия окажутся незнакомыми, нужно искать второе преобразование, еще более упрощающее граничные условия. В конце концов можно прийти к такой системе, в которой решение написать сравнительно просто. После этого необходимо проделать обратный

путь — к решению исходной задачи. Часто, однако, возможно, опуская промежуточные этапы, написать сразу функцию $f(W, z) = 0$ путем исключения промежуточных комплексных переменных. Но даже если это и невозможно, промежуточные переменные служат в качестве параметров, связывающих между собой W и z.

При совершении таких преобразований часто очень полезно представлять себе рассматриваемую область плоскости z_1 в виде упругой мембраны, обладающей свойством сохранять углы между любыми нанесенными на ней линиями при любых деформациях ее границ. При этом мембрана не может отрываться от границ, но может скользить вдоль них, а также бесконечно растягиваться и сжиматься.

Предположим, например, что в интересующей нас задаче границы проводника представляют собой две неконцентричные и непересекающиеся окружности, или две пересекающиеся окружности, или же, наконец, две окружности одного типа и одну или две другого типа, пересекающиеся ортогонально. При помощи соотношения (4.64) любую из этих областей можно преобразовать в прямоугольную:

$$z_1 = \ln \frac{z + ja}{z - ja} \tag{4.76}$$

Мы употребляем здесь $z_1 = x_1 + jy_1$ вместо $W = U + jV$, чтобы подчеркнуть чисто геометрический характер этого преобразования. Из уравнений (4.67) и (4.68) следует, что когда x и y принимают значения $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, x_1 и y_1 меняются в пределах $-0 < y_1 < 2\pi$ и $-\infty < x_1 < \infty$. Таким образом, функция (4.76) преобразует горизонтальную полоску шириной 2π плоскости z_1 во всю плоскость z. Вертикальные линии внутри этой полоски превращаются, согласно уравнению (4.67), в окружности, описываемые уравнением

$$x^2 + (y - a \operatorname{cth} x_1)^2 = a^2 \operatorname{cosech}^2 x_1, \tag{4.77}$$

а горизонтальные линии превращаются в окружности, проходящие через точки $y = \pm a$, $x = 0$ и описываемые уравнением (4.68)

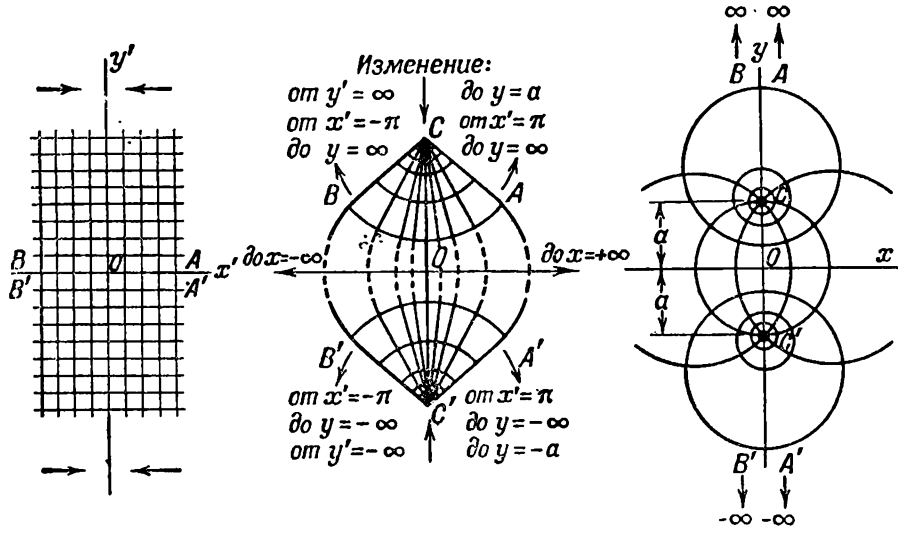
$$(x - a \operatorname{ctg} y_1)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 y_1. \tag{4.78}$$

Это преобразование можно представить себе, вообразив бесконечную горизонтальную полоску упругой мембраны шириной 2π, вращаемую в направлении против часовой стрелки вплоть до достижения ею вертикального положения в плоскости z'. При этом точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_1 = 0$, $y_1 = 2\pi$ превращаются соответственно в линии AA' и BB'. Сожмем теперь эту полоску около точек $y' = -\infty\,(C')$ и $y' = +\infty\,(C)$ и начнем сближать точки C и C', перемещая их вдоль оси y, при этом центральная часть полоски будет растягиваться в горизонтальном направлении. Линии CA, CB и $C'A'$, $C'B'$ подобно вееру развертываются соответственно около точек C и C' до тех пор, пока CA не совпадет с CB, а $C'A'$ с $C'B'$. В результате мембрана оказывается растянутой на всю плоскость z, а ее бесконечно малые дуги AA' и BB' становятся бесконечно удаленными дугами, разделяемыми осью x на две равные части.

Все эти преобразования, за исключением первого поворота, показаны на фиг. 33. Если вдоль линий соединения CA с CB и $C'A'$ с $C'B'$ нет никаких нарушений непрерывности, то потенциал в горизонтальных полосках на плоскости z_1 должен быть периодичным по y_1 с периодом 2π.

Задачи, в которых рассматриваются линейные заряды и прямоугольные границы с проводником или отдельные участки таких границ, находящиеся под разными потенциалами, можно решить методом изображений. В других

случаях может представиться необходимость развернуть эти прямоугольные границы в полуплоскость, что осуществляется посредством преобразования Шварца, в котором в общем случае используются эллиптические функции.



Фиг. 33.

§ 19. Преобразование Шварца. Одним из наиболее употребительных является преобразование, при котором верхняя полуплоскость z_1, ограниченная снизу действительной осью, переходит во внутреннюю область некоторого многоугольника на плоскости z или наоборот. Если эта область конечна, то граница ее может быть целиком образована при помощи деформации действительной оси $y_1 = 0$ плоскости z_1. Если же внутренняя область простирается в бесконечность, то соответствующая часть границы образуется путем растягивания или сжатия бесконечно удаленной дуги верхней полуплоскости z_1.

Чтобы найти преобразование, сгибающее действительную ось плоскости z_1 в границу заданного многоугольника на плоскости z, рассмотрим комплексную производную

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1 (z_1 - u_1)^{\beta_1} (z_1 - u_2)^{\beta_2} \quad (z_1 - u_n)^{\beta_n}, \tag{4.79}$$

где u_1, u_2, ..., u_n и β_1, β_2, ..., β_n — некоторые действительные числа, а C_1 — комплексная постоянная, причем $u_n > u_{n-1} > \quad > u_2 > u_1$. Как известно, аргумент произведения нескольких комплексных чисел, возведенных в какую-нибудь степень, равен сумме произведений аргументов этих чисел на соответствующий показатель степени. Поэтому

$$\arg \frac{dz}{dz_1} = \arg C_1 + \beta_1 \arg (z_1 - u_1) + \ldots + \beta_n \arg (z_1 - u_n). \tag{4.80}$$

Пусть $dz_1 = dx_1$, т. е. является элементом длины вдоль действительной оси плоскости z_1, тогда аргумент

$$\arg \frac{dz}{dz_1} = \arg \frac{dx + j\,dy}{dx_1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx} \tag{4.81}$$

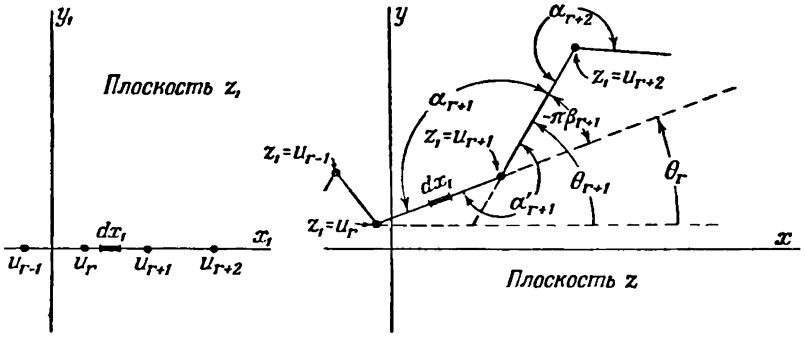
равен углу, который образует элемент dz, полученный при преобразовании dz_1, с действительной осью $y = 0$ плоскости z. Если z_1 является действительным числом, находящимся между u_r и u_{r+1}, то $(z_1 - u_1)$, $(z_1 - u_2)$, ..., $(z_1 - u_r)$—

действительные положительные числа, аргумент которых равен 0, а $(z_1 - u_{r+1})$, $(z_1 - u_{r+2})$, ..., $(z_1 - u_n)$ — действительные, но отрицательные числа, аргумент которых равен π.

Поэтому на основании соотношений (4.80) и (4.81) найдем

$$\theta_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx} = \arg C_1 + (\beta_{r+1} + \beta_{r+2} + \ldots + \beta_n)\,\pi. \tag{4.82}$$

Итак, все элементы оси x_1, лежащие между точками u_r и u_{r+1} (фиг. 34), после преобразования сохраняют свое направление и остаются прямолинейными; их наклон к оси x определяется формулой (4.82). Аналогично, те



Фиг. 34.

элементы, которые лежат между u_{r+1} и u_{r+2}, также остаются прямолинейными, но имеют другой наклон

$$\theta_{r+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx} = \arg C_1 + (\beta_{r+2} + \beta_{r+3} + \ldots + \beta_n)\,\pi. \tag{4.83}$$

Угол между этими линиями равен

$$\theta_{r+1} - \theta_r = -\pi\beta_{r+1}.$$

Мы построили две стороны многоугольника. Подобным же образом, подбирая значения β и u, можно построить и весь многоугольник, имеющий нужные длины сторон и нужные углы при вершинах.

Предположим, что требуется найти поле над ломаной линией в плоскости z, показанной на фиг. 34. Любой угол, например α_{r+1}, измеренный между двумя прилегающими сторонами многоугольника в области, где ищется поле, называется внутренним углом многоугольника. Так как $\pi - \alpha_{r+1} = -\pi\beta_{r+1}$, то для определения этого угла мы имеем

$$\beta_{r+1} = \frac{\alpha_{r+1}}{\pi} - 1. \tag{4.84}$$

Подставим соотношение (4.84) в (4.79)

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1 (z_1 - u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z_1 - u_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \ldots (z_1 - u_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \tag{4.85}$$

Интегрируя это выражение, приходим к искомому преобразованию

$$z = C_1 \int \left[(z_1 - u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z_1 - u_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \right] dz_1 + C_2 = C_1 f(z_1) + C_2. \tag{4.86}$$

Подбирая для C_1 тот или иной аргумент, можно, как это видно из соотношения (4.82), произвольным образом ориентировать многоугольник

на плоскости z. Размеры многоугольника определяются модулем постоянной C_1. Помимо этого, многоугольник можно без всякого вращения, меняя лишь постоянную C_2, располагать в любом требуемом направлении.

Чтобы убедиться в правильности выбора стороны границы при отсчете α_r, положим $z_1 = W$, тогда действительная ось $y_1 = V = 0$ совпадет с эквипотенциальной линией. При $\alpha_r < \pi$ напряженность поля $dW/dz = dz_1/dz$ должна в вершинах обращаться в нуль, а при $\alpha_r > \pi$ — становиться там бесконечной. Полагая в соотношении (4.85) $x_1 = U = u_r$, легко убедиться в правильности наших результатов.

§ 20. Многоугольники с одним положительным углом. Если действительная ось в ходе преобразования претерпевает излом только в одной точке, то без ограничения общности эту точку можно принять за начало координат; тогда, положив в выражении (4.86) $u_1 = 0$ и считая $\alpha > 0$, получим

$$z = C_1 z_1^{\alpha/\pi} + C_2. \tag{4.87}$$

Пусть $C_2 = 0$, а C_1 равна некоторой действительной постоянной. Тогда вершина полученного многоугольника будет совпадать с началом координат, а его стороны с лучами $\theta = 0$, $\theta = \alpha$. Третья сторона многоугольника бесконечно удалена. Модуль z^n равен n-й степени модуля z (см. § 9), поэтому круг радиуса $r_1 = a_1$ на плоскости z_1 переходит в круг радиуса $r = a$ на плоскости z. В частности, задачи, рассматривающие область, ограниченную дугой окружности и двумя ее радиусами, можно при помощи преобразования (4.87) свести к задачам, рассматривающим область в виде полукруга.

При $\alpha = 2\pi$ верхняя полуплоскость z_1 преобразуется во всю плоскость z. Разделение действительных и мнимых частей дает $y = 2C_1 x_1 y_1$ и $x = C_1(x_1^2 - y_1^2)$. Исключив по очереди y_1 и x_1, мы получим уравнения двух взаимно ортогональных семейств конфокальных парабол $y^2 = -4C_1 x_1^2 (x - C_1 x_1^2)$ и $y^2 = 4C_1 y_1^2 (x + C_1 y_1^2)$. Таким образом, однородное поле $W = z_1$ на плоскости z_1 преобразуется на плоскости z в поле полубесконечной заряженной проводящей плоскости. Поле линейного заряда на плоскости z_1, расположенного над заземленной горизонтальной проводящей плоскостью, проходящей через начало координат, преобразуется на плоскости z в поле линейного заряда вблизи полубесконечной проводящей плоскости, край которой параллелен линейному заряду.

При $\alpha = 3\pi/2$, положив $W = z_1$, мы получим в плоскости z поле заряженного проводящего прямоугольного клина, образующие которого совпадают с положительной частью оси x и отрицательной частью оси y. Таким же путем, как и для $\alpha = 2\pi$, можно найти поле линейного заряда, расположенного вблизи прямоугольного клина.

При $\alpha = \pi$ плоскость z_1 не претерпевает, очевидно, никаких изменений, не считая изменений в масштабе за счет множителя C_1.

При $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, положив $W = z_1$, получаем на плоскости z поле внутри проводящего прямоугольного уголка, образованного положительными полуосями x и y. В этом случае $C_1^2 U = x^2 - y^2$ и $C_1^2 V = 2xy$, т. е. эквипотенциальные и силовые линии образуют два взаимно ортогональных семейства равнобочных гипербол. Поле линейного заряда, параллельного краю такого уголка, находится так же, как и в случае $\alpha = 2\pi$.

§ 21. Многоугольник с углом, равным нулю. В этом очень важном случае ось x_1 складывается до тех пор, пока обе стороны угла α не станут параллельными друг другу и, следовательно, верхняя часть полупло-

скости не окажется сжатой между ними. Две параллельные, но пересекающиеся линии, могут находиться на конечном расстоянии друг от друга, если их точка пересечения бесконечно удалена. Тогда вместо преобразования (4.87) имеем

$$z = C_1 \ln z_1 + C_2. \tag{4.88}$$

Как и раньше, будем считать C_1 действительной величиной, а $C_2 = 0$. Начало координат $z_1 = 0$ преобразуется в $z = \infty$, а новое начало координат соответствует точке $z_1 = 1$. Запишем z_1 в виде $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ и положим $\theta_1 = 0$, тогда $z = C_1 \ln r_1$, что соответствует действительной оси плоскости z. Если же положить $\theta_1 = \pi$, то $x = C_1 \ln r_1$ и $y = C_1 \pi$, что соответствует линии, расположенной над действительной осью на расстоянии $C_1\pi$ от нее. Таким образом, верхняя полуплоскость z_1 преобразуется на плоскости z в горизонтальную полоску. При этом радиальные линии $\theta_1 = \text{const}$ становятся горизонтальными линиями $y = \text{const}$, а полуокружности $r_1 = \text{const}$ переходят в вертикальные линии, имеющие длину $C_1\pi$. Часто приходится встречаться с задачами, в которых конфигурация системы периодична; это означает, что и поле в системе можно разбить на одинаковые полоски. Оказывается, что при решении таких задач большую пользу может оказать преобразование (4.88). Для примера найдем поле в системе, состоящей из заряженной нити, находящейся между двумя параллельными проводящими заземленными плоскостями. Возвращаясь к плоскости z_1, мы получаем задачу о поле нити над параллельной проводящей, заземленной плоскостью. При помощи метода изображений, рассматриваемого в § 7, и формулы (4.63) легко написать требуемую функцию

$$W = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{z_1 - e^{j\theta_0}}{z_1 - e^{-j\theta_0}} + C\right)$$

Пусть при $z_1 = +1$ $W = 0$, т. е. $C = -\ln(-e^{j\theta_0})$, тогда

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z_1 - e^{j\theta_0}}{1 - z_1 e^{j\theta_0}}. \tag{4.89}$$

Преобразуем это поле на плоскость z, положив $C_2 = 0$, $C_1\pi = a$ и $C_1\theta_0 = b$ и подставив в выражение (4.89) z_1 из формулы (4.88), в результате получим

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{e^{\pi z/a} - e^{j\pi b/a}}{1 - e^{\pi(z+jb)/a}} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{e^{\pi(z-jb)/2a} - e^{-\pi(z-jb)/2a}}{e^{-\pi(z+jb)/2a} - e^{\pi(z+jb)/2a}}.$$

Используя (Двайт, 654.1, 655.1 и 702), мы получим

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}\pi(z-jb)/a\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}\pi(z+jb)/a\right]} =$$

$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1 + j\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi z/a\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi b/a\right)}{1 - j\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi z/a\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi b/a\right)} =$$

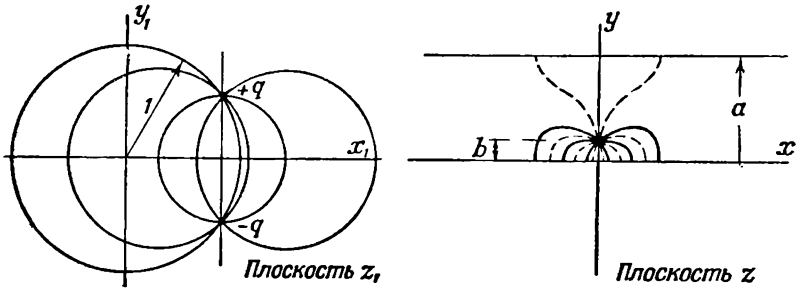
$$= -\frac{jq}{\pi\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi z/a\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi b/a\right)\right] \tag{4.90}$$

После разделения действительных и мнимых частей придем к следующему:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\varepsilon V}{q}=\frac{-\sin(\pi b/a)\operatorname{sh}(\pi x/a)}{-\cos(\pi b/a)\operatorname{ch}(\pi x/a)+\cos(\pi y/a)}, \tag{4.91}$$

$$\operatorname{th}\frac{2\pi\varepsilon U}{q}=\frac{\sin(\pi b/a)\sin(\pi y/a)}{-\cos(\pi b/a)\cos(\pi y/a)+\operatorname{ch}(\pi x/a)}. \tag{4.92}$$

На фиг. 35 показаны плоскости z_1 и z. Если разность потенциалов пластин равна U_0, то к полученному решению нужно добавить однородное



Фиг. 35. Линейный заряд между заземленными пластинами.

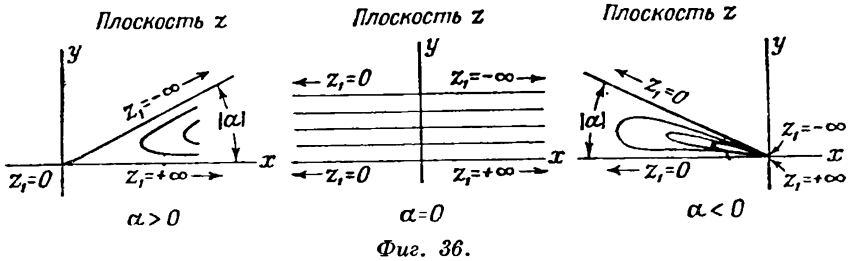
вертикальное поле, описываемое функцией $W'=-jU_0z/a$. Окончательное решение тогда можно записать в виде

$$W''=W+W'=-\left[\frac{jq}{\pi\varepsilon}\right]\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi z}{a}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi b}{a}\right)\right]-jU_0\frac{z}{a}, \tag{4.93}$$

где U — потенциальная функция. Пусть теперь в однородное поле помещена плоская решетка, состоящая из параллельных проводов, отстоящих на расстоянии a друг от друга. Для решения такой задачи нужно поместить заряды $+q$ в точку $z_1=j$ и в точку $z_1=-j$ и проделать преобразования, аналогичные предыдущим. На плоскости z получится участок интересующего нас поля решетки, содержащий один проводник и ограниченный силовыми линиями, простирающимися от этого проводника до $x=+\infty$.

В заключение заметим, что если построить на плоскости z силовые линии однородного электрического поля, а затем проделать обратное преобразование на плоскость z_1, то получится поле линейного заряда, уже рассмотренное в § 13.

§ 22а. Многоугольники с одним отрицательным углом. Двухмерный диполь. Инверсия. Теперь естественно выяснить смысл преобразований



Фиг. 36.

Шварца с отрицательным углом. Переход от положительных значений α к отрицательным ясно показан на фиг. 36. Если в соотношении (4.87) $C_2=0$, то действительные полуоси плоскости z_1 будут выходить из начала

координат на плоскости z, образуя между собой угол α. На этой же фигуре показан примерный вид кривых $y_1 = \text{const}$ на плоскости z.

Наиболее интересным случаем, относящимся к этой категории, является случай $\alpha = -\pi$. Будем исходить из однородного поля $W = z_1$, считая функцию U потенциальной. Это однородное поле можно представить себе созданным бесконечно большим положительным зарядом, расположенным в точке $x_1 = +\infty$, и бесконечно большим отрицательным зарядом, расположенным в точке $x_1 = -\infty$. Из рассмотрения фиг. 36 следует, что при интересующем нас преобразовании эти два заряда бесконечно близко подходят друг к другу, оставаясь все же по разные стороны оси y плоскости z. По определению, двухмерным диполем называется система, состоящая из двух бесконечно больших, одинаковых по величине и противоположных по знаку линейных зарядов, расположенных бесконечно близко друг к другу, так что произведение величины зарядов (на единицу длины) на расстояние между ними остается конечным. Оно называется дипольным моментом (на единицу длины) и обозначается через m. Упомянутое преобразование можно получить непосредственно из соотношения (4.64), заменив ja на a и устремив $a \to 0$ (Двайт, 601.2),

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1-\frac{a}{z}}{1+\frac{a}{z}} \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{aq}{\pi\varepsilon z} = \frac{m}{2\pi\varepsilon z}. \tag{4.94}$$

Отсюда

$$U = \frac{m\cos\theta}{2\pi\varepsilon r}, \qquad V = -\frac{m\sin\theta}{2\pi\varepsilon r},$$

а также

$$x^2 + y^2 - \frac{mx}{2\pi\varepsilon U} = 0, \qquad x^2 + y^2 + \frac{my}{2\pi\varepsilon V} = 0. \tag{4.95}$$

Эквипотенциальные линии представляют собой окружности, касающиеся оси y в начале координат; силовые линии, тоже являющиеся окружностями, касаются в начале координат оси x.

Другим важным примером, относящимся к случаю $\alpha = -\pi$, является преобразование, получаемое из соотношения (4.87) при $C_1 = a^2$,

$$z = \frac{a^2}{z_1}. \tag{4.96}$$

В полярных координатах, разделяя действительные и мнимые части, имеем

$$rr_1 = a^2 \quad \text{и} \quad \theta = -\theta_1.$$

Каждой точке вне круга радиуса $r_1 = a$ на плоскости z_1 поставлена в соответствие определенная точка внутри круга радиуса $r = a$ на плоскости z. Если $W = f(z_1)$ есть решение уравнения Лапласа, то $W = f(z_1^*)$, где z_1^* — величина, комплексно-сопряженная с z_1, — тоже будет решением, причем описываемое им поле является зеркальным изображением первого, т. е. $r_1 = r_1^*$ и $\theta_1 = -\theta_1^*$. Сравнивая плоскость z с плоскостью z_1^*, мы видим, что

$$rr_1^* = a^2 \quad \text{и} \quad \theta = \theta_1^*. \tag{4.97}$$

Точки, удовлетворяющие этому соотношению, называются инвертированными, а величина a называется радиусом инверсии. Если суммарный заряд на плоскости z отличен от нуля, то это значит, что на бесконечности должен находиться заряд, равный ему по величине и противоположный по знаку, на котором бы оканчивались простирающиеся в бесконечность.

силовые линии. На плоскостях z_1 или z_1^* эти линии окажутся вблизи начала координат. Таким образом, мы приходим к следующему правилу инверсии в двух измерениях.

Если в поле зарядов q' и q'' и т. д., находящихся в точках z', z'' и т. д., поверхность S является эквипотенциальной, то инвертированная поверхность будет эквипотенциальной в поле зарядов q', q'' и т. д., находящихся в точках $z_1'^*$, $z_1''^*$ и т. д., и заряда $-\sum q$, расположенного в начале координат. Этот метод позволяет, исходя из известного решения задачи, рассматривающей плоские пересекающиеся границы, получать решения задач, в которых рассматриваются границы в виде пересекающихся цилиндров. В полярных координатах уравнение окружности на плоскости z можно записать в виде

$$r^2 - 2ur\cos(\theta - \alpha) = R^2 - u^2, \tag{4.98}$$

где R — радиус окружности, а u и α — координаты ее центра. Умножим уравнение (4.98) на r_1^{*2} и подставим, согласно соотношениям (4.97), θ_1^* вместо θ и α_1^* вместо α; тогда

$$(rr_1^*)^2 - 2rr_1^*ur_1^*\cos(\theta_1^* - \alpha_1^*) = (R^2 - u^2)\,r_1^{*2}.$$

Учтя, что $rr_1^* = a^2$, получим

$$r_1^{*2} + 2\frac{a^2u}{R^2-u^2}r_1^*\cos(\theta_1^* - \alpha_1^*) = \frac{a^4}{R^2-u^2}$$

или

$$r_1^{*2} - 2u_1r_1^*\cos(\theta_1^* - \alpha_1^*) = R_1^2 - u_1^2, \tag{4.99}$$

где

$$u_1 = -\frac{a^2u}{R^2-u^2} \quad \text{и} \quad R_1 = \frac{a^2R}{|R^2-u^2|}. \tag{4.100}$$

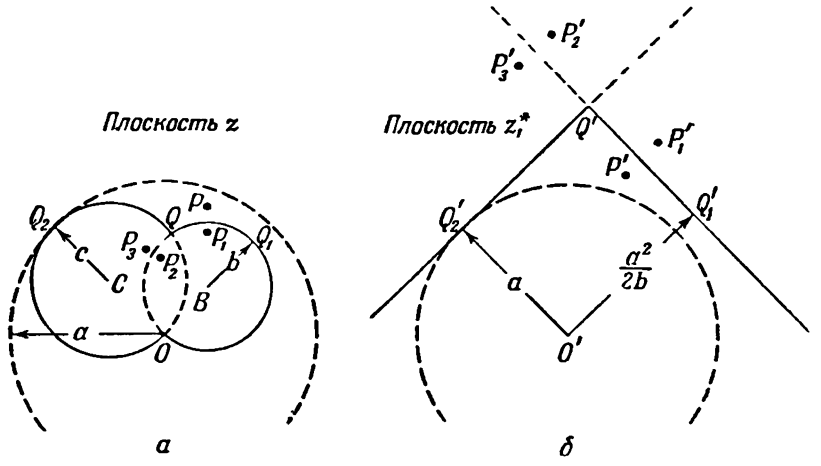
Таким образом, при инверсии окружность преобразуется в окружность. Если же первоначальная окружность проходит через начало координат, то $|u| = R$ и $|u_1| \to R_1 = \infty$, т. е. после инверсии получается окружность бесконечного радиуса с центром на бесконечности, или, другими словами, прямая линия. Кратчайшее расстояние от этой линии до начала координат равно

$$|u_1| - |R_1| = \frac{a^2}{u+R} = \frac{a^2}{2R},$$

а уравнение перпендикулярного к ней радиуса-вектора будет $\theta_1^* = \alpha_1^*$. Справедливо и обратное, а именно — прямая линия в результате инверсии преобразуется в окружность, проходящую через начало координат.

§ 22б. Изображения при двухмерной инверсии. Оставим на некоторое время в стороне обсуждение преобразований Шварца и приведем пример на применение метода инверсии к двухмерным системам. Используя только что сформулированное правило, найдем выражение для поля бесконечно большого линейного заряда $+q$ (на единицу длины), расположенного параллельно бесконечному цилиндрическому проводнику, внешняя поверхность которого образована в результате ортогонального пересечения двух круговых цилиндров и заряжена зарядом $-q$ (на единицу длины). Плоскость z показана на фиг. 37, *а*, линейный заряд находится в точке P, а контур поверхности проводника обведен сплошной линией. Из предыдущего параграфа известно, что если произвести инверсию относительно точки O, то обе проходящие через нее окружности превратятся в прямые линии, пересекающиеся в силу конформности отображения ортогонально.

Для простоты в качестве круга инверсии выберем круг, ограниченный показанной на фиг. 37 пунктирной окружностью, которая является касательной окружностью к цилиндру с наибольшим диаметром. На фиг. 37, *б* приведена система, получаемая в результате инверсии, на плоскости z_1^*. Задача о нахождении поля линейного заряда, параллельного линии пересечения двух ортогональных проводящих плоскостей, уже рассматривалась в § 7, где было показано, что поле внутри такого прямоугольного уголка совпадает с полем в этой области, когда все проводники удалены и когда



Фиг. 37. Двухмерная инверсия.

кроме заряда, в точке P' имеются еще линейные заряды $-q$, $+q$ и $-q$ в точках P_1', P_2' и P_3' соответственно.

Из правила инверсии следует, что поверхность цилиндрического проводника на плоскости z, соответствующая двум проводящим плоскостям на плоскости z_1^*, совпадает с эквипотенциальной поверхностью в поле зарядов $+q$, $-q$, $+q$ и $-q$, расположенных соответственно в точках P, P_1, P_2 и P_3, являющихся инвертированными по отношению к P', P_1', P_2' и P_3'. Пусть $CP = r_c$ и $BP = r_b$, тогда точка P_1 на линии BP будет находиться на расстоянии b^2/r_b от B, точка P_3 на линии CP — на расстоянии c^2/r_c от C и, наконец, P_2 — в точке пересечения BP_3 и CP_1. Поскольку точки P', P_1', P_2' и P_3' на плоскости z_1^* лежат на окружности, пересекающейся под прямым углом с линиями $Q'Q_1'$ и $Q'Q_2'$, то и точки P, P_1, P_2 и P_3 на плоскости z будут находиться на окружности, пересекающейся под прямым углом с окружностями, образующими поверхность проводников.

§ 23. Многоугольник с двумя углами. Среди большого числа различных примеров, относящихся к этому случаю, выберем лишь один, а именно, преобразование действительной оси в прямоугольник шириной $2a$. Положим в соотношении (4.85) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = +a_1$, $u_2 = -a_1$; тогда

$$\frac{dz}{dz_1} = \frac{A}{(z_1^2 - a_1^2)^{1/2}}. \tag{4.101}$$

Интегрирование этого выражения (Двайт, 260.01 или 320.01) дает

$$z = A \operatorname{ar\,ch}\left(\frac{z_1}{a_1}\right) + C_1 = jA \arcsin\left(\frac{z_1}{a_1}\right) + C_2.$$

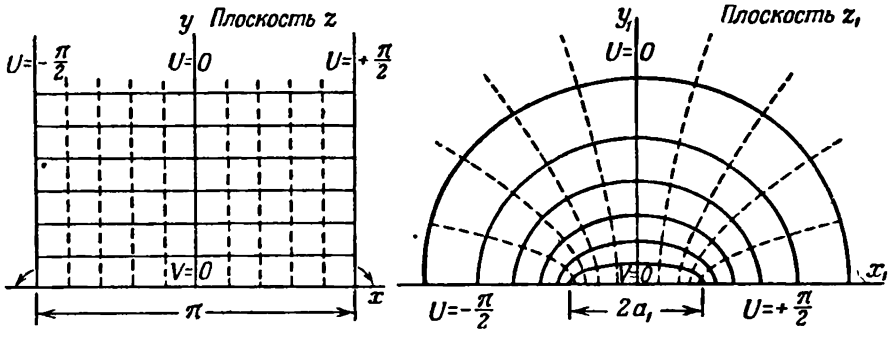
Пусть $C_2 = 0$ (используется вторая форма записи) и пусть z тоже равно нулю при $z_1 = 0$. Кроме того, выберем a равным $\frac{1}{2} jA\pi$, или $jA = 2a/\pi$; тогда при $z_1 = \pm a_1$, $z = \pm a$. Итак,

$$z = \frac{2a}{\pi} \arcsin \frac{z_1}{a_1}, \quad \text{или} \quad z_1 = a_1 \sin \frac{\pi}{2a} z. \tag{4.102}$$

Наиболее употребительным является применение преобразования (4.102) к однородному полю на плоскости z. Взяв a равным $\frac{1}{2}\pi$ и заменив z на W, получим

$$z_1 = a_1 \sin W \tag{4.103}$$

Вертикальные полоски плоскости z при отображении на плоскость z_1 оказываются развернутыми в стороны, как это показано на фиг. 38. Если



Фиг. 38. Преобразование полубесконечной вертикальной полосы в верхнюю полуплоскость.

в качестве потенциальной функции взять V, то на плоскости z_1 будет изображена верхняя половина поля заряженной полоски ширины $2a_1$; если же за потенциальную функцию взять U, то получается верхняя половина поля двух полубесконечных копланарных листов, которые отстоят друг от друга на расстоянии $2a_1$ и разность потенциалов между которыми равна π. Отделяя в соотношении (4.103) действительную и мнимую части (Двайт, 408.16), получаем

$$x_1 = a_1 \sin U \operatorname{ch} V, \qquad y_1 = a_1 \cos U \operatorname{sh} V$$

Разделим первое выражение на $a_1 \operatorname{ch} V$ а второе на $a_1 \operatorname{sh} V$ а затем возведем их в квадрат и сложим

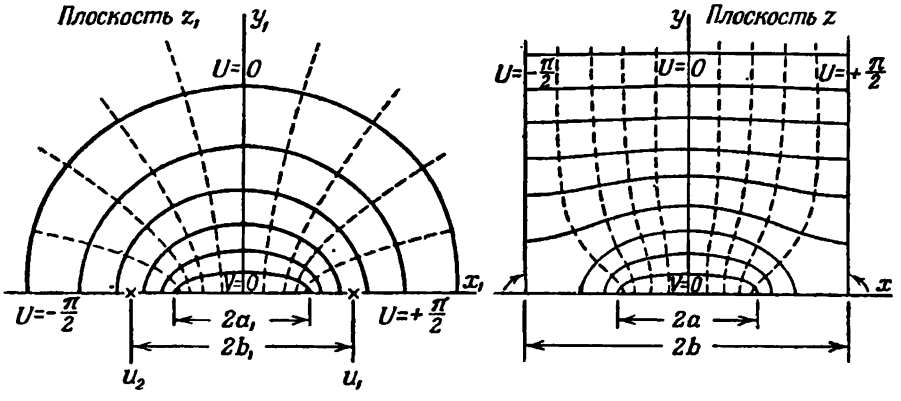
$$\frac{x_1^2}{a_1^2 \operatorname{ch}^2 V} + \frac{y_1^2}{a_1^2 \operatorname{sh}^2 V} = 1. \tag{4.104}$$

Кривые $V = \text{const}$ являются, таким образом, конфокальными эллипсами, большие и малые оси которых соответственно равны $2a_1 \operatorname{ch} V$ и $2a_1 \operatorname{sh} V$. Аналогично, разделив первое выражение на $a_1 \sin U$, а второе на $a_1 \cos U$, а затем возведя их в квадрат и вычтя одно из другого, получим

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 \sin^2 U} - \frac{y_1^2}{a_1^2 \cos^2 U} = 1. \tag{4.105}$$

Кривые $U = \text{const}$ являются конфокальными гиперболами. Заметим, что если V принимает значения от 0 до ∞, а U от $-\pi$ до $-\frac{1}{2}\pi$ и от π до $\frac{1}{2}\pi$ в нижней полуплоскости, то получается картина поля заряженной

полоски во всей плоскости. При пересечении с этой полоской гиперболические силовые линии терпят разрыв. Если U принимает значения от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$, а V от 0 до ∞ в нижней полуплоскости, то получается полная картина поля двух плоскостей. Эллиптические силовые линии терпят разрыв при прохождении через проводящие плоскости.



Фиг. 39. Преобразование поля одной заряженной плоской полосы в участок поля заряженной решетки, состоящей из копланарных параллельных плоских полос.

Предположим теперь, что мы имеем дело не с одиночной заряженной полоской, а с большим числом таких параллельных полосок, расположенных в одной плоскости на одинаковых расстояниях друг от друга. Ясно, что поле в такой системе будет периодично вдоль оси x и что можно рассматривать только отдельный типичный участок его, для чего нужно, как это показано на фиг. 39, перегнуть ось x_1 в точках $u_1 = +b_1$, $u_2 = -b_1$, $b_1 > a_1$, и применить преобразование (4.102) к (4.103), заменив в нем a_1 на b_1 и a на b,

$$z_1 = a_1 \sin W = b_1 \sin \frac{\frac{1}{2}\pi z}{b},$$

где $2b$ — период решетки. Поле показано на фиг. 39. Так как $x = \pm a$, $y = 0$, когда $V = 0$, $U = \pm \frac{1}{2}\pi$, то нужно положить $a_1 = b_1 \sin\left(\frac{1}{2}\pi a/b\right)$, и интересующее нас преобразование можно записать в виде

$$W = \arcsin\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi z/b\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi a/b\right)}\right] \qquad (4.106)$$

Хотя мы нашли поле только в верхней полуплоскости, однако полученная форма решения одинаково хорошо описывает поле и при $0 > y > \infty$ причем для того чтобы V принимало только положительные значения, нужно менять x и U в пределах $0 < x < b$, $\frac{1}{2}\pi < U < \pi$ и $0 > x > -b$, $-\pi < U < \frac{1}{2}\pi$. При $y = \infty$ напряженность поля равна $-\frac{1}{2}\pi/b$, поэтому для получения преобразования для поля E' необходимо умножить формулу (4.106) на $2bE'/\pi$. Если над решеткой простирается (до $y = +\infty$) однородное поле E', а под решеткой однородное поле отсутствует, то к полученному решению

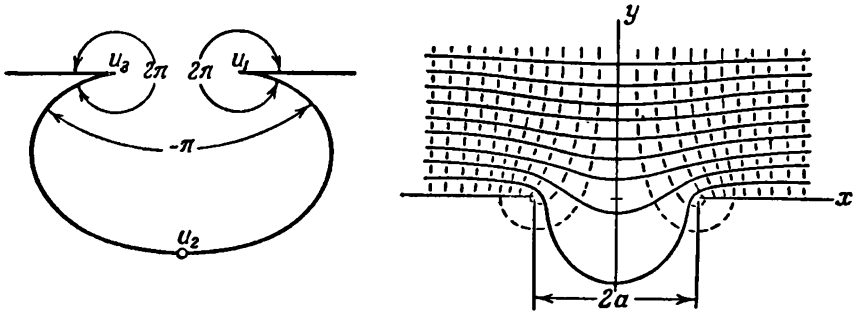
нужно прибавить $E' = \frac{1}{2}E$, что даёт

$$W' = \frac{E}{2}\left\{z + \frac{2b}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi z/b\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi a/b\right)}\right]\right\} \tag{4.107}$$

При этом величина напряженности поля в любой точке равна

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \frac{E}{2}\left|1 \pm \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi z/b\right)}{\left[\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi z/b\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi a/b\right)\right]^{1/2}}\right| \tag{4.108}$$

§ 24. Щель, прорезанная в бесконечной плоскости. Для получения поля вблизи плоского проводящего экрана, в котором прорезана щель



Фиг. 40. Плоскость со щелью, имеющая одну границу с однородным полем.

шириной $2a$, можно отогнуть участок действительной оси, лежащий между точками $x = +a$ и $x = -a$, и растянуть его так, чтобы он охватил всю нижнюю полуплоскость z, поверхность которой на плоскости z_1 протягивается сквозь разрыв в начале координат. Из фиг. 40 видно, что $\alpha_1 = 2\pi$, $\alpha_2 = -\pi$, $\alpha_3 = 2\pi$, $u_1 = +a_1$, $u_2 = 0$, $u_3 = -a_1$, поэтому из соотношения (4.85) получаем

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1\frac{z_1^2 - a_1^2}{z_1^2}$$

В результате интегрирования имеем

$$z = C_1\left(z_1 + \frac{a_1^2}{z_1}\right) + C_2.$$

Необходимо, чтобы при $z_1 = \pm a_1$ $z = \pm a$. Это выполняется при $C_2 = 0$ и $2a_1C_1 = a$, так что окончательно имеем

$$z = \frac{a}{2}\left(\frac{z_1}{a_1} + \frac{a_1}{z_1}\right) \tag{4.109}$$

Если исходить из однородного вертикального поля $W = -Ez_1$ на плоскости z_1 и положить $2a_1 = a$, то такое преобразование оставляет на плоскости z без изменений поле на бесконечности и искажает его вблизи экрана со щелью; при этом часть поля проникает сквозь щель. Из соотношения (4.109), взяв в качестве потенциальной функции V, находим

$$W = Ez_1 = -\frac{1}{2}E\left[z \pm (z^2 - a^2)^{1/2}\right]. \tag{4.110}$$

Если мнимую часть корня всегда брать положительной, то, чтобы в верхней полуплоскости поля складывались, а в нижней — вычитались, нужно в выражении (4.110) выбрать знак плюс.

Плотность поверхностного заряда на экране дается выражением

$$\sigma = -\varepsilon \left| \frac{dW}{dz} \right|_{y=0} = \frac{\varepsilon E}{2} \left(1 \pm \frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} \right), \tag{4.111}$$

где знак выбирается так, чтобы в верхней полуплоскости оба члена складывались, а в нижней — вычитались.

Пользуясь преобразованием (4.109), легко получить на плоскости z поле заряженной нити, расположенной вблизи заземленной металлической плоскости с прорезанной в ней щелью, исходя из поля заряженной нити над заземленной плоскостью на плоскости z_1.

Запишем правую часть соотношения (4.109) в полярных координатах и решим полученные уравнения относительно x и y:

$$\frac{x}{r_1^2 + a_1^2} = \frac{a}{2r_1 a_1} \cos\theta_1, \tag{4.112}$$

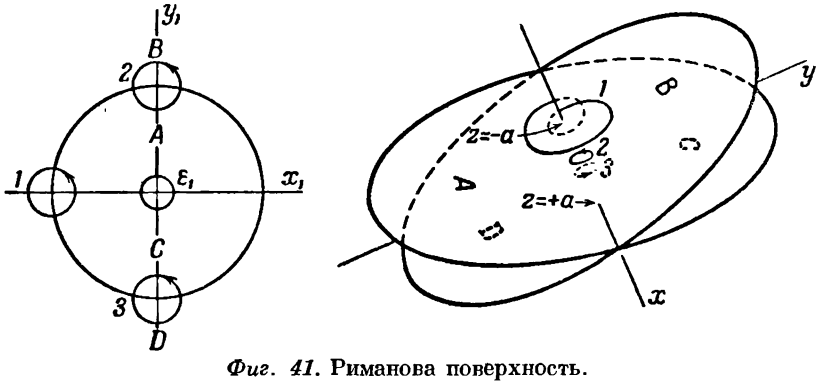
$$\frac{y}{r_1^2 - a_1^2} = \frac{a}{2r_1 a_1} \sin\theta_1. \tag{4.113}$$

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим

$$\frac{x^2}{(r_1^2 + a_1^2)^2} + \frac{y^2}{(r_1^2 - a_1^2)^2} = \frac{a^2}{4r_1^2 a_1^2}. \tag{4.114}$$

Таким образом, если $r_1 > a_1$, то полуокружности радиуса r_1 и радиуса a_1^2/r_1 преобразуются на плоскости z соответственно в верхнюю и нижнюю половины эллипса, описываемого уравнением (4.114). Полуокружность радиуса $r_1 = a_1$ распрямляется, превращаясь в отрезок действительной оси $-a \leqslant x \leqslant +a$.

§ 25. Римановы поверхности. Для более отчетливого представления всех возможностей, заключающихся в том или ином преобразовании, часто



Фиг. 41. Риманова поверхность.

бывает полезно пользоваться понятием римановой поверхности, что можно показать на примере предыдущего параграфа. Хотя все точки плоскости z уже были использованы нами для представления положительных значений y_1, соотношение (4.109) дает также значения z и при отрицательных y_1, для которых $-\pi < \theta_1 < 0$. Из уравнения (4.113) следует, что область $0 < r_1 < a_1$ и $-\pi < \theta_1 < 0$ соответствует верхней полуплоскости z, а область $a_1 < r_1 < \infty$ и $-\pi < \theta_1 < 0$ — нижней полуплоскости. Таким образом, каждой точке на плоскости z соответствуют две точки на плоскости z_1. Однако эту двухзначность можно исключить, сделав плоскость z из двух листов. Соединяя эти листы между собой, нужно проявлять крайнюю осторожность, следя за тем, чтобы при прохождении некоторой точкой непрерывного

контура на одной из плоскостей соответствующая ей точка на другой плоскости описывала также непрерывный контур. На фиг. 41, справа, изображен центральный участок такой поверхности, называемой римановой поверхностью. Линии, относящиеся к нижнему листу, сделаны пунктирными; кроме того, для большей наглядности оба листа показаны разнесенными. Из A в B и из C в D можно перейти только через участок $x^2 < a^2$, а из A в C и из B в D через участки $x^2 > a^2$. Окружность радиуса $r_1 = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 \to 0$ становится на плоскости z бесконечно удаленной окружностью, лежащей на поверхности AC. Римановы поверхности можно построить для большого числа различных преобразований.

§ 26. Задача о круглом цилиндре, расположенном внутри эллиптического. Из двух последних параграфов следует, что область плоскости z_1, внешняя по отношению к кругу $r_1 = a_1$, при помощи преобразования

$$z = \frac{a}{2}\left(\frac{z_1}{a_1} + \frac{a_1}{z_1}\right) \tag{4.115}$$

может быть превращена во внешнюю (по отношению к участку действительной оси $-a \leqslant x \leqslant a$) область поверхности BD плоскости z. Поскольку на плоскости z_1 мы ограничились областью вне круга радиуса $r_1 = a_1$, то, следовательно, нельзя пересекать ось x_1 на отрезке $-a_1 < x_1 < +a_1$. Поэтому и на плоскости z нельзя пересекать ось x на отрезке $-a < x < +a$. Линия, соединяющая точки $+a$ и $-a$, называется линией разреза плоскости z.

С точки зрения электростатики это позволяет преобразовывать любое поле на плоскости z_1, имеющее в качестве эквипотенциальной или силовой линии окружность радиуса $r_1 = a_1$, в поле на плоскости z, имеющее в качестве эквипотенциальной или силовой линии линию соединения точек $x = +a$ и $x = -a$. В более общем случае можно получить решение задачи, рассматривающей конфокальные эллиптические границы, исходя из решения задачи с границами в виде концентричных круговых цилиндров, так как преобразование (4.114) превращает любую окружность радиуса $r_1 = b_1$, где $b_1 > a_1$, в эллипс на плоскости z. Если же эти окружности на плоскости z_1 взять эксцентричными по отношению к окружности радиуса $r_1 = a_1$, то после преобразования получится профиль самолетного крыла. Поэтому это преобразование используется в аэродинамике и называется «преобразованием крыла».

§ 27а. Условия на границе раздела двух диэлектриков. При помощи соотношений (1.48), (1.49) и (4.55) определим граничные условия, которым удовлетворяют потенциальные функции и функции потока. Пусть функции $W_1 = U_1 + jV_1 = f_1(z)$ и $W_2 = U_2 + jV_2 = f_2(z)$ описывают электростатические поля по разные стороны от границы раздела двух диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Обозначим через $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ соответственно производные вдоль нормали и вдоль касательной к границе. Тогда из соотношений (1.48) и (4.55), приняв U за потенциальную функцию, находим

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial s} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial s} \tag{4.116}$$

Если принять, что в некоторой точке границы соединяются между собой линии нулевого потока, описываемые функциями W_1 и W_2, то соотношения (4.116) можно проинтегрировать в пределах от этой точки до точки V_1 или до V_2 и, следовательно, получить

$$\varepsilon_1 V_1 = \varepsilon_2 V_2 \quad \text{или} \quad K_1 V_1 = K_2 V_2, \tag{4.117}$$

где K_1, K_2 — относительные диэлектрические проницаемости. Из условия (1.49) имеем

$$U_1 = U_2. \tag{4.118}$$

Таковы граничные условия для V и U в случае, если последняя выбрана в качестве потенциальной функции. Если же за потенциальную функцию взять V, то граничными условиями будут

$$V_1 = V_2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 U_1 = \varepsilon_2 U_2 \quad \text{или} \quad K_1 U_1 = K_2 U_2. \tag{4.119}$$

§ 27б. Эллиптический диэлектрический цилиндр. Конформные преобразования могут применяться не только для решения задач, рассматривающих границы, совпадающие с эквипотенциальными или силовыми линиями поля, но и при решении многих других задач, в которых нужно удовлетворить условиям на границе раздела диэлектрических сред. Так как при таких преобразованиях углы сохраняются, то закон преломления силовых линий (1.51) будет удовлетворен. Предположим, например, что нужно решить задачу о нахождении сопряженных функций, описывающих поле, в случае эллиптического цилиндра, помещенного в однородное поле, направление которого составляет угол α с большой осью эллипса. Уравнение диэлектрической границы запишем в виде

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1. \tag{4.120}$$

Преобразование, описанное в § 26, позволяет получить эту эллиптическую границу на плоскости z, исходя из окружности радиуса $r_1 = b$ на плоскости z_1. Для простоты положим в § 24 и 26 $a_1 = 1$, так что вся плоскость z будет соответствовать той области плоскости z_1, которая расположена вне единичного круга. Запишем уравнение (4.114) в форме (4.120) и приравняем соответствующие коэффициенты, в результате получим

$$a^2 = m^2 - n^2 \quad \text{и} \quad b^2 = \frac{m \cdot n}{m - n}. \tag{4.121}$$

В системах с эллиптическими границами удобнее пользоваться не прямоугольными координатами x и y, а эллиптическими (конфокальными) координатами u и v, показанными на фиг. 38 и 39. Соотношения между прямоугольными и эллиптическими координатами можно получить из выражения (4.103):

$$z = a \sin w, \qquad x = a \sin u \operatorname{ch} v, \qquad y = a \cos u \operatorname{sh} v. \tag{4.122}$$

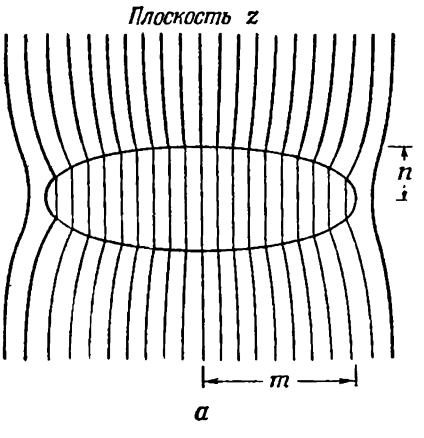
Тогда преобразование (4.115) запишется в виде

$$z = \frac{1}{2} a (z_1 + z_1^{-1})$$

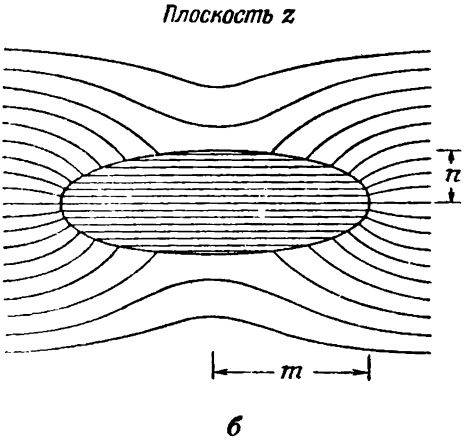
или

$$z_1 = j e^{-jw} = j e^{-ju+v} = \frac{1}{a} [z + (z^2 - a^2)^{1/2}] = a [z - (z^2 - a^2)^{1/2}]^{-1}. \tag{4.123}$$

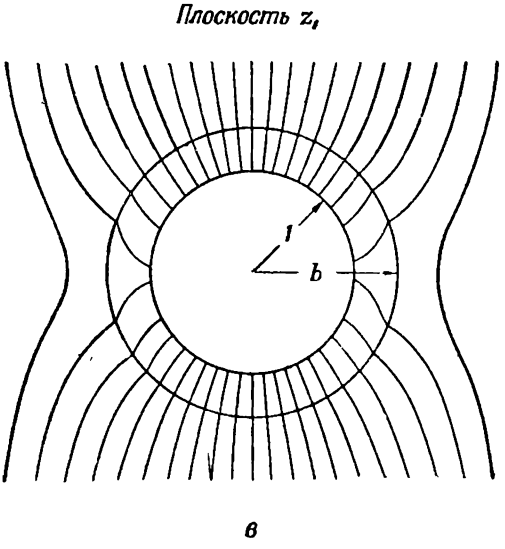
Отсюда видно, что на больших расстояниях от начала координат ($r_1 \to \infty$) $z = \frac{1}{2} a z_1$, т. е. однородное поле $W = \frac{1}{2} a E z_1$ преобразуется в однородное поле $W = Ez$. Интересующее нас поле может быть, очевидно, представлено в виде суммы двух полей: вертикального $E \sin \alpha$ и горизонтального $E \cos \alpha$. Эти составляющие поля показаны на фиг. 42, *а* и *б*. Ось, проходящая через фокусы, совпадает в случае «*а*» с эквипотенциальной линией, а в случае «*б*» — с силовой линией. Поэтому на плоскости z_1 картины силовых линий будут такими, какими они изображены на фиг. 42, *в* и *г*.



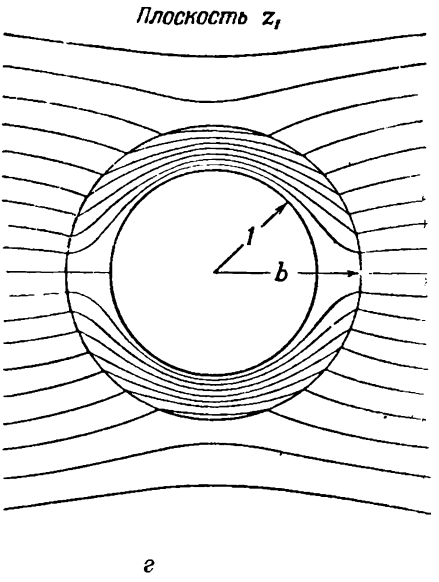
а



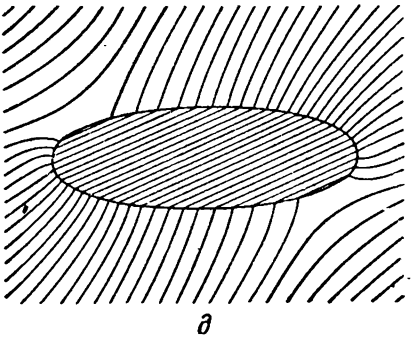
б



в



г



д

Фиг. 42. а, б—эллиптический цилиндр ($K=9$, m n 3) соответственно в поле вертикальной и горизонтальной составляющих однородного поля $2^{-1/2}$ E. Преобразование (4.123) преобразовывает случаи *а* и *б* в *в* и *г*, где границы диэлектрика имеют вид круглых цилиндров. Суперпозиция *а* и *б* дает *д*, где оси эллипса образуют с полем E угол 45°.

Но поле, изображенное на фиг. 42, *в*, уже было вычислено нами в § 4. Примем U' за потенциальную функцию и положим $U'_i = 0$ на единичной окружности, тогда

$$W'_0 = \frac{1}{2} jaE \sin\alpha\,(-z_1 + A' z_1^{-1}), \tag{4.124}$$

$$W'_i = -\frac{1}{2} jaB'E \sin\alpha\,(z_1 + z_1^{-1}), \tag{4.125}$$

где с учетом (4.121) обозначено

$$A' = \frac{-b^2[(K+1)+(K-1)b^2]}{(K-1)+(K+1)b^2} = \frac{-(m+n)(Km-n)}{(m-n)(Km+n)}, \tag{4.126}$$

$$B' = \frac{2b^2}{(K-1)+(K+1)b^2} = \frac{m+n}{Km+n}. \tag{4.127}$$

Для случая, изображенного на фиг. 42, *г*, можно использовать те же гармоники. При $z_1 = e^{j\theta}$ $V''_i = 0$, поэтому решение должно иметь вид

$$W''_0 = \frac{1}{2} aE \cos\alpha\,(z_1 + A'' z_1^{-1}), \tag{4.128}$$

$$W''_i = \frac{1}{2} aB''E \cos\alpha\,(z_1 + z_1^{-1}). \tag{4.129}$$

Согласно § 27а, при $r = b$ $U''_0 = U''_i$ и $V''_0 = KV''_i$, поэтому

$$b^2 + A'' = B''(b^2+1) \quad \text{и} \quad b^2 - A'' = KB''(b^2-1).$$

Решая относительно A'' и B'', получим

$$A'' = \frac{b^2[(K+1)-(K-1)b^2]}{b^2(K+1)-(K-1)} = \frac{(m+n)(m-Kn)}{(m-n)(m+Kn)}, \tag{4.130}$$

$$B'' = \frac{2b^2}{b^2(K+1)-(K-1)} = \frac{m+n}{m+Kn}. \tag{4.131}$$

Беря суперпозицию этих полей и применяя преобразование (4.123), для области вне цилиндра находим

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} aE\,[e^{-j\alpha} z_1 + (A'' \cos\alpha + jA' \sin\alpha) z_1^{-1}] = \\ &= \frac{1}{2} ajE\,[e^{-j(\alpha+w)} \quad (A'' \cos\alpha + jA' \sin\alpha) e^{jw}] = \\ &= \frac{1}{2} E\,\{e^{-j\alpha}[z + (z^2-a^2)^{1/2}] + (A'' \cos\alpha + jA' \sin\alpha)[z - (z^2-a^2)^{1/2}]\}. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Аналогично и для области внутри цилиндра

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2} aE\,(B'' \cos\alpha \quad jB' \sin\alpha)(z_1 + z_1^{-1}) = \\ &= E(m+n)\left(\frac{\cos\alpha}{m+Kn} - j\frac{\sin\alpha}{Km+n}\right) z. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Заметим, что внутри цилиндра поле остается однородным. На фиг. 42, *д* показаны линии электрической индукции для того случая, когда внешнее поле наклонено на угол 45° по отношению к осям эллипса.

§ 27в. Момент, действующий на диэлектрический цилиндр. Момент T, действующий на единицу длины бесконечного диэлектрического цилиндра, находящегося в однородном электрическом поле, ориентированном перпенди-

кулярно к оси цилиндра и под углом α к главной оси эллипса, можно найти, исходя из результатов предыдущего параграфа и из формул (3.41) и (3.42). Таким образом,

$$T = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_v(1-K)\int_v EE_i\cos\varphi\, dv\right], \tag{4.134}$$

где φ — угол между внешним полем E и однородным полем внутри цилиндра E_i. Величины E, E_i и $\cos\varphi$ постоянны внутри v, поэтому их можно вынести из-под интеграла, после чего интеграл будет равен $\int dv = \pi mn$ (на единицу длины). Относительные направления и величины векторов E и E_i даются выражением (4.133), в котором при определении E надо положить $K = 1$:

$$E = \left|\frac{\partial W_i}{\partial z}\right|_1 = |E|e^{j\theta}, \qquad E_i = \left|\frac{\partial W_i}{\partial z}\right|_K = |E_i|e^{j\theta_i}. \tag{4.135}$$

Подставляя произведение этих величин в (4.134), получим

$$|E||E_i|\cos(\theta-\theta_i) = \mathrm{Re}\,EE_i^* = |E^{(r)}E_i^{(r)}| + |E^{(i)}E_i^{(i)}|, \tag{4.136}$$

$$T = \frac{1}{2}\varepsilon_v E^2(K-1)\pi mn(m+n)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{m+Kn}+\frac{\sin^2\alpha}{Km+n}\right) =$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_v E^2(K-1)^2 mn(n^2-m^2)\sin 2\alpha}{2(Km+n)(m+Kn)} \tag{4.137}$$

Этот момент стремится повернуть главную ось эллипса вдоль поля.

§ 28. Многоугольник с закругленным углом. Существует несколько методов, позволяющих заменить острые углы в преобразовании Шварца на закругленные. Один из них состоит в замене множителя $z_1^{(\alpha/\pi)-1}$ в выражении

$$\frac{dz}{dz_1} = z_1^{(\alpha/\pi)-1}(z_1-u_2)^{(\alpha/\pi)-1}.$$

на $[z_1+\lambda(z_1^2-1)^{1/2}]^{(\alpha/\pi)-1}$, где $|u_n| > |u_{n-1}| > \ldots |u_2| \geqslant 1$ и $\lambda < 1$

Другой метод заключается в замене множителя $z_1^{(\alpha/\pi)-1}$ на

$$(z_1+1)^{(\alpha/\pi)-1}+\lambda(z_1-1)^{(\alpha/\pi)-1}.$$

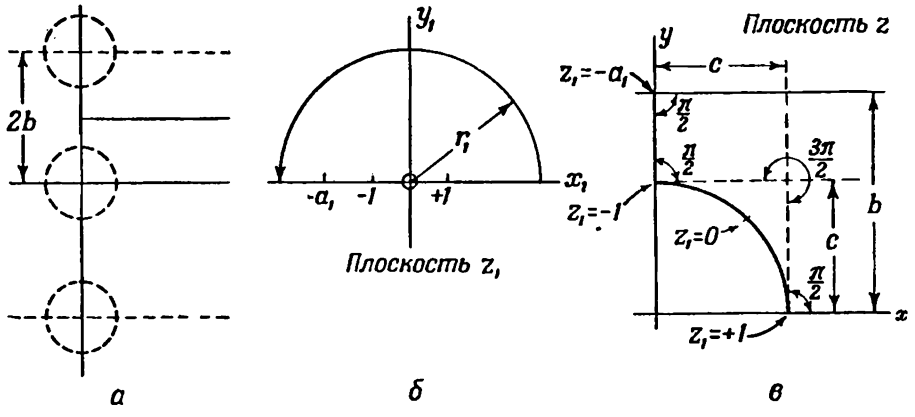
В обоих случаях аргумент нового множителя равен нулю при $z_1 \geqslant 1$ и равен $\alpha-\pi$ при $z_1 \leqslant -1$, так что стороны многоугольника, соответствующие области вне $-1 < z_1 < +1$, образуют между собой те же углы, как и в случае применения множителя $z_1^{(\alpha/\pi)-1}$. Между точками $z_1 = +1$ и $z_1 = -1$ получается теперь некоторая кривая, форму которой можно менять при помощи множителя λ.

§ 29. Плоская решетка из цилиндрических проводов большого диаметра. В § 21 мы пришли к выводу, что задача о нахождении поля около плоской решетки, образованной из цилиндрических проводов малого радиуса, может быть сведена к задаче, в которой вместо цилиндрических поверхностей проводов рассматриваются эквипотенциальные поверхности решетки, состоящей из линейных зарядов. Если же диаметры проводов, образующих решетку, соизмеримы с расстояниями между ними, то использованное приближение совершенно несправедливо. Однако в этом случае можно воспользоваться методом, изложенным в предыдущем параграфе. Возьмем в качестве типичного участка поля решетки область, отмеченную сплошной

линией на фиг. 43, *а*. Из этой фигуры следует, что z и z_1 должны быть связаны между собой следующим дифференциальным выражением:

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1 \frac{(z_1+1)^{1/2} + \lambda (z_1-1)^{1/2}}{[(z_1-1)(z_1+1)(z_1+a_1)]^{1/2}} = \\ = \frac{C_1}{[(z_1-1)(z_1+a_1)]^{1/2}} + \frac{\lambda C_1}{[(z_1+1)(z_1+a_1)]^{1/2}} \qquad (4.138)$$

Приведем теперь один из способов определения постоянной C_1, до сих пор



Фиг. 43.

еще не упоминавшийся. Если r_1 постоянная величина, то, так как $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$,

$$dz_1 = jr_1 e^{j\theta_1} d\theta_1 = jz_1 d\theta_1.$$

Если $r_1 \to \infty$ и θ_1 меняется от 0 до π, то z проходит значения от $y=0$ до $y=b$. Подставляя в соотношение (4.138) $dz_1 = jz_1 d\theta_1$ и устремляя $z_1 \to \infty$, будем иметь

$$\int_0^{jb} dz = jC_1(1+\lambda) \int_0^{\pi} d\theta_1 \quad \text{или} \quad jb = jC_1\pi(1+\lambda),$$

$$C_1 = \frac{b}{\pi(1+\lambda)} \qquad (4.139)$$

Таким методом пользуются довольно часто; действительно, для определения постоянной не обязательно проводить интегрирование в общем виде, а достаточно проинтегрировать какой-нибудь простой частный случай, обычно $r_1 \to 0$ или $r_1 \to \infty$. Интегрирование выражения (4.138) [сделаем замену $z_1 = (a_1 u^2 \pm 1)(1-u^2)^{-1}$ и применим формулу (140.02) из справочника Двайта] дает

$$z = \frac{2b}{\pi(1+\lambda)} \left[\operatorname{ar\,th} \left(\frac{z_1-1}{z_1+a_1} \right)^{1/2} + \lambda \operatorname{ar\,th} \left(\frac{z_1+1}{z_1+a_1} \right)^{1/2} \right] + C_2. \qquad (4.140)$$

Если $z=c$, $z_1=+1$, то C_2 не является действительной величиной и

$$c = \frac{2b\lambda}{\pi(1+\lambda)} \operatorname{ar\,th} \left(\frac{2}{1+a_1} \right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \frac{a_1+1}{2} = \operatorname{cth}^2 \left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b\lambda} \right] \qquad (4.141)$$

Если $z=jc$, $z_1=-1$, то C_2 не является чисто мнимой величиной и

$$c = \frac{+2b}{\pi(1+\lambda)} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2}{a_1-1} \right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \frac{a_1-1}{2} = \operatorname{ctg}^2 \left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b} \right] \qquad (4.142)$$

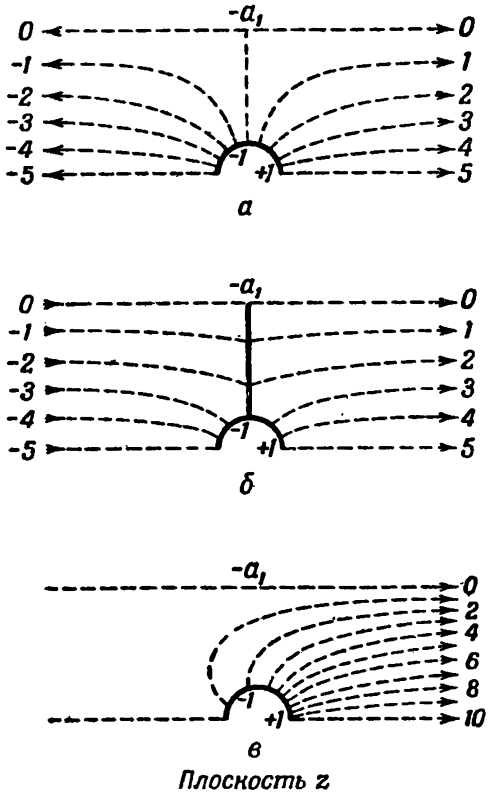
Вычитая одно из другого, получим

$$1 = \operatorname{cth}^2\left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b\lambda}\right] - \operatorname{ctg}^2\left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b}\right],$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b} = \operatorname{cth}\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b\lambda}$$

Чтобы выразить λ через b и c, построим график отношения левой части этого уравнения к правой части как функцию λ и найдем те значения λ, при которых это отношение равно единице. Определив значения λ и сложив выражение (4.141) и (4.142), получим формулу, определяющую a_1:

$$a_1 = \operatorname{cth}^2\left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b\lambda}\right] + \operatorname{ctg}^2\left[\frac{\pi c(1+\lambda)}{2b}\right] \qquad (4.143)$$



Фиг. 44.

Ричмонд[1] исследовал вопрос, насколько точно эта кривая может быть апроксимирована окружностью $r = c$, и показал, что расстояние ее от начала координат отличается от c не более чем на 2% при $2c < b$.

Для получения решения в случае, когда решетка образует одну из границ однородного поля (фиг. 44,*в*), нужно наложить поле, изображенное на фиг. 44,*а*, на поле, изображенное на фиг. 44,*б* (на этих фигурах эквипотенциальные линии сплошные, а силовые линии пунктирные). В случае «*а*» интересующая нас функция на плоскости z_1, согласно соотношению (4.103), равна

$$W = A \arcsin z_1,$$

где V — потенциальная функция. Чтобы в одной полоске фиг. 38 помещалось $\frac{1}{2}Eb$, а не π силовых линий, необходимо положить $A = \frac{1}{2}Eb/\pi$, тогда

$$W = \frac{Eb}{2\pi}\arcsin z_1. \qquad (4.144)$$

Аналогично в случае «*б*» участок оси x_1 между точками $-a_1$ и $+1$ следует считать находящимся под нулевым потенциалом. Поэтому, смещая начало координат, получим

$$W = \frac{Eb}{2\pi}\arcsin\frac{2z_1 + a_1 - 1}{a_1 + 1}. \qquad (4.145)$$

При наложении обоих полей приходим к случаю «*в*», т. е. к случаю однородного поля E при $x = +\infty$ и поля, равного нулю, при $x = -\infty$. Как

[1] Richmond, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **22**, 389 (1923).

и в соотношении (4.103), за потенциальную функцию выбрана V. В упомянутой выше работе можно найти аккуратно выполненные графики полей в таких системах.

§ 30. Случай углов, нецелократных $\pi/2$. Задачи, в которых углы многоугольника не составляют целого кратного $\pi/2$ или в которых имеется несимметричный многоугольник с более чем двумя прямыми углами, или в которых два или более проводника прямоугольного сечения находятся под различными потенциалами на конечном расстоянии друг от друга и т. д., также могут быть решены при помощи преобразования Шварца, но интегрирование в этих случаях приводит к эллиптическим функциям Якоби. С этими функциями можно манипулировать таким же образом как, например, с тригонометрическими или гиперболическими функциями, но все операции значительно осложняются. Мы не приводим здесь примеров, требующих применения эллиптических функций.

ЗАДАЧИ

1. Пусть полоска $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant a$ имеет потенциал V_0, а остальная часть полуплоскости xz $a < x < \infty$, а также вся плоскость yz находятся под нулевым потенциалом. Показать, что потенциал в любой точке $x > 0$, $y > 0$ определяется выражением

$$\pi V = V_0 \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x-a} - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x+a} \right).$$

2. Полуплоскости $x=0$, $y \geqslant 0$ и $y=0$, $x \geqslant 0$ представляют собой проводящие экраны, поверхности которых заземлены всюду, кроме участка, расположенного вблизи линии пересечения полуплоскостей и ограниченного линиями $x=a$ и $y=b$. Этот участок изолирован и находится под потенциалом V. Найти плотность поверхностного заряда на экранах.

3. Используя метод инверсии, установить закон отображения линейного заряда в расположенном параллельно ему круглом проводящем цилиндре.

4. Поверхность проводника имеет форму внешней поверхности тела, полученного при ортогональном пересечении двух одинаковых круглых цилиндров радиуса a. Показать, что плотность поверхностного заряда на таком проводнике равна

$$q\,(2r^2 - a^2)\,(4\pi a r^2)^{-1},$$

где q—заряд на единицу длины, а r—расстояние от оси.

5. Показать, что отношение максимальной плотности поверхностного заряда к минимальной в случае заряженного проводящего эллиптического цилиндра равно отношению большей оси эллипса к меньшей.

6. Провод, несущий на себе заряд q (на единицу длины), протянут вертикально внутри вертикальной цилиндрической полости радиуса a, находящейся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью K. Показать, что если провод расположен на расстоянии c от центра полости, то на него действует сила, стремящаяся переместить провод еще ближе к стенке полости и равная (на единицу длины)

$$\frac{[(K-1)/(K+1)]\,cq^2}{|2\pi\varepsilon_0 (a^2 - c^2)|}$$

7. Две тонкие фибровые нити натянуты вертикально внутри заземленного проводящего круглого цилиндра радиуса a. Показать, что если расстояние между нитями равно $2(5^{1/2}-2)^{1/2}\,a$ и если они заряжены до равных по величине и противоположных по знаку потенциалов, то действующая на нити сила будет равна нулю.

8. Бесконечная проводящая цилиндрическая оболочка радиуса a разрезана вдоль на четыре одинаковых части. Одна из них имеет потенциал $+V_1$, другая, диаметрально противоположная,—потенциал $-V_1$, а две остальных—заземлены. Показать, что потенциал внутри оболочки равен

$$\frac{V_1}{\pi} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2ay}{a^2 - r^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax}{a^2 - r^2} \right)$$

9. Рассмотрим область пространства, ограниченную с одной стороны плоскостью xz, а с другой—поверхностью цилиндра $x^2 + y^2 = b^2$. Поверхность цилиндра и часть

плоскости, проходящая через полосу $a < |x| < b$, находятся под потенциалом, равным нулю. Часть плоскости, лежащая в полосе $-a < x < +a$, имеет потенциал V_0. Показать, что уравнение силовых линий при $a \leqslant r \leqslant b$ имеет вид

$$U = \frac{2V_0}{\pi} \sum \frac{a^n}{n} \left[\frac{1}{r^n} + \left(\frac{r}{b^2} \right)^n \right] \cos n\theta,$$

где суммирование происходит по нечетным n.

10*. Три длинных тонких одинаково заряженных параллельных провода расположены на одинаковом расстоянии $3^{1/2}c$ друг от друга. Показать, что уравнение эквипотенциальных поверхностей такой системы в полярных координатах запишется в виде

$$r^6 + c^6 - 2r^3c^3 \cos 3\theta = \text{const},$$

где за начало координат взята точка, равноудаленная от всех трех проводов, и в качестве нулевой поверхности взята поверхность, проходящая через один из проводов.

11*. Полый цилиндрический проводник большой длины разделен на две части плоскостью, проходящей через его ось; эти части отдалены друг от друга на небольшое расстояние и поддерживаются под потенциалами V_1 и V_2. Потенциал в любой точке внутри цилиндра радиуса a равен

$$\frac{1}{2}(V_1 + V_2) + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ar \cos\theta}{a^2 - r^2},$$

где r—расстояние от оси, а θ—угол между плоскостью, проходящей через ось перпендикулярно к плоскости разделения, и плоскостью, проходящей через точку, где ищется поле, и ось.

12*. Заряженная линия, имеющая на единицу длины заряд e, расположена параллельно диэлектрическому цилиндру с относительной проницаемостью K и радиусом a Показать, что если c—расстояние между линией и осью цилиндра, то сила, действующая на единицу длины провода, равна

$$\frac{K-1}{K+1} \frac{a^2e^2}{2\pi\varepsilon_0 c\,(c^2 - a^2)}.$$

13*. Бесконечно длинный цилиндрический проводник, поперечное сечение которого представляет собой внешнюю границу трех одинаковых ортогонально пересекающихся окружностей радиуса a, имеет на единицу длины заряд e. Доказать, что плотность заряда на расстоянии r от оси равна

$$\frac{e}{6\pi a} \frac{(3r^2 + a^2)(3r^2 - a^2 - 6^{1/2} ar)(3r^2 - a^2 + 6^{1/2} ar)}{r^2 (9r^4 - 3a^2 r^2 + a^4)}$$

14. Край горизонтальной плоскости, имеющей нулевой потенциал, расположен на расстоянии c от параллельной ему вертикальной плоскости, потенциал которой равен $\frac{1}{2}\pi$. Показать, что плотность заряда на вертикальной плоскости равна $\varepsilon (y^2 + c^2)^{-1/2}$, а на горизонтальной она равна $-\varepsilon (x^2 - c^2)^{-1/2}$, где x и y отсчитываются от той линии в вертикальной плоскости, которая расположена ближе всего к краю горизонтальной плоскости.

15. Показать, что емкость на единицу длины между плоской полоской шириной $2c$ и эллиптическим цилиндром, фокусы которого совпадают с краями полоски, равна

$$2\pi\varepsilon \left(\operatorname{ar\,ch} \frac{a}{c} \right)^{-1}$$

где a—большая полуось эллипса.

16. Показать, что сила притяжения (на единицу длины) между двумя одинаковыми параллельными проводами радиуса a, несущими на себе заряды, равные соответственно $+q$ и $-q$ (на единицу длины), равна

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon (c^2 - 4a^2)^{1/2}},$$

где c—расстояние между центрами проводов.

17. Плоская решетка состоит из плоских компланарных параллельных полосок шириной $2a$, расстояние между центрами которых равно $2b$. Считая решетку заряженной, показать, что эквипотенциальная поверхность, расположенная в среднем на расстоянии b от решетки, отличается от плоской поверхности приблизительно на величину

$$0{,}028\, b \cos^2 \left(\frac{1}{2} \pi a/b \right).$$

18. Найти приближенное выражение для поля решетки, составленной из параллельных проводов радиуса a, отстоящих друг от друга на расстоянии 2π, считая, что эта решетка имеет потенциал U_0 и находится на расстоянии b (расстояние измеряется от центров проводов) от параллельной ей заземленной плоскости и что $a \ll b$ и $a \ll 2\pi$, т. е. получить

$$U = \frac{-U_0}{U_1} \ln \frac{e^{2x} - 2ce^x \cos y + c^2}{c^2 e^{2x} - 2ce^x \cos y + 1},$$

где

$$U_1 = \ln \frac{e^{2b} - 2ce^b \cos a + c^2}{c^2 e^{2b} - 2ce^b \cos a + 1}$$

$$c = \operatorname{ch} b \cos a \quad (\operatorname{ch}^2 b \cos^2 a - 1)^{1/2}.$$

Здесь мы приняли, что $2a$—максимальная толщина слоя, содержащего замкнутые эквипотенциальные линии вокруг линейных зарядов, а b—расстояние между этим слоем и заземленной плоскостью.

19. Используя результаты § 4 и § 26, найти преобразование, дающее поле около проводящей заземленной полоски шириной $2c$, внесенной в однородное поле, параллельное плоскости полоски. Если за потенциальную функцию принять U, то

$$W = \pm E (z^2 - c^2)^{1/2}.$$

20. Добавляя однородное поле к решению, полученному в задаче 19, найти преобразование, дающее поле плоской проводящей полосы шириной $2c$, помещенной в однородное электрическое поле, ориентированное перпендикулярно к оси полосы и под углом α к ее плоскости. Найти также вращающий момент (на единицу длины), действующий на полосу

$$W = E [\pm (z^2 - c^2)^{1/2} \cos \alpha - jz \sin \alpha], \qquad T = \frac{1}{2} \pi \varepsilon c^2 E^2 \sin 2\alpha.$$

21. При помощи обратного преобразования Шварца найти поле, создаваемое двумя полубесконечными копланарными плоскостями, потенциалы которых равны $+U_0$ и $-U_0$, а параллельные края отстоят на расстоянии $2c$ друг от друга. Показать, что если U—потенциальная функция, то

$$z = c \sin \frac{\frac{1}{2} \pi W}{U_0}.$$

22. Повернув преобразование, используемое в задаче 21, на 90° и применив преобразование Шварца, найти поле свободно заряженной горизонтальной решетки, образованной из одинаковых параллельных вертикальных полос шириной $2a$, расположенных на расстоянии $2b$ одна от другой. Пусть V—потенциальная функция, а εU_0—заряд отдельной полосы (на единицу длины), тогда

$$W \quad \frac{U_0}{2\pi} \arcsin \frac{\operatorname{sh} [\pi z/(2jb)]}{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \pi a/b \right)}.$$

23. Сместив начало координат в задаче 21 и применив логарифмическое преобразование, найти преобразование, дающее поле в том случае, когда решетка, описанная в задаче 22, образует одну из границ однородного поля. Пусть V—потенциальная функция, а εU_0—заряд полосы, тогда

$$\psi = \frac{U_0}{2\pi} \arcsin \frac{e^{\pi z/b} - \operatorname{ch} (\pi a/b)}{\operatorname{sh} (\pi a/b)}.$$

24. Положив в задаче 21 $c = 1$ и взяв U в качестве потенциальной функции, применим логарифмическое преобразование и получим поле в системе, состоящей из набора полубесконечных проводящих параллельных плоскостей, расстояние между которыми равно b. Края этих плоскостей расположены на оси y, а потенциалы их попеременно равны $+U_0$ и $-U_0$.

$$\frac{b}{\pi} \ln \sin \frac{\pi W}{2U_0}.$$

25. Показать, что можно так видоизменить форму краев пластин во многопластинчатом конденсаторе, состоящем из параллельных пластин, что поле вдоль всей его по-

верхности, включая и края, будет постоянным. Показать, что такой поверхностью является в задаче 24 поверхность $U=U_0/2$, уравнение которой будет

$$x=-\frac{b}{2\pi}\ln\left(2\cos\frac{2\pi y}{b}\right).$$

26. Воздушный конденсатор переменной емкости состоит из тонких плоских пластин, перемещающихся между неподвижными пластинами. Используя решение задачи 24, показать, что дополнительная емкость, обусловленная изгибом силовых линий на краях пластин, эквивалентна добавлению к краям пластин полосок шириной $(b/\pi)\ln 2$, где b — расстояние между соседними неподвижными пластинами.

27. Найти поле линейного заряда $+\frac{1}{2}Q$, расположенного в начале координат, в центре кривизны цилиндрического желоба единичного радиуса, если секториальный угол желоба равен 2α, а заряд на единицу длины равен $-Q$.

$$W=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\arcsin\left[\frac{j(r-1)\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)-(r+1)\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2r^{1/2}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right]$$

При решении следует использовать преобразование, приводимое в § 23, положив в нем $b=\pi$, повернув его на 90° и применив к нему логарифмическое преобразование.

28. Добавляя к полю, полученному в последней задаче, поле линейного заряда $-\frac{1}{2}Q$, находящегося в начале координат, получить выражение для потенциала свободно заряженного цилиндрического желоба единичного радиуса, центр кривизны которого совпадает с началом координат, а образующий угол равен 2α:

$$W=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[2\arcsin\frac{j(r-1)\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)-(r+1)\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2r^{1/2}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}+j\ln r-\theta\right]$$

29. Показать, что в предыдущей задаче отношение заряда на выпуклой стороне поверхности желоба к заряду на вогнутой стороне равно

$$(\pi+\alpha)/(\pi-\alpha).$$

30. Показать, что плотность поверхностного заряда в задаче 29 равна

$$\frac{1}{4}\frac{Q}{\pi}\left[1\pm\cos\frac{1}{2}\theta\left(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\cos^2\frac{1}{2}\alpha\right)^{-1/2}\right],$$

где плюс относится к выпуклой стороне.

31. Края двух полубесконечных тонких проводящих плоских экранов представляют собой прямые, параллельные между собой. Эти экраны находятся под нулевым потенциалом и образуют одну из границ электростатического поля, располагаясь всегда так, что один из них является отображением другого в плоскости y. Найти преобразования для следующих случаев:

а) экраны параллельны; поле снаружи:

$$z=-\left(\frac{b_0}{\pi}\right)(jW^2a^{-2}-2j\ln W-\pi-j+2j\ln a),$$

б) угол между экранами 90°; поле снаружи:

$$z=(1-j)\left(\frac{3b_0a^{-3/2}}{8}\right)\left(\frac{2W^{3/2}}{3}+2a^2W^{-1/2}\right)+jb_0,$$

в) угол между экранами 90°; поле внутри:

$$z=(1+j)\frac{1}{2}b_0a^{-1/2}W^{-3/2}(W^2+a^2)-jb_0.$$

32. Найти преобразование, дающее поле бесконечной нити, несущей заряд q (на единицу длины) и расположенной над центром щели, прорезанной в плоском заземленном проводящем экране, если ширина щели равна $2b$, а расстояние от ее центра до нити d:

$$W=-\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z+(z^2-b^2)^{1/2}-j[d+(d^2+b^2)^{1/2}]}{z\pm(z^2-b^2)^{1/2}+j[d+(d^2+b^2)^{1/2}]}.$$

33. Электроскоп Вольфа состоит из двух одинаково заряженных фибровых нитей радиуса c, расположенных на расстоянии $2d$ одна от другой. Эти нити протянуты внутри заземленного цилиндра радиуса b симметрично относительно его оси и параллельно ей. Показать, что емкость на единицу длины между этими двумя нитями и заземленным цилиндром находится в пределах

$$C=8\pi\varepsilon\left\{\ln\left[\frac{b^4}{4c^2d^2}\right]\right\}^{-1} \quad \text{и} \quad C=8\pi\varepsilon\left\{\ln\left[\frac{b^4}{4c^2(d^2+c^2)}\right]\right\}^{-1}$$

Здесь пренебрегли величинами c^4 и d^4 по сравнению с b^4.

34. Два одинаковых параллельных проводящих цилиндра, несущих полный заряд q (на единицу длины), касаются между собой. Показать, что емкость (на единицу длины) между этими цилиндрами и третьим большим цилиндром, ось которого совпадает с линией касания двух малых, приближенно равна

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(2b/\pi a)},$$

где $b > a$.

35. Пластина (толщиной $2A$) переменного воздушного конденсатора перемещается вдоль середины зазора (шириной $2B$) между двумя другими пластинами. Показать, что преобразование для поля вблизи края подвижной пластины дается выражением

$$z=A-\frac{2jB}{\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{B\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi W\right)}{[A(2B-A)]^{1/2}}+j\frac{2(B-A)}{\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{(B-A)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\pi W\right)}{A(2B-A)]^{1/2}}.$$

Показать также, что кажущееся увеличение ширины пластины, обусловленное краевым эффектом, приближенно равно

$$\Delta y=\frac{2}{\pi}\left\{B\ln\frac{2B-A}{B-A}-A\ln\frac{[A(2B-A)]^{1/2}}{B-A}\right\}$$

36. В тонкой бесконечной пластинке, находящейся под потенциалом $V=1$, прорезана бесконечно длинная щель шириной $2K$. На расстоянии h от этой пластинки расположена другая, параллельная ей, потенциал которой равен нулю. Показать, что поле в произвольной точке x, y определяется из выражений

$$x=h\left[\frac{2a^2}{\pi(1-a^2)}\frac{\operatorname{sh}\pi U}{\operatorname{ch}\pi U+\cos\pi V}+U\right],$$

$$y=h\left[\frac{2a^2}{\pi(1-a^2)}\frac{\sin\pi V}{\operatorname{ch}\pi U+\cos\pi V}+V\right],$$

где U — функция потока, а величина a определяется уравнением

$$\pi K=+2h\left[\operatorname{ar\,th}a+\frac{a}{1-a^2}\right].$$

37. Требуется найти поле вблизи плоской заряженной пластины толщиной $2h$, имеющей закругленный край радиуса h. Показать, что подходящим преобразованием для этого случая будет

$$z=h\left[W^2+2\pi^{-1}W(W^2-1)^{1/2}+2j\pi^{-1}\arcsin W\right],$$

где $V=0$ на поверхности, описываемой при $0<x<h$ уравнением

$$y=\frac{2h}{\pi}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^{1/2}+\arcsin\left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}\right]$$

и при $x>h$ уравнением

$$y=\pm h.$$

Показать, что эта кривая отклоняется от окружности радиуса h меньше чем на $0{,}14h$.

38. Поперечное сечение проводящего цилиндра представляет собой гипоциклоиду с n точками возврата. Цилиндр имеет потенциал $V=0$ и несет на себе заряд Q (на единицу длины). Показать, что потенциал поля снаружи цилиндра дается преобразованием

$$z=\frac{a}{n}e^{2j\pi\varepsilon W/Q}\left[(n-1)+e^{-2nj\pi\varepsilon W/Q}\right],$$

где a — расстояние от оси до точки возврата.

39. Показать, что правильная призма, каждая из n сторон которой имеет ширину

$$2a\sin\left(\frac{\pi/2}{n}\right)\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi/2}{n}\right)\right]^{1/n}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)\sec\left(\frac{\pi}{n}\right)-1\right],$$

может быть вписана в эквипотенциальную поверхность

$$V=\frac{Q\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi/2}{n}\right)}{2\pi\varepsilon n}$$

поля, полученного в предыдущей задаче, таким образом, что каждая сторона будет касаться поверхности вдоль двух линий, расположенных одна от другой на расстоянии

$$2a\sin\left(\frac{\pi/2}{n}\right)\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi/2}{n}\right)\right]^{1/n}$$

Показать, что с увеличением n поверхность призмы приближается к эквипотенциальной поверхности и, в частности, уже при $n=5$ разница в максимальных расстояниях от оси не превышает 6%, а в минимальных расстояниях она менее 1%.

40*. Поперечное сечение цилиндра, потенциал которого поддерживается равным нулю, представляет собой одну из ветвей равнобочной гиперболы. С вогнутой стороны гиперболы параллельно ее оси расположен линейный заряд. Доказать, что изображение этого заряда в гиперболе будет состоять из трех таких зарядов. Найти распределение индуцированных зарядов на цилиндре.

41*. Даны некоторая цилиндрическая область, ограниченная двумя коаксиальными, конфокальными параболическими цилиндрами, фокальные параметры которых равны $2a$ и $2b$, и равномерно заряженная линия, параллельная образующим цилиндра. Эта линия пересекает оси парабол на расстоянии c от их фокусов ($a>c>b$). Показать, что потенциал поля внутри такой цилиндрической области равен

$$A\ln\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r^{1/2}\cos\frac{1}{2}\theta}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\cos\dfrac{\pi\left(r^{1/2}\sin\frac{1}{2}\theta-c^{1/2}\right)}{a^{1/2}-b^{1/2}}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r^{1/2}\cos\frac{1}{2}\theta}{a^{1/2}-b^{1/2}}+\cos\dfrac{\pi\left(r^{1/2}\sin\frac{1}{2}\theta+c^{1/2}-a^{1/2}-b^{1/2}\right)}{a^{1/2}-b^{1/2}}},$$

где r, θ — полярные координаты в поперечном сечении, начало которых выбрано в фокусе. Выразить A через заряд на единицу длины линии.

42*. Бесконечно длинный эллиптический диэлектрический цилиндр с проницаемостью K, поверхность которого описывается уравнением $\xi=\alpha$, где $x+jy=c\operatorname{ch}(\xi+j\eta)$, помещен в однородное поле P, параллельное большой оси эллипса. Показать, что потенциал внутри цилиндра равен

$$-Px\,(1+\operatorname{cth}\alpha)/(K+\operatorname{cth}\alpha).$$

43*. Два изолированных незаряженных круглых цилиндра, расположенных один вне другого, поверхности которых описываются уравнениями $\eta=\alpha$ и $\eta=-\beta$, где $x+jy=c\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\xi+j\eta)$, помещены в однородное поле с потенциалом Fx. Показать, что потенциал, обусловленный распределением зарядов на цилиндрах, равен

$$-2Fc\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{n(\eta-\alpha)}\operatorname{sh}n\beta+e^{-n(\eta+\beta)}\operatorname{sh}n\alpha}{\operatorname{sh}n(\alpha+\beta)}\sin n\xi.$$

44*. Поверхности двух заземленных круглых цилиндров, расположенных один вне другого, описываются уравнениями $\eta=\alpha$ и $\eta=-\beta$, где $x+jy=c\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\xi+j\eta)$. Цилиндры помещены в поле линейного заряда q (линия $x=0$, $y=0$). Показать, что потенциал, обусловленный индуцированными зарядами, снаружи цилиндров равен

$$-\frac{q}{\pi\varepsilon}\sum\frac{1}{n}\frac{e^{-n\alpha}\operatorname{sh}n(\eta+\beta)+e^{-n\beta}\operatorname{sh}n(\alpha-\eta)}{\operatorname{sh}n(\alpha+\beta)}\cos n\xi+C.$$

Суммирование производится по всем нечетным положительным целым значениям n.

45*. Поперечные сечения двух бесконечно длинных металлических цилиндров представляют собой кривые

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=a^4 \quad \text{и} \quad (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=b^4,$$

где $b>a>c$. Доказать, что если потенциалы цилиндров поддерживаются соответственно равными V_1 и V_2, а пространство между ними заполнено воздухом, то плотности поверхностных зарядов (на единицу длины) на двух противолежащих сторонах поверхности соответственно равны

$$\frac{\varepsilon(V_1-V_2)(x^2+y^2)^{1/2}}{a^2\ln(b/a)} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon(V_2-V_1)(x^2+y^2)^{1/2}}{b^2\ln(b/a)}.$$

46*. Какие задачи можно решить при помощи преобразования

$$\frac{d(x+jy)}{dt}=\frac{c(t^2-1)^{1/2}}{a^2-t^2}, \qquad \pi(\Psi+j\Phi)=\ln\left[\frac{a+t}{a-t}\right],$$

где $a>1$?

47*. Какую электростатическую задачу можно решить при помощи преобразования

$$x+jy=\operatorname{cn}(\Phi+j\Psi),$$

где Ψ взята в качестве потенциальной функции, а Φ — в качестве функции, сопряженной ей?

48. Однородное поле E_0 ограничено верхней поверхностью ($y=0$) бесконечной проводящей пластинки толщиной b. Часть этой пластинки, расположенная между $x=a$ и $x=-a$, удаляется, и в пластинке образуется бесконечная щель. Показать, что если за потенциальную функцию принять U, то преобразование, дающее поле, можно записать в одном из следующих видов:

$$E_0z=-(1-W^2)^{1/2}\left(\frac{m^2}{W^2}-1\right)^{1/2}+(1-m^2)F\left(\arcsin\frac{W}{m},\ m\right)-$$
$$-2E\left(\arcsin\frac{W}{m},\ m\right)+C_1E_0,$$

$$jE_0z=(1-W^2)^{1/2}\left(1-\frac{m^2}{W^2}\right)^{1/2}+(1+m^2)F\left[\arcsin\left(\frac{1-W^2}{1-m^2}\right)^{1/2},\ (1-m^2)^{1/2}\right]-$$
$$-2E\left[\arcsin\left(\frac{1-W^2}{1-m^2}\right)^{1/2},\ (1-m^2)^{1/2}\right]+jaE_0,$$

$$E_0z=\left(1-\frac{m^2}{W^2}\right)^{1/2}(W^2-1)^{1/2}-(1-m^2)F\left(\arcsin\frac{1}{W},\ m\right)+$$
$$+2E\left(\arcsin\frac{1}{W},\ m\right)+C_2E_0,$$

где $F(p,\ q)$ и $E(p,\ q)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода модуля q. Постоянные C_1, C_2 и m удовлетворяют уравнениям

$$C_2-a=a+jb-C_1=\frac{(1-m^2)K(m)-2E(m)}{E_0},$$

$$bE_0=-(1+m^2)K[(1-m^2)^{1/2}]+2E[(1-m^2)^{1/2}],$$

где E и K — полные эллиптические интегралы модуля m.

49. Бесконечный проводящий лист, находящийся под нулевым потенциалом, совпадает с плоскостью $x=0$ всюду, за исключением выступа или выема, сечение которого представляет собой окружность радиуса b с центром в точке $x=c$. Эта поверхность образует одну из границ поля E, простирающегося до $x=\infty$ и являющегося неоднородным только вблизи выема или выступа. Показать, что потенциал является мнимой частью следующей функции:

$$W=-\frac{(b^2-c^2)^{1/2}\pi E}{\alpha}\,\frac{[z+j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}+[z-j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}}{[z+j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}-[z-j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}},$$

где $\cos\alpha=c/b$ для выступа $0<\alpha<\pi$ и для выема $\pi<\alpha<2\pi$.

50. Показать, что решение двухмерного уравнения Лапласа в прямоугольных гармонических функциях будет

$$V=(A\sin mx+B\cos mx)(C\operatorname{sh}my+D\operatorname{ch}my),\quad \text{если}\quad m\neq 0$$

и

$$V=(A+Bx)(C+Dy)\quad \text{при}\quad m=0.$$

51. Грани бесконечно длинной проводящей прямоугольной призмы задаются уравнениями $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$. Линейный заряд q (на единицу длины) расположен в точке $x=c$, $y=d$, где $0<c<a$ и $0<d<b$. Показать, что потенциал внутри призмы равен:
для $0<y<d$

$$V'=\frac{2q}{\pi\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{cosech}\frac{m\pi b}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}(b-d)\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{m\pi x}{a},$$

для $d<y<b$

$$V''=\frac{2q}{\pi\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{cosech}\frac{m\pi b}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}(b-y)\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Показать также, пользуясь формулой (3.27), что сила, действующая на единицу длины заряда, равна

$$\frac{q^2}{\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\mathbf{i}}{b}\operatorname{cosech}\frac{m\pi a}{b}\operatorname{sh}\frac{m\pi(2c-a)}{b}\sin^2\frac{m\pi d}{b}+\frac{\mathbf{j}}{a}\operatorname{cosech}\frac{m\pi b}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi(2d-b)}{a}\sin^2\frac{m\pi c}{a}\right].$$

Заметим, что всюду, за исключением малых c и d, эти ряды сходятся очень быстро.

52. Показать, что поле системы, состоящей из трех линейных зарядов: q в z_{10}, q в z_{10}^{-1} и $-q$ в начале координат плоскости z_1 (см. § 27б), преобразуется в невозмущенное поле одиночного линейного заряда q в z_0 на плоскости z, где $z_0=z_{10}+z_{10}^{-1}$.

53. Используя закон изображения, сформулированный в § 5 для случая круглого диэлектрического цилиндра, и закон изображения, установленный в предыдущей задаче для единичной окружности, найти сопряженные функции, дающие поле линейного заряда q, расположенного параллельно оси эллиптического диэлектрического цилиндра с проницаемостью K. Заряд находится на линии u_0, v_0 вне цилиндра, поверхность которого определяется уравнением $v=v_1$ (используются эллиптические координаты § 27б). Получить следующие результаты:
в области внутри цилиндра

$$W_i=\frac{-q}{\pi\varepsilon_v(K+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^n\ln\left(2\{\sin(u+jv)-\sin[u_0\pm j(2nv_1+v_0)]\}\right),$$

в области вне цилиндра для поля, обусловленного только поляризацией диэлектрика,

$$W_0'=\frac{q}{2\pi\varepsilon_v}\left\{\frac{K-1}{K+1}\ln\left[1-e^{j(u-u_0)+2v_1-v_0-v}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{4K}{(K+1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^n\ln\left[1\pm e^{j(u\pm u_0)-(v+v_0+2nv_1)}\right]\right\},$$

где верхний знак для n четных, а нижний — для n нечетных.

54. Линейный заряд q расположен параллельно образующим диэлектрического параболического цилиндра. В параболических координатах $y=2\xi\eta$, $x=\xi^2-\eta^2$, где $-\infty<\xi<+\infty$ и $0<\eta<\infty$, координаты заряда равны ξ_0 и η_0, а поверхность цилиндра определяется уравнением $\eta=\eta_1$. Показать, что внутри диэлектрика преобразованное, дающее поле, будет иметь вид

$$W_i=\frac{-q}{\pi\varepsilon_v(K+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^n\ln\{(\xi+j\eta)^2-[\xi_0\pm j(\eta_0+2n\eta_1)]^2\},$$

а снаружи для поля, обусловленного только поляризацией диэлектрика, получим

$$W_0' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K-1}{K+1}\ln\left[\xi - \xi_0 - j\left(2\eta_1 - \eta_{10} - \eta\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{4K}{(K+1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^n \ln\left\{\xi \mp \xi_0 + j\left[\eta + (\eta_{10} + 2n\eta_1)\right]\right\}\right),$$

где верхний знак для n четных, а нижний для n нечетных.

55. Цилиндр $(x/a)^{2n} + (y/b)^{2n} = 1$ несет на себе заряд $-Q$ (на единицу длины). Применив теорему Гаусса для поверхности $V = 0$, показать, что

$$z = a\left(\cos\frac{2\pi\varepsilon W}{Q}\right)^{1/n} + jb\left(\sin\frac{2\pi\varepsilon W}{Q}\right)^{1/n}$$

Применяя затем теорему Гаусса к цилиндру $r = \infty$, показать, что заряд, содержащийся внутри, равен nQ (на единицу длины). Следовательно, окружающее цилиндр пространство может быть свободным от зарядов только при $n = 1$.

56. Проводник, границы которого заданы уравнениями $\theta = \alpha$, $\theta = -\alpha$ и $r = 1$, несет на себе заряд $\pi\varepsilon$ (на единицу длины). Показать, что потенциальная функция V определяется из преобразования

$$\ln z = -2j\left\{\arcsin\frac{\pi\sin W}{\left[\alpha(2\pi-\alpha)\right]^{1/2}} + \frac{\pi-\alpha}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{(\pi-\alpha)\sin W}{\left[\alpha(2\pi-\alpha) - \pi^2\sin^2 W\right]^{1/2}}\right\}$$

57. Бесконечная проводящая призма квадратного сечения со стороной шириной a имеет на единицу длины заряд Q. Показать, что плотность поверхностного заряда на призме определяется следующими уравнениями в параметрической форме:

$$\sigma = Q\left[F\left(\frac{1}{2}\pi, 2^{-1/2}\right) - E\left(\frac{1}{2}\pi, 2^{-1/2}\right)\right](2^{1/2}\pi a\cos\varphi)^{-1},$$

$$x = \frac{1}{2}a\left[F(\varphi, 2^{-1/2}) - E(\varphi, 2^{-1/2})\right]\left[F\left(\frac{1}{2}\pi, 2^{-1/2}\right) - E\left(\frac{1}{2}\pi, 2^{-1/2}\right)\right]^{-1}$$

где x — расстояние от центра призмы до точки на поверхности, а F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода.

58. Две проводящие ленты лежат в плоскости $y = 0$ и занимают области $a < x < b$ и $-a > x > -b$. Показать, что емкость (на единицу длины) между ними равна

$$\frac{\varepsilon K(m)}{K(n)},$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл модуля k, $m = (b^2 - a^2)^{1/2}/b$, а $n = a/b$.

59. Показать, что емкость на единицу длины между двумя проводящими полосками, лежащими соответственно в плоскостях $x = b$ и $x = -b$ и ограниченными плоскостями $y = a$ и $y = -a$, равна

$$\varepsilon K(k')/K(k),$$

где $K(k')$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы, модули которых k' и $k = (1 - k'^2)^{1/2}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{a}{b} = \frac{K(k')\,E\{\arccos[E(k')/K(k')],\, k'\} - E(k')\,F\{\arccos[E(k')/K(k')],\, k'\}}{E(k')\,K(k) - (k/k')^2\,E(k)\,K(k')}$$

Значение k, близкое к действительному, можно найти из грубой оценки емкости C.

60. Поверхность $V = \pi$ состоит из двух координатных полуплоскостей $x = 0$, $y < 0$ и $y = 0$, $x < 0$, а поверхность $V = 0$ определяется уравнениями $x = h$ при $y < k$ и $y = k$ при $x < h$. Показать, что преобразование, определяющее поле в такой системе, будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\pi z = h\operatorname{arc\,tg}\left[k\left(e^W + 1\right)^{1/2}\left(h^2 e^W - k^2\right)^{-1/2}\right] - k\operatorname{ar\,th}\left[h\left(e^W + 1\right)^{1/2}\left(h^2 e^W - k^2\right)^{-1/2}\right].$$

Показать, что дополнительная емкость (на единицу длины) по сравнению с той, которая была бы, если в области $x < 0$ и $y < 0$ между $V = 0$ и $V = \pi$ существовало только однородное поле, равна

$$\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\ln\frac{h^2 + k^2}{4hk} + \frac{k}{h}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{k} + \frac{h}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{h}\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

Bateman H., Partial Differential Equations. Cambridge, 1932.
Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, Berlin, 1927.
Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge 1925.
Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.
Moullin E. B., Principles of Electromagnetism, Oxford, 1932.
Rothe R., Ollendorff F., Pohlhausen K., Theory of Functions, Technology Press, 1933.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Sokolnikoff I. S., Sokolnikoff E. S., Higher Mathematics for Engineers and Physicists, McGraw-Hill, 1934.
Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, 1893.
Walker M., Conjugate Functions for Engineers, Oxford, 1933.
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

Глава V

ТРЕХМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. При каких условиях поверхности некоторого семейства могут быть эквипотенциальными? На первый взгляд кажется, что трехмерное распределение потенциала, обладающее аксиальной симметрией, можно получить путем такого вращения поперечного сечения двухмерного распределения потенциала, при котором границы трехмерной области образуются из границ поперечного сечения соответствующей двухмерной области. В общем случае, однако, это оказывается несправедливым. Найдем условие, которому должно удовлетворять семейство непересекающихся поверхностей, чтобы оно могло быть семейством поверхностей равного потенциала. Пусть уравнение поверхностей имеет вид

$$F(x, y, z) = C. \tag{5.1}$$

Поскольку каждому значению C соответствует одна из поверхностей семейства, то, если эта поверхность эквипотенциальная, каждому значению C должен соответствовать определенный потенциал

$$V = f(C),$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа. Дифференцирование дает

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(C)\frac{\partial C}{\partial x} \text{ и т. д.}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f''(C)\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + f'(C)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \text{ и т. д.}$$

Подставляя в уравнение Лапласа, получим

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = f''(C)(\nabla C)^2 + f'(C)\nabla^2 C = 0,$$

откуда

$$\frac{\nabla^2 C}{(\nabla C)^2} = -\frac{f''(C)}{f'(C)} = \Phi(C). \tag{5.2}$$

Таким образом, поверхность $F(x, y, z) = C$ может быть эквипотенциальной только в том случае, если отношение $\nabla^2 C/(\nabla C)^2$ является функцией только C.

Путем интегрирования уравнения (5.2) можно найти действительное значение потенциала. Поскольку $f''(C)/f'(C) = d[\ln f'(C)]/dC$, мы имеем

$$\int \Phi(C)\, dC = -\ln [f'(C)] + A',$$

или

$$f'(C) = Ae^{-\int \Phi(C)\, dC}$$

Повторное интегрирование дает

$$V = f(C) = A\int e^{-\int \Phi(C)\, dC} dC + B. \tag{5.3}$$

Постоянные A и B можно определить, если задано значение потенциала на двух поверхностях, принадлежащих семейству (5.1).

§ 2. Потенциал поверхностей второго порядка, определяемых уравнением $x^2/(a^2+\theta)+y^2/(b^2+\theta)+z^2/(c^2+\theta)=1$. В качестве примера применения полученной выше формулы покажем, что любое из трех семейств непересекающихся поверхностей второго порядка, определяемых уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1, \tag{5.4}$$

где $c>b>a$ и $-c^2<\theta<\infty$, можно рассматривать, как семейство эквипотенциальных поверхностей. Чтобы представить себе эти поверхности, будем менять θ в указанных пределах. В интервале $-a^2<\theta<\infty$ каждый член уравнения (5.4) положителен, так что соответствующие поверхности суть эллипсоиды. При $\theta=\infty$ мы имеем сферу с бесконечным радиусом, а при $\theta=-a^2$ эллипсоид сплющивается в эллиптический диск, лежащий в плоскости yz.

Изменению θ в пределах от $-a^2+\delta$ до $-a^2-\delta$ соответствует переход на плоскости yz из области, лежащей внутри диска, во внешнюю область. Последняя представляет собой предельный случай однополостного гиперболоида, описываемого уравнением (5.4) при $-b^2<\theta<-a^2$. Когда $\theta=-b^2$, однополостный гиперболоид сплющивается в участок плоскости xz, включающий ось x и лежащий между гиперболами, пересекающими ось z в точках

$$z=\pm(c^2-b^2)^{1/2}.$$

Изменению θ в пределах от $-b^2+\delta$ до $-b^2$ δ соответствует переход на плоскости xz в область, лежащую по другую сторону этих гипербол. Эта область есть предельный случай двухполостного гиперболоида, описываемого уравнением (5.4) при $-c^2<\theta<-b^2$, сплющенного в плоскость xz. При $\theta=-c^2$ получается другой предельный случай: два «листа» этого гиперболоида сливаются друг с другом в плоскости xy. Таким образом, через каждую точку пространства проходит одна поверхность каждого семейства. Нетрудно показать, что эти три семейства являются взаимно ортогональными, и, следовательно, к ним можно применить теорию, изложенную в § 5 гл. III, приводящую к эллипсоидальным гармоникам. Ввиду сложности последних мы не будем здесь рассматривать их в общем виде и ограничимся, несколько позднее, исследованием лишь частного случая сфероидальных гармоник.

Возвращаясь к нашей задаче, положим

$$M_n=\frac{x^2}{(a^2+\theta)^n}+\frac{y^2}{(b^2+\theta)^n}+\frac{z^2}{(c^2+\theta)^n}$$

и

$$N=\frac{1}{a^2+\theta}+\frac{1}{b^2+\theta}+\frac{1}{c^2+\theta}.$$

В этих обозначениях уравнение (5.4) сведется к $M_1=1$, и после дифференцирования будем иметь

$$\frac{2x}{a^2+\theta}-M_2\frac{\partial\theta}{\partial x}=0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{2x}{M_2(a^2+\theta)} \text{ и т. д.},$$

так что

$$(\nabla\theta)^2=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2=\frac{4M_2}{M_2^2}=\frac{4}{M_2} \tag{5.5}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2}{M_2(a^2+\theta)} - \frac{2x}{M_2(a^2+\theta)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{2x}{a^2+\theta}\frac{1}{M_2^2}\left[\frac{2x}{(a^2+\theta)^2} - 2M_3\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] =$$
$$= \frac{2}{M_2(a^2+\theta)} - \frac{4x^2}{M_2^2(a^2+\theta)^3} - \frac{4x^2}{M_2^2(a^2+\theta)^3} + \frac{8x^2M_3}{(a^2+\theta)^2M_2^3} \text{ и т. д.}$$

Прибавляя аналогичные выражения для y и z, получим

$$\nabla^2\theta = \frac{2N}{M_2} - \frac{8M_3}{M_2^2} + \frac{8M_2M_3}{M_2^3} = \frac{2N}{M_2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (5.2), находим

$$\frac{\nabla^2\theta}{(\nabla\theta)^2} = \frac{2N}{M_2}\frac{M_2}{4} = \frac{N}{2}$$

и, следовательно,

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\theta} + \frac{1}{b^2+\theta} + \frac{1}{c^2+\theta}\right) \tag{5.6}$$

Таким образом, поверхности рассматриваемого семейства могут быть эквипотенциальными, а их потенциал определяется по формуле (5.3):

$$V = A\int_0^\theta [(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{-1/2}\,d\theta + B. \tag{5.7}$$

Эллиптический интеграл вида (5.7) можно найти в книге Пайерса [формулы (542) — (549) при $x = -\theta$]. Постоянные A и B могут быть выбраны действительными или мнимыми, лишь бы потенциал V был действительным.

§ 3. Заряженный проводящий эллипсоид. Если выбрать $V = 0$ при $\theta = \infty$, то формула (5.7) примет вид

$$V = A\int_\theta^\infty [(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{-1/2}\,d\theta. \tag{5.8}$$

Полагая $V = V_0$ при $\theta = 0$ и подставляя в формулу (5.8), получим

$$-A = V_0\left\{\int_0^\infty [(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{-1/2}\,d\theta\right\}^{-1} \tag{5.9}$$

Если полный заряд эллипсоида равен Q, то поле, созданное им на бесконечности, должно быть равно $Q/(4\pi\varepsilon r^2)$. Согласно уравнению (5.4), при $\theta\to\infty$ $x^2+y^2+z^2 = r^2\to 0$, и, следовательно, $\partial\theta/\partial r \to 2r$. Поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{A}{r^3}2r = \frac{2A}{r^2},$$

так что

$$8\pi\varepsilon A = -Q. \tag{5.10}$$

Согласно формуле (5.9), емкость эллипсоида равна

$$C = \frac{Q}{V_0} = -\frac{8\pi\varepsilon A}{V_0} = 8\pi\varepsilon\left\{\int_0^\infty [(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{-1/2}\,d\theta\right\}^{-1}, \tag{5.11}$$

а поверхностная плотность заряда определяется выражением

$$\sigma = -\varepsilon|\nabla V|_{\theta=0} = -\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}|\nabla\theta|\right)_{\theta=0}$$

Из формулы (5.8) следует, что $(\partial V/\partial\theta)_{\theta=0} = A(abc)^{-1}$, а из уравнения (5.5), — что $|\nabla\theta| = 2M_2^{-1/2}$, откуда

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{5.12}$$

§ 4. Эллиптический и круглый диски. Емкость эллиптического диска, получаемая из формулы (5.11) при $a=0$, выражается при помощи эллиптического интеграла. Чтобы найти плотность поверхностного заряда, запишем формулу (5.12) в виде

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi bc}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^4}+\frac{a^2z^2}{c^4}\right)^{-1/2}$$

Пусть теперь $a\to 0$ и членами, содержащими y и z, можно пренебречь. Поскольку и x и a равны нулю, первое слагаемое необходимо преобразовать при помощи уравнения (5.4), положив в нем $\theta=0$. Для плотности заряда будем иметь

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi bc}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.13}$$

Полагая в формуле (5.11) $a=0$ и $b=c$, получим выражение для емкости круглого диска (см. Двайт, 186.11):

$$C=8\pi\varepsilon\left[\int_0^\infty \theta^{-1/2}(b^2+\theta)^{-1}\,d\theta\right]^{-1}=8\pi\varepsilon\left(\frac{2}{b}\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta^{1/2}}{b}\right|_0^\infty\right)^{-1}=8\varepsilon b. \tag{5.14}$$

Если положить $y^2+z^2=\rho^2$ и $c=b$, то из из формулы (5.13) следует, что плотность заряда на каждой из сторон круглого диска равна

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi b\,(b^2-\rho^2)^{1/2}} \tag{5.15}$$

Потенциал, созданный таким диском, дается формулой (5.8), если положить в ней $a=0$ и $b=c$:

$$V=\frac{2V_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta^{1/2}}{b}\right)=\frac{2V_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\theta^{1/2}}$$

Подставляя сюда значение θ, полученное из соотношения (5.4) при $a=0$, $b=c$ и $x^2+y^2+z^2=r^2$, находим

$$V=\frac{2V_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(2^{1/2}\,b\,\{r^2-b^2+[(r^2-b^2)^2+4b^2x^2]^{1/2}\}^{-1/2}\right). \tag{5.16}$$

Эту задачу можно также решить при помощи гармоник сплюснутого сфероида (см. § 28а настоящей главы).

§ 5. Метод изображений. Проводящие плоскости. Применение критерия, выведенного в § 1, показывает, что для систем, содержащих более одного точечного заряда, потенциал нельзя получить при помощи двухмерной аналогии. Тем не менее два метода, используемые для решения двухмерных задач, можно использовать в трехмерном случае. Одним из них является метод изображений. В любом случае, когда уравнение замкнутой проводящей поверхности, находящейся в поле точечного заряда q, записывается в виде

$$0=\frac{q}{r}+\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s}{r_s} \tag{5.17}$$

(где r — расстояние от q до точки P на поверхности, r_s — расстояние от некоторой точки s, находящейся по другую сторону поверхности, до P), задачу можно решить методом изображений. Мы рассмотрим только простейшие поверхности — сферу и плоскость. Из симметрии очевидно, что для решения задачи о точечном заряде, расположенном в плоскости xy вблизи бесконеч-

ной проводящей плоскости или вблизи двух таких плоскостей, пересекающихся вдоль оси z под углом π/m, следует поместить его изображения в плоскости xy в тех же точках, что и в двухмерном случае (фиг. 28). Сложение потенциалов точечного заряда q и его изображений дает в области, заключенной между пересекающимися плоскостями, точно такой же потенциал V, какой создается зарядом q и равным ему по величине индуцированным зарядом противоположного знака, распределенным по плоскостям. Поверхностную плотность этого индуцированного заряда σ можно найти, вычислив $-\varepsilon\,\partial V/\partial n$ на поверхности металла. В случае точечного заряда q, помещенного на расстоянии a от заземленной проводящей плоскости, плотность индуцированного заряда в точке P, согласно § 15 гл. I и формуле (1.42), равна

$$\sigma = \frac{-aq}{2\pi r^3},$$

где r — расстояние от q до P. Из § 18 гл. II известно, что никакое распределение истинных зарядов в пространстве, отделенном от q заземленной проводящей плоскостью, не может повлиять на величину плотности зарядов σ, индуцированную на стороне, обращенной к q.

§ 6. Плоская граница двух диэлектриков. Однородный линейный заряд, расположенный параллельно плоской границе раздела двух диэлектриков, можно рассматривать состоящим из равномерно распределенных вдоль линии одинаковых точечных зарядов, для которых изображения строятся так же, как для линейного заряда. Естественно поэтому предположить, что для точечных зарядов справедлив тот же закон изображений, что и для линейных.

Пусть относительные диэлектрические проницаемости областей, соответствующих положительным и отрицательным значениям z, равны соответственно K_1 и K_2. Рассмотрим систему зарядов, расположенных в диэлектрике K_1; пусть потенциал системы в отсутствие диэлектрика равен

$$V_{\text{vac}} = f(x, y, z),$$

так что в том случае, когда все пространство заполнено однородным диэлектриком K_1, потенциал, в соответствии с формулой (1.5), имеет вид

$$V_1 = \frac{1}{K_1} f(x, y, z).$$

Потенциал изображения в плоскости $z = 0$ будет

$$V_i = C_1 f(x, y, -z).$$

Закон изображений, изложенный в § 5 гл. IV, говорит, что в присутствии диэлектрика K_2 поля в областях K_1 и K_2 записываются в виде

$$V_1 = \frac{1}{K_1} f(x, y, z) + C_1 f(x, y, -z) \tag{5.18}$$

и

$$V_2 = C_2 f(x, y, z). \tag{5.19}$$

При $z = 0$ $V_1 = V_2$ и [см. условия (1.48)] $K_1(\partial V_1/\partial z) = K_2(\partial V_2/\partial z)$; поэтому

$$1 + K_1 C_1 = K_1 C_2 \quad \text{и} \quad 1 - K_1 C_1 = K_2 C_2.$$

Разрешая эти уравнения и подставляя результат в выражение (5.18) и (5.19), получим

$$V_1 = \frac{1}{K_1}\left[f(x, y, z) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} f(x, y, -z) \right] \tag{5.20}$$

и

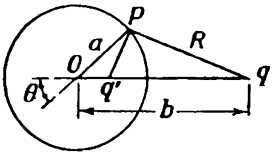
$$V_2 = \frac{2}{K_1 + K_2} f(x, y, z). \tag{5.21}$$

Пусть заряд q расположен в диэлектрике K_1 в точке P_1; принимая во внимание формулу (1.5), мы видим, что поле в области K_1 такое, как будто все пространство заполнено диэлектриком K_1, а в отраженной точке P_2 находится добавочный заряд q' Поле в области K_2 совпадает с полем заряда q'', находящегося в точке P_1; оно вычислено в предположении, что все пространство заполнено диэлектриком K_n. При этом

$$q' = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} q \quad \text{и} \quad q'' = \frac{2K_n}{K_1 + K_2} q. \tag{5.22}$$

Для вычисления поля выбор величины K_n несущественен, но обычно ее принимают равной K_1, 1 или K_2. Здесь принято $K_n = K_1$.

§ 7. Изображение в сферическом проводнике. В § 6 гл. IV было показано, что цилиндр радиуса $\rho = a$ является эквипотенциальной поверхностью в поле двух линейных зарядов — заряда q при $\rho = b$ и заряда $-q$ при $\rho = +a^2/b$. Покажем теперь, что сфера радиуса $r = a$ имеет нулевой потенциал в поле двух точечных зарядов: q в точке $r = b$ и q' в точке $r = a^2/b$, причем последний, как будет показано ниже, уже не равен $-q$. Потенциал V', созданный зарядом q' на сфере радиуса $r = a$, как это видно из фиг. 45, равен



Фиг. 45.

$$4\pi\varepsilon V' = q' (a^4 b^{-2} + a^2 - 2a^3 b^{-1} \cos\theta)^{-1/2} =$$
$$= ba^{-1} q' (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1/2} = ba^{-1} R^{-1} q'$$

Потенциал, созданный на этой сфере зарядом q, равен $q/(4\pi\varepsilon R)$. Для того чтобы результирующий потенциал был равен нулю, эти потенциалы должны быть равны по величине и противоположны по знаку, т. е.

$$q' = -\frac{a}{b} q. \tag{5.23}$$

Следовательно, потенциал в произвольной точке определится выражением

$$V = (4\pi\varepsilon)^{-1} q [(r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{-1/2} - a(b^2 r^2 + a^4 - 2a^2 br\cos\theta)^{-1/2}], \tag{5.24}$$

а плотность поверхностного заряда на сфере будет равна

$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{a - b\cos\theta}{R^3} - \frac{b(b - a\cos\theta)}{aR^3}\right] = \frac{a^2 - b^2}{4\pi aR^3} q. \tag{5.25}$$

Потенциал сферы можно, очевидно, сделать равным любой заданной величине V, если прибавить к полученному решению потенциал точечного заряда

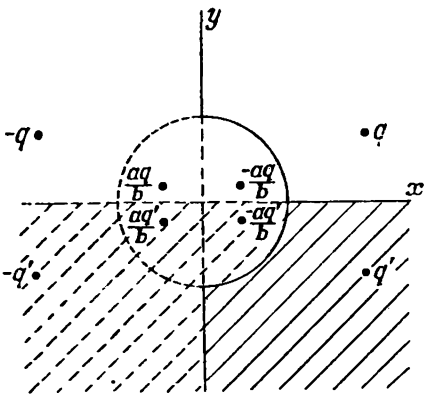
$$q = 4\pi\varepsilon aV, \tag{5.26}$$

помещенного в центр сферы. Если требуется найти поле, созданное точечным зарядом q и проводящей сферой, несущей заряд Q, достаточно прибавить к формуле (5.24) потенциал заряда $Q + aq/b$, находящегося в центре.

Можно показать, что, в противоположность аналогичному двухмерному случаю, простым изображением нельзя построить решение для диэлектри-

ческого шара в поле точечного заряда. Для решения этой задачи требуется применение сферических гармоник.

§ 8. Пример применения метода изображений для нахождения поля точечного заряда. В качестве примера, иллюстрирующего содержание последних трех параграфов, построим изображения в случае заземленного металлического листа, лежащего в плоскости yz и имеющего сферическую выпуклость радиуса a с центром в начале координат; пространство, лежащее ниже плоскости xz, заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью K. Точечный заряд q находится в точке x_0, y_0, z_0 и $x_0^2+y_0^2+z_0^2=b^2$. Чтобы найти требуемые изображения, дополним границы пунктирными линиями, как это показано на фиг. 46. Потенциал над плоскостью xz можно найти как сумму потенциалов самого заряда q и его семи изображений, расположенных следующим образом:



Фиг. 46.

q в точке x_0, y_0, z_0, $\qquad$ q' в точке x_0, $-y_0$, z_0,

$-q$ в точке $-x_0$, y_0, z_0, $\qquad$ $-q'$ в точке $-x_0$, $-y_0$, z_0,

$-\frac{aq}{b}$ в точке $\left(\frac{a}{b}\right)^2 x_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 y_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 z_0$, $\quad -\frac{aq'}{b}$ в точке $\left(\frac{a}{b}\right)^2 x_0$, $-\left(\frac{a}{b}\right)^2 y_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 z_0$,

$\frac{aq}{b}$ в точке $-\left(\frac{a}{b}\right)^2 x_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 y_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 z_0$, $\quad \frac{aq'}{b}$ в точке $\left(\frac{a}{b}\right)^2 x_0$, $-\left(\frac{a}{b}\right)^2 y_0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 z_0$,

где, согласно соотношению (5.22),

$$q'=\frac{1-K}{1+K}q.$$

Потенциал в диэлектрике, ниже плоскости xz, можно получить, используя только изображения выше плоскости xz и подставляя, в соответствии с выражением (5.18), вместо q заряд

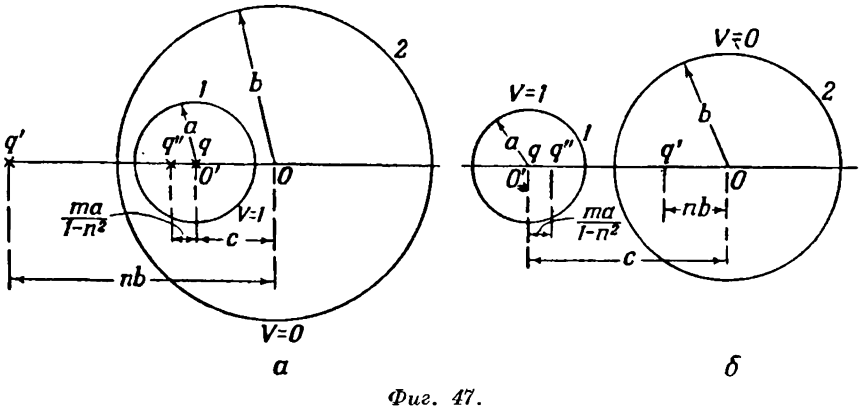
$$q''=\frac{2q}{1+K}.$$

Сечение проводника плоскостью xy и проекции изображений на эту плоскость показаны на фиг. 46.

§ 9а. Бесконечная система изображений. Задача о двух сферах. Часто оказывается, что при помощи конечного числа точечных зарядов нельзя получить эквипотенциальные поверхности нужной формы. В некоторых случаях, однако, можно сначала сделать эквипотенциальной одну поверхность, располагая внутри нее точечные заряды, а затем при помощи подходящей системы изображений сделать эквипотенциальными и другие поверхности. При этом, однако, первая поверхность искажается. Тогда при помощи третьей системы изображений ей можно придать опять первоначальную форму, но за счет искажения других поверхностей, и т. д. Если

эффект каждой последующей группы изображений стремится к нулю либо в силу уменьшения величины зарядов, либо из-за их удаления, либо за счет тенденции к взаимной компенсации, то при достаточном числе изображений получается сколь угодно близкая апроксимация точного решения [1].

Воспользуемся этим методом для вычисления собственных и взаимных емкостей двух сфер. Пусть радиусы сфер *1* и *2* суть a и b, а расстояние между их центрами равно c. В соответствии с § 17 гл. II коэффициент c_{11} есть заряд на сфере *1*, а c_{12} — на сфере *2*, когда сфера *2* заземлена, а сфера *1* имеет потенциал, равный единице. Коэффициент c_{22} можно получить, поменяв местами a и b в c_{11}. На фиг. 47,*а* и *б* приведены соответственно случаи $c < (b-a)$ и $c > (b+a)$ при значениях $a/c = m$, $b/c = n$.



Фиг. 47.

Создадим сначала на сфере *1* потенциал, равный единице, поместив в ее центр O' заряд $q = 4\pi\varepsilon a$. Затем, поместив изображение $q' = -4\pi\varepsilon ab/c = -4\pi\varepsilon na$ на расстоянии $b^2/c = nb$ влево от точки O [см. формулу (5.23)], добьемся равенства нулю потенциала сферы *2*. Потенциал сферы *1* можно опять сделать равным единице при помощи изображения

$$q'' = \frac{\mp aq'}{(c-nb)} = \frac{\pm 4\pi\varepsilon mna}{(1-n^2)},$$

расположенного на расстоянии $a^2/(c-nb) = ma/(1-n^2)$ вправо от точки O' и опять привести потенциал сферы *2* к нулю, поместив изображение

$$q''' = \frac{-bq''}{c-ma/(1-n^2)} = \frac{-4\pi\varepsilon mn^2a}{1-m^2-n^2}$$

на соответствующем расстоянии от точки O и т. д. Величина каждого последующего изображения уменьшается, а соответствующее решение приближается к точному. Складывая заряды на сфере *1*, получим

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon a\left[1 \pm \frac{mn}{1-n^2} + \frac{m^2n^2}{(1-n^2)^2-m^2} + \ \right], \qquad (5.27)$$

где верхний знак относится к случаю «*б*». Складывая заряды на сфере *2*, для случая «*б*» будем иметь

$$c_{12} = 4\pi\varepsilon\left[-na - \frac{mn^2a}{1-n^2-m^2} - \ \right] \qquad (5.28)$$

[1] Автор выражается неточно: недостаточно, чтобы вклад каждой последующей группы изображений стремился к нулю, — необходима сходимость соответствующего ряда.—*Прим. перев.*

В случае «*а*», согласно § 18 гл. II, $c_{12} = -c_{11}$. В силу симметрии для случая «*б*» можно написать

$$c_{22} = 4\pi\varepsilon b\left[1 + \frac{mn}{1-m^2} + \frac{m^2n^2}{(1-m^2)^2-n^2} + \ldots\right] \tag{5.29}$$

В случае «*а*» емкость c_{22} не представляет интереса.

Сила притяжения между двумя сферами при $V_2 = 0$, согласно соотношению (2.56), равна

$$F = \frac{V_1^2}{2}\frac{\partial c_{11}}{\partial c} = -\frac{4\pi\varepsilon a V_1^2}{c}\left\{\frac{mn}{(1-n^2)^2} + \frac{m^2n^2[2(1-n^2)-m^2]}{[(1-n^2)^2-m^2]^2} + \ldots\right\} \tag{5.30}$$

Чтобы получить потенциал в некоторой точке P, следует сложить потенциалы, созданные в этой точке всеми изображениями. Если потенциалы сфер равны V_1 и V_2, причем $V_2 \neq 0$, то в случае «*б*» появится вторая система изображений, для получения которой нужно начинать с зарядов $q_1 = 4\pi\varepsilon a V_1$ и $q_2 = 4\pi\varepsilon b V_2$, расположенных соответственно в центре сфер *1* и *2*. Величины зарядов этой системы и их расположение получаются при перестановке O и O' и a и b в соответствующих выражениях для первой системы изображений.

§ 9б. Уравнения в конечных разностях. Задача о двух сферах. Для точных расчетов формулы последнего параграфа не очень удобны, если только m и n не малы. Установив общее соотношение между последовательными изображениями и решая полученное разностное уравнение, можно найти более компактные выражения, содержащие гиперболические функции. Обозначим n-е изображение в сфере *1* через q_n, так что первоначальный заряд в ее центре равен $q_1 = 4\pi\varepsilon a$; изображение q_n в сфере *2* обозначим через p_n. Расстояние от точки O' до q_n равно s_n, а от точки O до p_n равно r_n (фиг. 47). Тогда

$$p_n = \frac{-bq_n}{c \mp s_n}, \qquad r_n = \frac{b^2}{c \mp s_n}, \tag{5.31}$$

$$q_{n+1} = \frac{\mp a p_n}{c - r_n} = \frac{\pm abq_n}{c(c \mp s_n) - b^2}, \tag{5.32}$$

$$s_{n+1} = \frac{\pm a^2}{c - r_n} = \frac{\pm a^2(c \mp s_n)}{c(c \mp s_n) - b^2} = \frac{a}{b}\frac{q_{n+1}}{q_n}(c \mp s_n), \tag{5.33}$$

где нижний знак относится к случаю «*а*», а верхний — к случаю «*б*». Исключая $c \mp s_n$ из соотношений (5.32) и (5.33), получим

$$\pm\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{c}{a^2}\frac{q_n}{q_{n+1}}s_{n+1} - \frac{b}{a},$$

так что

$$\pm\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{c}{a^2}\frac{q_{n-1}}{q_n}s_n - \frac{b}{a}. \tag{5.34}$$

Исключив s_n из соотношений (5.32) и (5.34), приведем результат к виду

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n-1}} = \pm\frac{c^2-a^2-b^2}{ab}\frac{1}{q_n}. \tag{5.35}$$

Это есть, очевидно, уравнение в конечных разностях второго порядка с постоянными коэффициентами. Согласно общему методу решения таких уравнений, следует подставить в уравнение (5.35) $1/q_n = u^n$, разделить результат

на u^{n-1} и решить полученное квадратное уравнение для u алгебраически. Если два его решения суть u_1 и u_2, то решение разностного уравнения имеет вид

$$\frac{1}{q_n} = Au_1^n + Bu_2^n, \tag{5.36}$$

где A и B определяются начальными условиями. Рассматриваемый случай особенно прост, поскольку коэффициенты при $1/q_{n+1}$ и $1/q_{n-1}$ одинаковы. Пользуясь формулами (651.03) и (651.04) из справочника Двайта, согласно которым

$$\operatorname{sh}(n+1)\theta + \operatorname{sh}(n-1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta \operatorname{sh} n\theta,$$

$$\operatorname{ch}(n+1)\theta + \operatorname{ch}(n-1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta \operatorname{ch} n\theta,$$

получаем, что решение уравнения (5.35) можно записать в виде

$$\frac{1}{q_n} = A \operatorname{ch} n\alpha + B \operatorname{sh} n\alpha, \tag{5.37}$$

если выбрать

$$\operatorname{ch}\alpha = \pm \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} \tag{5.38}$$

Чтобы вычислить A и B, напишем для первых двух изображений

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon a} = A \operatorname{ch}\alpha + B \operatorname{sh}\alpha,$$

$$\frac{1}{q_2} = \pm \frac{c^2 - b^2}{ab} \frac{1}{4\pi\varepsilon a} = \left(2\operatorname{ch}\alpha \pm \frac{a}{b}\right) \frac{1}{4\pi\varepsilon a} = A \operatorname{ch} 2\alpha + B \operatorname{sh} 2\alpha.$$

Умножая первое из этих уравнений на $2\operatorname{ch}\alpha$ и записывая его члены через $\operatorname{ch} 2\alpha$ и $\operatorname{sh} 2\alpha$, найдем величины A и B.

$$A = \mp \frac{1}{4\pi\varepsilon b}, \qquad B = \frac{b \pm a \operatorname{ch}\alpha}{4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha}. \tag{5.39}$$

Если подставить значения A и B в решение (5.37), то, используя (Двайт, 651.01), получим

$$\frac{1}{q_n} = \frac{b \operatorname{sh} n\alpha \pm a \operatorname{sh}(n-1)\alpha}{4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha} \tag{5.40}$$

Складывая заряды на сфере *1*, находим

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha \sum_{n=1}^{\infty} [b \operatorname{sh} n\alpha \pm a \operatorname{sh}(n-1)\alpha]^{-1}, \tag{5.41}$$

где нижний знак относится к случаю «*а*» (фиг. 47, *а*), а верхний — к случаю «*б*» (фиг. 47, *б*). В случае «*а*», согласно § 18 гл. II, $c_{12} = -c_{11}$. Чтобы найти c_{12} в случае «*б*», следует определить p_n. Взяв верхний знак и исключив из соотношений (5.31) и (5.32) $c - s_n$, получим

$$-\frac{1}{p_n} = \frac{a}{c}\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{b}{c}\frac{1}{q_n}.$$

Подставим значения $1/q_{n+1}$ и $1/q_n$ из соотношения (5.40) и воспользуемся формулами (5.38) и (Двайт, 651.06); тогда

$$\frac{1}{p_n} = -\frac{c \operatorname{sh} n\alpha}{4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha}, \tag{5.42}$$

так что сложение зарядов на сфере *2* дает

$$c_{12} = -\frac{4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech} n\alpha. \qquad (5.43)$$

Емкость c_{22} в случае «*б*» в силу симметрии и соотношения (5.41) равна

$$c_{22} = 4\pi\varepsilon ab \operatorname{sh}\alpha \sum_{n=1}^{\infty} [a \operatorname{sh} n\alpha + b \operatorname{sh}(n-1)\alpha]^{-1}. \qquad (5.44)$$

§ 9в. Сфера над плоскостью и две одинаковые сферы. Представляет интерес частный случай рассмотренной задачи — задача о сфере над проводящей плоскостью. Этот случай можно получить, положив $d + c = b \to \infty$ в случае «*а*» или $c - d = b \to \infty$ в случае «*б*», если d — расстояние от центра сферы *1* до плоскости. При этом $n \to 1$, $m \to 0$, $m/|1-n| = a/d$, так что

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon a \left(1 + \frac{a}{2d} + \frac{a^2}{4d^2 - a^2} + \quad\right) = 4\pi\varepsilon a \operatorname{sh}\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech} n\alpha, \qquad (5.45)$$

где $d = a \operatorname{ch}\alpha$ и a — бесконечно малая величина по сравнению с b. В обоих случаях («*а*» и «*б*») $c_{12} = -c_{11}$. Сила, действующая между сферой и плоскостью, будет равна

$$F = \frac{V_1^2}{2} \frac{\partial c_{11}}{\partial d} = -2\pi\varepsilon a^2 V_1^2 \left\{ \frac{1}{2d^2} + \frac{8ad}{(4d^2 - a^2)^2} + \ldots \right\} =$$

$$= 2\pi\varepsilon V_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{cosech} n\alpha (\operatorname{cth}\alpha - n \operatorname{cth} n\alpha)]. \qquad (5.46)$$

Для двух одинаковых сфер радиуса a, расположенных на расстоянии c друг от друга, формулы § 9б несколько упрощаются, если ввести параметр $\beta = {}^1/_2\alpha$; тогда при $a = b$ имеем (см. Двайт, 652.6)

$$\operatorname{ch}\beta = \left[\frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}\alpha)\right]^{1/2} = \frac{c}{2a}. \qquad (5.47)$$

В этих обозначениях, полагая в соотношении (5.41) $a = b$, имеем

$$c_{11} = c_{22} = 4\pi\varepsilon a \operatorname{sh}\beta \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech}(2n-1)\beta \qquad (5.48)$$

и из соотношения (5.43) получаем

$$c_{12} = -4\pi\varepsilon a \operatorname{sh}\beta \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech} 2n\beta. \qquad (5.49)$$

§ 10. Инверсия в пространстве трех измерений. Геометрические свойства. Если на плоскости проведена окружность радиуса K с центром в начале координат и пересекающая ее радиальная прямая, то две точки на этой прямой, расположенные на расстояниях r и r' от центра, называются, согласно § 22а гл. IV, инвертированными точками в том случае, когда

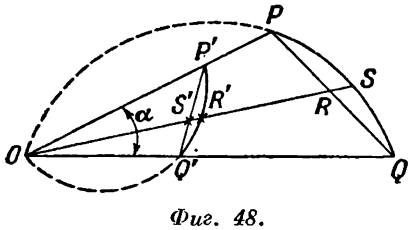
$$rr' = K^2. \qquad (5.50)$$

В § 22а гл. IV окружность представляла собой сечение цилиндра, но ее с равным основанием можно рассматривать как главное сечение сферы. Таким образом, каждой точке некоторой поверхности соответствует в про-

странстве инвертированная точка; поверхность, образованная инвертированными точками, носит название инвертированной поверхности. Если уравнение исходной поверхности в сферических координатах было $f(r, \theta, \varphi) = 0$, то уравнение инвертированной поверхности имеет вид $f(K^2/r, \theta, \varphi) = 0$. В § 22а гл. IV было показано, что прямые линии инвертируются (преобразуются) в окружности, лежащие в той же плоскости и проходящие через центр инверсии, и наоборот, тогда как окружности, не проходящие через центр, инвертируются также в окружности. Следовательно, в трехмерном случае плоскости инвертируются в сферы, проходящие через центр инверсии, а сферы, не проходящие через центр, инвертируются в сферы. Поскольку в § 22а гл. IV законы инверсии были получены при помощи конформных преобразований, углы при инверсии не изменяются. Отсюда, очевидно, следует, что если малый конус с телесным углом $d\Omega$ и вершиной в начале координат вырезает на поверхности S и инвертированной ей поверхности S' элементы площади dS и dS', а угол θ между осью конуса и элементами площади один и тот же, то

$$\frac{dS}{dS'} = \frac{r^2\, d\Omega \cos\theta}{r'^2\, d\Omega \cos\theta} = \frac{r^2}{r'^2}. \tag{5.51}$$

§ 11а. Инверсия потенциала и зарядов-изображений. Покажем, что законы инверсии можно сформулировать для электрических величин таким образом, что из решения одной задачи можно получить решение другой, в которой границы раздела являются поверхностями, инвертированными по отношению к соответствующим поверхностям первой задачи. Рассмотрим фиг. 48, на которой точки P', R' и Q' — инвертированные по отношению к точкам P, R и Q, а O — центр инверсии. Заряд q в точке P создает потенциал $V = q/(4\pi\varepsilon PQ)$ в точке Q, а заряд q' в точке P' создает потенциал $V' = q'/(4\pi\varepsilon P'Q')$ в точке Q'. Треугольники $OQ'P'$ и OPQ подобны, поскольку $K^2 = OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ и угол α — общий. Искомое соотношение между потенциалом V в точке Q до инверсии и потенциалом V' в точке Q' после инверсии имеет, следовательно, вид



Фиг. 48.

$$\frac{V'}{V} = \frac{q'\,PQ}{q\,P'Q'} = \frac{q'\,OP}{q\,OQ'}.$$

Чтобы использовать это соотношение, следует установить подходящий закон инверсии зарядов. В § 7 было показано, что сфера радиуса K имеет нулевой потенциал в поле заряда q, расположенного в точке $r = b$, и заряда $|q'| = +K|q|/b$, расположенного в инвертированной точке $r' = K^2/b$. Если потенциал сферы после инверсии относительно самой себя (т. е. меняющей местами заряды) остается равным нулю, то закон инверсии зарядов должен быть

$$\frac{q'}{q} = \frac{K}{b} = \frac{K}{OP} = \frac{OP'}{K} \tag{5.52}$$

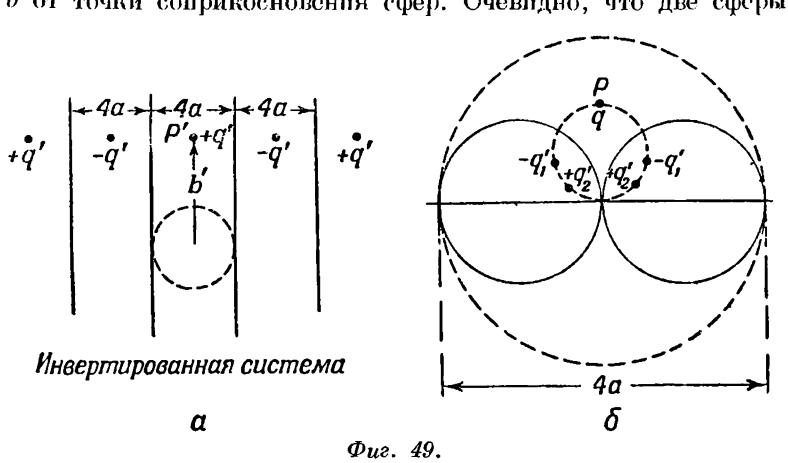
Отношению приписан положительный знак, поскольку мы потребовали, чтобы инверсия сохраняла знаки зарядов неизменными. Подставляя эти величины в уравнение для инверсии потенциала, получим соотношение

$$\frac{V'}{V} = \frac{K}{OP}\frac{OP}{OQ'} = \frac{K}{OQ'} = \frac{OQ}{K} \tag{5.53}$$

Формула (5.53) показывает, что если при конечном расстоянии OQ потенциал $V = 0$, то $V' = 0$. Это означает, что если некоторая поверхность имеет нулевой

потенциал в поле точечных зарядов q_1, q_2, q_n, находящихся в точках P_1, P_2, ..., P_n, расположенных на конечных, отличных от нуля расстояниях от центра инверсии, то инвертированная поверхность будет иметь нулевой потенциал в поле инвертированных зарядов q'_1, q'_2, q'_n, находящихся в точках P'_1, P'_2, ..., P'_n. Упомянутое выше ограничение необходимо, поскольку соотношение (5.52) не имеет места, когда OP равно нулю или бесконечности. Из сказанного выше следует также, что в тех случаях, когда некоторая задача решается при помощи изображений, «инвертированная» задача также решается при помощи изображений.

§ 11б. Пример инверсии изображений. Вычислим силу, действующую на точечный заряд q, находящийся в плоскости симметрии двух соприкасающихся заземленных сфер радиуса a; заряд расположен в точке P на расстоянии b от точки соприкосновения сфер. Очевидно, что две сферы можно



Фиг. 49.

получить инверсией системы плоскостей, изображенной на фиг. 49, *а*. Вычисления упрощаются, если в качестве сферы инверсии выбрать сферу, касающуюся обеих плоскостей (изображенную на фиг. 49, *а* пунктиром). Потенциал в точке P', созданной изображениями до инверсии, равен

$$V' = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q'}{4na} = -\frac{q'}{8\pi\varepsilon a}\ln 2.$$

Точка P' является точкой равновесия (нейтральной точкой) поля изображений, так что величина потенциала V' внутри сферы радиуса δ' с центром в точке P' (V'_P) постоянна, если пренебречь членами порядка δ'^n при $n > 1$. Закон инверсии (5.53) дает для потенциалов, созданных изображениями в точке P и на расстоянии δ над точкой P (изображения лежат на окружности, проходящей через P и точку касания), следующие выражения:

$$V_b = \frac{2a}{b}V'_P, \qquad V_{b+\delta} \approx \frac{2a}{b+\delta}V'_P \approx V_b - \frac{2a\delta}{b^2}V'_P.$$

Согласно соотношению (5.52), заряд q' при инверсии преобразуется в заряд $2aq/b$, так что сила, действующая на q, оказывается равной

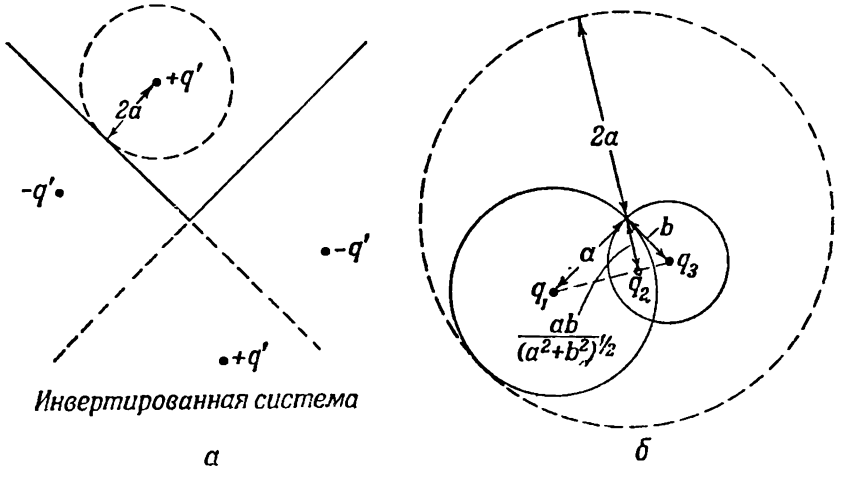
$$F = qE = \lim_{\delta\to 0}\frac{q(V_b - V_{b+\delta})}{\delta} = -\frac{aq^2}{2\pi\varepsilon b^3}\ln 2. \qquad (5.54)$$

§ 11в. Инверсия заряженной проводящей поверхности. Рассмотрим проводящую поверхность S, заряженную до потенциала $1/K$ и несущую

поверхностный заряд плотности σ; пусть Q — некоторая точка на этой поверхности. Согласно закону (5.53), потенциал в соответствующей точке Q' на инвертированной поверхности S' равен $V'_Q \triangleq 1/OQ'$. Поскольку потенциал в точке Q', созданный отрицательным зарядом $4\pi\varepsilon$, находящимся в точке O, равен $-1/OQ'$, то очевидно, что при наложении потенциала такого заряда потенциал инвертированной поверхности обращается в нуль. Обращение этой операции дает важное правило, согласно которому, зная решение задачи для проводника с нулевым потенциалом в поле положительного заряда $4\pi\varepsilon$, можно при помощи инверсии с центром в той точке, где находится этот заряд, получить решение задачи для инвертированной проводящей поверхности, заряженной до потенциала $-K^{-1}$. Для инверсии поверхностной плотности заряда в точке P будем, согласно соотношениям (5.50) — (5.52), иметь

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{q'}{dS'}\frac{dS}{q} = \frac{K}{OP}\frac{(OP)^2}{(OP')^2} = \frac{(OP)^3}{K^3} = \frac{K^3}{(OP')^3}. \tag{5.55}$$

§ 11г. Преобразование емкости при инверсии. В качестве примера применения метода, изложенного в § 11в, найдем емкость проводника,



Фиг. 50.

образованного двумя сферами радиусов a и b, пересекающимися под прямым углом. Очевидно, что инвертированная система имеет вид, изображенный на фиг. 50,*а*: две заземленные плоскости, пересекающиеся под прямым углом, находятся в поле точечного заряда q' $4\pi\varepsilon$. Это поле совпадает с полем, созданным зарядами-изображениями, показанными на фигуре. Проводник требуемой формы, полученный при помощи инверсии, будет иметь потенциал $V = -1/K = -1/2a$. Согласно формуле (1.27), заряд на этой поверхности равен сумме зарядов-изображений q_1, q_2 и q_3, т. е., в соответствии с соотношением (5.52),

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 = 4\pi\varepsilon\left[\frac{-a}{2a} + \frac{ab}{2a\,(a^2+b^2)^{1/2}} - \frac{b}{2a}\right],$$

а емкость равна

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon\left[\frac{(a+b)(a^2+b^2)^{1/2} - ab}{(a^2+b^2)^{1/2}}\right] \tag{5.56}$$

Потенциал в пространстве, окружающем проводник, можно найти непосредственно по зарядам-изображениям q_1, q_2 и q_3 или при помощи инверсии

потенциала, создаваемого зарядами-изображениями внутри угла, образованного плоскостями.

§ 12а. Пространственные гармоники. В § 1 было показано, что вращением семейства ортогональных кривых, представляющего поперечное сечение двухмерного поля, нельзя, вообще говоря, получить семейство трехмерных эквипотенциальных поверхностей. Однако таким образом можно получить семейство поверхностей, которые вместе с плоскостями, пересекающимися вдоль оси вращения и характеризуемыми азимутальным углом, образуют систему ортогональных криволинейных координат; последнюю можно изучить при помощи метода, изложенного в § 4 гл. III. Если меридиональное сечение поставленной трехмерной краевой задачи образует двухмерную границу, для которой решение можно получить при помощи конформного преобразования, то существует метод, позволяющий построить такую систему координат, в которой первоначальные краевые условия имеют весьма простой вид. Задача, таким образом, заключается в нахождении общего решения уравнения Лапласа в такой системе координат.

Пусть $u_1 = f_1(x, y)$ и $u_2 = f_2(x, y)$ — сопряженные функции в плоскости z, определяемые соотношением

$$z = x + jy = f(u_1 + ju_2) = f(u). \tag{5.57}$$

Тогда, согласно выражению (4.56),

$$\frac{dz}{du} = f'(u), \quad \text{или} \quad dx + j\,dy = f'(u)\ (du_1 + j\,du_2).$$

Умножая это равенство на комплексно-сопряженное, получим

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = \left|\frac{dz}{du}\right|^2 (du_1^2 + du_2^2).$$

Если эта система вращается относительно оси y, то для элемента длины будем иметь

$$ds^2 = ds_1^2 + x^2 (d\varphi)^2 = \left|\frac{dz}{du}\right|^2 (du_1^2 + du_2^2) + x^2 (d\varphi)^2. \tag{5.58}$$

Сравнение с соотношением (3.10), где $d\varphi = du_3$, дает

$$h_1 = h_2 = \left|\frac{dz}{du}\right| \quad \text{и} \quad h_3 = x,$$

так что уравнение Лапласа, согласно соотношению (3.13), имеет вид

$$x\left|\frac{dz}{du}\right|^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(x\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(x\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)\right] + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{5.59}$$

Последний член здесь без труда отделяется, если, как было указано в § 2 гл. IV, искать решение в виде

$$V = U(u_1, u_2)\,\Phi(\varphi). \tag{5.60}$$

Разделив уравнение (5.59) на V и полагая последний член равным $-m^2$, получим, как и в решении (4.8), функцию Φ в виде

$$\Phi = A_1 e^{jm\varphi} + B_1 e^{-jm\varphi} = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi. \tag{5.61}$$

Для $U(u_1, u_2)$ получается уравнение в частных производных

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(x\frac{\partial U}{\partial u_1}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(x\frac{\partial U}{\partial u_2}\right) - \frac{m^2}{x^2}\left|\frac{\partial z}{\partial u}\right|^2 U = 0. \tag{5.62}$$

Трудности, связанные с интегрированием этого уравнения, определяются видом функции $x(u_1, u_2)$ и $|dz/du|$. Во многих важнейших системах координат,

в частности во всех системах, рассмотренных в настоящей главе, x имеет вид

$$x = g_1(u_1)\, g_2(u_2), \tag{5.63}$$

откуда, используя соотношение (4.56), имеем

$$\left|\frac{dz}{du}\right|^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial u_1} - j\frac{\partial x}{\partial u_2}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = g_1'^2 g_2^2 + g_1^2 g_2'^2 \tag{5.64}$$

Положим

$$U(u_1, u_2) = U_1(u_1)\, U_2(u_2) \tag{5.65}$$

и подставим выражения (5.63)—(5.65) в уравнение (5.62). Разделив результат на $U_1(u_1)\, U_2(u_2)$, получим, что каждый член уравнения содержит только одну переменную. Приравнивая члены с u_1 постоянной $+(s+m^2c)$, а члены с u_2 постоянной $-(s+m^2c)$, будем иметь дифференциальные уравнения в полных производных

$$\frac{1}{g_1 U_1}\frac{d}{du_1}\left(g_1\frac{dU_1}{du_1}\right) - m^2\left[\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)^2 + c\right] - s = 0, \tag{5.66}$$

$$\frac{1}{g_2 U_2}\frac{d}{du_2}\left(g_2\frac{dU_2}{du_2}\right) - m^2\left[\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 - c\right] + s = 0. \tag{5.67}$$

Весь остальной материал настоящей главы посвящен решению этих уравнений и применению их решений [а также решения (5.61)] к задачам о нахождении потенциала.

Из соотношения (4.61) заменой x на y и наоборот получаются сферические координаты, так что

$$g_1 = e^{u_1} = r \quad \text{и} \quad g_2 = \sin u_2 = \sin\theta. \tag{5.68}$$

Если положить $c = -1$ и $s = n(n+1)$ в уравнениях (5.66) и (5.67) и воспользоваться переменными r и θ, то эти уравнения переходят в уравнения (5.83б) и (5.102).

Из преобразования (4. 03) получаются гармоники сплюснутого сфероида, если положить

$$g_1 = a_1 \sin u_1 = c_1 (1-\xi^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad g_2 = \operatorname{ch} u_2 = (1+\zeta^2)^{1/2}. \tag{5.69}$$

При $c = +1$ и $s = -n\,(n+1)$ уравнения (5.66) и (5.67) совпадают в переменных ξ и ζ с уравнениями (5.244).

Гармоники вытянутого сфероида получаются из преобразования (4.103) заменой x на y и наоборот при

$$g_1 = a_1 \cos u_1 = c_2 (1-\xi^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad g_2 = \operatorname{sh} u_2 = (\eta^2-1)^{1/2}. \tag{5.70}$$

Если в уравнениях (5.66) и (5.67) положить $c = +1$ и $s = -n\,(n+1)$, то в переменных ξ и η получится уравнение Лапласа в обычной для «вытянутых» сфероидальных координат форме, рассмотренное в § 29а.

Цилиндрические координаты получаются вращением преобразования $z = u$, так что для них $g_1 = u_1 = \rho = k^{-1}v$ и $g_2 = 1$. Полагая в уравнении (5.66) $c = 0$, $s = -k^2$, $m = n$ и разделив уравнение на k^2, получим уравнение Бесселя (5.302). Аналогичная подстановка в уравнение (5.67) дает уравнение (5.301).

§ 12б. Задача о клине, ортогонально пересекающемся с поверхностью вращения. В частном случае, когда $m \neq 0$ и соотношение (5.63) удовлетворено, решение уравнений (5.66) и (5.67) можно получить в весьма простой форме. Пусть $w_1 = f_1(x, y)$ и $w_2 = f_2(x, y)$ — сопряженные функции, которые должны быть подвергнуты вращению. Выберем новые ортогональные

координаты u_1 и u_2 так, что

$$g_1(u_1) = (A_1 e^{u_1} + B_1 e^{-u_1}) = F_1(w_1), \tag{5.71}$$

$$g_2(u_2) = (A_2 \cos u_2 + B_2 \sin u_2) = F_2(w_2). \tag{5.72}$$

Обозначая через ρ радиус вращения некоторой точки, будем, согласно соотношению (5.63), иметь

$$\rho = g_1(u_1)\, g_2(u_2) = F_1(w_1)\, F_2(w_2). \tag{5.73}$$

Если положить $mc = 1$ и $s = 0$ в уравнениях (5.66) и (5.67), то, как нетрудно убедиться посредством подстановки, решениями этих уравнений будут

$$U_1 = C_1 g_1^m \tag{5.74}$$

и

$$U_2 = C_2 g_2^m. \tag{5.75}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения — уравнения второго порядка, поэтому каждое из них должно иметь еще одно решение. Поскольку метод нахождения второго решения по одному известному решению может оказаться полезным не только в рассматриваемом случае, выведем его здесь в общем виде. Предположим, что $y = v$ есть частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + M\frac{dy}{dx} + Ny = 0, \tag{5.76}$$

где M и N — функции x. Подставляя $y = vz$ в это уравнение, обозначая $z' = dz/dx$ и исключая v при помощи уравнения (5.76), получаем

$$v\frac{dz'}{dx} + \left(2\frac{dv}{dx} + Mv\right) z' = 0.$$

Умножая на dx/vz' и интегрируя, будем иметь

$$\ln z' + \ln v^2 + \int M\, dx = C,$$

или

$$z' = \frac{dz}{dx} = Bv^{-2} e^{-\int M\, dx}$$

Интегрирование дает

$$z = A + B\int v^{-2} e^{-\int M\, dx}\, dx,$$

так что

$$y = v\left(A + B\int v^{-2} e^{-\int M\, dx}\, dx\right). \tag{5.77}$$

В рассматриваемом случае, выполнив дифференцирование и умножив на $U_{1,2}$, можно привести уравнения (5.66) и (5.67) к виду (5.76), тогда $M_{1,2}$ будет равно

$$M_{1,2} = \frac{g'_{1,2}}{g_{1,2}} = \frac{d\ln g_{1,2}}{du_{1,2}}.$$

Принимая v равным выражению (5.74) или (5.75), получаем при помощи формулы (5.77) при $A = 0$ вторые решения

$$U_1 = D_1 g_1^m \int \frac{du_1}{g_1^{2m+1}} \tag{5.78}$$

и

$$U_2 = D_2 g_2^m \int \frac{du_2}{g_2^{2m+1}}. \tag{5.79}$$

Следовательно, решение уравнения Лапласа можно записать в виде

$$V = g_1^m \left(C_1 + D_1 \int \frac{du_1}{g_1^{2m+1}}\right) g_2^m \left(C_2 + D_2 \int \frac{du_2}{g_2^{2m+1}}\right) \cos(m\varphi + \beta). \qquad (5.80)$$

Решение в такой форме удобно, в частности, когда поверхность заряженного проводника образована поверхностью вращения и клином, ребро которого лежит на оси вращения.

Применение полученного решения можно проиллюстрировать простым примером. Пусть бесконечный проводящий заряженный клин, внешний угол которого равен α, имеет сферическую выпуклость радиуса a, пересекающую обе его стороны под прямым углом. Тогда, взяв центр сферы за начало координат и расположив стороны клина под углами $\varphi = \pm \frac{1}{2}\alpha$, будем иметь $\rho = r\sin\theta$, $g_1 = e^{u_1} = r$, $g_2 = \sin u_2 = \sin\theta$. Все граничные условия выполняются, если выбрать

$$m = \frac{\pi}{\alpha}, \quad D_1 = \left(1 + \frac{2\pi}{\alpha}\right) C_1 a^{1+(2\pi/\alpha)}, \quad C_2 = 1, \quad D_2 = 0, \quad \beta = 0.$$

Таким образом, получаем

$$V = C_1 r^{\pi/\alpha} \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+(2\pi/\alpha)}\right] (\sin\theta)^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}. \qquad (5.81)$$

Эта формула дает $V = 0$ на поверхности клина и сферы, а вдали от начала координат совпадет с решением § 20 гл. IV

§ 13. Сферические гармоники. Когда граничные условия электростатической задачи имеют простой вид в сферической системе координат, целесообразно воспользоваться общим решением уравнения Лапласа в этой системе. Это решение можно получить точно таким же путем, что и в § 2 гл. IV. Пусть r — расстояние от начала координат, θ — полярный угол, отсчитываемый от оси z, φ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг оси z от плоскости zx; в этих переменных уравнение Лапласа имеет, согласно (3.17), вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (5.82)$$

Будем искать решение в виде

$$V = R\Theta\Phi = RS, \qquad (5.83а)$$

где R — функция только r, Θ — функция только θ, а Φ — функция только φ. Функция $S = \Phi\Theta$ называется поверхностной сферической гармоникой, а функция Θ (при $\Phi = \text{const}$) — зональной гармоникой. Подставив $V = RS$ в уравнение (5.82) и разделив на RS, будем иметь

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Первый член этого уравнения зависит только от r, другие содержат только угловые координаты. Уравнение удовлетворяется, следовательно, в любой точке только в том случае, если

$$\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} = -K. \qquad (5.83б)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = K.$$

Нетрудно видеть, что решением последнего уравнения является

$$R = Ar^n + Br^{-n-1}, \tag{5.84}$$

где $n(n+1) = K$. Подставляя это значение K в первое уравнение и умножая на S, получим

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} + n(n+1)S = 0. \tag{5.85}$$

Решение (5.83а) приобретает, таким образом, вид

$$V = (Ar^n + Br^{-n-1})S_n. \tag{5.86}$$

Очевидно, что V будет решением уравнения Лапласа только в том случае, если величины n в обоих членах одинаковы и равны индексу функции S_n. Сумма (или интеграл) по n, состоящая из членов типа (5.86), также будет решением.

В частном случае при $n = 0$ уравнение (5.85) принимает вид

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 S_0}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{5.87}$$

В § 21 гл. VI будет показано, что или U, или V удовлетворяют этому уравнению, если

$$U + jV = F\left[(\cos\varphi + j\sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right] \tag{5.88}$$

Таким образом, каждая сопряженная функция предыдущей главы дает два решения уравнения Лапласа в трехмерном пространстве после замены x на $\cos\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, y на $\sin\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ и умножения на $(A + Br^{-1})$. Особенно важные решения, получающиеся при $W = z^{\pm m}$ и $W = \ln z$, имеют вид

$$V = (A + Br^{-1})\left(C\operatorname{ctg}^m\frac{1}{2}\theta + D\operatorname{tg}^m\frac{1}{2}\theta\right)\cos(m\varphi + \delta_m), \tag{5.89}$$

$$V = (A + Br^{-1})\left(C\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta + D\varphi\right) \tag{5.90}$$

§ 14а. Общие свойства поверхностных гармоник. Прежде чем решать уравнение (5.85), выведем при помощи теоремы Грина важное свойство функций S_n. Выпишем еще раз формулу (3.22)

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\,dv = \int_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)dS. \tag{5.91}$$

Положим $\Psi = r^m S_m$ и $\Phi = r^n S_n$, так что $\nabla^2\Phi = \nabla^2\Psi = 0$ и объемный интеграл равен нулю. В качестве поверхности интегрирования выберем сферу единичного радиуса; обозначив через $d\Omega$ элемент телесного угла, будем иметь

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial(r^m S_m)}{\partial r} = mr^{m-1}S_m = mS_m$$

и, аналогично, $\partial\Phi/\partial n = nS_n$. Подстановка в формулу (5.91) дает

$$\int_\Omega (nS_nS_m - mS_nS_m)\,d\Omega = (n-m)\int_\Omega S_nS_m\,d\Omega = 0,$$

т. е. при $n \neq m$

$$\int_\Omega S_nS_m\,d\Omega = 0. \tag{5.92}$$

§ 14б. Потенциал гармонического распределения заряда. Пусть на поверхности сферы задана конечная непрерывная плотность электрического заряда σ_n, такая, что в любом месте поверхности можно выбрать настолько малую площадку ΔS, что на ней можно пренебречь величиной $(\sigma_n - \bar{\sigma}_n)$ по сравнению со средним значением $\bar{\sigma}_n$ плотности заряда σ_n на площадке ΔS. Этот заряд создает потенциал V_0 вне сферы и потенциал V_i внутри нее. Применяя теорему Гаусса о потоке электрической индукции (1.27) к маленькому объему, охватывающему элемент оболочки ΔS, будем иметь

$$\sigma_n = \varepsilon \left(\frac{\partial V_i}{\partial r} - \frac{\partial V_0}{\partial r} \right)_{r=a} \tag{5.93}$$

Рассмотрим плотность σ_n такую, что

$$\varepsilon V_0 = \frac{1}{2n+1} \frac{a^{n+2}}{r^{n+1}} S_n. \tag{5.94}$$

Тогда, поскольку $V_0 = V$ при $r = a$, должно иметь место равенство

$$\varepsilon V_i = \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{a^{n-1}} S_n. \tag{5.95}$$

Подстановка выражений (5.94) и (5.95) в уравнение (5.93) дает

$$\sigma_n = S_n. \tag{5.96}$$

Впоследствии будет показано, что если θ входит в функции S_n через $P_n^m(\cos\theta)$, то эти функции удовлетворяют условиям, наложенным на σ_n в начале настоящего параграфа. Используя найденные выше формулы, а также формулу (1.8), можно получить два весьма полезных интеграла:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{S_n}{R_i} dS &= \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n S_n}{a^{n-1}}, \\ \int_S \frac{S_n}{R_0} dS &= \frac{4\pi}{2n+1} \frac{a^{n+2} S_n}{r^{n+1}} \end{aligned} \tag{5.97}$$

Углы, входящие в функцию S_n, суть координаты концов R_i или R_0. В силу принципа суперпозиции потенциал, обусловленный некоторым поверхностным распределением заряда, которое можно представить в виде

$$\sigma = S_0 + S_1 + S_2 + \tag{5.98}$$

дается формулами

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{a}{\varepsilon} \left[S_0 + \left(\frac{r}{a}\right) \frac{S_1}{3} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{S_2}{5} + \right] \quad \text{при} \quad r < a, \\ V_0 &= \frac{a}{\varepsilon} \left[\frac{a}{r} S_0 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{S_1}{3} + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{S_2}{5} + \right] \quad \text{при} \quad r > a. \end{aligned} \tag{5.99}$$

§ 15. Дифференциальные уравнения поверхностных гармоник. Переменные θ и φ в дифференциальном уравнении поверхностных гармоник $S = \Theta\Phi$ (5.85) можно разделить обычным методом. Подставив $\Theta\Phi$ вместо S в уравнение (5.85) и разделив уравнение на $\Theta\Phi/\sin^2\theta$, получаем

$$\frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n(n+1)\sin^2\theta = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется для любых значений θ и φ только в том случае, если

$$\frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1)\sin^2\theta = K_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -K_1.$$

Если положить $K_1 = m^2$, то решение второго уравнения имеет, очевидно, вид

$$\Phi = C\cos m\varphi + D\sin m\varphi, \tag{5.100}$$

за исключением случая $m = 0$, когда

$$\Phi = M\varphi + N. \tag{5.101}$$

Полагая $K_1 = m^2$ в первом уравнении и умножая его на $\Theta/\sin^2\theta$, будем иметь

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0, \tag{5.102}$$

т. е. дифференциальное уравнение для функции Θ.

§ 16а. Зональные гармоники. Уравнение Лежандра. Прежде чем исследовать общее решение уравнения (5.102), рассмотрим наиболее важный частный случай, когда V не зависит от φ, Φ — постоянная и, согласно решению (5.100), $m = 0$. Если обозначить $\cos\theta$ через μ, то уравнение (5.102) примет вид

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta_n}{d\mu}\right] + n(n+1)\Theta_n = 0. \tag{5.103}$$

Это уравнение называется уравнением Лежандра, а его решения — зональными гармониками.

§ 16б. Решение уравнения Лежандра при помощи рядов. Чтобы получить решение уравнения (5.103) в виде ряда, положим

$$\Theta_n = \sum a_r\mu^r \tag{5.104}$$

Подстановка выражения (5.104) в уравнение (5.103) дает

$$\sum\{r(r-1)a_r\mu^{r-2} + [n(n+1) - r(r+1)]a_r\mu^r\} = 0.$$

Чтобы это равенство удовлетворялось при любых значениях μ, коэффициенты при различных степенях μ должны порознь равняться нулю, т. е.

$$(r+1)(r+2)a_{r+2} + [n(n+1) - r(r+1)]a_r = 0,$$

$$a_r = -\frac{(r+1)(r+2)}{n(n+1) - r(r+1)}a_{r-2} = -\frac{(r+1)(r+2)}{(n-r)(n+r+1)}a_{r+2}. \tag{5.105}$$

Отметим, что если $a_r = 0$, то $a_{r-2} = a_{r-4} = \ldots = 0$ и, согласно соотношению (5.105), a_{-1} и a_{-2} равны нулю при конечных a_0 и a_1; таким образом, все отрицательные степени μ в решении отсутствуют. Следовательно, если выбрать $a_0 = 1$ и сохранить четные степени μ, решение можно записать в виде

$$P_n = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}\mu^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}\mu^4 - \ldots \tag{5.106}$$

Если выбрать $a_1 = 1$ и сохранить нечетные степени μ, то решение будет

$$Q_n = \mu - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}\mu^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}\mu^5 - \ldots \tag{5.107}$$

Общее решение уравнения (5.103) в интервале $-1 < \mu < +1$ имеет вид

$$\Theta_n = A_nP_n + B_nQ_n$$

независимо от того, является ли n целым числом или дробью, действительным или комплексным; необходимо лишь, чтобы ряды были сходящимися.

Рекуррентные формулы для p_n и q_n можно получить вычитанием p_{n+1} из p_{n-1}:

$$p_{n-1} - p_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2) - n(n-1)}{2!}\mu^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)(n+4) - n(n-3)}{4}\frac{(n-1)(n+2)}{3!}\mu^4 + \dots\right] =$$
$$= (2n+1)\mu\left(\mu - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}\mu^3 + \dots\right) = (2n+1)\mu q_n. \quad (5.108)$$

Аналогично получаем

$$(n+1)^2 q_{n+1} - n^2 q_{n-1} = (2n+1)\mu p_n. \quad (5.109)$$

Дифференцируя ряд (5.107) и прибавляя $n\,dq_{n-1}/d\mu$ и $(n+1)\,dq_{n+1}/d\mu$, будем иметь

$$nq'_{n-1} + (n+1)\,q'_{n+1} = \left[2n+1 - \frac{(n-2+n+3)\,n\,(n+1)}{2!}\mu^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-4+n+5)\,n\,(n-2)\,(n+1)\,(n+3)}{4!}\mu^4 - \dots\right] =$$
$$= (2n+1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}\mu^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}\mu^4 - \dots\right) = (2n+1)\,p_n \quad (5.110)$$

и, аналогично,

$$(n+1)\,p'_{n-1} + np'_{n+1} = -n(n+1)(2n+1)\,q_n. \quad (5.111)$$

§ 16в. Полиномы Лежандра. Формула Родрига. Если n — четное положительное целое число, то ряд (5.106) имеет, очевидно, конечное число членов, равное $\frac{1}{2}(n+2)$, и может быть записан в виде

$$p_n = (-1)^{n/2}\,2^n\,\frac{\left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2}{n!}\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n}(-1)^{r-(1/2)n}\,\frac{(n+2r)!\,\mu^{2r}}{2^n\left[\frac{1}{2}(n-2r)\right]!\left[\frac{1}{2}(n+2r)\right]!\,(2r)!}.$$

В этом случае полиномы $P_n(\mu)$ определяются как

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^{1/2n}\,n!}{2^n\left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2}\,p_n. \quad (5.112)$$

Если n — положительное нечетное целое число, то ряд (5.107) имеет конечное число членов, равное $\frac{1}{2}(n+1)$, и его можно записать в виде

$$q_n = (-1)^{1/2(n-1)}\,2^{n-1}\,\frac{\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2}{n!}\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{r-(1/2)(n-1)}\times$$
$$\times\,\frac{(n+2r+1)!\,\mu^{2r+1}}{2^n\left[\frac{1}{2}(n-2r-1)\right]!\left[\frac{1}{2}(n+2r+1)\right]!\,(2r+1)!}$$

В этом случае полиномы $P_n(\mu)$ определяются следующим образом:

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^{1/2(n-1)}\,n!}{2^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2}\,q_n. \quad (5.113)$$

При целом положительном n полиномы Лежандра $P_n(\mu)$, представленные в виде (5.112) и (5.113) по возрастающим степеням μ, можно записать в обратном порядке, если подставить $s=\frac{1}{2}n-r$ в (5.112) и $s=\frac{1}{2}(n-1)-r$ в (5.113); подстановка в обоих случаях дает

$$P_n(\mu)=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n(s!)(n-s)!(n-2s)!}\mu^{n-2s}, \tag{5.114}$$

где m равно $\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$ в зависимости от того, которое из этих чисел целое.

Из выражения (5.114) для $P_n(\mu)$ можно получить формулу, известную под названием формулы Родрига:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!}\mu^{n-2s}=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\mu^{2n-2s}.$$

Последняя сумма есть разложение бинома $(\mu^2-1)^n$, так что

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n. \tag{5.115}$$

Формулы (5.114) и (5.115) дают решение уравнения Лежандра (5.103) независимо от величины переменной μ. Для гармоник вытянутого сфероида $0<\mu<\infty$. При очень больших значениях μ член с высшей степенью μ много больше остальных, поэтому

$$P_n(\mu)\xrightarrow[\mu\to\infty]{}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\mu^n. \tag{5.116}$$

§ 16г. Коэффициенты Лежандра. Обратное расстояние. Полиномы, рассмотренные в § 16в, известны также под названием коэффициентов Лежандра; чем обусловлено это название, будет ясно из дальнейшего. Если две точки расположены на расстояниях a и b от начала координат ($b>a$), а угол между a и b равен θ ($\mu=\cos\theta$), то величину, обратную расстоянию между этими точками, можно записать в виде

$$\frac{1}{R}=(a^2+b^2-2ab\mu)^{-1/2}=\frac{1}{b}\left(1+\frac{a^2-2ab\mu}{b^2}\right)^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{b}\left[1-\frac{1}{2}\frac{a^2-2ab\mu}{b^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{a^2-2ab\mu}{b^2}\right)^2-\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{b}\left[1+\mu\frac{a}{b}+\frac{3\mu^2-1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{5\mu^3-3\mu}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^3+\quad\right]$$

Нетрудно видеть, что коэффициент при $(a/b)^n$ совпадает с выражением (5.114) для $P_n(\mu)$, так что можно записать

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{b}\left[P_0(\mu)+\left(\frac{a}{b}\right)P_1(\mu)+\left(\frac{a}{b}\right)^2P_2(\mu)+\dots\right] \tag{5.117}$$

В последующем это разложение будет неоднократно использовано при решении задач.

§ 16д. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Если n — нечетное целое число, то, подставив в формулу (5.108) p_{n-1}, p_{n+1} и q_n из формул (5.112) и (5.113) и разделив полученное равенство на

$$\frac{2^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2}{n!\,(-1)^{1/2(n+1)}},$$

будем иметь

$$nP_{n-1}+(n+1)P_{n+1}=(2n+1)\mu P_n. \tag{5.118}$$

Точно такое же выражение получается для четных n из формулы (5.109).

Аргумент полиномов в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, не выписывается.

Если n — четное целое число, то, подставив в формулу (5.110) p_n, q'_{n-1}, q'_{n+1} из формул (5.112) и (5.113) и разделив на

$$\frac{2^n(2n+1)\left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2}{(-1)^{(1/2)n}\,n!},$$

получаем

$$P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n. \tag{5.119}$$

Такое же выражение можно получить при нечетном n из формулы (5.111).

Интегрированием формулы (5.119) можно получить выражение для интеграла от $P_n(\mu)$:

$$\int P_n(\mu)\,d\mu=\frac{P_{n+1}-P_{n-1}}{2n+1}. \tag{5.120}$$

Производную полинома $P_n(\mu)$ можно получить путем сложения последовательности уравнений типа (5.119)

$$P'_n(\mu)=(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+\ldots \tag{5.121}$$

Если продифференцировать выражение (5.118) и исключить из результата P'_{n-1} при помощи выражения (5.119), то получится другая важная формула для производной

$$P'_{n+1}=\mu P'_n+(n+1)P_n \quad \text{или} \quad P'_n=\mu P'_{n-1}+nP_{n-1}. \tag{5.122}$$

Исключая отсюда P'_{n-1} и P'_{n+1} при помощи выражения (5.119) и используя выражения (5.118), (5.119) или (5.120), будем иметь следующие эквивалентные друг другу формулы:

$$P'_n=\frac{(n+1)(\mu P_n-P_{n+1})}{1-\mu^2}=\frac{-n(\mu P_n-P_{n-1})}{1-\mu^2}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{P_{n-1}-P_{n+1}}{1-\mu^2}=\frac{-n(n+1)}{1-\mu^2}\int P_n(\mu)\,d\mu. \tag{5.123}$$

§ 16е. Интеграл от произведения полиномов Лежандра. В приложениях полиномов Лежандра весьма важен интеграл от их произведения, вычисленный в пределах от $\theta=0$ до $\theta=\pi$ или от $\mu=-1$ до $\mu=+1$. Согласно формуле (5.92),

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)P_m(\mu)\,d\mu=0 \quad \text{при} \quad m\neq n. \tag{5.124}$$

При $m=n$ можно подставить значение одного из P_n по формуле (5.115)

$$\int_{-1}^{+1}[P_n(\mu)]^2\,d\mu=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}P_n(\mu)\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\,d\mu.$$

Проинтегрируем правую часть равенства по частям n раз, выбирая каждый раз первый член за u, а второй за dv. Поскольку $d^r(\mu^2-1)^n/d\mu^r$ содержит всегда множитель $(\mu^2-1)^{n-r}$, v всегда обращается в нуль при подстановке пределов, так что произведение uv выпадает; окончательно получаем

$$\int_{-1}^{1}[P_n(\mu)]^2\,d\mu=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^nP_n(\mu)}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n d\mu.$$

Согласно формуле (5.114),

$$\frac{d^nP_n(\mu)}{d\mu^n}=\frac{(2n)!\,n!}{2^n n!\,n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}, \tag{5.125}$$

так что

$$\int_{-1}^{+1}[P_n(\mu)]^2\,d\mu=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^n\,d\mu=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta \tag{5.126}$$

и интегрирование (см. Двайт, 854.1) дает

$$\int_{-1}^{+1}[P_n(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2n+1}. \tag{5.127}$$

§ 16ж. Разложение функций по полиномам Лежандра. Функцию, которую можно разложить в ряд Фурье в интервале $-1<\mu<+1$, можно аналогичным методом разложить в ряд и по полиномам Лежандра в этом же интервале. Запишем этот ряд в виде

$$f(\mu)=a_0P_0(\mu)+a_1P_1(\mu)+\ldots+a_nP_n(\mu)+\ldots \tag{5.128}$$

Умножим это равенство на $P_m(\mu)$ и проинтегрируем от $\mu=-1$ до $\mu=+1$; в результате, согласно формуле (5.92), все члены, кроме m-го, исчезают. При помощи формулы (5.127) получаем

$$a_m=\frac{1}{2}(2m+1)\int_{-1}^{+1}f(\mu)P_m(\mu)\,d\mu. \tag{5.129}$$

Отметим, что при $f(\mu)=0$ в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant+1$, $a_m=0$. Это означает, что если ряд по полиномам Лежандра равен нулю, то должны равняться нулю коэффициенты при каждом из его членов. Как и в случае рядов Фурье, в точках разрыва сумма ряда равна полусумме значений $f(\mu)$ по обе стороны точки разрыва. Посредством подстановки формулы Родрига (5.115) в формулу (5.129) можно получить другое, часто более удобное, чем (5.129), выражение для a_m. Подстановка дает

$$a_m=(-1)^m\frac{2m+1}{2^{m+1}m!}\int_{-1}^{+1}f(\mu)\frac{d^m(1-\mu^2)^m}{d\mu^m}\,d\mu.$$

Интегрируя это соотношение несколько раз по частям, принимая каждый раз первый член за u, а второй за dv, находим, что $|uv|_{-1}^{+1}$ равно нулю и

$\int_{-1}^{+1} u\,dv$ меняет знак; в результате остается

$$a_m = \frac{2m+1}{2^{m+1}m!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^m f(\mu)}{d\mu^m}(1-\mu^2)^m d\mu. \qquad (5.130)$$

Если производные $f(\mu)$ имеют простой вид, то обычно интегрирование в соотношении (5.130) не представляет труда.

§ 16з. Таблица полиномов Лежандра. Таблицу величин $P_n(\mu)$ можно составить при помощи формул (5.114) или (5.115). При $n < 9$ имеем

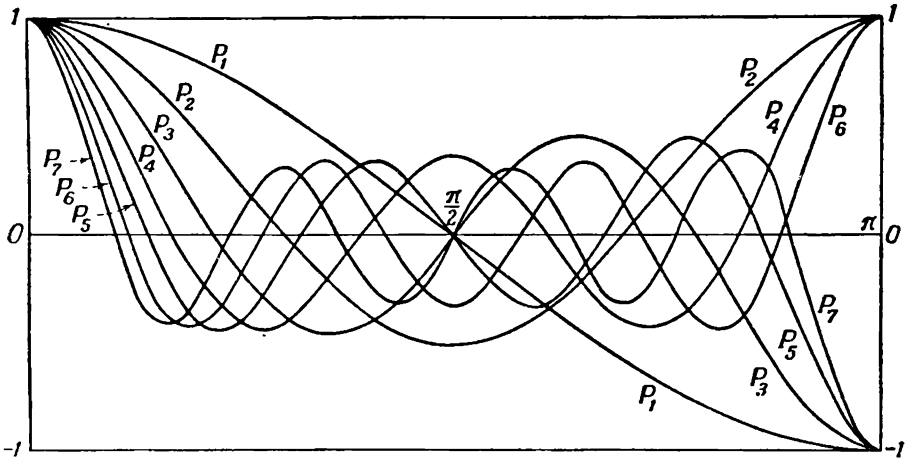
$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1),$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \quad P_4(\mu) = \frac{(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)}{8},$$

$$P_5(\mu) = \frac{(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu)}{8}, \quad P_6(\mu) = \frac{(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5)}{16},$$

$$P_7(\mu) = \frac{(429\mu^7 - 693\mu^5 + 315\mu^3 - 35\mu)}{16},$$

$$P_8(\mu) = \frac{(6435\mu^8 - 12012\mu^6 + 5930\mu^4 - 1260\mu^2 + 35)}{128}.$$



Фиг. 51. Полиномы Лежандра от первого порядка до седьмого.

Приведем некоторые наиболее важные частные значения $P_n(\mu)$:

если n — нечетное $P_n(0) = 0$,

» n — четное $P_n(0) = (-1)^{1/2n}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots n}$,

» n — любое $P_n(1) = 1$,

» n — любое $P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu)$,

» n — любое $P'_n(0) = -(n+1)P_{n+1}(0)$ [из формулы (5.116)],

» n — любое $P'_n(1) = \frac{1}{2}n(n+1)$ [из уравнения (5.103)].

Величины $P_n(\mu)$ для $0 \leqslant n \leqslant 7$ приведены на фиг. 51.

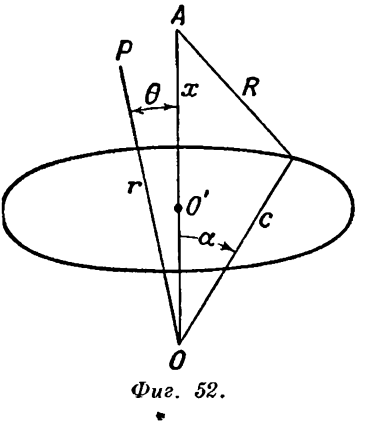
§ 16и. Полиномы Лежандра мнимого аргумента. При изучении гармоник сплюснутого сфероида приходится иметь дело с $P_n(j\zeta)$, где $j=(-1)^{1/2}$ и $0\leqslant\zeta<\infty$. Подставляя $j\zeta$ вместо μ в формулу (5.114), получаем

$$P_n(j\zeta)=(-1)^{1/2n}\sum_{s=0}^{m}\frac{(2n-2s)!}{2^n(s)!\,(n-s)!\,(n-2s)!}\zeta^{n-2s}, \tag{5.131}$$

где $m=\frac{1}{2}n$ или $m=\frac{1}{2}(n-1)$ в зависимости от того, которое из этих чисел целое. Аналогичная подстановка в формулу (5.116) дает

$$P_n(j\zeta)\xrightarrow[\zeta\to\infty]{}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}(-1)^{1/2n}\zeta^n. \tag{5.132}$$

§ 17. Потенциал заряженного кольца. Допустим, что потенциал V симметричен относительно оси x и его величина в каждой точке этой оси известна и может быть представлена в виде конечного или бесконечного (но сходящегося) ряда, содержащего только целые степени x. Тогда потенциал в любой точке пространства можно получить умножением n-го члена на $P_n(\cos\theta)$ и заменой x на r. Полученное выражение справедливо, пока r меняется в тех же пределах, что и x в исходном разложении.



Фиг. 52.

Воспользуемся этим методом для вычисления потенциала кольца, полный заряд которого равен Q (фиг. 52). В этом случае

$$4\pi\varepsilon V_A=Q(c^2+x^2-2cx\cos\alpha)^{-1/2}.$$

Разлагая V_A в ряд, согласно формуле (5.117), получаем при $x\geqslant c$

$$V_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{x}\right)^{n+1}P_n(\cos\alpha),$$

при $x\leqslant c$

$$V_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{c}\right)^{n}P_n(\cos\alpha).$$

Потенциал в любой точке P с координатами r, θ оказывается равным при $r>c$ или $\theta\neq\alpha$, $r=c$

$$V_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\alpha)\,P_n(\cos\theta),$$

при $r<c$ или $\theta\neq\alpha$, $r=c$ (5.133)

$$V_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{n}P_n(\cos\alpha)\,P_n(\cos\theta).$$

Другие примеры применения изложенного метода будут даны в конце настоящей и в последующих главах.

§ 18. Заряженное кольцо в проводящей сфере. Если в некоторой области известен потенциал, обусловленный заданным фиксированным распределением заряда, то можно найти и потенциал, обусловленный этим распределением в присутствии проводящей сферической оболочки. Разложим первоначальный потенциал по сферическим гармоникам и прибавим к нему второй потенциал, обусловленный индуцированным зарядом и разложенный по тем же гармоникам. Последний должен быть таким, чтобы сумма потенциалов обращалась в нуль на сфере; он стремится к нулю на бесконечности, если первоначальный заряд находится вне сферы, и конечен в центре сферы, если заряд расположен внутри.

В качестве примера найдем потенциал в произвольной точке, находящейся внутри сферической ионизационной камеры радиуса b, если коллектор представляет собой тонкое круглое концентрическое кольцо радиуса a. В рассмотренной в предыдущем параграфе задаче положим $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ и $r>a$, подставим значение $P_n(0)$ из § 16 з и заменим n на $2n$, поскольку в решении сохраняются только четные степени; для потенциала, обусловленного только кольцом, находим

$$V_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(\cos\theta).$$

Потенциал индуцированного заряда должен быть конечным в начале координат, поэтому он имеет вид

$$V_i=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}r^{2n}P_{2n}(\cos\theta).$$

Но $V_i+V_r=0$ при $r=b$, поэтому, согласно формуле (5.129), можно порознь приравнять нулю коэффициенты при каждом $P_n(\cos\theta)$, так что

$$A_{2n}=-(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{1}{b^{2n}}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}$$

и, если $a<r\leqslant b$ или $r=a$, $\theta\neq\frac{1}{2}\pi$, потенциал равен

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\theta). \quad (5.134)$$

Если $r<a$ или $r=a$, $\theta\neq\frac{1}{2}\pi$, то

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\theta). \quad (5.135)$$

При применении этого метода к полям, созданным некоторым распределением заряда на проводниках, следует соблюдать осторожность. В действительности поле индуцированных зарядов влияет, вообще говоря, на индуцирующие заряды и вызывает их перераспределение; по этой причине результат может оказаться ошибочным.

§ 19. Сферическая диэлектрическая оболочка в однородном поле. Вычислим поле внутри диэлектрической оболочки, внутренний и внешний радиусы которой равны a и b и которая помещена в однородное электро-

статическое поле напряженности E. Как и в последней задаче потенциал снаружи можно рассматривать как потенциал первоначального поля $Er\cos\theta$ плюс потенциал, обусловленный поляризацией диэлектрика. Последний должен стремиться к нулю на бесконечности и, следовательно, содержать только обратные степени r. Кроме того, граничные условия на бесконечности содержат только одну поверхностную гармоническую функцию $P_1(\mu)=\cos\theta$, так что потенциал снаружи должен иметь вид

$$V_1=\left(Er+\frac{A}{r^2}\right)\cos\theta.$$

В диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью K ввиду того, что r не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, сохраняются оба члена

$$V_2=\left(Br+\frac{C}{r^2}\right)\cos\theta.$$

В полости потенциал должен быть конечным, так что единственно возможное решение есть

$$V_3=Dr\cos\theta.$$

Четыре граничных условия, необходимые для определения A, B, C и D, имеют вид

$$r=b,\quad V_1=V_2,\ \text{или}\ Eb+\frac{A}{b^2}=Bb+\frac{C}{b^2},\tag{5.136}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r}=K\frac{\partial V_2}{\partial r},\ \text{или}\ E-\frac{2A}{b^3}=KB-\frac{2KC}{b^3},\tag{5.137}$$

$$r=a,\quad V_2=V_3,\ \text{или}\ Ba+\frac{C}{a^2}=Da,\tag{5.138}$$

$$K\frac{\partial V_2}{\partial r}=\frac{\partial V_3}{\partial r},\ \text{или}\ KB-\frac{2KC}{a^3}=D.\tag{5.139}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$D=\frac{9KE}{9K-2(1-K)^2[(a/b)^3-1]}.\tag{5.140}$$

Из выражения для V_3 видно, что формула (5.140) представляет собой напряженность электрического поля внутри оболочки.

§ 20. Сферический конденсатор с малым расстоянием между центрами внутренней и внешней обкладок. В качестве примера граничных условий, содержащих поверхностные гармонические функции, вычислим приближенно распределение заряда на внутренней обкладке сферического конденсатора, предполагая, что расстояние между центрами внутренней и внешней обкладок невелико. (Если внутренний радиус a почти равен внешнему b, то для получения удовлетворительной точности приходится учитывать очень много членов в формулах, найденных в § 9а методом изображений.) Выберем начало координат в центре внутренней сферы; тогда приближенное уравнение внешней поверхности будет

$$r=b+cP_1(\mu),\tag{5.141}$$

где c — расстояние между центрами и $\mu=\cos\theta$. Это соотношение вытекает из формулы (5.117), так как, если пренебречь членами порядка c^n при $n>1$, формула (5.117) даст

$$b=r[1+cr^{-1}P_1(\mu)]^{-1}=r-cP_1(\mu).$$

Поскольку граничные условия содержат и $P_0(\mu)$ и $P_1(\mu)$ и поскольку точки $r=0$ и $r=\infty$ находятся вне поля, потенциал должен иметь вид

$$V=A+\frac{B}{r}+\left(Cr+\frac{D}{r^2}\right)P_1(\mu), \tag{5.142}$$

где C и D — малые поправки порядка c. Граничные условия записываются следующим образом:
при $r=a$

$$V_1=A+\frac{B}{a}+\left(Ca+\frac{D}{a^2}\right)P_1(\mu),$$

при $r=b+cP_1(\mu)$

$$V_2=A+\frac{B}{b}\left[1-\frac{c}{b}P_1(\mu)\right]+\left(Cb+\frac{D}{b^2}\right)P_1(\mu)$$

(произведениями Cc и Dc пренебрегаем). Коэффициенты при $P_0(\mu)$ и $P_1(\mu)$ следует, согласно формуле (5.129), порознь приравнять нулю, откуда находим

$$A+\frac{B}{a}-V_1=0, \qquad Ca+\frac{D}{a^2}=0,$$

$$A+\frac{B}{b}-V_2=0, \qquad -\frac{Bc}{b^2}+Cb+\frac{D}{b^2}=0.$$

Решая уравнения, получим

$$B=\frac{ab(V_1-V_2)}{b-a}, \qquad C=\frac{abc(V_1-V_2)}{(b-a)(b^3-a^3)}, \qquad D=-\frac{a^4bc(V_1-V_2)}{(b-a)(b^3-a^3)}.$$

Можно вычислить также плотность поверхностного заряда

$$\sigma=-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a}=\frac{\varepsilon ab(V_1-V_2)}{b-a}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{3c}{b^3-a^3}\cos\theta\right)$$

(членами порядка c^n пренебрегаем). Отметим, что при интегрировании σ по поверхности сферы поправочный член выпадает, так что с точностью до членов порядка c емкость конденсатора получается такой же, как и в случае концентричных сфер.

§ 21. Задачи с простой конической границей. В § 14б было показано, что потенциал заряда, распределенного по поверхности сферы, можно выразить через сферические гармонические функции. Можно также показать, что если потенциал V на поверхности круглого конуса, описываемой уравнением $\theta=\alpha$, можно представить в виде

$$V=\sum(A_nr^n+B_nr^{-n-1}),$$

где n — целое число, то потенциал в любой точке пространства будет

$$V=\sum\frac{(A_nr^n+B_nr^{-n-1})P_n(\cos\theta)}{P_n(\cos\alpha)} \tag{5.143}$$

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям.

§ 22а. Зональные гармоники второго рода. Второе решение уравнения Лежандра, определяемое бесконечными рядами (5.106) или (5.107), называется зональной гармоникой второго рода и обозначается $Q_n(\mu)$. Эти гармоники определяются по формулам, аналогичным формулам (5.112) и (5.113):

если n — нечетное число,

$$Q_n(\mu) = (-1)^{1/2(n+1)} \frac{\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2 2^{n-1}}{n!} p_n, \tag{5.144}$$

если n — четное число,

$$Q_n(\mu) = (-1)^{1/2n} \frac{\left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2 2^n}{n!} q_n. \tag{5.145}$$

Определение пригодно при $-1 < \mu < +1$.

Хотя в рассмотренных выше решениях уравнения Лежандра $\mu = \cos\theta$, впоследствии при использовании сфероидальных гармоник потребуются решения, в которых будет $\mu^2 > 1$. Поэтому необходимо распространить ряд (5.104) на отрицательные степени r. Формулу (5.105) можно записать в виде

$$a_{r+2} = -\frac{(n-r)(n+r+1)}{(r+1)(r+2)} a_r. \tag{5.146}$$

Мы видим, что если $a_{r+2} = 0$, то $a_{r+4} = a_{r+6} = \quad = 0$, а если $a_{-r+1} = 0$, то $a_{-r+3} = a_{-r+5} = \quad = 0$. Но a_{n+2} равно нулю, если a_n конечно, и a_{-n+1} равно нулю, если a_{n-1} конечно. Если выбрать $a_n = 2n!/[2^n (n!)^2]$, то мы получим формулу (5.114) для полинома $P_n(\mu)$; но если принять $a_{-n-1} = 2^n (n!)^2/(2n+1)!$, то, полагая в формуле (5.146) $r = -n-3$, $r = -n-5$ и т. д., получим коэффициенты ряда

$$Q_n(\mu) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\left[\frac{1}{\mu^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+3}} + \quad\right] =$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!\,(n+2r)!\,(2n+1)!}{r!\,(n!)^2\,(2n+2r+1)!} \mu^{-n-2r-1}.$$

Заменив, согласно обозначениям формулы (5.114), r на s, будем иметь

$$Q_n(\mu) = 2^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!\,(n+2s)!}{s!\,(2n+2s+1)!} \mu^{n-2s-1}. \tag{5.147}$$

Ряд, очевидно, сходится при $\mu^2 > 1$ и определяет в этой области $Q_n(\mu)$. При очень больших μ член с наименьшим отрицательным показателем степени в формуле (5.147) превышает все остальные, так что

$$Q_n(\mu) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!\,\mu^{n+1}}. \tag{5.148}$$

§ 22б. Рекуррентные формулы для функций Лежандра второго рода. Посредством подстановки в формулы (5.108) и (5.109) величин p_n и q_n, определенных из формул (5.144) и (5.145), можно получить точно таким же образом, как и формулы (5.118)—(5.128), следующие соотношения, связывающие $Q_n(\mu)$ различных порядков:

$$nQ_{n-1} + (n+1)Q_{n+1} = (2n+1)\mu Q_n, \tag{5.149}$$

$$Q'_{n+1} - Q'_{n-1} = (2n+1)Q_n, \tag{5.150}$$

$$\int Q_n(\mu)\,d\mu = \frac{Q_{n+1} - Q_{n-1}}{2n+1}, \tag{5.151}$$

$$Q'_n = (2n-1)Q_{n-1} + (2n-5)Q_{n-3} + \quad + \mu(1-\mu^2)^{\,1}, \tag{5.152}$$

$$Q'_n = \frac{(n+1)(\mu Q_n - Q_{n-1})}{1-\mu^2}. \tag{5.153}$$

§ 22в. Выражение функций Лежандра второго рода через полиномы Лежандра. Полезное выражение для $Q_n(\mu)$ можно получить из уравнения Лежандра, если известно, что $P_n(\mu)$ является его решением. Из уравнений (5.76) и (5.77) следует, что если v является одним из решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+M\frac{dy}{dx}+Ny=0, \tag{5.154}$$

где M и N — функции x, то второе его решение будет

$$y=v\left(A+B\int v^{-2}e^{-\int M dx}dx\right). \tag{5.155}$$

Для уравнения Лежандра (5.103) $v=P_n(\mu)$ и $M=-2\mu(1-\mu^2)^{-1}$, так что $\int M d\mu=\ln(1-\mu^2)$, или $e^{-\int M d\mu}=(1-\mu^2)^{-1}$, и формула (5.155) принимает вид

$$Q_n(\mu)=P_n(\mu)\left\{A+B\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)[P_n(\mu)]^2}\right\}$$

Чтобы определить постоянные A и B, положим $n=0$ и $n=1$. Интегрируя при помощи формул (140) и (152.1) справочника Двайта и используя приведенное там же разложение (601.2), получим

$$Q_0(\mu)=A+\frac{1}{2}B\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}=A+B\left(\mu+\frac{1}{3}\mu^3+\frac{1}{5}\mu^5+\quad\right),$$

$$Q_1(\mu)-A\mu=\frac{\mu B}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-B=B\left(-1+\mu^2+\frac{\mu^4}{3}+\frac{\mu^6}{5}+\quad\right).$$

Из формул (5.144) и (5.145) следует, что $Q_0(\mu)=q_0$ и $Q_1(\mu)=-p_1$; используя для величин q_0 и p_1 выражения (5.106) и (5.107), будем иметь

$$A=0 \quad \text{и} \quad B=1.$$

Таким образом, общая формула для $Q_n(\mu)$ имеет вид

$$Q_n(\mu)=P_n(\mu)\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)[P_n(\mu)]^2}, \tag{5.156}$$

в частности

$$Q_0(\mu)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} \tag{5.157}$$

и

$$Q_1(\mu)=\frac{1}{2}\mu\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-1. \tag{5.158}$$

Используя формулу (5.149), получим

$$Q_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu Q_1(\mu)-\frac{1}{2}Q_0(\mu)=\frac{1}{4}(3\mu^2-1)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{3\mu}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}P_2(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{3}{2}P_1(\mu). \tag{5.159}$$

Повторное применение формулы (5.149) дает

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(\mu)-\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(\mu)-\ldots \tag{5.160}$$

Это выражение справедливо при $\mu^2<1$. Общее решение уравнения Лежандра будет

$$\Theta=AP_n(\mu)+BQ_n(\mu).$$

Если положить $A' = A - \frac{1}{2} B \ln(-1)$ и подставить в решение (5.160), то

$$\Theta = A' P_n(\mu) + B\left[\frac{1}{2} P_n(\mu) \ln\frac{1+\mu}{\mu-1} - \frac{2n-1}{1\cdot n} P_{n-1}(\mu) - \ldots\right]$$

Следовательно, при $\mu^2 > 1$ в качестве формулы, определяющей $Q_n(\mu)$, можно принять

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln\frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{2n-1}{1\cdot n} P_{n-1}(\mu) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(\mu) - \ldots \quad (5.161)$$

Полагая $n = 0$ и $n = 1$ и используя разложение (Двайт, 601.3), получаем, что определенные таким образом выражения для величин $Q_0(\mu)$ и $Q_1(\mu)$ совпадают с (5.147).

§ 22г. Некоторые значения функций Лежандра второго рода. При помощи формул (5.160) и (5.161) нетрудно найти численные значения функций $Q_n(\mu)$; для удобства приведем некоторые важные частные значения этих функций при действительном аргументе:
если n — четное число,

$$Q_n(0) = 0, \quad (5.162)$$

если n — нечетное число,

$$Q_n(0) = (-1)^{1/2(n+1)} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (n-1)}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots n}, \quad (5.163)$$

если n — любое число,

$$Q_n(-\mu) = (-1)^{n+1} Q_n(\mu), \quad (5.164)$$

$$Q_n(1) = \infty, \quad Q_n(\infty) = 0. \quad (5.165)$$

§ 22д. Функции Лежандра второго рода мнимого аргумента. Применение гармоник сплюснутого сфероида связано с использованием функций $Q_n(j\zeta)$, где $j = (-1)^{1/2}$ и $0 \leqslant \zeta < \infty$. При $\zeta > 1$ выражение для $Q_n(j\zeta)$ получается просто подстановкой $j\zeta$ вместо μ в формулу (5.147):

$$Q_n(j\zeta) = (-j)^{n+1} 2^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (n+2s)!\,(n+s)!}{s!\,(2n+2s+1)!} \zeta^{-n-2s-1}. \quad (5.166)$$

Аналогичная подстановка в формулу (5.161) не приводит к однозначному результату, поскольку логарифмический член в формуле (5.161) многозначен. Применяя формулы (601.2) и (506.2) из справочника Двайта, нетрудно получить

$$\ln\frac{j\zeta+1}{j\zeta-1} = 2j\left(-\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3\zeta^3} - \frac{1}{5\zeta^5} + \quad\right) = -2j \operatorname{arc\,ctg}\zeta.$$

Если представить коэффициенты в формуле (5.161) в виде (5.131) и использовать приведенный выше ряд для логарифма, то получится выражение, совпадающее с выражением (5.166). Таким образом, имеет место следующее соотношение:

$$Q_n(j\zeta) = -j \operatorname{arc\,ctg}\zeta\, P_n(j\zeta) - \frac{2n-1}{1\cdot n} P_{n-1}(j\zeta) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(j\zeta) - \ldots, \quad (5.167)$$

где arc ctg меняется в пределах от 0 до π. Это выражение можно использовать для определения $Q_n(j\zeta)$ во всем интервале $-\infty < \zeta < \infty$, поскольку оно не имеет особенности при $\zeta = 1$. Отметим, что при конечных ζ функция $Q_n(j\zeta)$ конечна и что,
если n — четное число,

$$Q_n(j\cdot 0) = -\frac{1}{2} j\pi P_n(j\cdot 0) = (-1)^{1/2n} \frac{-j\pi}{2} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \quad n}, \quad (5.168)$$

если n — нечетное число,

$$Q_n(j\cdot 0) = (-1)^{1/2(n+1)} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (n-1)}{1\cdot 3\cdot 5 \quad n} \tag{5.169}$$

При больших ζ член с наименьшим отрицательным показателем степени в формуле (5.166) много больше всех остальных, так что

$$Q_n(j\zeta) \underset{\zeta\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} (-j)^{n+1} \frac{1}{\zeta^{n+1}} \tag{5.170}$$

Весьма полезную формулу можно получить, если продифференцировать выражение (5.156), а интегралы, содержащиеся в найденном соотношении, исключить при помощи выражения (5.156). Подставляя $j\zeta$ вместо μ, будем иметь

$$P_n(j\zeta) Q_n'(j\zeta) - P_n'(j\zeta) Q_n(j\zeta) = (1+\zeta^2)^{-1}. \tag{5.171}$$

§ 22е. Применение функций Лежандра второго рода в теории потенциала. Наиболее важные применения зональных гармоник второго рода связаны с использованием сфероидальных гармоник. Поскольку функции $Q_n(\mu)$ обращаются в бесконечность при $\mu = 1$, они используются в качестве сферических гармоник главным образом в тех задачах, в которых коническая граница исключает ось ($\mu = 1$) из области, где ищется электростатическое поле.

Рассмотрим, например, случай двух коаксиальных конусов. Пусть потенциал равен нулю на конусе $\theta = \beta$ и равен $V_\alpha = \sum (A_n r^n + B_n r^{-n-1})$ на конусе $\theta = \alpha$. Тогда в пространстве между конусами потенциал будет

$$V = \sum \frac{(A_n r^n + B_n r^{-n-1}) [Q_n(\cos\beta) P_n(\mu) - P_n(\cos\beta) Q_n(\mu)]}{P_n(\cos\alpha) Q_n(\cos\beta) - P_n(\cos\beta) Q_n(\cos\alpha)}, \tag{5.172}$$

где $\mu = \cos\theta$. Проверка показывает, что это решение удовлетворяет граничным условиям.

Интересен тот частный случай, когда один конус имеет потенциал, равный нулю, а другой — потенциал, равный V_1. Поскольку $P_0(\mu) = 1$, то в этом случае

$$V_1 = A_0 \frac{Q_0(\cos\beta) - Q_0(\cos\gamma)}{Q_0(\cos\beta) - Q_0(\cos\alpha)} = A_0.$$

Согласно формуле (406.2) из справочника Двайта,

$$Q_0(\cos\theta) = \frac{1}{2} \ln [(1+\cos\theta)/(1-\cos\theta)] = -\ln \operatorname{tg}(\theta/2)$$

и выражение для потенциала между конусами имеет вид

$$V = V_1 \left(\ln \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta} \right) \Big/ \left(\ln \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha} \right). \tag{5.173}$$

§ 23. Зональные гармоники нецелого порядка. Во многих случаях, когда область, в которой ищется потенциал, имеет конические границы, применение гармоник только с целыми значениями n оказывается недостаточным. В этих случаях необходимо обобщить выражения для гармоник на значения n, определяемые таким образом, чтобы $P_n(\mu)$ или $Q_n(\mu)$ обращались в нуль на соответствующих конусах. Многие из приведенных выше соотношений [например, рекуррентные формулы для $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$] справедливы и при нецелых значениях n; однако основные определения нуждаются в соответствующей модификации. Так, выражением для $P_n(\mu)$,

пригодным для любых значений n, будет ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)(-n)(1-n)\ldots(r-1-n)}{(r!)^2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r \qquad (5.174)$$

Этот ряд сходится при любых $\mu=\cos\theta$, за исключением $\theta=\pi$. Пример гармоник такого рода можно найти в § 27а — 27в настоящей главы, если принять, что заряд расположен на оси полости и, следовательно, $m=0$.

Если ν не является целым числом, то $P_\nu(\mu)$ и $P_\nu(-\mu)$ будут независимыми решениями уравнения Лежандра и будут связаны с $Q_\nu(\mu)$ соотношением

$$Q_\nu(\mu)=\frac{\pi[\cos\nu\pi P_\nu(\mu)-P_\nu(-\mu)]}{2\sin\nu\pi}. \qquad (5.175)$$

Если n — целое число, то функция $Q_n(\mu)$, определенная в § 22а, является пределом $Q_\nu(\mu)$ при $\nu\to n$.

§ 24а. Присоединенные функции Лежандра. В § 13 и 15 настоящей главы было показано, что решением уравнения Лапласа в сферических координатах является произведение $R\Theta\Phi$, где

$$R=Ar^n+Br^{-n-1}, \qquad (5.176)$$

$$\Phi=C\cos m\varphi+D\sin m\varphi, \qquad (5.177)$$

а Θ является решением уравнения (5.102), которое, если ввести μ вместо $\cos\theta$, принимает вид

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]\Theta=0. \qquad (5.178)$$

При нахождении решения этого уравнения мы исходили из уравнения Лежандра, соответствующего $m=0$. Выполняя дифференцирование произведения в первом члене уравнения Лежандра, можно привести последнее к виду

$$(1-\mu^2)\frac{d^2y}{d\mu^2}-2\mu\frac{dy}{d\mu}+n(n+1)y=0.$$

Решениями этого уравнения являются $y=P_n(\mu)$ и $y=Q_n(\mu)$. Дифференцируя уравнение Лежандра m раз и обозначая $d^my/d\mu^m$ через v, получаем

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2\mu(m+1)\frac{dv}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)v=0. \qquad (5.179)$$

Вводя $w=(1-\mu^2)^{1/2m}v$, или $v=(1-\mu^2)^{1/2m}w$, получим уравнение (5.179) в виде

$$(1-\mu^2)\frac{d^2w}{d\mu^2}-2\mu\frac{dw}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]w=0. \qquad (5.180)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.178), в чем нетрудно убедиться, выполнив дифференцирование в первом члене (5.178); следовательно, решения уравнения (5.178) имеют вид

$$\Theta=w=(1-\mu^2)^{1/2m}v=(1-\mu^2)^{1/2m}\frac{d^my}{d\mu^m}.$$

Поскольку y является решением уравнения Лежандра, то общее решение уравнения (5.178) записывается следующим образом:

$$\Theta=A'P_n^m(\mu)+B'Q_n^m(\mu), \qquad (5.181)$$

где $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ при $-1<\mu<+1$ определяются по формулам

$$P_n^m(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}, \tag{5.182}$$

$$Q_n^m(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2m}\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m}. \tag{5.183}$$

Для $-1<\mu<+1$ Гобсон вводит в правые части множитель $(-1)^m$. В тех случаях, когда μ, будучи действительной или мнимой величиной, по модулю больше единицы, функции $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ определяются следующим образом:

$$P_n^m(\mu)=(\mu^2-1)^{1/2m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}, \tag{5.184}$$

$$Q_n^m(\mu)=(\mu^2-1)^{1/2m}\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m}. \tag{5.185}$$

Эти функции известны как присоединенные функции Лежандра первого и второго рода. Их можно получить при помощи формул (5.182) и (5.183) из уже известных выражений для $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$.

Для действительных значений μ, меньших единицы, формулы (5.182) и (5.183) дают

$$P_1^1(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2}, \qquad P_3^3(\mu)=15(1-\mu^2)^{3/2},$$

$$P_2^1(\mu)=3(1-\mu^2)^{1/2}\mu, \qquad P_4^1(\mu)=\frac{5}{2}(1-\mu^2)^{1/2}(7\mu^3-3\mu),$$

$$P_2^2(\mu)=3(1-\mu^2), \qquad P_4^2(\mu)=\frac{15}{2}(1-\mu^2)(7\mu^2-1),$$

$$P_3^1(\mu)=\frac{3}{2}(1-\mu^2)^{1/2}(5\mu^2-1), \qquad P_4^3(\mu)=105(1-\mu^2)^{3/2}\mu,$$

$$P_3^2(\mu)=15(1-\mu^2)\mu, \qquad P_4^4(\mu)=105(1-\mu^2)^2, \tag{5.186}$$

$$Q_1^1(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}+\frac{\mu}{1-\mu^2}\right),$$

$$Q_2^1(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2}\left(\frac{3}{2}\mu\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}+\frac{3\mu^2-2}{1-\mu^2}\right),$$

$$Q_2^2(\mu)=(1-\mu^2)\left(\frac{3}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}+\frac{5\mu-3\mu^3}{(1-\mu^2)^2}\right).$$

Для бóльших значений m и n используются рекуррентные формулы § 24г.

При действительных значениях μ, бóльших единицы, формулы для функций $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, определяемых согласно выражениям (5.184) и (5.185), можно получить заменой в приведенных выше выражениях (5.186) множителя $(1-\mu^2)^{1/2m}$ на $(\mu^2-1)^{1/2m}$ и, кроме того, заменой $1-\mu$ на $\mu-1$ в логарифмическом члене функции $Q_n^m(\mu)$. Для бóльших значений m и n используются рекуррентные формулы § 24г.

Для мнимых значений аргумента, согласно § 16з, § 22д и формулам .184) и (5.185), будем иметь

$$P_1(j\zeta)=j\zeta, \qquad Q_1(j\zeta)=\zeta\,\mathrm{arc\,ctg}\,\zeta-1,$$

$$P_1^1(j\zeta)=j(1+\zeta^2)^{1/2}, \qquad Q_1^1(j\zeta)=(1+\zeta^2)^{1/2}\left(\mathrm{arc\,ctg}\,\zeta-\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right),$$

$$P_2(j\zeta)=-\frac{1}{2}(3\zeta^2+1), \quad Q_2(j\zeta)=\frac{1}{2}j[(3\zeta^2+1)\,\mathrm{arc\,ctg}\,\zeta-3\zeta], \qquad (5.187)$$

$$P_2^1(j\zeta)=-3(1+\zeta^2)^{1/2}\zeta, \quad Q_2^1(j\zeta)=j(1+\zeta^2)^{1/2}\left[3\zeta\,\mathrm{arc\,ctg}\,\zeta-\frac{3\zeta^2+2}{1+\zeta^2}\right],$$

$$P_2^2(j\zeta)=-3(1+\zeta^2), \qquad Q_2^2(j\zeta)=j(1+\zeta^2)\left[3\,\mathrm{arc\,ctg}\,\zeta-\frac{5\zeta+3\zeta^3}{(1+\zeta^2)^2}\right].$$

формулах для $Q_n^m(j\zeta)\cdot\mathrm{arc\,ctg}$ изменяется от 0 до π при значении ζ, изменяющемся от $+\infty$ до $-\infty$.

Если $\mu\to\infty$, то, подставляя формулы (5.116) и (5.148) в (5.184) и .185), получаем

$$P_n^m(\mu)\xrightarrow[\mu\to\infty]{}\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\mu^n, \qquad (5.188)$$

$$Q_n^m(\mu)\xrightarrow[\mu\to\infty]{}(-1)^m\frac{n!\,(n+m)!\,2^n}{(2n+1)!\,\mu^{n+1}}. \qquad (5.189)$$

случае $m=n$ при подстановке формулы (5.114) в (5.182) сохраняется лько член, соответствующий $s=0$; в результате получается решение, айденное в § 12б [формула (5.81)]:

$$P_m^m(\cos\theta)=(2m-1)!!\sin^m\theta. \qquad (5.190)$$

ля $P_n^m(x)$ можно дать интегральное представление, пригодное при любых n $x\geqslant 1$:

$$\pi P_n^m(x)=(n+1)(n+2)\ldots(n+m)\int_0^{\pi}[x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n\cos m\varphi\,d\varphi. \qquad (5.191)$$

одстановка в уравнение (5.178) и двукратное интегрирование по частям казывает, что выражение (5.191) удовлетворяет уравнению Лежандра. остоянный множитель нетрудно проверить, если устремить $x\to\infty$ (интеал при этом вычисляется) и сравнить результат с формулой (5.188).

§ 24б. Интегралы от произведений присоединенных функций. Уравение (5.92) показывает, что при $n\neq n'$

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}[P_n^m(\mu)\,P_{n'}^{m'}(\mu)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)(A'\cos m'\varphi+B'\sin m'\varphi)]\,d\mu\,d\varphi=0. \qquad (5.192)$$

лагодаря наличию произведения тригонометрических функций этот интерал равен нулю и в том случае, если m — целое число и $m\neq m'$ независимо от значений n и n' (см. Двайт, 435, 445 и 465).

Чтобы определить значение интеграла (5.192) при $n=n'$ и $m=m'$, обходимо вычислить интеграл от квадрата $P_n^m(\mu)$ по поверхности сферы диничного радиуса.

Используя для $P_n^m(\mu)$ выражения (5.182) и (5.115), получим при помощи интегрирования по частям

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu=\int_{-1}^{+1}u\,dv=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\left[(\mu^2-1)^m\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]d\left[\frac{d^{n+m-1}}{d\mu^{n+m-1}}(\mu^2-1)^n\right]=$$

$$=-\frac{(-1)^m}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{d}{d\mu}\left[(\mu^2-1)^m\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]\right\}d\left[\frac{d^{n+m-2}}{d\mu^{n+m-2}}(\mu^2-1)^n\right]$$

Повторим интегрирование по частям, полагая каждый раз

$$u=\frac{d^{s-1}}{d\mu^{s-1}}\left[(\mu^2-1)^m\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]\qquad v=\frac{d^{m+n-s}}{d\mu^{m+n-s}}(\mu^2-1)^r$$

Произведение uv обращается в нуль на границах интервала, поскольку u содержит множитель μ^2-1 при $m\geqslant s$, а v — при $m<s$. Поэтому после $(m+n)$-кратного интегрирования по частям получим

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^n}{2^{2n}(n!)^2}\left\{\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\left[(\mu^2-1)^m\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]\right\}d\mu. \qquad (5.193)$$

Так как степень μ при дифференцировании понижается, второй множитель в подинтегральном выражении оказывается, очевидно, постоянным. Поэтому, сохраняя лишь наивысшую степень μ и заменив μ^2-1 на μ^2, получим, что этот множитель равен

$$[2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n-m+1)](n+m)!=\frac{(2n)!\,(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Весь интеграл с учетом формул (5.126) и (5.127) оказывается равным

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^n\,d\mu=$$

$$=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{+1}[P_n(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad (5.194)$$

При $n\neq n'$ из формулы (5.192) следует

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(\mu)\,P_{n'}^m(\mu)\,d\mu=0. \qquad (5.195)$$

В случае $m\neq m'$ весьма полезным является следующее интегральное соотношение:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_n^m(\mu)\,P_n^{m'}(\mu)}{1-\mu^2}\,d\mu=0. \qquad (5.196)$$

Для доказательства этой формулы запишем уравнение (5.178), обозначив сначала $\Theta=y$ и $m=m$, а потом $\Theta=y'$ и $m=m'$; умножим первое уравнение на y', второе — на y, вычтем и проинтегрируем от -1 до $+1$. Для интегрирования в случае $m=m'$ перенесем средний член уравнения (5.205

в правую часть, возведем в квадрат, заменим всюду n на $n-1$, умножим на $n+m$ и исключим из результата $\Theta_{n-1}^{m+1}\Theta_{n-1}^{m-1}$ при помощи уравнения (5.208), возведенного в квадрат и умноженного на $n-m$. При интегрировании от -1 до $+1$ все члены, не содержащие $1-\mu^2$, интегрируются согласно формуле (5.194) и взаимно уничтожаются; в результате остается

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(\Theta_n^m)^2\,d\mu}{1-\mu^2}=\frac{n+m}{n-m}\int_{-1}^{+1}\frac{(\Theta_{n-1}^m)^2\,d\mu}{1-\mu^2}=\frac{(n+m)!}{(2m)!\,(n-m)!}\int_{-1}^{1}\frac{(\Theta_m^m)^2\,d\mu}{1-\mu^2}.$$

Подставляя Θ_m^m по формуле (5.190) и интегрируя (см. Двайт, 854.1), находим

$$\int_{-1}^{+1}\frac{[P_m^m(\mu)]^2}{1-\mu^2}\,d\mu=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\int_0^{\pi}\sin^{2m-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{m}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\qquad(5.197)$$

При применении вектор-потенциала нам придется пользоваться свойствами ортогональности поверхностных векторных функций $\cos\theta$, определяемых соотношением

$$\mathbf{P}_n^m(\mu)=\begin{matrix}\theta\\ \varphi\end{matrix}(1-\mu^2)^{1/2}P_n^{m'}(\mu)\pm\begin{matrix}\varphi\\ \theta\end{matrix}m(1-\mu^2)^{-1/2}P_n^m(\mu).\qquad(5.198)$$

Интегрирование скалярного произведения двух таких функций дает

$$\int_{-1}^{+1}\mathbf{P}_n^m(\mu)\quad\mathbf{P}_p^m(\mu)\,d\mu=$$

$$=\int_{-1}^{+1}[(1-\mu^2)P_n^{m'}(\mu)P_p^{m'}(\mu)+m^2(1-\mu^2)^{-1}P_n^m(\mu)P_p^m(\mu)]\,d\mu.$$

Заменяя второй член при помощи уравнения (5.178) и группируя члены, находим

$$\int_{-1}^{+1}\left\{[(1-\mu^2)P_n^{m'}]P_p^{m'}+\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)P_n^{m'}]P_p^m\right\}d\mu+n(n+1)\int_{-1}^{+1}P_n^mP_p^m\,d\mu=$$

$$=[(1-\mu^2)P_n^{m'}P_p^m]_{-1}^{+1}+n(n+1)\int_{-1}^{+1}P_n^mP_p^m\,d\mu=n(n+1)\int_{-1}^{+1}P_n^mP_p^m\,d\mu.$$

Согласно формулам (5.192) и (5.194), результат равен нулю при $n\neq p$ и равен

$$\int_{-1}^{+1}\mathbf{P}_n^m(\mu)\cdot\mathbf{P}_n^m(\mu)\,d\mu=\frac{2n(n+1)}{(2n+1)}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\qquad(5.199)$$

при $n=p$.

§ 24в. Присоединенные функции от мнимого аргумента. Применение гармоник сплюснутого сфероида приводит к появлению функций $P_n^m(j\zeta)$ и $Q_n^m(j\zeta)$ от мнимого аргумента, где ζ изменяется от 0 до ∞. Представление этих функций в виде рядов можно получить, применяя формулы (5.184) и (5.185) к (5.131) и (5.166). Следует отметить, что окончательные ряды для $P_n^m(j\zeta)$ содержат только нулевые или положительные степени ζ, так

что $P_n^m(j\cdot 0)$ конечны, а $P_n^m(j\cdot\infty)$ бесконечны. Ряды для $Q_n^m(j\zeta)$ содержат только отрицательные степени ζ, так что $Q_n^m(j\cdot\infty)$ обращается в нуль.

Получим теперь для этих функций важное соотношение, аналогичное соотношению (5.171). Согласно выражению (5.155),

$$Q_n^m(\mu)=P_n^m(\mu)\left\{A+B\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)[P_n^m(\mu)]^2}\right\}$$

Продифференцируем это равенство и исключим при помощи полученной формулы интеграл из правой части; в результате (после замены μ на $j\zeta$) будем иметь

$$P_n^m(j\zeta)\frac{d}{d\zeta}Q_n^m(j\zeta)-Q_n^m(j\zeta)\frac{d}{d\zeta}P_n^m(j\zeta)=\frac{jB}{1+\zeta^2}. \tag{5.200}$$

Полагая $\zeta\to\infty$ и учитывая формулы (5.188) и (5.189), находим

$$B=(-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{5.201}$$

§ 24г. Рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра. Как было показано в § 16д и 22б, рекуррентные формулы для функций $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ одинаковы. Знак в соответствующих формулах для функций $\Theta_n^m=AP_n^m(\mu)+BQ_n^m(\mu)$ зависит от того, изменяется ли μ в интервале $-1<\mu<+1$ или $\mu>1$ или же μ является величиной мнимой. Ниже будут получены эти формулы, причем верхний знак будет относиться к случаю $\mu=\cos\theta$. Продифференцируем выражение (5.122) m раз, умножим на $\sin^{m+1}\theta$ или на $(\mu^2-1)^{1/2(m+1)}$; в результате, согласно формулам (5.182) и (5.183) или (5.184) и (5.185), будем иметь

$$\Theta_{n+1}^{m+1}=(m+n+1)[\pm(1-\mu^2)]^{1/2}\Theta_n^m+\mu\Theta_n^{m+1}. \tag{5.202}$$

Теперь продифференцируем выражение (5.119) m раз и умножим на $[\pm(1-\mu^2)]^{1/2(m+1)}$; принимая во внимание формулы (5.182) и (5.183) или (5.184) и (5.185), получим

$$\Theta_{n+1}^{m+1}-\Theta_{n-1}^{m+1}=(2n+1)[\pm(1-\mu^2)]^{1/2}\Theta_n^m. \tag{5.203}$$

Вычтем выражение (5.203) из (5.202), в результате найдем

$$\Theta_{n-1}^{m+1}=(m-n)[\pm(1-\mu^2)]^{1/2}\Theta_n^m+\mu\Theta_n^{m+1}. \tag{5.204}$$

Заменим в формуле (5.202) n на $n-1$ и исключим Θ_{n-1}^{m+1} и Θ_{n-1}^m, используя для этого соотношение (5.204) и соотношение, получающееся из (5.204) заменой m на $m-1$. Если разделим результат на $-(1-\mu^2)$, то получим формулу

$$\Theta_n^{m+1}\mp 2m\mu[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\Theta_n^m\pm(m+n)(n-m+1)\Theta_n^{m-1}=0, \tag{5.205}$$

являющуюся рекуррентной относительно m.

Если умножим формулу (5.202) на $m-n$ и формулу (5.204) на $m+n+1$, вычтем одну из другой и заменим в результате $m+1$ на m, то получим рекуррентную формулу относительно n:

$$(m-n-1)\Theta_{n+1}^m+(2n+1)\mu\Theta_n^m-(m+n)\Theta_{n-1}^m=0. \tag{5.206}$$

Дифференцируя выражения (5.182) и (5.183) или (5.184) и (5.185) и пользуясь приведенными выше формулами, нетрудно получить

$$\begin{aligned}[\pm(1-\mu^2)]^{1/2}\,\Theta_n^{m\prime} &= \mp m\mu\,[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\,\Theta_n^m + \Theta_n^{m+1} = \\ &= \mp\tfrac{1}{2}(m+n)(n-m+1)\,\Theta_n^{m-1} + \tfrac{1}{2}\,\Theta_n^{m+1} = \\ &= \mp m\mu\,[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\,\Theta_n^m \mp (m+n)(n-m+1)\,\Theta_n^{m-1}. \end{aligned} \tag{5.207}$$

Иногда желательно выразить $[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\,\Theta_n^m$ через функции Лежандра. Для этого заменим в формуле (5.202) m на $m-1$, разделим на $[\pm(1-\mu^2)]^{1/2}$, подставим $\mu\,[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\,\Theta_n^m$ из формулы (5.205) и заменим в окончательном выражении n на $n-1$; в результате будем иметь

$$2m\,[\pm(1-\mu^2)]^{-1/2}\,\Theta_n^m = \pm\,\Theta_{n-1}^{m+1} + (n+m-1)(m+n)\,\Theta_{n-1}^{m-1}. \tag{5.208}$$

Замена m на $m-1$ в формуле (5.203) и подстановка в последнее из выражений (5.207) дает

$$(1-\mu^2)\,\Theta_n^{m\prime} = \pm\,m\mu\Theta_n^m \mp (m+n)(n-m+1)(2n+1)^{-1}(\Theta_{n+1}^m - \Theta_{n-1}^m).$$

Преобразуя, согласно формуле (5.206), последний, первый и средний члены этого равенства, получим соответственно

$$\begin{aligned}(1-\mu^2)\,\Theta_n^{m\prime} &= \pm(n+1)\,\mu\Theta_n^m \mp (n-m+1)\,\Theta_{n+1}^m = \\ &= \pm(2n+1)^{-1}\,[(m-n-1)\,\Theta_{n+1}^m + (n+1)(m+n)\,\Theta_{n-1}^m] = \\ &= \mp\,n\mu\Theta_n^m \pm (m+n)\,\Theta_{n-1}^m. \end{aligned} \tag{5.209}$$

§ 24д. Некоторые значения присоединенных функций Лежандра. При помощи рекуррентных формул предыдущего параграфа, а именно (5.205) и (5.207), совместно с результатами § 16з и § 22г, получаются следующие соотношения:

если $n+m$ — четное число,

$$P_n^m(0) = (-1)^{1/2\,(n-m)}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n+m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-m)},$$

если $n+m$ — нечетное число,

$$P_n^m(0) = 0,$$

если $n+m$ — нечетное число,

$$Q_n^m(0) = (-1)^{1/2\,(n-m+1)}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n+m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-m)},$$

если $n+m$ — четное число,

$$Q_n^m(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d^r}{d\mu^r}\,P_n^m(\mu)\right]_{\mu=0} = P_n^{m+r}(0),$$

$$\left[\frac{d^r}{d\mu^r}\,Q_n^m(\mu)\right]_{\mu=0} = Q_n^{m+r}(0),$$

$$P_n^m(-\mu) = (-1)^{n+m}\,P_n^m(\mu),$$

$$Q_n^m(-\mu) = (-1)^{n+m+1}\,Q_n^m(\mu).$$

§ 24с. Равновесные (нейтральные) точки и линии. Чтобы исследовать характер точки равновесия, выберем начало координат в этой точке и воспользуемся разложением потенциала по сферическим гармоникам. Внутри сферы достаточно малого радиуса (настолько малого, что внутри нее не содержится зарядов) потенциал должен быть конечным и, следовательно, иметь вид

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_{mn} r^n P_n^m(\cos\theta) \cos(m\varphi + \delta_m). \tag{5.210}$$

В точке равновесия ∇V равен нулю, так что $\partial V/\partial r \to 0$ при $r \to 0$ и коэффициенты A_{m1} равны нулю. В основу классификации точек равновесия можно положить соответствующее данной точке наибольшее значение p, такое, что все A_{mn} $(n \leqslant p)$ обращаются в нуль при $r \to 0$. Таким образом, для точки равновесия p-го порядка p есть наибольшее целое число, для которого при любых значениях θ и φ

$$\frac{\partial V}{\partial r} \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} \quad \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{\partial^p V}{\partial r^p} \to 0. \tag{5.211}$$

В достаточно малой окрестности точки (или линии) равновесия p-го порядка

$$V = A_{00} + r^{p+1} \sum_{m=0}^{p+1} A_{m,\,p+1} P_{p+1}^m(\cos\theta) \cos(m\varphi + \delta_m). \tag{5.212}$$

Потенциал в точке равновесия равен A_{0c}. Уравнение эквипотенциальных поверхностей, пересекающихся в этой точке, получается для малых r путем приравнивания нулю суммы в выражении (5.212). Для аксиально-симметричного поля m равно нулю, и эквипотенциальные поверхности имеют вид конусов, угол раствора которых 2α определяется уравнением $P_{p+1}(\cos\alpha) = 0$. Согласно § 16з, для точек первого порядка угол α равен 54°44′ и 125°36′; для точек второго порядка угол α равен 39°14′, 90° и 140°46′ и т. д. Простейшая линия равновесия соответствует тому случаю, когда все члены, кроме $m = p + 1$, равны нулю. На этой линии равновесия пересекаются $p + 1$ эквипотенциальных поверхностей, являющихся плоскостями, образующими между собой угол $\pi/(p + 1)$.

§ 25. Биаксиальные гармоники. В некоторых случаях может потребоваться представить зональную поверхностную гармонику $P_n(\cos\theta')$ через поверхностные гармоники $S_n(\theta, \varphi)$, отнесенные к другой оси. Пусть две оси пересекаются в начале координат и координаты оси θ' в системе θ, φ равны $\theta = \Theta$ и $\varphi = 0$. Требуется найти коэффициенты разложения

$$P_n(\cos\theta') = \sum_{m=0}^{m=n} A_m P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi. \tag{5.213}$$

Умножим правую и левую части этого равенства на $P_n^s(\cos\theta)\cos(s\varphi)$ и проинтегрируем по поверхности единичной сферы. В правой части все члены, согласно § 24б, обращаются в нуль, за исключением одного, содержащего S_n; с учетом выражения (5.194) он равен

$$A_m \int_S [P_n^m(\cos\theta)]^2 \cos^2 m\varphi \, dS = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_m. \tag{5.214}$$

Интеграл, стоящий в левой стороне, имеет вид

$$\int_S P_n(\cos\theta') S_n(\theta, \varphi) \, dS.$$

Точно такой же интеграл появляется в качестве коэффициента при b^n в выражении для потенциала V_P, создаваемого в точке $\theta'=0$, $r=b$ зарядом, распределенным по поверхности единичной сферы с плотностью $S_n(\theta, \varphi)$. Эта задача была решена в § 14б, и, следовательно, искомый интеграл можно приравнять коэффициенту при b^n в соответствующем решении, пригодном при любых $b \leqslant 1$. Таким образом,

$$4\pi\varepsilon V_P = \int_S \left(\frac{\sigma_Q}{IQ}\right) dS = \int_S S_n(\theta, \varphi)\,(1 + b^2 - 2b\cos\theta')^{-1/2}\, dS.$$

Используя разложение (5.117) и принимая во внимание, что интегралы от произведений типа $P_r(\cos\theta')\,S_n(\theta, \varphi)$ обращаются, согласно формуле (5.92), в нуль, получаем в правой части один член:

$$4\pi\varepsilon V_P = b^n \int_S P_n(\cos\theta')\, S_n(\theta, \varphi)\, dS.$$

Но потенциал V_P был вычислен в § 14б [формула (5.97)]:

$$4\pi\varepsilon V_P = \frac{4\pi}{2n+1}\, b^n\, [S_n(\theta, \varphi)]_P.$$

В нашем случае координаты точки P относительно оси θ равны $\theta=\Theta$ и $\varphi=0$, так что $S_n(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\Theta)$, и равенство коэффициентов при b^n в двух различных выражениях для V_P означает

$$\int_S P_n(\cos\theta')\, P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\, dS = \frac{4\pi}{2n+1} P_n^m(\cos\Theta). \qquad (5.215)$$

Приравнивая интегралы (5.214) и (5.215), определяем A_m

$$A_m = 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\Theta). \qquad (5.216)$$

Если $m=0$, то интегралы (5.214) и (5.215) вычисляются при помощи формул (5.127) и (5.97):

$$A_0 \int_S [P_n(\cos\theta)]^2\, dS = \frac{4\pi A_0}{2n+1} = \int_S P_n(\cos\theta')\, P_n(\cos\theta)\, dS = \frac{4\pi P_n(\cos\Theta)}{2n+1}$$

Подстановка в соотношение (5.213) дает

$$P_n(\cos\theta') = \sum_{m=0}^{m=n} (2-\delta_m^0)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\Theta)\, P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad (5.217)$$

где $\delta_m^0 = 1$ при $m=0$ и $\delta_m^0 = 0$ при $m \neq 0$. Этот символ носит название символа Кронекера и в более общем виде записывается δ_n^m, причем $\delta_n^m = 1$ при $m=n$ и $\delta_n^m = 0$ при $m \neq n$.

§ 26. Конические границы. Потенциал, созданный внутри конуса зарядом, распределенным произвольным образом по его поверхности, можно найти, если постоянные разделения в уравнении (5.82) выбраны так, что функции R и Φ оказываются ортогональными. Так, если n равно $jp-{}^1/_2$, то K равно $p^2+{}^1/_4$, и R, согласно выражению (5.84), имеет вид

$$R_p = A' r^{jp-1/2} + B' r^{-jp-1/2} = r^{-1/2} A\cos(p\ln r + \delta_p). \qquad (5.218)$$

Произведение $R_p R_{p'}\, dr$ оказывается равным $\cos(p\psi+\delta_p)\cos(p'\psi+\delta_{p'})\, d\psi$ (где $\psi=\ln r$), что приводит к ряду или интегралу Фурье по $\ln r$.

В множителе Θ появляются функции Лежандра порядка $jp - {}^1/_2$. Эти функции носят название конических функций; они были рассмотрены Гобсоном, Гейне и др. Гобсон приводит для них такой ряд:

$$P_{jp-1/2}(\pm\mu) = 1 + \frac{4p^2+1^2}{2^2}\left(\frac{1\mp\mu}{2}\right) + \frac{(4p^2+1^2)(4p^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{1\mp\mu}{2}\right)^2 + \quad (5.219)$$

Решение, соответствующее верхнему знаку и обращающееся в бесконечность при $\mu = 1$, следует использовать для области, лежащей вне конуса; нижний знак соответствует решению для внутренней области. Эта функция не является периодической. Формула (5.182) была получена без специальных предположений относительно n, поэтому

$$P^m_{jp-1/2}(\pm\mu) = (1-\mu^2)^{1/2m}\frac{\partial^m P_{jp-1/2}(\pm\mu)}{\partial\mu^m} \quad (5.220)$$

§ 27а. Присоединенные функции Лежандра нецелого порядка. Как уже было указано в предыдущем параграфе, при наличии конических границ приходится пользоваться функциями $P^m_n(\mu)$ или $Q^m_n(\mu)$, у которых индекс n не является целым числом. В частности, приходится пользоваться разложением в ряд по функциям Лежандра, порядок которых n таков, что $\Theta^m_n(\mu_0) = 0$. Для этого необходимо иметь формулы, аналогичные формулам (5.92) и (5.194). Пусть $\Theta^m_n(\mu) = y$ и $\Theta^m_{n'}(\mu) = y'$ — решения уравнения (5.178), такие, что

$$\Theta^m_{n'}(\mu_0) = \Theta^m_n(\mu_0) = 0. \quad (5.221)$$

Тогда

$$(1-\mu^2)\frac{d^2y}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dy}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]y = 0,$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2y'}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dy'}{d\mu} + \left[n'(n'+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]y' = 0.$$

Умножая первое уравнение на y', второе — на y и вычитая одно из другого, находим

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\left(y'\frac{dy}{d\mu} - y\frac{dy'}{d\mu}\right)\right] + (n-n')(n+n'+1)yy' = 0.$$

Интегрируя от μ_0 до 1, будем иметь

$$\int_{\mu_0}^{1}\Theta^m_n(\mu)\,\Theta^m_{n'}(\mu)\,d\mu = -\left|\frac{(1-\mu^2)\left(\Theta^m_n\frac{d\Theta^m_{n'}}{d\mu} - \Theta^m_{n'}\frac{d\Theta^m_n}{d\mu}\right)}{(n-n')(n+n'+1)}\right|_{\mu_0}^{1} \quad (5.222)$$

Откуда при $n \neq n'$, согласно соотношению (5.221), следует

$$\int_{\mu_0}^{1}\Theta^m_n(\mu)\,\Theta^m_{n'}(\mu)\,d\mu = 0. \quad (5.223)$$

Для $n = n'$ поступим следующим образом. Пусть $n - n' = \Delta n'$ Подставив $y = y' + (\partial y'/\partial n')\Delta n'$ в выражение (5.222), найдем

$$y\frac{dy'}{d\mu} - y'\frac{dy}{d\mu} = y'\frac{\partial y'}{\partial\mu} + \frac{\partial y'}{\partial\mu}\frac{\partial y'}{\partial n'}\Delta n' - y'\frac{\partial y'}{\partial\mu} - y'\frac{\partial^2 y'}{\partial\mu\,\partial n'}\Delta n'.$$

Поскольку при $\mu = \mu_0$ $y' = 0$, то при $n \to n'$ получим

$$\int_{\mu_0}^{1}[\Theta^m_n(\mu)]^2\,d\mu = -\frac{(1-\mu_0^2)}{2n+1}\left(\frac{\partial\Theta^m_n}{\partial\mu}\frac{\partial\Theta^m_n}{\partial n}\right)_{\mu=\mu_0} \quad (5.224)$$

Для вычисления значений $\partial\Theta_n^m/\partial n$ можно воспользоваться представлением функции Θ_n^m в виде ряда [например, ряда (5.104)] или в виде определенного интеграла (последнее можно найти в работах, список которых приведен в конце настоящей главы).

§ 27б. Функция Грина для конуса. Рассмотрим задачу о точечном заряде q, расположенном внутри заземленного конуса $\theta=\alpha$ в точке $r=a$, $\theta=\beta$, $\varphi=\varphi_0$. Под точечным зарядом мы будем понимать такой заряд, размеры которого достаточно малы, но все-таки отличны от нуля, так что напряженность поля и потенциал в математическом смысле являются функциями ограниченными[1]). Граничные условия ($V=0$ на конусе) автоматически удовлетворяются, если пользоваться разложением по функциям Лежандра, порядок которых n подобран таким образом, что $P_n^m(\mu_0)=0$, где $\mu_0=\cos\alpha$. Из формул (5.176), (5.177) и (5.182) следует, что при таком выборе n решение уравнения Лапласа, конечное при $r=0$ и $r=\infty$, непрерывное при $r=a$ и имеющее должную симметрию относительно φ_0, имеет вид
при $r<a$

$$V_i=\sum_n\sum_{m=0}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\mu)\cos m(\varphi-\varphi_0), \tag{5.225}$$

при $r>a$

$$V_0=\sum_n\sum_{m=0}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\mu)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.226}$$

Чтобы определить коэффициенты A_{mn}, введем новую переменную $\varphi'=\varphi-\varphi_0$, составим, как в § 8 гл. IV, разность $\partial V_i/\partial r-\partial V_0/\partial r$, умножим правую и левую части на $P_s^p(\mu)\cos p\varphi'\,d\mu\,d\varphi'$ и проинтегрируем от $\varphi'=0$ до $\varphi'=2\pi$ и от $\mu=\mu_0$ до $\mu=1$. Тогда (см. Двайт, 445) все члены в правой части обращаются в нуль, кроме членов $m=p$; последние, согласно формуле (5.223), также обращаются в нуль, за исключением членов $n=s$. После умножения на a^2 получаем

$$a^2\int_0^{2\pi}\int_{\mu_0}^{+1}P_s^p(\mu)\cos p\varphi'\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}-\frac{\partial V_0}{\partial r}\right)_{r=a}d\mu\,d\varphi'=$$

$$=aA_{ps}(2s+1)\int_{\mu_0}^{+1}[P_s^p(\mu)]^2\,d\mu\int_0^{2\pi}\cos^2 p\varphi'\,d\varphi' \tag{5.227}$$

Интегралы в правой части вычисляются при помощи формулы (5.224) и формулы (Двайт, 440.20), кроме случая, когда $p=0$. Для вычисления левой части заметим, что $a^2\,d\mu\,d\varphi'=-a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi'=-dS$. Поле непрерывно на сфере радиуса $r=a$, за исключением бесконечно малого участка поверхности ΔS около точки $\theta=\beta$, $\varphi=\varphi_0$ (или $\varphi'=0$), где сосредоточен заряд. Поэтому $\partial V_i/\partial r=\partial V_0/\partial r$ и подинтегральное выражение обращается в нуль везде, кроме площадки ΔS, которая выбирается настолько малой, что под интегралом $P_s^p(\mu)$ можно заменить на $P_s^p(\mu_1)$ ($\mu_1=\cos\beta$), а $\cos p\varphi'$ — на 1. Поскольку на внутренней стороне ΔS $\partial V_i/\partial r=-\partial V/\partial n$, а на внешней стороне ΔS $\partial V_0/\partial r=\partial V/\partial n$, левая часть уравнения (5.227), согласно

[1]) Здесь и в дальнейшем (§ 28в, 30и и т. д.) автор фактически рассматривает точечный заряд, плотность которого описывается δ-функцией Дирака. Вопрос о сходимости соответствующих рядов не затрагивается.—*Прим. перев.*

теореме Гаусса о потоке электрической индукции (1.27), оказывается равной

$$-P_s^p(\mu_1)\int\limits_{\Delta S}\frac{\partial V}{\partial n}\,dS=\frac{q}{\varepsilon}P_s^p(\mu_1). \tag{5.228}$$

Разрешая уравнение (5.227) относительно A_{ps} и изменяя p на m и s на n в соответствии с обозначениями в формулах (5.225) и (5.226), получаем

$$A_{mn}=-\frac{(2-\delta_m^0)\,q}{2\pi\varepsilon a\,(1-\mu_0^2)}P_n^m(\mu_1)\Big/\left[\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial\mu}\,\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial n}\right]_{\mu=\mu_0}, \tag{5.229}$$

где $\delta_m^0=1$ при $m=0$ и $\delta_m^0=0$ при $m\neq 0$.

§ 27в. Функция Грина для конической полости. Предположим, что заряд q находится между заземленными сферами $r=d$ и $r=c$ и внутри заземленного конуса $0=\alpha$, так что $c<a<d$ и $0<\beta<\alpha$. В этом случае к функции Грина для конуса надо прибавить потенциал, обращающийся в нуль на самом конусе и дающий при $r=d$ и $r=c$ суммарный потенциал, равный нулю. Поскольку точки $r=0$ и $r=\infty$ исключены из области, в которой ищется поле, этот потенциал должен иметь вид (5.225) или (5.226), где $(r/a)^n$ или $(a/r)^{n+1}$ заменены на $C_nr^n+D_nr^{-n-1}$. Если прибавить полученное выражение к выражению (5.225) и положить $r=c$, то суммарный потенциал должен обратиться в нуль, откуда

$$\left(\frac{c}{a}\right)^n+C_nc^n+\frac{D_n}{c^{n+1}}=0. \tag{5.230}$$

Приравнивая к нулю суммарный потенциал при $r=d$, получаем

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{n+1}+C_nd^n+\frac{D_n}{d^{n+1}}=0. \tag{5.231}$$

Определив C_n и D_n из соотношения (5.230) и (5.231) и прибавив новый потенциал к потенциалу (5.225), найдем для $r<a$

$$V_i=\sum_n\sum_{m=0}^{n}A_{mn}\frac{a^{2n+1}-d^{2n+1}}{a^n(c^{2n+1}-a^{2n+1})}\left(r^n-\frac{c^{2n+1}}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\mu)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.232}$$

Аналогично, для $r>a$, согласно формуле (5.226), находим

$$V_0=\sum_n\sum_{m=0}^{n}A_{mn}\frac{a^{2n+1}-c^{2n+1}}{a^n(c^{2n+1}-d^{2n+1})}\left(r^n-\frac{d^{2n+1}}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\mu)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.233}$$

Если, кроме того, плоскости $\varphi=+\gamma$ и $\varphi=0$ $(\gamma>\varphi_0>0)$ имеют нулевой потенциал и если $\gamma=\pi/s$ (s целое число), то решение можно получить при помощи метода изображений в виде суммы потенциалов типа (5.232) и (5.233). Если $\gamma\neq\pi/s$, следует использовать гармоники нецелочисленных порядков вида $\sin(m\pi\varphi/\gamma)$. Благодаря этому в коэффициенте A_{mn} появляется множитель $2\pi/\gamma$, а в выражениях (5.232) и (5.233) $\cos m(\varphi-\varphi_0)$ заменяется на $\sin(m\pi\varphi_0/\gamma)\sin(m\pi\varphi/\gamma)$.

§ 28а. «Сплюснутые» сфероидальные координаты. Обычными геометрическими объектами, встречающимися в электрической аппаратуре, являются тонкий круглый диск и тонкий лист с круглым отверстием. Ни одна из изученных до сих пор координатных систем не образует таких естественных границ, за исключением конфокальной системы, описанной в § 2 и 3. В этой системе, фиксируя значение одной из координат и не ограничивая

пределов изменения остальных, можно получить поверхность требуемой формы. Наличие аксиальной симметрии, когда трехосные эллипсоиды превращаются в сплюснутые сфероиды, сильно упрощает задачу. Ниже рассматривается решение уравнения Лапласа в такой системе координат; оно содержит функции, известные под названием гармоник сплюснутого сфероида.

Положим в уравнении (5.4) большие полуоси b и c равными друг другу и обозначим $y=\rho\cos\varphi$ и $z=\rho\sin\varphi$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{\rho^2}{b^2+\theta}=1. \tag{5.234}$$

Положим в этом уравнении $a^2+\theta=(b^2-a^2)\,\theta_1^2=c_1^2\,\theta_1^2$. Тогда при $-a^2<\theta<\infty$ или $0<\zeta^2<\infty$ (где $\theta_1^2=\zeta^2$) мы получаем конфокальные сплюснутые сфероиды, а при $-b^2<\theta<-a^2$ или $0<\xi^2<1$ (где $-\theta_1^2=\xi^2$) — конфокальные однополостные гиперболоиды. Третьей координатой является, очевидно, азимутальный угол φ. Уравнение сфероидов имеет вид

$$\frac{x^2}{c_1^2\zeta^2}+\frac{\rho^2}{c_1^2\,(\zeta^2+1)}=1, \tag{5.235}$$

а уравнение гиперболоидов —

$$\frac{x^2}{-c_1^2\xi^2}+\frac{\rho^2}{c_1^2\,(1-\xi^2)}=1. \tag{5.236}$$

Исключив ρ из этих уравнений, получим

$$x=c_1\zeta\xi, \tag{5.237}$$

а исключив x —

$$\rho=c_1\,[(1+\zeta^2)\,(1-\xi^2)]^{1/2}. \tag{5.238}$$

Координата ρ всегда положительна, а x принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому если выбрать $0<\zeta<\infty$, то следует принять $-1\leqslant\xi\leqslant+1$ (см. фиг. 54), а если выбрать $\infty<\zeta<+\infty$, то следует принять $0\leqslant\xi\leqslant1$ (см. фиг. 53).

Чтобы написать уравнение Лапласа в такой системе координат, необходимо вычислить коэффициенты h_1, h_2 и h_3 в уравнении (3.13). Согласно выражениям (3.10),

$$\frac{1}{h_1}=\frac{\partial\xi}{\partial n}=j\,\frac{\partial\theta_1}{\partial n} \quad\text{и}\quad \frac{1}{h_2}=\frac{\partial\zeta}{\partial n}=\frac{\partial\theta_1}{\partial n}$$

При помощи формулы (5.5) получаем

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n}=\frac{1}{2c_1^2\theta_1}\frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{|\nabla\theta|}{2c_1^2\theta_1}=\frac{1}{c_1^2\theta_1 M_2^{1/2}}$$

Записывая координаты в порядке ξ, φ и подставляя вместо x и ρ их значения (5.237) и (5.238), находим

$$h_1=c_1^2\,\xi\left[\frac{x^2}{(-c_1^2\xi^2)^2}+\frac{\rho^2}{c_1^4\,(1-\xi^2)^2}\right]^{1/2}=c_1\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2}, \tag{5.239}$$

$$h_2=c_1^2\zeta\left[\frac{x^2}{c_1^4\,\zeta^4}+\frac{\rho^2}{c_1^4\,(1+\zeta^2)^2}\right]^{1/2}=c_1\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1+\zeta^2}\right)^{1/2} \tag{5.240}$$

$$h_3=\frac{\rho d\varphi}{d\varphi}=\rho=c_1\,[(1+\zeta^2)\,(1-\xi^2)]^{1/2}. \tag{5.241}$$

Уравнение Лапласа (3.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial V}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1+\zeta^2)\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right]+\frac{\xi^2+\zeta^2}{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \tag{5.242}$$

§ 28б. Гармоники сплюснутого сфероида. Решение уравнения (5.242), имеющее вид $V=\Xi Z\Phi$ (где Ξ, Z и Φ — соответственно функции только ξ, ζ и φ), называется гармоникой сплюснутого сфероида. Умножая уравнение (5.242) на $(1+\zeta^2)(1-\xi^2)[\Xi Z\Phi(\xi^2+\zeta^2)]^{-1}$, получаем, что последний член зависит только от φ. Чтобы найти решение уравнения, как и в § 13, приравняем этот член $-m^2$, а остальные члены $+m^2$, тогда

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2 \tag{5.243}$$

и

$$\frac{1}{\Xi}\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\Xi}{d\xi}\right]+\frac{1}{Z}\frac{d}{d\zeta}\left[(1+\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right]=\frac{m^2(\xi^2+\zeta^2)}{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)}=\frac{m^2}{1-\xi^2}-\frac{m^2}{1+\zeta^2}.$$

Последнее уравнение удовлетворяется, если

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\Xi}{d\xi}\right]-\frac{m^2\Xi}{1-\xi^2}+n(n+1)\Xi=0 \tag{5.244}$$

и

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1+\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right]+\frac{m^2 Z}{1+\zeta^2}-n(n+1)Z=0.$$

Полагая $\zeta'=j\zeta$, приводим второе из этих уравнений к виду

$$\frac{d}{d\zeta'}\left[(1-\zeta'^2)\frac{dZ}{d\zeta'}\right]-\frac{m^2 Z}{1-\zeta'^2}+n(n+1)Z=0. \tag{5.245}$$

Решение уравнения (5.243), согласно выражению (5.177), будет

$$\Phi_m=C\cos m\varphi+D\sin m\varphi. \tag{5.246}$$

Уравнения (5.244) и (5.245) совпадают с (5.178), поэтому их решение имеет вид (5.181)

$$\Xi_{mn}=AP_n^m(\xi)+BQ_n^m(\xi), \tag{5.247}$$

$$Z_{mn}=A'P_n^m(\zeta')+B'Q_n^m(\zeta')=A'P_n^m(j\zeta)+B'Q_n^m(j\zeta), \tag{5.248}$$

и, следовательно, общее решение будет

$$V=\sum_m\sum_n \Xi_{mn}Z_{mn}\Phi_m. \tag{5.249}$$

Поскольку сфера есть частный случай сфероида, естественно ожидать, что сферические гармоники — частный случай сфероидальных. Проследим, как решение, определяемое выражениями (5.246) — (5.249), переходит в решение (5.177), (5.181) и (5.176) при стремлении эксцентриситета эллипсоида к нулю. При $c_1\to 0$ диск, соответствующий $\zeta=0$, стягивается в точку $r=0$. Из выражения (5.237) вытекает, что $\zeta\to\infty$ при $c_1\to 0$ (так как $1\geqslant\xi\geqslant 0$), и в выражении (5.238) можно пренебречь 1 по сравнению с ζ^2

$$\rho\underset{c_1\to 0}{\longrightarrow}c_1\zeta(1-\xi^2)^{1/2}=\frac{x}{\xi}(1-\xi^2)^{1/2}.$$

Из этого выражения находим ξ:

$$\xi\underset{c_1\to 0}{\longrightarrow}x(x^2+\rho^2)^{-1/2}=\cos\theta=\mu. \tag{5.250}$$

Таким образом, решение (5.247) переходит в решение (5.181).

Из выражения (5.237) получаем, что

$$\zeta \underset{c_1 \to 0}{\longrightarrow} \frac{x}{c_1 \cos\theta} = \frac{r}{c_1} \tag{5.251}$$

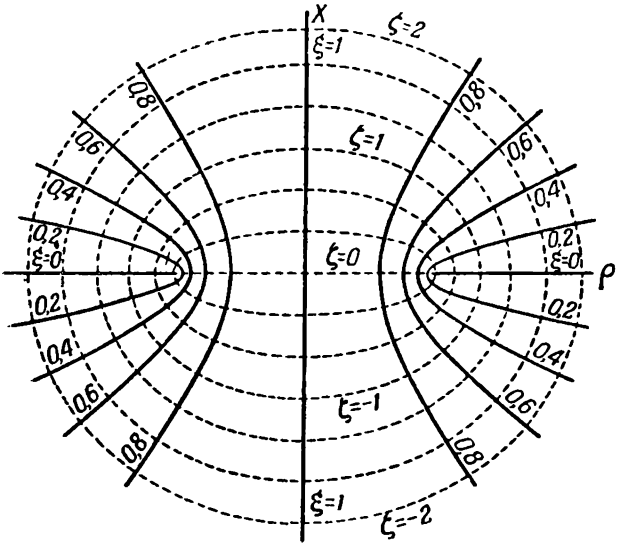
Используя формулы (5.188) и (5.189), находим

$$A_1 P_n^m(j\zeta) \underset{c_1 \to 0}{\longrightarrow} A_2 r^n \quad \text{и} \quad B_1 Q_n^m(j\zeta) \underset{c_1 \to 0}{\longrightarrow} \frac{B_2}{r^{n+1}}. \tag{5.252}$$

Откуда следует, что решение (5.248) переходит в решение (5.176).

Формулы (5.250) и (5.252) во многих случаях позволяют сразу найти гармоники сплюснутого сфероида, требуемые для решения данной задачи, если известен вид решения соответствующей задачи в сферических гармониках.

§ 28в. Проводящий лист с круглым отверстием. Рассмотрим бесконечный тонкий плоский металлический лист с круглым отверстием, который либо сам заряжен, либо является границей внешнего однородного поля.



Фиг. 53.

Чтобы координаты были непрерывными во всем пространстве, где существует электрическое поле, выберем $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и $\infty < \zeta < +\infty$; при этом ζ имеет тот же знак, что и x. Как показано на фиг. 53, уравнение листа имеет вид $\xi = 0$. Рассмотрим случай, когда такой лист, имеющий потенциал, равный нулю, является границей однородного внешнего поля. При $x = \infty$ поле должно совпадать с невозмущенным однородным полем, а при $x = -\infty$ оно должно быть равно нулю. Поскольку при $\zeta^2 \to \infty$ можно пренебречь 1 по сравнению с ζ, выражения (5.237) и (5.238) дают

$$r^2 = x^2 + \rho^2 \to c_1^2 r^2 \xi^2 + c_1^2 \zeta^2 - c_1^2 \zeta^2 \xi^2 = c_1^2 \zeta^2,$$

т. е. $\zeta \to \pm r/c_1$ и $\xi = x/(c_1\zeta) \to |x|/r = |\cos\theta|$. Уравнение однородного поля при $x = \infty$ имеет вид $V = Er\cos\theta$, т. е. ξ входит в него только через $\cos\theta$; иными словами, решение содержит только $P_1(\xi)$ и, следовательно, соответствует $m = 0$, $n = 1$. Поэтому с учетом (5.249), (5.247) и (5.248)

потенциал равен

$$V = P_1(\xi)\,[A'P_1(j\zeta) + B'Q_1(j\zeta)]. \tag{5.253}$$

Подставив сюда значения P_1 и Q_1 из формул (5.187), получаем

$$V = \xi\,[jA'\zeta + B'(\zeta \operatorname{arc\,ctg}\zeta - 1)]. \tag{5.254}$$

Чтобы вычислить A' и B', рассмотрим $\zeta = \pm\infty$. При $\zeta = +\infty$ коэффициент при B' обращается в нуль и

$$Er\cos\theta = \frac{jA'r}{c_1}\cos\theta, \text{ откуда } Ec_1 = jA' \tag{5.255}$$

При $\zeta = -\infty$ постоянным членом можно пренебречь, поэтому

$$0 = \cos\theta\left(\frac{jA'r}{c_1} + \frac{\pi B'r}{c_1}\right) \quad \text{откуда} \quad \pi B' = jA', \tag{5.256}$$

или

$$B' = \frac{Ec_1}{\pi} \tag{5.257}$$

Если край отверстия соответствует $\rho = a$, то, поскольку ζ и ξ равны при этом нулю, из выражения (5.238) следует, что $c_1 = a$. Для потенциала, таким образом, получаем

$$V = aE\xi\left[\zeta - \frac{1}{\pi}(\zeta \operatorname{arc\,ctg}\zeta - 1)\right] \tag{5.258}$$

Плотность заряда на поверхности листа дается формулой

$$\sigma = \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}_{x\to 0} \to \mp\varepsilon\frac{\partial V}{a\zeta\,\partial\xi} \tag{5.259}$$

Из выражения (5.238) вытекает, что $a\zeta = \pm(\rho^2 - a^2)^{1/2}$ при $\xi = 0$; поэтому

$$\operatorname{arc\,ctg}\left[\pm\frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{a}\right] = \frac{1}{2}\pi \mp \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

и, согласно формулам (5.258) и (5.259),

$$\sigma = -\varepsilon E\left\{\pm\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\arccos\frac{a}{\rho} + \frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}\right]\right\}, \tag{5.260}$$

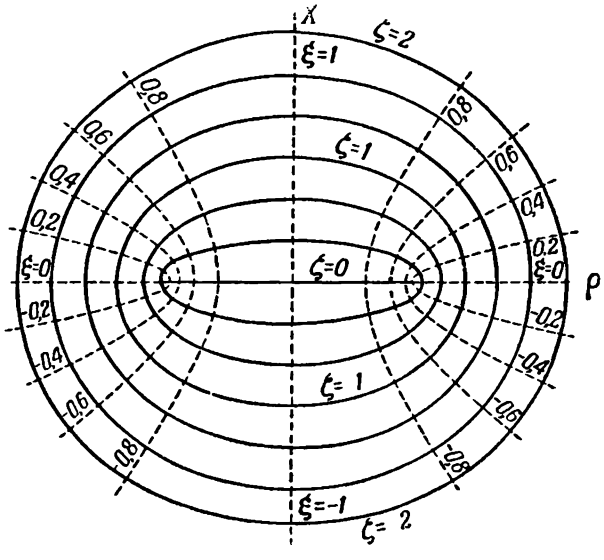
где знак плюс соответствует верхней стороне поверхности, а минус — нижней.

§ 28г. Момент, действующий на диск в однородном поле. Если незаряженный проводящий диск радиуса a расположен таким образом, что нормаль к нему образует угол α с электрическим полем E (однородным до внесения диска), то внешнее поле E можно рассматривать как суперпозицию двух однородных полей: поля $E\cos\alpha$, перпендикулярного к плоскости диска, и поля $E' = E\sin\alpha$, параллельного плоскости диска. Для решения задачи во втором случае можно воспользоваться гармониками сплюснутого сфероида. Непрерывность координат достигается тогда при $0 \leqslant \zeta < \infty$ и $-1 \leqslant \xi \leqslant +1$; такая система координат изображена на фиг. 54. Как и в предыдущем параграфе, при $r = \infty$ $\zeta \to r/a$ и $\xi \to \pm\cos\theta$, причем знак ξ совпадает со знаком x. В бесконечности, где сохраняется невозмущенное поле,

$$-V_\infty = E'\rho\cos\varphi = E'a\,[(1 - \xi^2)(1 + \zeta^2)]^{1/2}\cos\varphi. \tag{5.261}$$

Поскольку φ входит в решение только в виде $\cos\varphi$, в решениях (5.246) (5.249) m должно быть равно единице. Но $n \geqslant m$, поэтому наименьшее воз-

ожное значение n есть $n=1$. Далее, при $r=\infty$ зависимость V_∞ от ξ и ζ 5.261) соответствует множителю $(1-\mu^2)^{1/2m}$ в формулах (5.182) и (5.183). ледовательно, значение $n>1$ невозможно, так как в этом случае при



Фиг. 54.

ифференцировании в формулах (5.182) и (5.183) ξ и ζ появились бы в к' естве множителей. Согласно формулам (5.187),

$$Q_1^1(j\zeta)=(1+\zeta^2)^{1/2}\left(\operatorname{arc\,ctg}\zeta-\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right),$$

из формул (5.186) следует

$$P_1^1(\xi)=(1-\xi^2)^{1/2}.$$

ввиду конечности потенциала при $\xi=\pm 1$ множителя $Q_1^1(\xi)$ быть не может потенциал должен иметь вид

$$V'=P_1^1(\xi)\,[AP_1^1(j\zeta)+BQ_1^1(j\zeta)]\cos\varphi=$$

$$=(1-\xi^2)^{1/2}\left[jA\,(1+\zeta^2)^{1/2}+B\,(1+\zeta^2)^{1/2}\left(\operatorname{arc\,ctg}\zeta-\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right)\right]\cos\varphi. \qquad (5.262)$$

ри $\zeta=0$ потенциал $V'=0$, поэтому $jA=-\frac{1}{2}\pi B$. Если же $\zeta=\infty$, то последие два члена в выражении (5.262) малы по сравнению с первым; поэтому, риравнивая выражения (5.262) и (5.261), находим

$$E'a=-\frac{1}{2}\pi B, \text{ или } B=-\frac{2E'a}{\pi}$$

осле этого для потенциала получаем окончательное выражение

$$V'=2\pi^{-1}E'a\,[(1-\xi^2)(1+\zeta^2)]^{1/2}\left(\operatorname{arc\,tg}\zeta+\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right)\cos\varphi. \qquad (5.263)$$

одставляя значения ρ из формулы (5.238), запишем это выражение в виде

$$V'=2\pi^{-1}E'\rho\left(\operatorname{arc\,tg}\zeta+\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right)\cos\varphi. \qquad (5.264)$$

Внесение незаряженного диска не возмущает компоненту поля $E\cos\alpha$, перпендикулярную к плоскости диска; поэтому соответствующий потенциал имеет вид $V''=Ex\cos\alpha$, а решение в общем случае $V=V'+V''$ можно записать в виде

$$V=E\left[\frac{2\rho}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\zeta+\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right)\sin\alpha\cos\varphi+x\cos\alpha\right], \tag{5.265}$$

где ζ связана с ρ и x соотношениями (5.237) и (5.238).

Пользуясь формулой (5.265), нетрудно вычислить момент, действующий на диск: определив плотность поверхностного заряда σ, мы найдем силу, действующую на единицу поверхности, равную $\frac{1}{2}\sigma^2/\varepsilon$. Чтобы упростить расчет, заметим, что действие поля $E\sin\alpha$ на поверхностный заряд, индуцированный полем $E\cos\alpha$, не создает момента, так как плечо соответствующей силы равно нулю. Следовательно, весь момент обусловлен действием поля $E\cos\alpha$ на поверхностный заряд σ', индуцированный полем $E\sin\alpha$. Согласно выражению (5.264),

$$\sigma'=-\varepsilon\left[\frac{\partial V'}{\partial x}\right]_{\zeta=0}=-\frac{2\varepsilon E'\rho}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{1+\zeta^2}+\frac{1-\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right\}_{\zeta=0}\cos\varphi.$$

Но из выражения (5.237) $\zeta=x/(a\xi)$, так что $\partial\zeta/\partial x=(a\xi)^{-1}$. При $\zeta=0$ $a^2\xi^2=a^2-\rho^2$ [см. формулу (5.236)], поэтому

$$\sigma'=-\frac{4\varepsilon E\sin\alpha}{\pi}\frac{\rho\cos\varphi}{(a^2-\rho^2)^{1/2}} \tag{5.266}$$

Для силы, действующей на элемент площади $\rho\,d\rho\,d\varphi$, плечо равно $\rho\cos\varphi$, откуда выражение для полного момента, учитывая действие поля $E\cos\alpha$ на заряд на обеих сторонах диска, имеет вид

$$T=-\frac{8\varepsilon E^2\sin\alpha\cos\alpha}{\pi}\int_0^a\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\rho^3\cos^2\varphi}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\,d\varphi\,d\rho.$$

Принимая во внимание, что $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$, и интегрируя по формуле (Двайт, 858.3), находим

$$T=-4\varepsilon E^2\sin 2\alpha\int_0^a\frac{\rho^3\,d\rho}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

Интегрируя еще раз (Двайт, 323.01), получаем для момента

$$T=-4\varepsilon E^2\sin 2\alpha\left[\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2}-a^2(a^2-\rho^2)^{1/2}\right]_0^a=-\frac{8\varepsilon a^3E^2\sin 2\alpha}{3} \tag{5.267}$$

§ 28д. Потенциал заряда, распределенного по поверхности сфероида. Допустим, что на поверхности сплюснутого сфероида $\zeta=\zeta_0$ задана плотность поверхностного заряда σ_n, удовлетворяющая условиям, сформулированным в § 14б гл. V. Этот заряд создает потенциал V_0 вне сфероида и V_i внутри него. Применение теоремы Гаусса о потоке электрической индукции (1.27) к маленькому объему, охватывающему элемент поверхности сфероида, дает

$$\frac{\sigma_n}{\varepsilon}=\left\{\frac{\partial V_i}{\partial n}-\frac{\partial V_0}{\partial n}\right\}_S=\left[\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial\zeta}-\frac{\partial V_0}{\partial\zeta}\right)\right]_{\zeta=\zeta_0} \tag{5.268}$$

Пусть σ_n такова, что

$$\varepsilon V_0=j(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(1+\zeta_0^2)P_n^m(j\zeta_0)Q_n^m(j\zeta)S_n^m, \tag{5.269}$$

где

$$S_n^m=C_{mn}P_n^m(\xi)\cos m(\varphi-\varphi_m). \tag{5.270}$$

Благодаря такому выбору потенциал V_0 конечен при $\zeta = \infty$. Чтобы ∇V_i был бы конечным при $\zeta = 0$, $\xi = 0$ и чтобы $V_i = V_0$ при $\zeta = \zeta_0$, V_i должен иметь вид

$$\varepsilon V_i = j(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}(1+\zeta_0^2) Q_n^m(j\zeta_0) P_n^m(j\zeta) S_n^m. \tag{5.271}$$

Подставляя выражения (5.269) и (5.271) в уравнение (5.268) и используя выражение (5.200), получаем

$$\sigma_n = \left\{\frac{1}{h_2}\right\}_{\zeta_0} S_n^m. \tag{5.272}$$

Полагая

$$A_{mn} = \frac{j(-1)^m}{\varepsilon}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(1+\zeta_0^2), \tag{5.273}$$

можно при помощи выражений (5.269), (5.271), (5.272) и (1.8) получить два весьма важных интеграла:

$$\int_{\zeta_0} \frac{S_n^m}{h_2 R_0} dS = A_{mn} P_n^m(j\zeta_0) Q_n^m(j\zeta) S_n^m,$$

$$\int_{\zeta_0} \frac{S_n^m}{h_2 R_i} dS = A_{mn} Q_n^m(j\zeta_0) P_n^m(j\zeta) S_n^m. \tag{5.274}$$

Рассмотрим теперь плотность поверхностного заряда, являющуюся суммой плотностей вида σ_{sr}, так что потенциалы будут суммой потенциалов вида (5.274). Таким образом,

$$\sigma = \sum\sum h_2^{-1} S_r^s = \sum\sum h_2^{-1} C_{sr} P_r^s(\xi) \cos s(\varphi - \varphi_s).$$

Для определения коэффициентов C_{mn} умножим σ на

$$P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_m) h_1 h_3 \, d\xi \, d\varphi$$

и проинтегрируем по поверхности сфероида. При этом все члены обратятся в нуль, кроме тех, для которых $m = s$ и $n = r$. Для них, используя формулу (5.214) при $m \neq 0$, получаем

$$C_{mn} = \frac{2n+1}{2\pi c_1}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{1}{1+\zeta_0^2}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \sigma P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_m) h_1 h_3 \, d\xi \, d\varphi. \tag{5.275}$$

Потенциал, создаваемый зарядом, распределенным по поверхности плотностью σ, будет равен
при $\zeta < \zeta_0$

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} M_{mn} P_n^m(j\zeta) P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_m), \tag{5.276}$$

при $\zeta > \zeta_0$

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} N_{mn} Q_n^m(j\zeta) P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_m), \tag{5.277}$$

где, согласно формулам (5.275) и (5.271),

$$M_{mn} = j(-1)^m \frac{(2-\delta_m^0)(2n+1)}{4\pi\varepsilon c_1}\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 Q_n^m(j\zeta_0) \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \sigma P_n^m(\xi) \cos m(\varphi \quad \varphi_m) h_1 h_3 \, d\xi \, d\varphi, \tag{5.278}$$

здесь $\delta_m^0 = 1$ при $m = 0$ и $\delta_m^0 = 0$ при $m \neq 0$. Из формулы (5.271) вытекает

$$N_{mn} = M_{mn} \frac{P_n^m(j\zeta_0)}{Q_n^m(j\zeta_0)} \tag{5.279}$$

Множитель 2 δ_m^0 появляется потому, что в случае $m = 0$ интегрирование по φ при выводе формулы (5.275) дает множитель 2π вместо π.

§ 28е. Представление потенциала точечного заряда через гармоники сплюснутого сфероида. Результатом предыдущего параграфа можно воспользоваться для вычисления потенциала, создаваемого точечным зарядом, расположенным в точке ξ_0, ζ_0, φ_0. Под точечным зарядом подразумевается заряд, размеры которого слишком малы, чтобы их можно было измерить физически, но математически они отличны от нуля, благодаря чему напряженность поля и потенциал являются всюду ограниченными функциями. Допустим, что плотность заряда σ равна нулю везде, за исключением площадки S, находящейся в точке $\varphi = \varphi_0$, $\xi = \xi_0$. Площадка S предполагается настолько малой, что на ней функция $P_n^m(\xi)$ постоянна и равна $P_n^m(\xi_0)$ и $\cos m(\varphi - \varphi_m) = \cos m(\varphi - \varphi_0) = 1$. При этом интеграл в формуле (5.278) вычисляется следующим образом:

$$P_n^m(\xi_0) \int\int \sigma h_1 h_3 \, d\xi \, d\varphi = P_n^m(\xi_0) \int_S \sigma \, dS = q P_n^m(\xi_0)$$

и коэффициенты, определяемые по формуле (5.278), оказываются равными

$$M_{mn} = j(2 - \delta_m^0) q (-1)^m \frac{2n+1}{4\pi\varepsilon c_1} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 Q_n^m(j\zeta_0) P_n^m(\xi_0). \tag{5.280}$$

Из формулы (5.279) находим

$$N_{mn} = j(2 - \delta_m^0) q (-1)^m \frac{2n+1}{4\pi\varepsilon c_1} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 P_n^m(j\zeta_0) P_n^m(\xi_0). \tag{5.281}$$

Потенциал точечного заряда q имеет вид
при $\zeta < \zeta_0$

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} M_{mn} P_n^m(j\zeta) P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{5.282}$$

при $\zeta > \zeta_0$

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} N_{mn} Q_n^m(j\zeta) P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{5.283}$$

При помощи этих формул можно (используя те же методы, что и в случае сферических гармоник) построить функцию Грина для областей, границы которых образованы координатными поверхностями сплюснутой сфероидальной системы координат.

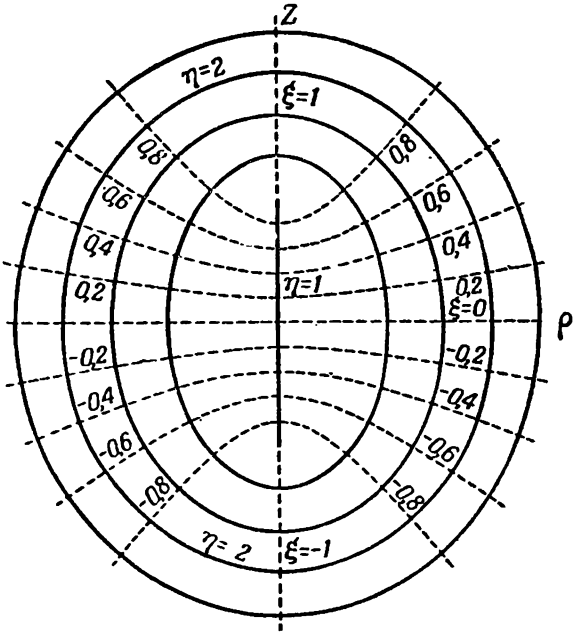
§ 29а. Гармоники вытянутого сфероида. Закругленные концы двух коаксиальных стержней (электродов), образующих искровой промежуток, обычно хорошо апроксимируются поверхностями двухполостного гиперболоида вращения. В некоторых устройствах встречаются также удлиненные проводники, похожие по форме на вытянутые сфероиды. Поверхности их являются естественными границами в «вытянутой» сфероидальной системе координат, так как определенному значению одной координаты соответствует одна, и только одна, из поверхностей для всего интервала изменения остальных координат. Решение уравнения Лапласа в этих координатах приводит

к появлению функций, известных под названием гармоник вытянутого сфероида.

Допустим, что в уравнении (5.4) две короткие полуоси a и b равны друг другу, и положим $x = \rho \sin\varphi$ и $y = \rho\cos\varphi$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\rho^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1. \tag{5.284}$$

Положим $c^2 + \theta = (c^2 - b^2)\,\theta_2^2 = c_2^2\,\theta_2^2$. Тогда при $b^2 < \theta < \infty$ или $1 < \eta^2 < \infty$ (где $\theta_2^2 = \eta^2$) получаются конфокальные вытянутые сфероиды, а при $-c^2 < \theta < -b^2$ или $0 < \xi^2 < 1$ (где $\theta_2^2 = \xi^2$) получаются конфокальные двухполостные гиперболоиды. На фиг. 55 изображено сечение этой



Фиг. 55.

системы плоскостью, проходящей через ось (третья координата азимутальный угол φ). Уравнение сфероидов имеет вид

$$\frac{\rho^2}{c_2^2(\eta^2-1)} + \frac{z^2}{c_2^2\eta^2} = 1, \tag{5.285}$$

а уравнение гиперболоидов —

$$\frac{\rho^2}{-c_2^2(1-\xi^2)} + \frac{z^2}{c_2^2\xi^2} = 1. \tag{5.286}$$

Исключая из этих уравнений ρ, получаем

$$z = c_2\eta\xi, \tag{5.287}$$

а исключая z, имеем

$$\rho = c_2[(1-\xi^2)(\eta^2-1)]^{1/2}. \tag{5.288}$$

Если принять $1 \leqslant \eta < \infty$, то, как и в § 28а, нужно взять $-1 \leqslant \xi \leqslant +1$; давать η отрицательные значения не имеет теперь смысла, поскольку координаты всюду непрерывны. Располагая координаты в порядке ξ, η и φ

и вычисляя так же, как и в § 28а, коэффициенты h_1, h_2 и h_3, находим

$$h_1 = c_2^2 \xi \left[\frac{\rho^2}{c_2^4 (1-\xi^2)^2} + \frac{z^2}{c_2^4 \xi^4} \right]^{1/2} = c_2 \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{1-\xi^2} \right)^{1/2}, \tag{5.289}$$

$$h_2 = c_2^2 \eta \left[\frac{\rho^2}{c_2^4 (\eta^2-1)^2} + \frac{z^2}{c_2^4 \eta^4} \right]^{1/2} = c_2 \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta^2 - 1} \right)^{1/2}, \tag{5.290}$$

$$h_3 = \rho = c_2 [(1-\xi^2)(\eta^2-1)]^{1/2}. \tag{5.291}$$

Уравнение Лапласа в этом случае имеет вид (5.242), если в последнем заменить $1+\zeta^2$ на η^2-1 и $\xi^2+\zeta^2$ на $\eta^2-\xi^2$. Полагая, что решение равно $\Xi H \Phi$, и повторяя рассуждения § 28б, получаем для Ξ и H то же самое уравнение (5.244). Уравнение для Φ имеет, как и прежде, вид (5.246). Таким образом,

$$\Xi_{mn} = A P_n^m(\xi) + B Q_n^m(\xi), \tag{5.292}$$

$$H_{mn} = A' P_n^m(\eta) + B' Q_n^m(\eta), \tag{5.293}$$

$$\Phi_m = C \cos m\varphi + D \sin m\varphi, \tag{5.294}$$

а общее решение имеет вид

$$V = \sum_m \sum_n \Xi_{mn} H_{mn} \Phi_m. \tag{5.295}$$

§ 29б. Вытянутый сфероид в однородном поле. В качестве примера применения результатов предыдущего параграфа вычислим поле заземленной плоскости, имеющей проводящую сфероидальную выпуклость высотой c и основанием радиуса b, при наличии внешнего однородного поля. Такая ситуация имеет, например, место в том случае, когда наэлектризованная плоская грозовая туча оказывается над находящимся на земле мокрым стогом сена или над елью. Пусть при $z = \infty$ потенциал равен $Er\cos\theta$. Как и раньше, при

$$\eta \to \infty \qquad \eta \to \frac{r}{c_2} \quad \text{и} \quad \xi \to \frac{z}{r} = \cos\theta.$$

Принимая во внимание формулу (5.188), мы видим, что ξ может входить в решение только через $P_1(\xi)$. Поэтому потенциал, согласно выражению (5.161), имеет вид

$$V = P_1(\xi)[AP_1(\eta) + BQ_1(\eta)] = \xi\eta \left[A + B\left(\frac{1}{2} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta} \right) \right] =$$
$$= \frac{z}{c_2} \left[A + B\left(\operatorname{arcth} \eta - \frac{1}{\eta} \right) \right]$$

При $z = \infty$ $\eta = \infty$, $\eta^{-1} = 0$ и $\operatorname{arcth}\eta = 0$, так что

$$Ez = \frac{Az}{c_2}, \qquad \text{или} \qquad A = c_2 E.$$

Сфероид с полуосями c и b можно получить, если в уравнении (5.284) положить $\theta = 0$, или $c_2^2 \eta_0^2 = c^2$. Следовательно,

$$0 = c_2 E + B\left(\operatorname{arcth} \eta_0 - \frac{1}{\eta_0} \right), \quad \text{или} \quad B = -c_2 E \left(\operatorname{arcth} \eta_0 - \frac{1}{\eta_0} \right)^{-1}$$

Окончательное выражение для потенциала имеет вид

$$V = Ez \left(1 - \frac{\operatorname{arcth}\eta - \frac{1}{\eta}}{\operatorname{arcth}\eta_0 - \frac{1}{\eta_0}} \right), \tag{5.296}$$

где

$$\eta_0 = \frac{c}{c_2} = \frac{c}{(c^2 - b^2)^{1/2}} \tag{5.297}$$

и η, ξ, z связаны соотношениями (5.287) и (5.288).

§ 30а. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. В тех случаях, когда граничные условия выражаются наиболее просто в цилиндрической системе координат, для нахождения потенциала следует пользоваться решением уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. В этой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{5.298}$$

где $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$. Частный случай, когда потенциал V не зависит от z, был уже рассмотрен в § 2 гл. IV; в связи с этой задачей были введены круговые гармоники. Будем искать теперь решение в виде $V = R\Phi Z$, где R, Φ и Z — суть соответственно функции только ρ, φ и z. Это решение мы будем называть цилиндрической гармоникой. Подставив значение V в уравнение (5.298) и разделив на $R\Phi Z\rho^{-2}$, получим

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0. \tag{5.299}$$

§ 30б. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. Положим в уравнении (5.299)

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -n^2 \tag{5.300}$$

и

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2. \tag{5.301}$$

Тогда функция R должна удовлетворять уравнению

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + (k^2\rho^2 - n^2)\,R = 0.$$

Если положить $k\rho = v$, то это уравнение примет вид

$$\frac{d^2R}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dR}{dv} + \left(1 - \frac{n^2}{v^2}\right)R = 0. \tag{5.302}$$

Общие решения уравнений (5.300) и (5.301) будут

$$\Phi = Ae^{jn\varphi} + Be^{-jn\varphi} = A'\cos n\varphi + B'\sin n\varphi, \tag{5.303}$$

$$Z = Ce^{kz} + De^{-kz} = C'\operatorname{ch} kz + D'\operatorname{sh} kz. \tag{5.304}$$

Решение уравнения (5.302) — уравнения Бесселя — носит название функции Бесселя n-го порядка. Цилиндрическая гармоника, таким образом, записывается в виде

$$V = R_n(k\rho)\,\Phi(n\varphi)\,Z(kz), \tag{5.305}$$

за исключением случая $k = 0$, когда, согласно уравнению (4.7) и выражению (4.39),

$$V_0 = (M\rho^n + N\rho^{-n})(Cz + D)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi), \tag{5.306}$$

$$V_0 = [M\cos(n\ln\rho) + N\sin(n\ln\rho)](Cz + D)(A\operatorname{ch} n\varphi + B\operatorname{sh} n\varphi). \tag{5.307}$$

Если и k и n равны нулю, то

$$V_{00} = (M\ln\rho + N)(Cz + D)(A\varphi + B). \tag{5.308}$$

§ 30в. Модифицированное уравнение Бесселя и модифицированные функции Бесселя. Несколько иной результат получается при замене k на jk в уравнении (5.301). Вместо уравнения (5.302) тогда получаем уравнение

$$\frac{d^2R^0}{dv^2}+\frac{1}{v}\frac{dR^0}{dv}-\left(1+\frac{n^2}{v^2}\right)R^0=0, \tag{5.309}$$

которое носит название модифицированного уравнения Бесселя, а его решения — модифицированных бесселевых функций. Вместо решения (5.304) будем иметь

$$Z=Ce^{jk_1z}+De^{-jk_1z}=C'\cos k_1z+D'\sin k_1z. \tag{5.310}$$

Цилиндрические гармоники теперь можно записать в виде

$$V=R_n^0(k_1\rho)\,e^{\pm jn\varphi}e^{\pm jk_1z}. \tag{5.311}$$

Решения такого типа будут рассмотрены в § 33—37.

§ 30г. Решение уравнения Бесселя. Положим в уравнении (5.302) $R_n=\sum a_s v^{n+s}$; тогда

$$v^n\sum\left[s(2n+s)\,a_sv^{s-2}+a_sv^s\right]=0 \tag{5.312}$$

и, следовательно,

$$a_s=-\left[s(2n+s)\right]^{-1}a_{s-2}. \tag{5.313}$$

Если коэффициент a_0 конечен, то коэффициенты a_{-2}, a_{-4} и т. д. равны нулю. Пусть $a_0=[2^n\Gamma(n+1)]^{-1}$, что сводится к $(2^nn!)^{-1}$ при целых n. Тогда, применяя последовательно формулу (5.313) и заменив $R_n(v)$ на $J_n(v)$, получим

$$J_n(v)=\frac{v^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left[1-\frac{v^2}{2^2(n+1)}+\frac{v^4}{2^42!\,(n+1)(n+2)}\right]=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \tag{5.314}$$

Функция $J_n(v)$ носит название функции Бесселя первого рода n-го порядка. Очевидно, что при $n\neq 0$ $J_n(0)=0$ и, как будет показано в § 31г, $J_n(\infty)=0$.

Поскольку дифференциальное уравнение (5.302) второго порядка, оно должно иметь еще второе решение. В случае, когда n — не целое число, этим решением будет $J_{-n}(v)$, но когда n — целое число, решения $J_n(v)$ и $J_{-n}(v)$ не являются независимыми. Чтобы показать это, заменим n на $-n$ в выражении (5.314); тогда, так как $[\Gamma(-n)]^{-1}=0$, ряды для $J_{-n}(v)$ и $(-1)^n J_n(v)$ совпадают. Когда n — не целое число, второе решение дается формулой

$$Y_\nu(v)=\frac{J_\nu(v)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(v)}{\sin\nu\pi} \tag{5.315}$$

Если ν — целое число, то формула (3.315) дает 0/0. Для раскрытия неопределенности заменим в выражении (5.314) n на $-\nu$, разобьем сумму по r от 0 до ∞ на две суммы — от n до ∞ и от 0 до $n-1$, заменим в первой r на $n+s$ и во второй $\{\Gamma[1-(\nu-r)]\}^{-1}$ на $\pi^{-1}\Gamma(\nu-r)\sin\nu\pi$ (Двайт, 850.3).

Если подставить полученное выражение в формулу (5.315) вместо $J_{-\nu}(v)$ и заменить $\cos \pi\nu$ на $(-1)^n$, то будем иметь

$$\frac{(-1)^n}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(v)-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{1}{2}v\right)^{\nu+2s}}{(n+s)!\,\Gamma(n-\nu+s+1)}\right]-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}v\right)^{2r-\nu}\Gamma(\nu-r)}{\pi}$$

Согласно выражению (5.314), скобка обращается в нуль при $\nu=n$, так что первый член опять дает 0/0. Чтобы раскрыть неопределенность, продифференцируем каждый множитель по ν и подставим n вместо ν. Воспользовавшись справочником Янке и Эмде (стр. 108), находим

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\Gamma(z)}\right]=\frac{-1}{\Gamma(z)}\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{-1}{\Gamma(z)}\left(-C+\sum_{m=1}^{z}\frac{1}{m}\right),$$

где $C=0{,}5772157$ — постоянная Эйлера. При помощи этой формулы, а также формулы (563.3) из справочника Двайта неопределенность 0/0 раскрывается; если обозначить $C-\ln 2$ через $\ln\alpha$, то

$$Y_n(v)=\frac{2}{\pi}J_n(v)\ln(\alpha v)-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^{2r-n}(n-r-1)!}{\pi r!}-$$
$$-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}v\right)^{n+2r}}{\pi r!\,(n+r)!}\left(\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+r}\frac{1}{m}\right) \qquad (5.316)$$

Общее решение уравнения Бесселя, когда n — целое число, имеет, таким образом, вид

$$R_n(v)=A'J_n(v)+B'Y_n(v). \qquad (5.317)$$

Отметим, что функция $Y_n(0)$ обращается в бесконечность; в § 31г будет показано, что функция $Y_n(\infty)$ обращается в нуль. Для функции, определяемой формулой (5.316), существует много обозначений. В книге Ватсона и British Association Tables используется $Y_n(v)$, Янке и Эмде, Щелкунов и Стрэттон пользуются $N_n(v)$, Грэй, Метьюз и Макроберт — $\overline{Y}_n(v)$.

Подстановка $M=1/v$ и $N=1-(n/v)^2$ в уравнение (5.76) приводит к уравнению (5.302), так что, если $J_n(v)$ — известное решение, формула (5.77) дает

$$Y_n(v)=J_n(v)\left\{A+B\int[vJ_n^2(v)]^{-1}\,dv\right\} \qquad (5.318)$$

Дифференцируя это равенство и опуская аргумент, получаем

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{Y_n}{J_n}\right)=\frac{Y_n'}{J_n}-\frac{J_n'Y_n}{J_n^2}=\frac{B}{vJ_n^2} \qquad (5.319)$$

Согласно рекуррентным формулам, величина B не зависит ни от n, ни от v и, следовательно, может быть вычислена для простейшего случая $n=0$ и малых v. В этом случае в выражении (5.316) существенен только логарифмический член; этим членом и его производной можно заменить $Y_n(v)$ и $Y_n'(v)$ в уравнении (5.319). При подстановке логарифмический член сокращается, и величина B оказывается равной $2/\pi$, так что уравнение (5.319) принимает вид

$$Y_n'(v)J_n(v)-J_n'(v)Y_n(v)=\frac{2}{\pi v}. \qquad (5.320)$$

Для цилиндрических электромагнитных волн пользуются функциями Ханкеля

$$H_n^{(1)}(v) = J_n(v) + jY_n(v), \qquad H_n^{(2)}(v) = J_n(v) - jY_n(v), \tag{5.321}$$

которые в комбинации с $e^{j\omega t}$ дают бегущие волны.

§ 30д. Рекуррентные формулы для функций Бесселя. Если умножим выражение (5.314) на v^n и продифференцируем, то найдем

$$\frac{d[v^n J_n(v)]}{dv} = \frac{v^{2n-1}}{2^{n-1}\Gamma(n)}\left[1 - \frac{v^2}{2^2 n} + \frac{v^4}{2^4 2! n(n+1)} - \quad\right]$$

Выделив в правой части множитель v^n и сравнив с выражением (5.314), получим

$$\frac{d[v^n J_n(v)]}{dv} = v^n J_{n-1}(v).$$

Выполнив дифференцирование в левой части, разделив на v^n и обозначив дифференцирование по v штрихами, найдем

$$J_n' = J_{n-1} - \frac{n}{v} J_n. \tag{5.322}$$

Повторяя ту же операцию с умножением на v^{-n} вместо v^n, будем иметь

$$J_n' = -J_{n+1} + \frac{n}{v} J_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}). \tag{5.323}$$

Подстановка выражения (5.322) в (5.323) дает

$$\frac{2n}{v} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}. \tag{5.324}$$

Замена в выражениях (5.322)—(5.324) $J_n(v)$ на $(-1)^n J_{-n}(v)$ приводит к рекуррентным формулам для $J_{-n}(v)$. Дифференцируя формулу (5.315) и подставляя $J_\nu'(v)$ из выражения (5.322) и $J_{-\nu}'(v)$ из аналогичного выражения, получаем, что при $\nu \to n$ [когда $\cos \nu\pi \to -\cos(\nu-1)\pi$ и $\sin \nu\pi \to -\sin(\nu-1)\pi$]

$$\frac{J_\nu' \cos \nu\pi - J_{-\nu}'}{\sin \nu\pi} \xrightarrow[\nu \to n]{} \frac{J_{\nu-1}\cos(\nu-1)\pi - J_{-\nu+1}}{\sin(\nu-1)\pi} - \frac{\nu(J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu})}{v \sin \nu\pi}.$$

Аналогичную операцию можно применить и к выражению (5.323), так что

$$Y_n' = Y_{n-1} - \frac{n}{v} Y_n, \tag{5.325}$$

$$Y_n' = -Y_{n+1} + \frac{n}{v} Y_n. \tag{5.326}$$

После вычитания одной из этих формул из другой получим

$$\frac{2n}{v} Y_n = Y_{n-1} + Y_{n+1}. \tag{5.327}$$

Полезные интегральные формулы получаются путем интегрирования равенства, послужившего для вывода выражения (5.322), и аналогичного ему равенства, связанного с формулой (5.325),

$$\int v^n J_{n-1}(v)\, dv = v^n J_n(v), \tag{5.328}$$

$$\int v^n Y_{n-1}(v)\, dv = v^n Y_n(v). \tag{5.329}$$

Такое же интегрирование выражений (5.323) и (5.326) дает

$$\int v^{-n} J_{n+1}(v)\, dv = -v^{-n} J_n(v), \tag{5.330}$$

$$\int v^{-n} Y_{n+1}(v)\, dv = -v^{-n} Y_n(v). \tag{5.331}$$

§ 30е. Значения функций Бесселя на бесконечности. Для решения задач, в которых возможны значения $\rho = \infty$, необходимо знать, как ведут себя при этом функции $J_n(k\rho)$ и $Y_n(k\rho)$. Чтобы найти предельные значения функций, мы воспользуемся приемом, который часто употреблялся Зоммерфельдом. В качестве первого приближения при $v \to \infty$ пренебрежем в уравнении (5.302) членами, содержащими v^{-1} и v^{-2}. Получим приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 0, \tag{5.332}$$

решение которого имеет вид

$$R = R' e^{\pm jv}. \tag{5.333}$$

Подставим теперь это «пробное» решение в уравнение Бесселя (5.302) и предположим, что R' меняется с изменением v, но настолько медленно, что членами d^2R'/dv^2, $v^{-1}dR'/dv$ и $v^{-2}R'$ можно пренебречь по сравнению с членами dR'/dv и $v^{-1}R'$. Тогда

$$2\frac{dR'}{dv} + \frac{R'}{v} = 0, \quad \text{или} \quad R' = Cv^{-1/2}.$$

Асимптотическое решение, таким образом, будет

$$R = Cv^{-1/2} e^{\pm jv}. \tag{5.334}$$

Отсюда видно, что наибольший из членов, которым мы пренебрегли, оказывается порядка $v^{-3/2}$. Функции $J_n(v)$ и $Y_n(v)$ должны быть действительными линейными комбинациями двух решений, соответствующих знаку плюс или минус в выражении (5.334), т. е. должны иметь вид

$$J_n(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} Av^{-1/2}\cos(v + \alpha), \tag{5.335}$$

$$Y_n(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} Bv^{-1/2}\cos(v + \beta). \tag{5.336}$$

Чтобы найти зависимость A и α от n, подставим выражение (5.335) в формулы (5.322) и (5.323), которые при $v \to \infty$ дают соответственно $J'_n = J_{n-1}$ и $J'_n = -J_{n+1}$. Подстановка приводит к уравнению $\alpha_{n\pm1} = \alpha_n \mp \frac{\pi}{2}$, которое удовлетворяется при $\alpha_n = -\frac{1}{2}n\pi + \gamma$ и показывает, что A не зависит от n. Поскольку n не обязательно целое число, положим в выражении (5.335) $n = \frac{1}{2}$ и сравним результат с формулой (5.394). Сравнение показывает, что $\gamma = -\frac{1}{4}\pi$, и дает

$$J_n(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \cos\left(v - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \tag{5.337}$$

где членом $v^{-m/2}$ следует пренебречь, если $m \geqslant 3$ и n — действительное число.

Чтобы получить $Y_n(v)$, подставим выражение (5.337) в (5.315), заменив предварительно n на ν и на $-\nu$. При целом ν получаем в результате 0/0, однако, заменив и числитель и знаменатель их производными

по ν, находим для $\nu = n$

$$Y_n(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \sin\left(v - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{5.338}$$

Таким образом, обе бесселевы функции обращаются в нуль на бесконечности. На основании выражений (5.337), (5.338) и (5.321) для функций Ханкеля будем иметь

$$H_n^{(1)}(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} e^{j\left(v-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}$$

$$H_n^{(2)}(v) \xrightarrow[v\to\infty]{} \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} e^{-j\left(v-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)} \tag{5.339}$$

§ 30ж. Интегралы от бесселевых функций. В § 27б настоящей главы был получен ряд по сферическим гармоникам, удовлетворяющий на конусе $\theta = \alpha$ условию $V = 0$. Для этого порядок n гармоник $\Theta_n^m(\cos\theta)$ был подобран таким образом, чтобы $\Theta_n^m(\cos\alpha) = 0$. Для определения коэффициентов разложения необходимо было (см. § 27а) вычислить интеграл по θ в пределах от 0 до α от произведения двух гармоник. Точно так же для получения ряда по бесселевым функциям, удовлетворяющего условию $V = 0$ и $E = 0$ на цилиндре $\rho = a$, необходимо вычислить интеграл от произведения $R_n(k_p\rho)$ и $R_n(k_q\rho)$, где k_p и k_q подобраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Пусть $u = R_n(k_p\rho)$ и $v = R_n(k_q\rho)$ — два решения уравнения Бесселя. Тогда, согласно § 30б,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) + \left(k_p^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)u = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dv}{d\rho}\right) + \left(k_q^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)v = 0.$$

Умножая первое уравнение на ρv, второе — на ρu, вычитая одно из другого и интегрируя, находим

$$(k_p^2 - k_q^2)\int_0^a \rho uv\, d\rho = -\int_0^a \left[v\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) - u\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dv}{d\rho}\right)\right] d\rho.$$

При интегрировании по частям интегралы сокращаются и остается

$$(k_p^2 - k_q^2)\int_0^a \rho uv\, d\rho = -\left(\rho v\frac{du}{d\rho} - \rho u\frac{dv}{d\rho}\right)_0^a =$$

$$= -a\left[k_p R_n(k_q a) R_n'(k_p a) - k_q R_n(k_p a) R_n'(k_q a)\right].$$

Это выражение обращается в нуль, если

$$R_n(k_p a) = R_n(k_q a) = 0, \tag{5.340}$$

или если

$$R_n'(k_p a) = R_n'(k_q a) = 0, \tag{5.341}$$

или если

$$k_p a R_n'(k_p a) + B R_n(k_p a) = k_q a R_n'(k_q a) + B R_n(k_q a) = 0. \tag{5.342}$$

Поэтому при $k_p \neq k_q$ имеем

$$\int_0^a \rho R_n(k_p\rho) R_n(k_q\rho)\, d\rho = 0. \tag{5.343}$$

Когда $R_n(k_p a) = R_n(k_q a) = R_n(k_p b) = R_n(k_q b) = 0$, имеет место

$$\int_a^b \rho R_n(k_p\rho)\, R_n(k_q\rho)\, d\rho = 0, \tag{5.344}$$

поскольку

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^b f(x)\, dx - \int_0^a f(x)\, dx.$$

Для вычисления интеграла в случае $k_p = k_q$ умножим уравнение Бесселя (5.302) на $v^2 (dR_n/dv)\, dv$; это даст

$$v^2 \frac{dR_n}{dv}\, d\left(\frac{dR_n}{dv}\right) + v\left(\frac{dR_n}{dv}\right)^2 dv + v^2 R_n \frac{dR_n}{dv}\, dv - n^2 R_n \frac{dR_n}{dv}\, dv = 0.$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до a и применим интегрирование по частям в первом и третьем членах. В результате получим следующее выражение, которое равно нулю:

$$\left|\frac{v^2}{2}\left(\frac{dR_n}{dv}\right)^2\right|_0^a - \int_0^a v\left(\frac{dR_n}{dv}\right)^2 dv + \int_0^a v\left(\frac{dR_n}{dv}\right)^2 dv +$$

$$+ \left|\frac{v^2}{2} R_n^2\right|_0^a - \int_0^a v R_n^2\, dv - \left|\frac{n^2 R_n^2}{2}\right|_0^a.$$

Второй и третий члены в нем сокращаются; разрешая это уравнение относительно пятого члена, имеем

$$\int_0^a v\,[R_n(v)]^2\, dv = \frac{1}{2}\left| v^2 \left[\frac{dR_n(v)}{dv}\right]^2 + (v^2 - n^2)\,[R_n(v)]^2\right|_0^a \tag{5.345}$$

Подстановка производных из выражения (5.323) дает

$$\int_0^a v\,[R_n(v)]^2\, dv = \frac{1}{2} a^2 \{[R_n(a)]^2 + [R_{n+1}(a)]^2\} - naR_n(a)\, R_{n+1}(a) =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \{[R_n(a)]^2 + [R_{n-1}(a)]^2\} - naR_n(a)\, R_{n-1}(a). \tag{5.346}$$

При применении вектор-потенциала нам представится случай воспользоваться ортогональными свойствами векторных функций

$$\mathbf{R}_n(k_p\rho) = \begin{matrix}\rho \\ \varphi\end{matrix} R_n'(k_p\rho) \pm \begin{matrix}\varphi \\ \rho\end{matrix} \frac{n}{k_p\rho} R_n(k_p\rho). \tag{5.347}$$

Интеграл от нуля до a от скалярного произведения этих функций равен

$$\int_0^a \mathbf{R}_n(k_p\rho) \cdot \mathbf{R}_n(k_q\rho)\, \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^a \left[R_n'(k_p\rho)\, R_n'(k_q\rho) + \frac{n^2}{k_p k_q \rho^2} R_n(k_p\rho)\; R_n(k_q\rho)\right] \rho\, d\rho. \tag{5.348}$$

При помощи формул (5.322) – (5.327) это выражение можно записать в виде суммы двух интегралов типа (5.343)

$$\frac{1}{2}\int_0^a R_{n+1}(k_p\rho)\,R_{n+1}(k_q\rho)\,\rho\,d\rho+\frac{1}{2}\int_0^a R_{n-1}(k_p\rho)\,R_{n-1}(k_q\rho)\,\rho\,d\rho. \quad (5.349)$$

Вычислим каждый из интегралов по приведенной выше формуле для $\int \rho u v\,d\rho$, сложим результаты и затем исключим производные посредством формул (5.322) и (5.323). В полученном выражении члены, не содержащие функций n-го порядка, исчезают; группируя в оставшихся членах функции $(n-1)$-го и $(n+1)$-го порядков, применим к ним те же формулы (5.322) и (5.323). В результате описанной выше операции, считая $v=k_pa$ и $v'=k_qa$, будем иметь

$$\int_0^a \mathbf{R}_n(k_p\rho)\cdot\mathbf{R}_n(k_q\rho)\,\rho\,d\rho=(k_p^2-k_q^2)^{-1}\,[vR_n(v')\,R_n'(v)-v'R_n(v)\,R_n'(v')]. \quad (5.350)$$

При $k_p\neq k_q$ интеграл обращается в нуль, если выполнено одно из условий (5.340) – (5.342). В случае $k_p=k_q$ сумма интегралов, входящих в выражение (5.349) и вычисленных при помощи формулы (5.346), равна

$$\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{n}{k_p}\right)^2\right][R_n(k_pa)]^2+\frac{1}{2}[aR_n'(k_pa)]^2+\left(\frac{a}{k_p}\right)R_n'(k_pa)\,R_n(k_pa). \quad (5.351)$$

Таким образом, поверхностную векторную функцию ρ и φ, одна из компонент которой обращается в нуль при $\rho=a$, можно представить в виде суммы членов вида

$$R_n(k_p\rho)\sin(n\varphi+\delta_n).$$

§ 30з. Разложение в ряд по функциям Бесселя. Рассмотрим функцию $f(v)$, удовлетворяющую в интервале от $v=0$ до $v=a$ условиям, необходимым для разложения в ряд Фурье, и одному из следующих граничных условий:

а) $f(a)=0$. Этот случай имеет место, если $f(v)$ является потенциальной функцией, а потенциал границы равен нулю.

б) $f'(a)=0$. Этот случай имеет место, если границей области является поверхность, касательная всюду силовым линиям.

в) $af'(a)+Bf(a)=0$. Этот случай сводится к случаю «а» при $B=\infty$ и к случаю «б» при $B=0$. Пример такого условия приводится в § 9 гл. XI.

Функцию $f(v)$ можно разложить в ряд

$$f(v)=\sum_{r=1}^{\infty}A_rJ_n(\mu_rv), \quad (5.352)$$

причем величины μ_r выбираются таким образом, чтобы в случае «а» $J_n(\mu_ra)=0$, в случае «б» $J_n'(\mu_ra)=0$ и в случае «в» $\mu_raJ_n'(\mu_ra)+BJ_n(\mu_ra)=0$. Для определения A_r умножим выражение (5.352) на $vJ_n(\mu_sv)$ и проинтегрируем от $v=0$ до $v=a$. Все члены в правой части, согласно формуле (5.343), исчезают, за исключением $A_s\int v\,[J_n(\mu_sv)]^2\,dv$, так что

$$A_s=\frac{\int_0^a vf(v)\,J_n(\mu_sv)\,dv}{\int_0^a v\,[J_n(\mu_sv)]^2\,dv}. \quad (5.353)$$

Интеграл в знаменателе этой функции можно вычислить при помощи соотношения (5.346)

$$\int_0^a v\,[J_n(\mu_s v)]^2\,dv = \mu_s^{-2}\int_0^{\mu_s a} x\,[J_n(x)]^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\{[J_n(\mu_s a)]^2 + [J_{n\pm1}(\mu_s a)]^2\} - \frac{na}{\mu_s}J_n(\mu_s a)\,J_{n\pm1}(\mu_s a). \qquad (5.354)$$

В случае «*а*» подстановка выражения (5.354) в формулу (5.353) дает

$$A_s = \frac{2}{[aJ_{n\pm1}(\mu_s a)]^2}\int_0^a v f(v)\,J_n(\mu_s v)\,dv. \qquad (5.355)$$

В случае «*б*» подстановка выражения (5.354) в формулу (5.353) дает

$$A_s = \frac{2}{(a^2 - n^2\mu_s^{-2})\,[J_n(\mu_s a)]^2}\int_0^a v f(v)\,J_n(\mu_s v)\,dv. \qquad (5.356)$$

В случае «*в*» подстановка выражения (5.354) в формулу (5.353) дает

$$A_s = \frac{2}{[a^2 + (B^2 - n^2)/\mu_s^2]\,[J_n(\mu_s a)]^2}\int_0^a v f(v)\,J_n(\mu_s v)\,dv. \qquad (5.357)$$

§ 30и. Функция Грина для цилиндра. Обратное расстояние. На основе материала, изложенного в последних параграфах, можно решить задачу о потенциале точечного заряда q, расположенного в точке $z=0$, $\rho=b$, $\varphi=\varphi_0$ внутри заземленного проводящего цилиндра. Под точечным зарядом мы будем подразумевать такой заряд, размеры которого хотя и слишком малы, чтобы их можно было бы измерить физически, однако отличны от нуля, благодаря чему напряженность поля и потенциал — функции всюду ограниченные. Из выражения (5.305) вытекает, что решение, обращающееся в нуль при $z=\infty$, симметричное относительно плоскости $\varphi=\varphi_0$, дающее $V=0$ при $\rho=a$ и справедливое для положительных значений z, имеет вид

$$V = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}e^{-\mu_r z}J_s(\mu_r\rho)\cos s(\varphi-\varphi_0), \qquad (5.358)$$

где значения μ_r выбраны так, что $J_s(\mu_r a)=0$. Функции $Y_s(\mu_r\rho)$ отсутствуют, поскольку они бесконечны на оси.

В силу симметрии вся плоскость $z=0$ состоит из силовых линий, за исключением той точки, где находится точечный заряд. Чтобы сформулировать граничные условия на этой плоскости, примем, что $(\partial V/\partial z)_0$ равно нулю всюду, кроме маленькой площадки ΔS в точке $\varphi=\varphi_0$, $\rho=b$. Дифференцируя выражение (5.358) и подставляя $z=0$, получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\mu_r A_{rs}J_s(\mu_r\rho)\cos s(\varphi-\varphi_0).$$

Коэффициенты A_{rs} этого разложения определяются, как и в § 30ж и 30з настоящей главы, посредством умножения на $\rho J_p(\mu_q\rho)\cos p(\varphi-\varphi_0)$ и интегрирования от $\rho=0$ до $\rho=a$ и от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$. Согласно формуле (5.343) и (858.2) из справочника Двайта, все члены в правой части выражения, за исключением $p=s$ и $q=r$, исчезают. В последнем случае, как видно из формулы (858.4) справочника Двайта, интегрирование по φ дает множи-

тель π при $s > 0$ и 2π при $s = 0$, поэтому, согласно формуле (5.355),

$$A_{rs} = -\frac{(2-\delta_s^0)}{\pi\mu_r [aJ_{s+1}(\mu_r a)]^2} \int\int \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \rho J_s(\mu_r \rho) \cos s(\varphi - \varphi_0)\, d\rho\, d\varphi, \qquad (5.359)$$

где $\delta_s^0 = 1$ при $s = 0$ и $\delta_s^0 = 0$ при $s \neq 0$. Область ΔS в плоскости $z = 0$, в которой $(\partial V/\partial z)_0 \neq 0$, выбирается настолько малой, что в ней $J_s(\mu_r \rho)$ имеет постоянное значение $J_s(\mu_r b)$ и $\cos s(\varphi - \varphi_0) = 1$. Используя теорему Гаусса о потоке электрической индукции (1.27) и учитывая, что рассматриваемый интеграл дает половину полного потока, находим

$$J_s(\mu_r b) \int\int \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \rho d\varphi\, d\rho = J_s(\mu_r b) \int_{\Delta S} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\frac{q}{2\varepsilon} J_s(\mu_r b).$$

Подставляя в формулу (5.359), получаем

$$A_{rs} = \frac{q(2-\delta_s^0) J_s(\mu_r b)}{2\pi\varepsilon \mu_r a^2 [J_{s+1}(\mu_r a)]^2}. \qquad (5.360)$$

Для потенциала, таким образом, будем иметь

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2-\delta_s^0) e^{-\mu_r |z|} \frac{J_s(\mu_r b) J_s(\mu_r \rho)}{\mu_r [J_{s+1}(\mu_r a)]^2} \cos s(\varphi - \varphi_0). \qquad (5.361)$$

Это есть функция Грина (см. § 9 гл. III) для круглого цилиндра. Если координаты заряда q суть $\rho = b$, $z = z_0$ и $\varphi = \varphi_0$, то в выражении (5.361) следует заменить $|z|$ на $|z - z_0|$. Если заряд расположен на оси, то все члены суммы по s, кроме первого, исчезают, а $J_0(\mu_r b) = 1$.

При $a \to \infty$ выражение (5.361) дает потенциал точечного заряда q в свободном пространстве. При $\mu_r a \to \infty$ функция $J_n(\mu_r a)$ меняется, согласно выражению (5.337), синусоидально, так что ее нули отличаются друг от друга на $\pi = \mu_{r+1} a - \mu_r a = a\Delta\mu$ и $J_{n+1}(\mu_r a) = \left(\frac{1}{2}\pi\mu_r a\right)^{-1/2}$, когда $J_n(\mu_r a) = 0$. Выражение для потенциала (5.361) принимает вид

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2} \sum_{s=0}^{\infty} (2-\delta_s^0) \cos s(\varphi - \varphi_0) \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r\Delta\mu |z-z_0|} J_s(r\Delta\mu b) \times$$
$$\times J_s(r\Delta\mu\rho) \frac{1}{2} a^2 \Delta\mu.$$

Если $r\Delta\mu = k$, то при $\Delta\mu \to 0$ и $r \to \infty$ это выражение записывается в интегральной форме:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \sum_{s=0}^{\infty} (2-\delta_s^0) \cos s(\varphi - \varphi_0) \int_0^{\infty} e^{-k|z-z_0|} J_s(kb) J_s(k\rho)\, dk, \qquad (5.362)$$

где $R^2 = (z-z_0)^2 + \rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos(\varphi - \varphi_0)$. При $b = z_0 = 0$ получаем

$$(\rho^2 + z^2)^{-1/2} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(k\rho)\, dk. \qquad (5.363)$$

Положим z, z_0, φ_0 равными нулю и заменим в выражении (5.363) ρ на R; тогда после сравнения выражений (5.362) и (5.363) найдем

$$J_0[(\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos\varphi)^{1/2}] = \sum_{s=0}^{\infty} (2-\delta_s^0) J_s(\rho) J_s(b) \cos(s\varphi). \qquad (5.364)$$

§ 30к. Функция Грина для цилиндрической полости. Используя суперпозицию решений вида (5.361), можно при помощи метода изображений (§ 8 и § 11б) получить потенциал, обращающийся в нуль не только на поверхности цилиндра $\rho = a$, но и на плоскостях $z = 0$ и $z = L$. Если координаты положительного заряда q суть $z = c$, $\rho = b$ и $\varphi = \varphi_0$, то положительные изображения следует поместить в точках $z = 2nL + c$, а отрицательные — в точках $z = 2nL - c$, где n — целое число, принимающее значения от $-\infty$ до $+\infty$. В результирующем потенциале множитель, зависящий от z, при $z < c$ оказывается равным

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_r(2nL+c-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_r(2nL-c+z)} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_r(2nL-c-z)} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_r(2nL+c+z)} =$$

$$= 2\left(e^{-\mu_r c}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\mu_r L} - e^{\mu_r c}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\mu_r L}\right)\operatorname{sh}\mu_r z =$$

$$= 2\left[\left(e^{-\mu_r c} - e^{+\mu_r c}\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\mu_r L} + e^{\mu_r c}\right]\operatorname{sh}\mu_r z.$$

Суммируя ряды (Двайт, 9.04), умножая числитель и знаменатель суммы на $e^{\mu_r L}$ и приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2\operatorname{sh}\mu_r(L-c)\operatorname{sh}\mu_r z}{\operatorname{sh}\mu_r L}$$

Подстановка этой величины в выражение (5.361) дает при $z < c$ выражение для потенциала

$$V = \frac{q}{\pi\varepsilon a}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2-\delta_s^0)\frac{\operatorname{sh}\mu_r(L-c)\operatorname{sh}\mu_r z}{\operatorname{sh}\mu_r L}\frac{J_s(\mu_r b)J_s(\mu_r\rho)}{\mu_r[J_{s+1}(\mu_r a)]^2}\cos s(\varphi-\varphi_0). \qquad (5.365)$$

В случае $z > c$ в этом выражении следует заменить z на $L - z$ и c на $L - c$. Если заряд находится на оси цилиндрической полости, то сумма по s исчезает и остается лишь член, соответствующий $s = 0$.

Если потенциал должен обращаться в нуль не только на перечисленных выше поверхностях, но и на плоскостях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ (где $0 < \varphi_0 < \varphi_1$) и если $\varphi_1 = \pi/n$ (где n — целое число), то функцию Грина, согласно методу изображений (см. § 8), можно построить, как суперпозицию $2n$ решений типа (5.365).

§ 31а. Функции Бесселя нулевого порядка. В важном случае полей, симметричных относительно оси z, потенциал не зависит от φ и уравнение Бесселя (5.302) принимает вид

$$\frac{d^2R}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dR}{dv} + R = 0. \qquad (5.366)$$

Его решение (5.314) можно записать в виде

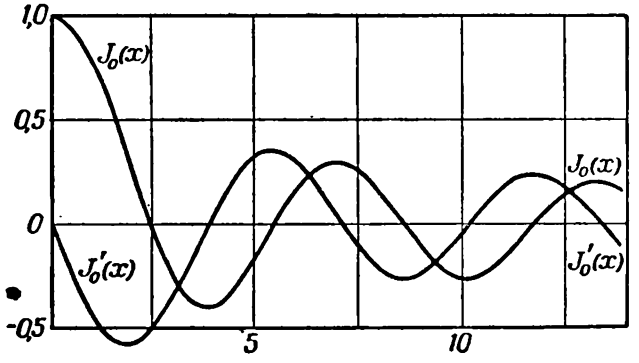
$$J_0(v) = 1 - \frac{v^2}{2^2} + \frac{v^4}{2^4(2!)^2} - \frac{v^6}{2^6(3!)^2} + \qquad (5.367)$$

Этот ряд сходится, очевидно, для любых v. Так же как и $J_n(v)$, $J_0(\infty) = 0$; однако $J_0(0) = 1$. Формула (5.316) при $n = 0$ дает

$$Y_0(v) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(v)\ln\alpha v + \frac{v^2}{2^2} - \frac{v^4\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^4(2!)^2} + \frac{v^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{2^6(3!)^2} - \quad\right], \qquad (5.368)$$

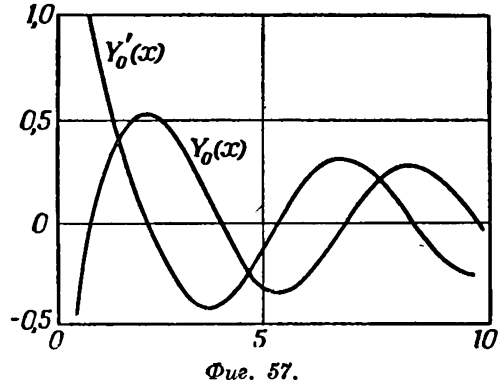
где $\ln\alpha$ равен $-0{,}11593$.

§ 31б. Корни и численные значения бесселевых функций нулевого порядка. Если построить функции $J_0(v)$ и $Y_0(v)$, определяемые по формулам (5.367) и (5.368), то получаются кривые, изображенные на фиг. 56 и 57.



Фиг. 56.

Как видно из фигур, эти функции осциллируют относительно оси v. Можно показать, что и $J_0(v)$ и $Y_0(v)$ имеют бесконечное число действительных положительных корней. То же самое имеет место и для $J_n(v)$ и для $Y_n(v)$. При построении функции Грина для цилиндра мы уже убедились, что это обстоятельство весьма существенно, так как позволяет найти бесконечное число значений k, для которых функции $J_n(k\rho)$ и $Y_n(k\rho)$ обращаются в нуль при некотором определенном значении ρ. Существует большое число прекрасных таблиц, дающих численные значения, графики, корни и т. п. для бесселевых функций. Следует иметь в виду, что обозначения у разных авторов различные. Значение функции Бесселя при больших аргументах нетрудно вычислить при помощи асимптотических представлений.



Фиг. 57.

§ 31в. Производные и интегралы от бесселевых функций нулевого порядка. Полагая в формулах (5.323) и (5.326) $n=0$, находим

$$J_0'(v) = -J_1(v) \quad \text{и} \quad Y_0'(v) = -Y_1(v), \tag{5.369}$$

а из формул (5.328) и (5.329) имеем

$$\int_0^v vJ_0(v)\,dv = vJ_1(v) \quad \text{и} \quad \int_0^v vY_0(v)\,dv = vY_1(v). \tag{5.370}$$

Приведем несколько полезных определенных интегралов, содержащих $J_0(v)$. Из выражения (5.367), пользуясь формулой (854.1) из справочника Двайта, получаем

$$J_0(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2v^{2n}}{(2n)!} \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\pi} \cos^{2n} t \, dt.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования и воспользовавшись формулой (Двайт, 415.02), будем иметь

$$J_0(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(v \cos t)^{2n}}{(2n)!} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(v \cos t) \, dt,$$

откуда

$$J_0(k\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(k\rho \cos t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(k\rho \sin t) \, dt. \qquad (5.371)$$

Применяя известные тригонометрические формулы для суммы и разности двух углов и интегрируя по частям, нетрудно показать, что выражения, удовлетворяющие рекуррентным формулам (5.322) — (5.324), имеют вид

$$J_n(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - v \sin t) \, dt. \qquad (5.372)$$

При $n = 0$ выражение (5.372) сводится, очевидно, к выражению (5.371).

Непосредственная подстановка в уравнение (5.302) и интегрирование по частям показывает, что выражение

$$J_n(v) = \frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cos(v \cos\theta) \sin^{2n}\theta \, d\theta \qquad (5.373)$$

удовлетворяет уравнению Бесселя при $n > -\frac{1}{2}$. Постоянная определяется путем сравнения значений $\left(\frac{1}{2}v\right)^{-n} J_n(v)$ при $v \to 0$, определяемых соответственно по формулам (5.373) и (5.314).

Нетрудно показать, что соотношение (5.363) сохраняется при замене z на jz; таким образом,

$$\int_0^{\infty} e^{-jkz} J_0(k\rho) \, dk = (\rho^2 - z^2)^{-1/2}.$$

Откуда, разделяя действительную и мнимую части, находим, что при $\rho^2 > z^2$

$$\int_0^{\infty} \cos kz \, J_0(k\rho) \, dk = (\rho^2 - z^2)^{-1/2}, \qquad (5.374)$$

$$\int_0^{\infty} \sin kz \, J_0(k\rho) \, dk = 0. \qquad (5.375)$$

При $\rho^2 < z^2$ будем иметь

$$\int_0^\infty \cos kz\, J_0(k\rho)\, dk = 0, \tag{5.376}$$

$$\int_0^\infty \sin kz\, J_0(k\rho)\, dk = (z^2 - \rho^2)^{-1/2}. \tag{5.377}$$

§ 31г. Поле точечного заряда, расположенного над диэлектрической пластинкой. Применим результаты двух последних параграфов к вычислению потенциала, создаваемого по одну сторону от бесконечной диэлектрической пластинки толщиной c и относительной диэлектрической проницаемостью K точечным зарядом q, расположенным с противоположной стороны. Примем, что точечный заряд находится в начале координат, а ось z перпендикулярна к пластинке. Уравнения поверхностей, ограничивающих пластинку, будут $z = a$ и $z = b$, причем $b - a = c$. Согласно соотношению (5.363), потенциал, обусловленный одним лишь точечным зарядом, равен

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_v r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_v} \int_0^\infty J_0(k\rho)\, e^{-k|z|}\, dk. \tag{5.378}$$

Поскольку это выражение представляет собой решение уравнения Лапласа, зависящее только от z и ρ, очевидно, что в результате внесения под знак интеграла произвольной функции k мы также получим решение. Обозначим через V_1 потенциал в области $-\infty < z < a$ и запишем

$$V_1 = (4\pi\varepsilon_v)^{-1} q \left[\int_0^\infty J_0(k\rho)\, e^{-k|z|}\, dk + \int_0^\infty \Phi(k)\, J_0(k\rho)\, e^{+kz}\, dk \right]. \tag{5.379}$$

Последний член представляет собой потенциал в области ниже пластинки, обусловленный ее поляризацией и, следовательно, конечный в указанной области. Потенциал внутри пластинки можно представить в виде

$$V_2 = (4\pi\varepsilon_v)^{-1} q \left[\int_0^\infty \Psi(k)\, J_0(k\rho)\, e^{-kz}\, dk + \int_0^\infty \Theta(k)\, J_0(k\rho)\, e^{+kz}\, dk \right] \tag{5.380}$$

Это выражение остается, разумеется, конечным при $a < z < b$. Потенциал над пластинкой, т. е. в области $b < z < +\infty$, должен обращаться в нуль при $z = \infty$ и, следовательно, имеет вид

$$V_3 = (4\pi\varepsilon_v)^{-1} q \int_0^\infty \Omega(k)\, J_0(k\rho)\, e^{-kz}\, dk. \tag{5.381}$$

Определим теперь $\Phi(k)$, $\Psi(k)$, $\Theta(k)$ и $\Omega(k)$ так, чтобы граничные условия удовлетворялись для любых значений ρ от 0 до ∞. Для этого необходимо, чтобы тем же условиям удовлетворяли соответствующие подинтегральные выражения. Последнее утверждение можно доказать, если воспользоваться интегралом Фурье — Бесселя

$$f(x) = \int_0^\infty tJ_n(tx) \left[\int_0^\infty uf(u)\, J_n(tu)\, du \right] dt$$

(некоторые ограничения, налагаемые на n, и вид функции $f(x)$ предпола-

гаются выполненными). Таким образом, из равенства

$$\int_0^\infty f_1(k)\,J_0(k\rho)\,dk = \int_0^\infty f_2(k)\,J_0(k\rho)\,dk$$

после умножения обеих частей на $\rho J_0(m\rho)\,d\rho$, интегрирования от 0 до ∞ и последующего умножения на m получаем

$$f_1(m) = f_2(m).$$

Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что условие $V_1 = V_2$ при $z = a$ после исключения $J_0(k\rho)$ дает

$$e^{-ka} + \Phi(k)\,e^{ka} - \Psi(k)\,e^{-ka} - \Theta(k)\,e^{ka} = 0, \tag{5.382}$$

а условие $\partial V_1/\partial z = K\,\partial V_2/\partial z$ после исключения $J_0(k\rho)$ сводится к

$$-e^{-ka} + \Phi(k)\,e^{ka} + K\Psi(k)\,e^{-ka} - K\Theta(k)\,e^{ka} = 0. \tag{5.383}$$

Точно так же при $z = b$ условие $V_2 = V_3$ дает

$$\Psi(k)\,e^{-kb} + \Theta(k)\,e^{kb} - \Omega(k)\,e^{-kb} = 0, \tag{5.384}$$

а из условия $K\partial V_2/\partial z = \partial V_3/\partial z$ находим

$$-K\Psi(k)\,e^{-kb} + K\Theta(k)\,e^{kb} + \Omega(k)\,e^{-kb} = 0. \tag{5.385}$$

Разрешая соотношения (5.382) — (5.385) относительно $\Omega(k)$, получаем

$$\Omega(k) = \frac{4K}{(K+1)^2 - (K-1)^2\,e^{2k(a-b)}}. \tag{5.386}$$

Положим, для простоты, $b - a = c$ и $(K-1)/(K+1) = \beta$, так что $1 - \beta^2 = 4K(K+1)^{-2}$; тогда

$$\Omega(k) = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 e^{-2kc}}.$$

Подстановка в выражение (5.381) приводит к следующей формуле для V_3:

$$V_3 = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_v}\int_0^\infty \frac{J_0(k\rho)\,e^{-kz}\,dk}{1-\beta^2 e^{-2kc}}. \tag{5.387}$$

Для представления полученной формулы в виде ряда разложим в ряд ее знаменатель (см. Двайт, 9.04):

$$4\pi\varepsilon_v V_3 = q(1-\beta^2)\left[\int_0^\infty J_0(k\rho)\,e^{-kz}\,dk + \beta^2\int_0^\infty J_0(k\rho)\,e^{-k(z+2c)}\,dk + \right]$$

Подставляя значения интегралов из соотношения (5.363), будем иметь

$$V_3 = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_v}\left\{\frac{1}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} + \frac{\beta^2}{[(z+2c)^2+\rho^2]^{1/2}} + \frac{\beta^4}{[(z+4c)^2+\rho^2]^{1/2}} + \cdots\right\}.$$

или

$$V_3 = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^{2n}}{[(z+2nc)^2+\rho^2]^{1/2}}. \tag{5.388}$$

Этот же результат можно получить более длинным путем при помощи метода изображений. Потенциал в других областях можно найти, разрешив

соотношения (5.382) — (5.385) относительно $\Phi(k)$, $\Psi(k)$ и $\Theta(k)$ и подставив полученные выражения в формулы (5.379) и (5.380). Этот метод применим и в случае любого числа диэлектрических пластинок.

§ 31д. Потенциал внутри полого цилиндрического кольца. В качестве другого примера вычислим потенциал в каждой точке области, ограниченной двумя цилиндрами $\rho = a$ и $\rho = b$, потенциал которых равен нулю, и двумя плоскостями — плоскостью $z = 0$ с нулевым потенциалом и $z = c$ с потенциалом $V = f(\rho)$. Поскольку значения $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ исключены из рассматриваемой области, в решении будут и $J_0(k\rho)$ и $Y_0(k\rho)$. Очевидно, что, в соответствии с формулами (5.304) и (5.317), решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям при $z = 0$ и $\rho = b$, имеет вид

$$V_k = A_k \operatorname{sh}(\mu_k z)\left[J_0(\mu_k\rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k\rho)\right]. \tag{5.389}$$

Условию $V_k = 0$ при $\rho = a$ можно удовлетворить, если выбрать значения μ_k так, чтобы

$$J_0(\mu_k a) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k a) = 0.$$

Следовательно, всем граничным условиям, кроме условия при $z = c$, удовлетворяет и сумма таких решений

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k. \tag{5.390}$$

Последнее граничное условие $V = f(\rho)$ при $z = c$ удовлетворяется, если выбрать A_k так, чтобы

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}(\mu_k c)\left[J_0(\mu_k\rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k\rho)\right]$$

Так как выражение в скобках удовлетворяет уравнению Бесселя, обозначим его через $R_0(\mu_k\rho)$. Далее умножим правую и левую части равенства на $\rho R_0(\mu_s\rho)$ [где $R_0(\mu_s a) = R_0(\mu_s b) = 0$] и проинтегрируем от a до b. Благодаря тому, что $R_0(\mu_k a) = R_0(\mu_k b) = 0$, все члены в правой части, согласно формуле (5.344), обращаются в нуль, за исключением одного, для которого $k = s$. Для этого члена, в силу выражения (5.345), мы имеем

$$\int_a^b \rho f(\rho) R_0(\mu_k\rho)\, d\rho = \left[b^2\left(\frac{dR_0}{d(\mu_k\rho)}\right)^2_{\rho=b} - a^2\left(\frac{dR_0}{d(\mu_k\rho)}\right)^2_{\rho=a}\right]\frac{A_k \operatorname{sh}\mu_k c}{2}.$$

Дифференцируя $R_0(\mu_k\rho)$ по формуле (5.369), находим

$$R_0'(\mu_k\rho) = -\left\{J_1(\mu_k\rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_1(\mu_k\rho)\right\}.$$

Для A_k, таким образом, получаем

$$A_k = \frac{2\int_a^b \rho f(\rho) R_0(\mu_k\rho)\, d\rho}{\{b^2[R_0'(\mu_k b)]^2 - a^2[R_0'(\mu_k a)]^2\}\operatorname{sh}\mu_k c}. \tag{5.391}$$

Подстановка выражения (5.391) в (5.389) и затем (5.389) в (5.390) дает искомое решение.

Чтобы получить потенциал внутри заземленного цилиндра $\rho = a$ с потенциалом $V = 0$ при $z = 0$ и $V = f(\rho)$ при $z = c$, следует опустить член

с Y_0 в формуле (5.389); тогда выражение (5.391) примет вид

$$A_k = \frac{2\int_0^a \rho f(\rho) J_0(\mu_k \rho)\, d\rho}{a^2 [J_1(\mu_k a)]^2 \operatorname{sh} \mu_k c}. \tag{5.392}$$

§ 32. Функция Бесселя нецелого порядка. Сферические функции Бесселя. Если n — нецелое число, то общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$R_n(v) = AJ_n(v) + BJ_{-n}(v). \tag{5.393}$$

Функция $Y_n(v)$ в этом случае не нужна, поскольку она является линейной комбинацией $J_n(v)$ и $J_{-n}(v)$. Формулы § 30д справедливы и для функций Бесселя нецелого порядка. Особенно простой вид имеют функции $J_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(v)$, где n — целое число; так, например, если подставить в выражение (5.314) $n = {}^1/_2$ и $n = -{}^1/_2$ и сравнить полученный результат с рядами для синуса и косинуса (см. Двайт, 415.01 и 415.02), то получим

$$J_{1/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \sin v \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \cos v. \tag{5.394}$$

Подстановка $n = {}^1/_2$ и $n = -{}^1/_2$ в формулу (5.324) дает

$$J_{3/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{v} \sin v - \cos v\right), \tag{5.395}$$

$$J_{-3/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left(-\sin v - \frac{1}{v} \cos v\right). \tag{5.396}$$

В случае $n = {}^3/_2$ и $n = -{}^3/_2$ получаем

$$J_{5/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{3}{v^2} - 1\right) \sin v - \frac{3}{v} \cos v\right], \tag{5.397}$$

$$J_{-5/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left[\frac{3}{v} \sin v + \left(\frac{3}{v^2} - 1\right) \cos v\right] \tag{5.398}$$

Таким же путем можно получить, очевидно, выражение

$$J_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left\{ \sin\left[v \mp \tfrac{1}{4}(2n+1\mp 1)\pi\right] \sum_{s=0}^{\leqslant \frac{1}{2}n} \frac{(-1)^s (n+2s)!}{(2s)!\,(n-2s)!\,(2v)^{2s}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left[v \mp \tfrac{1}{4}(2n+1\mp 1)\pi\right] \sum_{s=0}^{\leqslant \frac{1}{2}(n-1)} \frac{(-1)^s (n+2s+1)!}{(2s+1)!\,(n-2s-1)!\,(2v)^{2s+1}} \right\}, \tag{5.399}$$

где верхним пределом каждой из сумм является целое число, наиболее близкое к указанному в формуле. Заметим, что, согласно формуле (5.315),

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(v) = (-1)^{n+1} J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(v), \tag{5.400}$$

поскольку $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ равен нулю. Заменяя n на $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ в формуле (5.314), получаем, что при $v \to 0$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(v) \xrightarrow[v\to 0]{} \frac{v^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \left(\frac{2v}{\pi}\right)^{1/2} \frac{v^n}{(2n+1)!!}. \tag{5.401}$$

Сферические бесселевы функции $j_n(v)$ и $n_n(v)$ определяются следующими выражениями:

$$j_n(v)=\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(v)=\frac{1}{v}\hat{J}_n(v),$$

$$n_n(v)=\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}Y_{n+\frac{1}{2}}(v)=\frac{1}{v}\hat{N}_n(v), \tag{5.402}$$

где $\hat{J}_n(v)$ и $\hat{N}_n(v)$ — функции, используемые Шелкуновым. Последние появляются при изучении сферических электромагнитных волн и недавно были затабулированы. Из выражений (5.402), (5.320), (5.322) и (5.323) следует, что

$$n_n'(v)\,j_n(v)-n_n(v)\,j_n'(v)=v^{-2}, \tag{5.403}$$

$$(2n+1)\,v^{-1}\,j_n=j_{n-1}+j_{n+1},\quad j_n'=\pm j_{n+1}\mp\left(n+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\right)v^{-1}\,j_n. \tag{5.404}$$

Аналогичные формулы имеют место и для $n_n(v)$. Дифференцирование формул (5.404) и исключение $j_{n-1}(v)$ дает дифференциальное уравнение для функции $j_n(v)$ или $n_n(v)$:

$$v\frac{d}{dv}\left[v\frac{d}{dv}j_n(v)\right]+\left[v^2-\tfrac{1}{4}(2n+1)^2\right]j_n(v)=0. \tag{5.405}$$

§ 33а. Модифицированные бесселевы функции. Решение модифицированного уравнения Бесселя (5.309)

$$\frac{d^2R^0}{dv^2}+\frac{1}{v}\frac{dR^0}{dv}-\left(1+\frac{n^2}{v^2}\right)R^0=0 \tag{5.406}$$

можно получить подстановкой jv вместо v в формулу (5.314). При этом выражение в скобках оказывается действительным, но появляется общий коэффициент j^n. Искомое действительное решение дается, таким образом, выражением

$$I_\nu(v)=j^{-\nu}J_\nu(jv)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}. \tag{5.407}$$

Если ν — нецелое число, то вторым решением уравнения будет

$$I_{-\nu}(v)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^{-\nu+2r}}{r!\,\Gamma(-\nu+r+1)}. \tag{5.408}$$

Если ν является целым числом, то $\Gamma(\nu+r+1)$ можно заменить на $(n+r)!$ и убедиться, что функция $I_n(v)$ совпадает с $I_{-n}(v)$. Поэтому второе решение можно определить следующим образом:

$$K_n(v)=\tfrac{1}{2}\pi j^{n+1}\left[J_n(jv)+jY_n(jv)\right]. \tag{5.409}$$

При помощи выражений (5.314), (5.316) и (5.407) это решение можно привести к виду

$$K_n(v)=(-1)^{n+1}I_n(v)\ln\alpha v+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}v\right)^{-n+2r}(n-r-1)!}{2r!}+$$

$$+(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}v\right)^{n+2r}}{2r!\,(n+r)!}\left(\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+r}\frac{1}{m}\right), \tag{5.410}$$

где $\ln\alpha = -0{,}11593$. Общее решение уравнения (5.406), когда n — целое число, имеет вид

$$R_n^0(v) = AI_n(v) + BK_n(v). \tag{5.411}$$

Согласно выражениям (5.407), (5.409) и (5.320), имеет место равенство

$$I_n'(v)K_n(v) - K_n'(v)I_n(v) = \\ = \frac{1}{2}j\pi\left[Y_n'(jv)J_n(jv) - J_n'(jv)Y_n(jv)\right] = v^{-1}. \tag{5.412}$$

Из выражений (5.409), (5.321) и (5.407) следует, что

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)K_n(v) = j^{n+1}H_n^{(1)}(jv) = (-j)^{n+1}H_n^{(2)}(-jv), \\ I_n(v) = j^{-n}J_n(jv). \tag{5.413}$$

Таблицы этих функций приведены в книге Янке и Эмде.

§ 33б. Рекуррентные формулы для модифицированных бесселевых функций. Выражение (5.322) можно записать в виде

$$\frac{dJ_n(jv)}{jdv} = J_{n-1}(jv) - \frac{n}{jv}J_n(jv).$$

Подставив в него $j^nI_n(v)$ вместо $J_n(jv)$ и разделив на j^{n-1}, получим

$$I_n' = I_{n-1} - \frac{n}{v}I_n. \tag{5.414}$$

Аналогично из выражения (5.323) будем иметь

$$I_n' = I_{n+1} + \frac{n}{v}I_n. \tag{5.415}$$

Вычтя выражение (5.414) из (5.415), получим

$$\frac{2n}{v}I_n = I_{n-1} - I_{n+1}. \tag{5.416}$$

Преобразуя решение (5.409) при помощи рекуррентных формул § 30д, получаем

$$-K_n' = K_{n-1} + \frac{n}{v}K_n, \tag{5.417}$$

$$-K_n' = K_{n+1} - \frac{n}{v}K_n, \tag{5.418}$$

$$-\frac{2n}{v}K_n = K_{n-1} \quad K_{n+1}. \tag{5.419}$$

Здесь использованы обозначения, принятые у Ватсона и у Грэя, Метьюза и Макроберта. Некоторые авторы опускают множитель $(-1)^n$ в формуле (5.410), благодаря чему рекуррентные формулы для I_n и K_n оказываются одинаковыми. Путем интегрирования выражений (5.414) и (5.417) можно получить (как это было сделано в § 30д) две полезные интегральные формулы:

$$\int v^n I_{n-1}(v)\,dv = v^n I_n(v), \tag{5.420}$$

$$\int v^n K_{n-1}(v)\,dv = -v^n K_n(v). \tag{5.421}$$

Аналогичное интегрирование выражений (5.415) и (5.418) дает:

$$\int v^{-n} I_{n+1}(v)\,dv = v^{-n} I_n(v), \tag{5.422}$$

$$\int v^{-n} K_{n+1}(v)\,dv = -v^{-n} K_n(v). \tag{5.423}$$

§ 33в. Значение модифицированных бесселевых функций на бесконечности. Значения $I_n(v)$ и $K_n(v)$ при $v \to \infty$ можно получить из соответствующих значений функций $J_n(v)$ (см. § 30е) путем замены v на jv. Точность полученных выражений та же: они пригодны, если величиной $v^{-3/2}$ можно пренебречь по сравнению с $v^{-1/2}$. Заменим в выражении (5.337) v на jv, запишем $j^{-1/2}$ в виде $e^{-1/4 j\pi}$ и представим тригонометрические функции через экспоненциальные (см. Двайт, 408.02); тогда, пренебрегая членом e^{-v}, получим

$$I_n(v) = j^{-n} J_n(jv) \underset{v\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2\pi v}\right)^{1/2} e^{v} j^{-n} e^{1/2 jn\pi}.$$

Если n — целое число, то, вычислив последний множитель (см. Двайт, 409.04 и 409.05), будем иметь

$$I_n(v) \underset{v\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2\pi v}\right)^{1/2} e^{v}. \tag{5.424}$$

Из соотношений (5.413) и (5.339) получим

$$K_n(v) \underset{v\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2} e^{-v}. \tag{5.425}$$

Хотя приведенные выше формулы были получены в предположении, что n — целое число, подставляя их в уравнение (5.406), убеждаемся, что они справедливы при любых n[1]).

§ 33г. Интеграл от произведения модифицированных бесселевых функций комплексного аргумента. В гл. XI для определения мощности, рассеиваемой в проводнике при протекании в нем вихревых токов, потребуется вычислить интеграл от произведения модифицированных бесселевых функций $R_n^0[(jp)^{1/2}x]$ и соответствующих комплексно-сопряженных функций $R_n^0[(-jp)^{1/2}x]$, где $(j)^{1/2} = 2^{-1/2}(1+j)$ и $(-j)^{1/2} = 2^{-1/2}(1-j)$. В задачах с цилиндрической симметрией число n обычно целое, а в задачах со сферической симметрией n равно половине нечетного числа. Используя формулы § 30ж, можно вычислить этот интеграл для любых значений n. Обозначим

$$k_p = -j(jp)^{1/2} = (-jp)^{1/2} \quad \text{и} \quad k_q = j(-jp)^{1/2} = (jp)^{1/2},$$
$$u = R_n[-j(jp)^{1/2}x] = (-j)^n R_n^0[(jp)^{1/2}x],$$
$$v = R_n[j(-jp)^{1/2}x] = j^n R_n^0[(-jp)^{1/2}x],$$
$$R_n'[-j(jp)^{1/2}x] = (-j)^{n-1} R_n^{0\prime}[(jp)^{1/2}x],$$
$$R_n'[j(-jp)^{1/2}x] = j^{n-1} R_n^{0\prime}[(-jp)^{1/2}x].$$

Подставив эти величины в уравнения § 30ж, предшествующие условию (5.340), и изменив ρ на x, получим

$$\int_0^a xR_n^0[(jp)^{1/2}x]\,R_n^0[(-jp)^{1/2}x]\,dx = \int_0^a xR_n^0(k_q x)\,R_n^0(k_p x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} a j^{-1} p^{-1/2}[j^{1/2} R_n^0(k_p a)\,R_n^{0\prime}(k_q a) - (-j)^{1/2} R_n^0(k_q a)\,R_n^{0\prime}(k_p a)] =$$
$$= (2p)^{-1}[k_p a R_n^0(k_p a)\,R_{n-1}^0(k_q a) + k_q a R_n^0(k_q a)\,R_{n-1}^0(k_p a)] =$$
$$= (2p)^{-1}[k_p a R_{n-2}^0(k_p a)\,R_{n-1}^0(k_q a) + k_q a R_{n-2}^0(k_q a)\,R_{n-1}^0(k_p a) -$$
$$- 4(n-1) R_{n-1}^0(k_p a)\,R_{n-1}^0(k_q a)]. \tag{5.426}$$

[1]) Точнее, не для любых n, а только для $n \ll v$. — *Прим. перев.*

§ 33д. Функция Грина для кольцевой цилиндрической полости. В качестве примера использования модифицированных бесселевых функций вычислим потенциал, обусловленный маленьким зарядом q, расположенным в точке $z=c$, $\rho=b$ и $\varphi=\varphi_0$, внутри цилиндрической кольцевой полости с проводящими стенками, уравнения которых суть $z=0$, $z=L$, $\rho=d$ и $\rho=a$ $(a>d)$. Частный случай $d=0$ соответствует цилиндрической полости, для которой в § 30к было получено решение, содержащее бесселевы функции.

Поскольку ни $I_m(v)$, ни $K_m(v)$ не имеют действительных корней, для получения функции, обращающейся в нуль при заданном значении ρ, потребуется, очевидно, их комбинация. Ясно, что искомая функция имеет вид

$$R_m^0(k,\ s,\ t)=K_m(ks)\,I_m(kt)-I_m(ks)\,K_m(kt). \tag{5.427}$$

Так как эта функция обращается в нуль, вообще говоря, лишь при одном значении t $(t=s)$, то в областях вблизи внутренней и вблизи внешней границ необходимо пользоваться различными функциями, которые должны, конечно, совпадать при $\rho=b$. Нетрудно написать две такие функции, обращающиеся в нуль на поверхности проводников и совпадающие друг с другом при $\rho=b$. Они имеют вид

при $d\leqslant\rho<b$ или $\rho=b$, $\varphi\neq\varphi_0$

$$V'=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{mn}R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ a,\ b\right)R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}\quad d,\ \rho\right)\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi\quad\varphi_0), \tag{5.428}$$

при $b<\rho\leqslant a$ или $\rho=b$, $\varphi\neq\varphi_0$

$$V''=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{mn}R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ d,\ b\right)R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ a,\ \rho\right)\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.429}$$

Эти решения имеют должную симметрию относительно $\varphi=\varphi_0$. Для определения коэффициентов C_{mn} можно воспользоваться теоремой Гаусса о потоке электрической индукции, применив ее к области, окружающей заряд.

Допустим, что заряд q сосредоточен в маленькой области на поверхности цилиндра $\rho=b$ в окрестности точки $z=c$, $\varphi=\varphi_0$. Эта область принимается настолько малой, что физически ее невозможно измерить, однако математически она не является точкой, благодаря чему потенциал и напряженность поля всюду конечны. Согласно формуле (1.27), интеграл по двум сторонам поверхности цилиндра S_2 равен

$$-\int_{S_2}\frac{\partial V}{\partial\rho}\,dS_2=\int_S\left(\frac{\partial V'}{\partial\rho}-\frac{\partial V''}{\partial\rho}\right)dS=\frac{q}{\varepsilon}. \tag{5.430}$$

Из выражений (5.428) и (5.429) следует

$$\frac{\partial V'}{\partial\rho}-\frac{\partial V''}{\partial\rho}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{mn}\frac{n\pi}{L}\left[R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ d,\ b\right)R_m^{0\prime}\left(\frac{n\pi}{L},\ a,\ b\right)-\right.$$
$$\left.-R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ a,\ b\right)R_m^{0\prime}\left(\frac{n\pi}{L},\ d,\ b\right)\right]\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi-\varphi_0).$$

При помощи решения (5.409) это выражение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial V'}{\partial\rho}-\frac{\partial V''}{\partial\rho}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{mn}\frac{1}{b}R_m^0\left(\frac{n\pi}{L},\ d,\ a\right)\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.431}$$

Положим теперь $\varphi - \varphi_0 = \varphi'$, умножим правую и левую части на

$$\sin(p\pi z / L)\cos q\varphi'\, b\, d\varphi'\, dz$$

и проинтегрируем по поверхности цилиндра $\rho = b$. Все члены в правой части, за исключением тех, для которых $p = n$ и $q = m$, обращаются в нуль (см. Двайт, 858.1 и 858.2). Оставшиеся интегралы, кроме $q = m = 0$, вычисляются по формуле (Двайт, 858.4). Для вычисления интеграла в левой части заметим, что если размеры заряда достаточно малы, то $\cos m\varphi'$ и $\sin(n\pi z / L)$ имеют постоянные значения, равные соответственно единице и $\sin(n\pi c / L)$, и могут быть вынесены из-под знака интеграла. Поэтому, учитывая, что $dS = b\, d\varphi'\, dz$, в левой части получаем интеграл (5.430). При $m \neq 0$ имеем

$$\frac{q}{\varepsilon}\sin\frac{n\pi c}{L} = -\frac{1}{2}C_{mn}L\pi R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, d, a\right). \tag{5.432}$$

При $m = 0$ коэффициент $^1/_2$ в правой части отсутствует, поскольку $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Определяя C_{mn} из соотношения (5.432) и подставляя в выражения (5.428) и (5.429), находим

$$V' = \frac{-q}{\pi\varepsilon L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2-\delta_m^0)\,R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, a, b\right)R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, d, \rho\right)}{R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, d, a\right)}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi - \varphi_0), \tag{5.433}$$

$$V'' = \frac{-q}{\pi\varepsilon L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2-\delta_m^0)\,R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, d, b\right)R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, a, \rho\right)}{R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, d, a\right)}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi - \varphi_0), \tag{5.434}$$

где $\delta_m^0 = 0$ при $m \neq 0$ и $\delta_m^0 = 1$ при $m = 0$.

Для цилиндрической полости (случай, рассмотренный в § 30к с применением бесселевых функций) следует положить $d = 0$, так что приведенные выше выражения для потенциала примут вид

$$V' = \frac{-q}{\pi\varepsilon L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2-\delta_m^0)\,R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, a, b\right)I_m\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\sin\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi - \varphi_0), \tag{5.435}$$

$$V'' = \frac{-q}{\pi\varepsilon L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2-\delta_m^0)\,I_m\left(\frac{n\pi b}{L}\right)R_m^0\left(\frac{n\pi}{L}, a, \rho\right)}{I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\sin\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi z}{L}\cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{5.436}$$

Как видно из выражения для потенциала V', последний удовлетворяет всем граничным условиям, конечен, но не обращается в нуль на оси. Когда заряд расположен на оси, следует пользоваться формулой (5.436), опустив суммирование по m и положив $m = 0$.

§ 34а. Модифицированные бесселевы функции нулевого порядка. При $n=0$ формула (5.407) дает

$$I_0(v)=1+\frac{v^2}{2^2}+\frac{v^4}{2^4(2!)^2}+\frac{v^6}{2^6(3!)^2}+\ldots \tag{5.437}$$

Таким образом, функция $I_0(v)$ действительная (но не имеет действительных корней) и

$$I_0(0)=1 \quad \text{и} \quad I_0(\infty)=\infty. \tag{5.438}$$

Формула (5.410) при $n=0$ принимает вид

$$K_0(v)=-I_0(v)\ln av+\frac{v^2}{2^2}+\frac{v^4\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^4(2!)^2}+\frac{v^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{2^6(3!)^2}+\ldots \tag{5.439}$$

Производные от $I_0(v)$ и $K_0(v)$ определяются выражениями (5.415) и (5.418) и равны

$$I_0'=I_1 \quad \text{и} \quad K_0'=-K_1. \tag{5.440}$$

Из формул (5.420) и (5.421) получаем

$$\int_0^v vI_0(v)\,dv=vI_1(v), \tag{5.441}$$

$$\int_0^v vK_0(v)\,dv=-vK_1(v). \tag{5.442}$$

§ 34б. Интегральное представление модифицированных бесселевых функций второго рода. Значение на бесконечности. Подстановка $\mathfrak{P}^0=\int_0^\infty e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi$ в левую часть уравнения (5.406) дает при $n=0$

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}^2\varphi e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi-\frac{1}{v}\int_0^\infty \operatorname{ch}\varphi e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi-\int_0^\infty e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi.$$

Объединяя первый и третий члены (Двайт, 650.01) и интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh}\varphi)\left[e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d(\operatorname{ch}\varphi)\right]=\int u\,dv=\left|\frac{-\operatorname{sh}\varphi}{v}e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\right|_0^\infty+\frac{1}{v}\int_0^\infty \operatorname{ch}\varphi e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi.$$

Полученное выражение совпадает со вторым членом, и, следовательно, рассматриваемый интеграл удовлетворяет уравнению (5.406). Поскольку любое решение уравнения (5.406) должно иметь вид $R^0=AI_0(v)+BK_0(v)$ поскольку интеграл обращается в нуль при $v\to\infty$, $I_0(v)$ не входит в решение и $R^0=BK_0(v)$. В § 36а будет показано, что в соответствии с выражением (5.439) следует принять $B=1$, так что

$$K_0(v)=\int_0^\infty e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}j\pi H_0^{(1)}(jv)=-\frac{1}{2}j\pi H_0^{(2)}(-jv). \tag{5.443}$$

Выражение

$$v^m\frac{d^nK_0(v)}{dv^n}=(-1)^n\int_0^\infty v^m\operatorname{ch}^n\varphi e^{-v\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi$$

также обращается в нуль при $v=\infty$, поскольку v входит в подинтегральное выражение в виде $v^m e^{-av}$, где $a>1$. Из рекуррентных формул (5.418) и (5.419) следует, что

$$K_1=-K_0', \quad \text{откуда} \quad K_1(\infty)=0.$$

Из формулы (5.419) тогда получим

$$K_n(\infty)=K_{n-2}(\infty)= \qquad =K_p(\infty)=0,$$

где $p=1$ при n нечетном и $p=0$ при n четном. Формула (5.417) показывает, что $K_n'(\infty)=0$ и т. д.

Другое интегральное представление для $K_0(v)$ имеет вид

$$K_0(v)=\int_0^\infty \cos(v\,\mathrm{sh}\,\varphi)\,d\varphi. \tag{5.444}$$

Бейтман выводит это соотношение следующим образом.

Рассмотрим функцию

$$W=\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,\varphi}\cos(y\,\mathrm{sh}\,\varphi)\,d\varphi,$$

где $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$. Дифференцирование ее дает

$$\frac{\partial W}{\partial\theta}=x\frac{\partial W}{\partial y}-y\frac{\partial W}{\partial x}=$$

$$=-\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,\varphi}\left[x\,\mathrm{sh}\,\varphi\sin(y\,\mathrm{sh}\,\varphi)-y\,\mathrm{ch}\,\varphi\cos(y\,\mathrm{sh}\,\varphi)\right]d\varphi=$$

$$=\int_0^\infty \frac{d}{d\varphi}\left[e^{-x\,\mathrm{ch}\,\varphi}\sin(y\,\mathrm{sh}\,\varphi)\right]d\varphi=-\left|e^{-x\,\mathrm{ch}\,\varphi}\sin(y\,\mathrm{sh}\,\varphi)\right|_0^\infty=0.$$

Таким образом W не зависит от θ. Полагая $\theta=0$, получаем $x=r$, $y=0$, так что, согласно формуле (5.443), $W=K_0(r)$. Подстановка $\theta=\frac{1}{2}\pi$ дает $x=0$, $y=r$; W совпадает в этом случае с интегралом (5.444), что и доказывает справедливость формулы (5.444).

Для вывода интегральной формулы, применяемой при исследовании дифракции на щели, подставим формулу (5.443) в формулу (5.442), заменим интеграл от 0 до ∞ половиной интеграла от $-\infty$ до ∞ и изменим порядок интегрирования. В результате получим (см. Двайт, 567.1)

$$2vK_1(v)=\pi vH_1^{(2)}(-jv)=\int_{-\infty}^\infty e^{-v\,\mathrm{ch}\,\varphi}(1+v\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,\mathrm{sech}^2\varphi\,d\varphi. \tag{5.445}$$

§ 35. Интегральное представление бесселевых функций нулевого порядка. Подстановка v/j вместо v в формулу (5.443) дает

$$K_0\left(\frac{v}{j}\right)=\int_0^\infty e^{jv\,\mathrm{ch}\,\varphi}\,d\varphi=\int_0^\infty \cos(v\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi+j\int_0^\infty \sin(v\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi.$$

Сделав аналогичную замену в выражении (5.409) и приравняв действительные и мнимые части, получим (в обозначениях, принятых Ватсоном;

см. § 30г) для функций $J_0(v)$ и $Y_0(v)$ следующие формулы:

$$J_0(v) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(v\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi, \tag{5.446}$$

$$Y_0(v) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(v\,\mathrm{ch}\,\varphi)\,d\varphi. \tag{5.447}$$

§ 36а. Представление обратного расстояния через модифицированные бесселевы функции. Найдем выражение для обратного расстояния между двумя точками с координатами ρ_0, φ_0, z_0 и ρ, φ, z в цилиндрической системе координат. Для этого можно воспользоваться методом, изложенным в § 31д; однако проще исходить из выражения для потенциала точечного заряда, находящегося посередине между двумя плоскостями, расположенными на расстоянии L друг от друга. Потенциал такого заряда можно получить из выражения (5.435), если положить $a = \infty$ и сдвинуть начало координат на $L/2$. Поскольку при этом сохраняются только нечетные значения n, для $\rho < \rho_0$ будем иметь

$$V = \frac{q}{\pi\varepsilon L}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_m^0)\,K_m(N\rho_0)\,I_m(N\rho)\cos[N(z-z_0)]\cos m(\varphi-\varphi_0), \tag{5.448}$$

где $N = (2n+1)\pi/L$. Полагая $2n\pi/L = u_n$ и $2\pi/L = \Delta u$, получим

$$\frac{\frac{1}{2}q}{\pi^2\varepsilon}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_m^0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\sum_{n=0}^{\infty}K_m\left[\left(u_n+\frac{\Delta u}{2}\right)\rho_0\right]\times$$
$$\times I_m\left[\left(u_n+\frac{\Delta u}{2}\right)\rho\right]\cos\left[\left(u_n+\frac{\Delta u}{2}\right)z\right]\Delta u.$$

Допустим теперь, что $L\to\infty$ и, следовательно, $\Delta u\to 0$. При этом суммирование по n в пределах $0\leqslant n<\infty$ переходит, по определению, в интегрирование по u в пределах $0\leqslant u<\infty$. Следовательно,

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon R} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_m^0)\left[\int_0^\infty K_m(u\rho_0)\,I_m(u\rho)\cos uz\,du\right]\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{5.449}$$

При $\rho > \rho_0$ в выражении (5.449) следует поменять местами ρ и ρ_0. Если $\rho_0 = 0$, то суммирование исчезает и

$$r^{-1} = (\rho^2+z^2)^{-1/2} = 2\pi^{-1}\int_0^\infty \cos kz\,K_0(k\rho)\,dk. \tag{5.450}$$

В случае $z=0$ и $\varphi_0=0$ заменим в выражении (5.450) ρ на R и сравним с выражением (5.449). Из сравнения следует, что при $\rho<\rho_0$

$$K_0[(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi)^{1/2}] = \sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_m^0)\,K_m(\rho_0)\,I_m(\rho)\cos m\varphi. \tag{5.451}$$

Для проверки выбора произвольной постоянной в выражении (5.443) подставим определяемое этой формулой значение $K_0(k\rho)$ в выражение (5.450). Интегрируя сначала по k (см. Двайт, 577.2), а затем по φ (см. Двайт, 120.01), убеждаемся, что равенство (5.450) удовлетворяется.

§ 36б. Цилиндрические границы раздела двух диэлектрических сред. Полученное выше выражение для обратного расстояния можно использовать для решения задач при наличии в системе цилиндрических границ, допускающих распространение электрического поля до бесконечности. В таких задачах разложение в ряд по функциям Бесселя невозможно, поскольку, как нетрудно видеть из асимптотических представлений § 30е, интегралы в § 30з обращаются в бесконечность при $a=\infty$. Решение в этих случаях получается обычно в виде определенного интеграла, численную величину которого можно найти графически.

В качестве примера найдем поле точечного заряда q, расположенного на оси бесконечной цилиндрической полости радиуса a, прорезанной в бесконечной диэлектрической среде с относительной диэлектрической проницаемостью K. Пусть потенциал внутри полости будет V, а вне полости V_K. Воспользуемся методом, аналогичным изложенному в § 31д. Будем рассматривать V как сумму потенциалов, первый из которых обусловлен одним лишь точечным зарядом и имеет вид (5.450), а второй обусловлен поляризацией диэлектрика и должен быть конечным на оси полости. Таким образом, потенциал V имеет вид

$$V=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_v}\int_0^\infty [K_0(k\rho)+\Psi(k)\,I_0(k\rho)]\cos kz\,dk. \tag{5.452}$$

Потенциал в диэлектрике должен быть конечным на больших расстояниях и, следовательно, должен иметь вид

$$V_K=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_v}\int_0^\infty \Phi(k)\,K_0(k\rho)\cos kz\,dk. \tag{5.453}$$

Согласно граничному условию $V=V_K$ при $\rho=a$, необходимо, чтобы

$$K_0(ka)+\Psi(k)\,I_0(ka)=\Phi(k)\,K_0(ka). \tag{5.454}$$

Граничное условие $\partial V/\partial\rho=K\partial V_K/\partial\rho$ при $\rho=a$ дает

$$K_0'(ka)+\Psi(k)\,I_0'(ka)=K\Phi(k)\,K_0'(ka). \tag{5.455}$$

Исключая $\Psi(k)$ из соотношений (5.454) и (5.455) и упрощая полученное выражение при помощи соотношения (5.412), получим

$$\Phi(k)=\frac{1}{1-ka\,(K-1)\,I_0(ka)\,K_0'(ka)}. \tag{5.456}$$

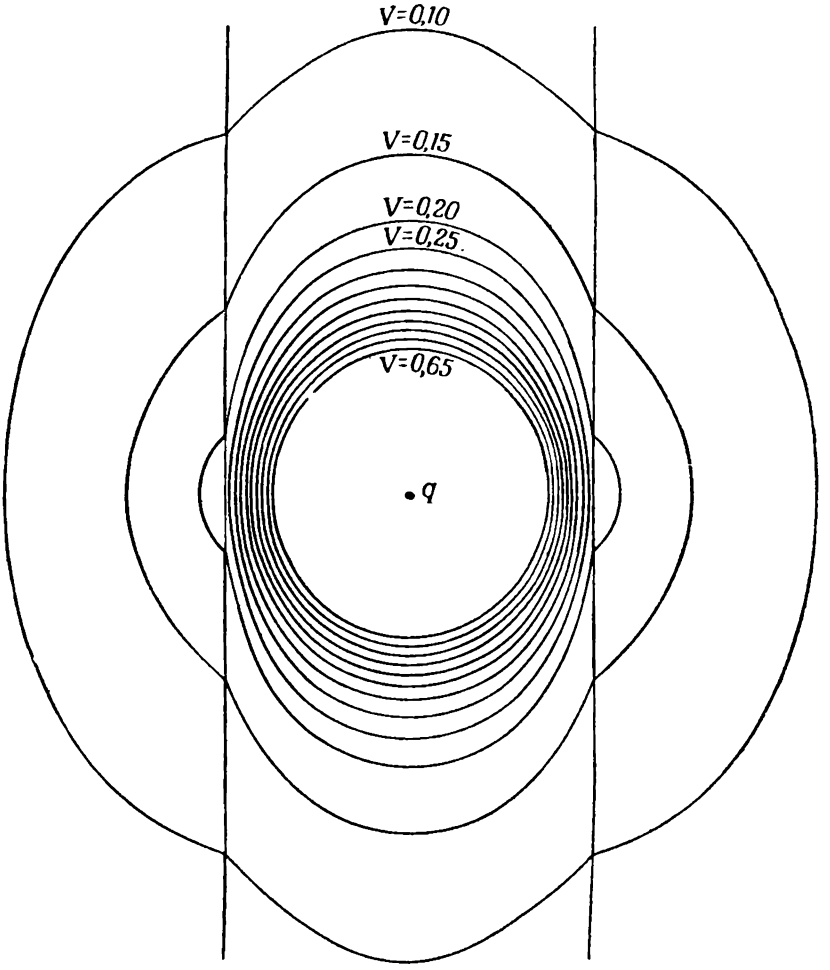
Подставляя выражение (5.456) в соотношение (5.454), находим

$$\Psi(k)=\frac{ka\,(K-1)\,K_0(ka)\,K_0'(ka)}{1-ka\,(K-1)\,I_0(ka)\,K_0'(ka)}. \tag{5.457}$$

На фиг. 58 изображено поле, вычисленное по формулам (5.452) и (5.453) с использованием (5.456) и (5.457); интегрирование было выполнено для случая $K=5$ при помощи планиметра.

§ 37. Потенциал внутри кольцевой цилиндрической полости. Из электродинамических задач, для решения которых применяются модифицированные функции Бесселя, наиболее важными являются задачи о переменных токах в цилиндрических проводниках. Однако и при решении некоторых электростатических задач также применяются модифицированные бесселевы функции. Рассмотрим, например, потенциал в области, ограниченной поверхностями $\rho=a$, $\rho=b$, $z=0$ и $z=c$, потенциал которых, за

исключением первой, равен нулю. Потенциал поверхности $\rho = a$ пусть будет $V = f(z)$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Фурье в интервале $0 < z < c$.



Фиг. 58. Эквипотенциальные линии точечного заряда, находящегося на оси цилиндрического отверстия в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью $K = 5$.

Вычисления выполнены А. Е. Гарисоном по формулам (5.452) и (5.453).

Поскольку $f(z) = 0$ при $z = 0$ или $z = c$, получается известное разложение (см. Пайерс, 815)

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k\pi z}{c}\right), \qquad A_k = \frac{2}{c}\int_0^c f(z) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k\pi z}{c}\right) dz. \tag{5.458}$$

Из выражений (5.310) и (5.311) и (5.411) вытекаст, что решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее всем граничным условиям, имеет вид

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k\pi z}{c}\right)\left[\frac{I_0(k\pi\rho/c)}{I_0(k\pi b/c)} - \frac{K_0(k\pi\rho/c)}{K_0(k\pi b/c)}\right]}{\frac{I_0(k\pi a/c)}{I_0(k\pi b/c)} - \frac{K_0(k\pi a/c)}{K_0(k\pi b/c)}}. \tag{5.459}$$

Для потенциала в области, лежащей внутри цилиндра $\rho = a$, на поверхности которого задан потенциал $V = f(z)$, и ограниченной двумя заземленными плоскостями $z = 0$ и $z = c$, выражение (5.459) дает

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi z}{c} \frac{I_0(k\pi\rho/c)}{I_0(k\pi a/c)} \tag{5.460}$$

Для потенциала в области, лежащей вне цилиндра $\rho = a$, на поверхности которого задан потенциал $V = f(z)$, и ограниченной заземленными плоскостями $z = 0$ и $z = c$, будем иметь

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi z}{c} \frac{K_0(k\pi\rho/c)}{K_0(k\pi a/c)}. \tag{5.461}$$

§ 38. Модифицированные бесселевы функции нецелого порядка. Общее решение модифицированного уравнения Бесселя в том случае, когда n не является целым числом, можно получить в результате замены в выражении (5.393) $j^{-n}J_n(jv)$ на $I_n(v)$

$$R_n^0(v) = AI_n(v) + BI_{-n}(v). \tag{5.462}$$

Функция $K_n(v)$ является линейной комбинацией $I_n(v)$ и $I_{-n}(v)$. Для этих функций справедливы полученные выше рекуррентные формулы. Формулы (5.394) — (5.398) дают

$$I_{1/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \operatorname{sh} v, \tag{5.463}$$

$$I_{-1/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \operatorname{ch} v, \tag{5.464}$$

$$I_{3/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left(\operatorname{ch} v - \frac{1}{v} \operatorname{sh} v\right). \tag{5.465}$$

$$I_{-3/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left(\operatorname{sh} v - \frac{1}{v} \operatorname{ch} v\right), \tag{5.466}$$

$$I_{5/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{3}{v^2}\right) \operatorname{sh} v - \frac{3}{v} \operatorname{ch} v\right], \tag{5.467}$$

$$I_{-5/2}(v) = \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{3}{v^2}\right) \operatorname{ch} v - \frac{3}{v} \operatorname{sh} v\right] \tag{5.468}$$

Общая формула принимает наиболее простой вид, если воспользоваться экспоненциальными функциями

$$I_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(v) = \frac{1}{(2\pi v)^{1/2}} \sum_{s=0}^{n} \frac{[(-1)^s e^v \mp (-1)^n e^{-v}](n+s)!}{s!\,(n-s)!\,(2v)^s}, \tag{5.469}$$

где в обеих частях нужно выбрать либо верхний, либо нижний знак.

Как $I_{n+\frac{1}{2}}(v)$ так и $I_{-n-\frac{1}{2}}(v)$ обращаются в бесконечность при $v = \infty$. Решением, обращающимся в нуль при $v \to \infty$, является функция $K_{n+\frac{1}{2}}(v)$, определяемая соотношением (5.409), в котором следует заменить n на $n + \frac{1}{2}$. Исключим из этого соотношения функцию $Y_{n+\frac{1}{2}}(jv)$ при помощи формулы (5.400), введем, согласно выражению (5.407), функции $I_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(v)$ и пред-

ставим их в виде (5.469). В результате экспоненциальные функции с положительными показателями степени сокращаются и мы получаем

$$K_{n+\frac{1}{2}}(v)=\frac{1}{2}\pi(-1)^n\left[I_{-n-\frac{1}{2}}(v)-I_{n+\frac{1}{2}}(v)\right]=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}\sum_{s=0}^{n}\frac{(n+s)!\,e^{-v}}{s!\,(n-s)!\,(2v)^s} \tag{5.470}$$

В простейших случаях

$$K_{1/2}(v)=\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}e^{-v},\qquad K_{3/2}(v)=\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{v}\right)e^{-v}. \tag{5.471}$$

При $v=0$ основную роль в сумме (5.470) играет член $n=s$, так что

$$K_{n+\frac{1}{2}}(v)\underset{v\to 0}{\longrightarrow}\left(\frac{\pi}{2v}\right)^{1/2}\frac{(2n-1)!!}{v^n}. \tag{5.472}$$

Сферические бесселевы функции $k_n(v)$ можно определить следующим образом:

$$k_n(v)=\left(\frac{2}{\pi v}\right)^{1/2}K_{n+\frac{1}{2}}(v)=\frac{1}{v}\sum_{s=0}^{n}\frac{(n+s)!\,e^{-v}}{s!\,(n-s)!\,(2v)^s}. \tag{5.473}$$

При помощи выражений (5.409) и (5.400) находим

$$k_n(jv)=-j^{-n}[j_n(v)-jn_n(v)]. \tag{5.474}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (5.403), получим

$$k_n(jv)\,j_n'(v)-jk_n'(jv)\,j_n(v)=-j^{-n+1}v^{-2}. \tag{5.475}$$

Рассматриваемые функции связаны с функциями $\hat{K}_n(v)$ Шелкунова и $h_n^{(1)}(v)$ Стрэттона следующим образом:

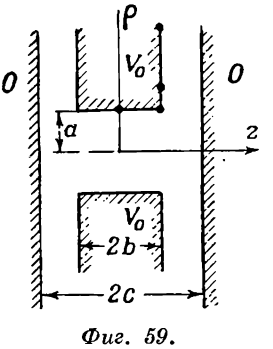
$$k_n(v)=v^{-1}\hat{K}_n(v)=-j^n h_n^{(1)}(jv)=-j^n[j_n(jv)+jn_n(jv)]. \tag{5.476}$$

Рекуррентные формулы, в соответствии с § 33б и выражением (5.473), имеют вид

$$-(2n+1)v^{-1}k_n=k_{n-1}-k_{n+1},$$

$$-k_n'=k_{n\mp1}\pm\left(n+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\right)v^{-1}k_n. \tag{5.477}$$

§ 39. Приближенные решения. Электростатические линзы. Для целого ряда практических задач, точные решения которых получить невозможно или затруднительно, можно найти приближенные решения, достаточно (с точки зрения эксперимента) близкие к точным. Один, часто весьма эффективный, приближенный метод заключается в том, что при решении задачи добиваются выполнения граничных условий не всюду, а лишь в конечном числе точек. Рамо и Виннери рассматривают в качестве примера аксиально симметричную электростатическую электронную линзу (фиг. 59). Линза состоит из плоской проводящей пластинки толщиной $2b$ с отверстием радиуса a; пластинка имеет потенциал V_0 и помещается посередине между параллельными заземленными плоскостями, расположенными на расстоянии $2c$ друг от друга. Фокусирующие свойства такой линзы выражаются обычно через поле на оси симметрии. Поэтому искомой величиной является в данном случае поле на оси. В соответствии с выражением (5.311) и § 34а решение, обладающее соответствующей симметрией



Фиг. 59.

и обращающееся в нуль на заземленных плоскостях, имеет вид

$$V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0 \left[\frac{(2n+1)\pi\rho}{c} \right] \sin \left[\frac{(2n+1)\pi z}{c} \right] \tag{5.478}$$

Если пренебречь в этом выражении всеми членами, для которых $n > 4$, то можно добиться, чтобы потенциал (5.478) был равен V_0 в четырех точках границы. Пусть эти точки имеют координаты $z = 0$ и $z = b$ при $\rho = a$ и $\rho = 1{,}5a$ и $\rho = 3a$ при $z = b$. Тогда в случае $a = b = 0{,}3c$ постоянные A_n оказываются равными

$$A_1 = 1{,}15, \quad A_2 = -0{,}172, \quad A_3 = 0{,}0211, \quad A_4 = 0{,}00098. \tag{5.479}$$

Эти значения дают, очевидно, удовлетворительную точность для точек на оси, где $I_0(0) = 1$.

§ 40. Функции клина. Функции, введенные в § 30б и 30в, оказываются неадэкватными в тех случаях, когда искомый потенциал обращается в нуль на поверхности цилиндров $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ и на плоскостях $z = z_1$, $z = z_2$ и имеет некоторое произвольное значение на плоскостях $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$. Для решения этой задачи требуются функции, ортогональные по ρ и z и получающиеся заменой n на $j\nu$ и k на jk в уравнениях (5.300) — (5.302). Таким образом,

$$\Phi(\nu\varphi) = C \operatorname{ch} \nu\varphi + D \operatorname{sh} \nu\varphi = C' e^{\nu\varphi} + D' e^{-\nu\varphi}, \tag{5.480}$$

$$Z(kz) = E \sin kz + F \cos kz, \tag{5.481}$$

$$R_\nu(k\rho) = AF_\nu(k\rho) + BG_\nu(k\rho), \tag{5.482}$$

где функция $R_\nu(v)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2R}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dR}{dv} - \left(1 - \frac{\nu^2}{v^2}\right) R = 0. \tag{5.483}$$

Функция $F_\nu(v) \to \infty$ при $v \to \infty$ и определяется формулой

$$F_\nu(v) = \operatorname{cosec} \operatorname{ch} \nu\pi \int_0^{\pi} e^{v \cos\theta} \operatorname{ch} \nu\theta \, d\theta - \int_0^{\infty} e^{-v \operatorname{ch} t} \sin \nu t \, dt. \tag{5.484}$$

Функция $G_\nu(v) \to 0$ при $v \to \infty$ и определяется следующим образом:

$$G_\nu(v) = \int_0^{\infty} e^{-v \operatorname{ch} t} \cos \nu t \, dt = K_{j\nu}(v). \tag{5.485}$$

Если v меньше некоторого определенного значения, увеличивающегося с ростом ν, то обе эти функции — периодические и при ν, стремящемся к нулю, осциллируют как $\sin\left[\nu \ln\left(\frac{1}{2}v\right)\right]$ и $\cos\left[\nu \ln\left(\frac{1}{2}v\right)\right]$. Интеграл по v от произведения этих функций, умноженного на v, обращается в нуль, за исключением того случая, когда индексы ν одинаковы у обоих сомножителей. Поэтому любую функцию, допускающую разложение в ряд Фурье, можно разложить и по функциям $R_\nu(k\rho)$. Задача о трехмерном диэлектрическом клине решается точно таким же методом, как и аналогичная двухмерная задача в § 8 гл. IV.

ЗАДАЧИ

1. Два одинаковых точечных заряда помещены на расстоянии $2b$ друг от друга. Показать, что помещенная посередине между ними заземленная проводящая сфера уничтожает их взаимное отталкивание, если радиус сферы равен приблизительно $b/8$.

2. Пусть $\mathbf{c}$ — радиус-вектор, проведенный из центра проводящей сферы радиуса a в точку, где находится точечный заряд q. Показать, что если заряд сферы Q равен

$$-c^2\left[4\pi\varepsilon E\left(1+2\left(\frac{a}{c}\right)^3\right)-q\left(\frac{a}{c}\right)^3\frac{2c^2-a^2}{(c^2-a^2)^2}\right],$$

то сила, действующая на заряд q в однородном поле $\mathbf{E}$, совпадающем по направлению с радиус-вектором $\mathbf{c}$, обращается в нуль.

3. Бесконечная проводящая плоскость является границей однородного поля, напряженность которого X неизвестна. На заданный заряд q, помещенный на расстоянии r от плоскости, действует некоторая (неизвестная) сила F. Если прямо под зарядом поместить на плоскости проводящую полусферу радиуса a, то оказывается, что сила, действующая на заряд, не изменяется. Показать, что

$$X=\frac{qr^6}{2\pi\varepsilon\,(r^4-a^4)^2},\qquad F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{2r^6}{(r^4-a^4)^2}-\frac{1}{4r^2}\right]$$

4. Сферическая проводящая полость радиуса a наполнена до половины диэлектриком. Сила, обусловленная изображениями, не действует на заряд, помещенный на оси симметрии на расстоянии $a/3$ от плоской поверхности диэлектрика. Показать, что проницаемость диэлектрика равна $1{,}541\ \varepsilon_v$.

5*. Заряд расположен в точке O над бесконечной проводящей плоскостью, потенциал которой равен нулю. Показать, что заряд любого участка плоскости пропорционален углу, над которым виден этот участок из точки O.

6*. Две бесконечные заземленные проводящие плоскости пересекаются под углом 60°. Заряд e расположен на одинаковом расстоянии от обеих плоскостей и на расстоянии r от линии их пересечения. Найти плотность поверхностного заряда на плоскостях. Показать, что в точке, находящейся на расстоянии $r\,3^{1/2}$ от вершины угла в плоскости, проходящей через точечный заряд и перпендикулярной к линии пересечения, плотность поверхностного заряда равна

$$-\frac{e}{4\pi r^2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7^{3/2}}\right).$$

7*. Точечный заряд e находится вне проводящей изолированной сферы на расстоянии r от ее центра. Какой минимальный положительный заряд следует поместить на сферу, чтобы поверхностная плотность заряда была на ней всюду положительна?

8*. Заземленная проводящая сфера находится в поле точечного заряда, расположенного в точке P вне сферы. Найти отношение индуцированного заряда, приходящегося на ту часть поверхности сферы, которая видна из точки P, к индуцированному заряду остальной ее части.

9*. Точечный заряд e подносится к проводнику, имеющему форму шара радиуса a. Заряд проводника равен $E \gg e$. Показать, что точечный заряд будет отталкиваться от сферы, если расстояние от него до ближайшей точки поверхности сферы не превосходит (приближенно) $\frac{1}{2}a\,(e/E)^{1/2}$.

10*. Полость в проводнике представляет собой четверть сферической полости, ограниченную двумя взаимно перпендикулярными диаметральными плоскостями. Построить изображения точечного заряда, расположенного внутри полости.

11*. Проводящая поверхность образована двумя бесконечными плоскостями, пересекающимися под прямым углом, и заключенной между ними четвертью сферической поверхности радиуса a. Потенциал поверхности равен нулю. Точечный заряд e расположен симметрично относительно плоскостей и сферической поверхности на большом расстоянии f от центра последней. Показать, что заряд, индуцированный на сферическом участке описанной поверхности, равен приблизительно $-5ea^3/(\pi f^3)$.

12*. Тонкая плоская проводящая пластинка произвольной формы и размера находится в поле заряда, распределенного с заданной плотностью по одну сторону от нее. Пусть σ_1 — плотность индуцированного поверхностного заряда в точке P на той стороне пластинки, которая обращена к заданному заряду, а σ_2 — плотность поверхностного заряда в соответствующей точке противоположной стороны. Доказать, что

$$\sigma_1-\sigma_2=\sigma_0,$$

где σ_0 — плотность поверхностного заряда, индуцированного заданным зарядом в точке P бесконечной проводящей плоскости, совпадающей с пластинкой.

13*. Проводящая плоскость имеет выпуклость в виде полусферы радиуса a. На ее оси, на расстоянии f от центра, находится точечный заряд e. Показать, что если потенциал плоскости и выпуклости равен нулю, то заряд, индуцированный на последней, равен

$$-e\left(1-\frac{f^2-a^2}{f(f^2+a^2)^{1/2}}\right).$$

14*. Заземленная проводящая сфера радиуса a находится в поле заряда, равномерно распределенного с плотностью σ по внешней поверхности непроводящего сегмента радиуса c, концентричного со сферой. Показать, что плотность заряда на поверхности сферы, обращенной к сегменту, в точке пересечения A оси сегмента со сферой равна

$$-\frac{\sigma c}{2a^2}(c+a)\left(1-\frac{AB}{AD}\right),$$

где B — точка пересечения оси с поверхностью сегмента и D — точка на его краю.

15*. Два проводящих диска радиусов a и a' расположены перпендикулярно к прямой, соединяющей их центры. Расстояние между ними r велико по сравнению с a. Первый диск имеет потенциал V, а второй заземлен. Показать, что заряд первого диска равен

$$\frac{8\pi^2\varepsilon a r^2 V}{(\pi^2 r^2-4aa')}.$$

16*. Тонкое проволочное кольцо радиуса c, несущее заряд Q, расположено в плоскости, касательной к заземленной проводящей сфере диаметра a, таким образом, что центр кольца лежит в точке касания плоскости и сферы. Доказать, что плотность поверхностного заряда, индуцированного на сфере в точке, направление на которую из центра кольца образует угол ψ с нормалью к его плоскости, равна

$$-\frac{c^2 Q\sec^3\psi}{4\pi^2 a}\int_0^{2\pi}(a^2+c^2\sec^2\psi-2ac\operatorname{tg}\psi\cos\theta)^{-3/2}\,d\theta.$$

17. В колбе радиуса a с проводящими стенками, из которой выкачан воздух, на расстоянии c от ее центра образовался неподвижный ион с зарядом q и массой m. Показать, что ион достигнет стенки через промежуток времени, равный

$$t=q^{-1}k(4\pi m\varepsilon a^3)^{1/2}(K-E),\quad \text{где}\quad k^2=(a^2-c^2)a^{-2},$$

K и E — полные эллиптические интегралы модуля k.

18. Центр заземленной проводящей сферы радиуса a находится на оси заряженного кольца. Радиус-вектор c, проведенный из центра сферы к кольцу, образует угол α с его осью. Показать, что сила, втягивающая сферу в кольцо, равна

$$\frac{Q^2E(c^2-a^2)k^3\cos\alpha}{16\pi^2\varepsilon c^2a^2\sin^3\alpha(1-k^2)},\quad \text{где}\quad k^2=\frac{4a^2c^2\sin^2\alpha}{a^4+c^4-2a^2c^2\cos 2\alpha},$$

E — полный эллиптический интеграл модуля k.

19*. Частица с зарядом e находится в средней точке линии, соединяющей центры двух одинаковых проводящих сфер, потенциал которых равен нулю. Пренебрегая высшими степенями m — отношения радиуса сфер к расстоянию между их центрами, показать, что заряд, индуцированный на каждой из них, равен

$$-2em(1-m+m^2-3m^3+4m^4).$$

20*. Две изолированные проводящие сферы радиусов a и b, несущие заряды Q_1 и Q_2, расположены таким образом, что расстояние между их центрами c велико по сравнению с a и b. Показать, что потенциальная энергия системы равна приближенно

$$(8\pi\varepsilon)^{-1}[(a^{-1}-b^3c^{-4})Q_1^2+2c^{-1}Q_1Q_2+(b^{-1}-a^3c^{-4})Q_2^2].$$

21*. Две изолированные проводящие сферы радиуса a находятся в однородном электрическом поле напряженности E, перпендикулярном к прямой, соединяющей центры сфер. Показать, что сила взаимодействия между сферами равна

$$12\pi\varepsilon E^2a^6c^{-4}(1-2a^3c^{-3}-8a^5c^{-5}+\ldots),$$

где c — расстояние между их центрами.

22*. Две незаряженные изолированные сферы радиусов a и b вносятся в однородное электрическое поле, параллельное прямой, соединяющей их центры. Расстояние между центрами сфер c много больше их радиусов a и b. Показать, что плотность поверхностного заряда в точке пересечения сферы a с прямой, соединяющей центры сфер, приближенно равна

$$\varepsilon E\,(3 + 6b^3c^{-3} + 15ab^3c^{-4} + 28a^2b^3c^{-5} + 57a^3b^3c^{-6} + \ldots).$$

23*. Две одинаковые проводящие сферы радиуса a касаются друг друга. Показать, что емкость полученного таким образом проводника равна $8\pi\varepsilon a \ln 2$.

24*. Радиусы двух касающихся проводящих сфер равны соответственно a и b, причем $a \gg b$. Показать, что если потенциал сфер равен V, то их заряды будут

$$4\pi\varepsilon Va\left(1 - \frac{\pi^2b^2}{6(a+b)^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{2\pi^3ab^2\varepsilon V}{3(a+b)^2}.$$

25*. Проводящая сфера радиуса a касается бесконечной проводящей плоскости. На продолжении диаметра, проходящего через точку касания, на расстоянии c от этой точки находится единичный точечный заряд. Показать, что заряды, индуцированные на плоскости и на сфере, равны соответственно

$$-\frac{\pi a}{c}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a}{c}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\pi a}{c}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a}{c}\right) - 1.$$

26*. Расстояние между центрами двух одинаковых заземленных проводящих сфер радиуса a равно $2c$. Показать, что единичный заряд, находящийся посередине между сферами, индуцирует на каждой из них заряд

$$\sum_1^\infty (-1)^n \operatorname{sech} n\alpha,$$

где $c = a \operatorname{ch}\alpha$.

27. Расстояние между центрами двух одинаковых сфер радиуса a равно c. Сферы соединены тонкой проволочкой. Показать, что емкость такой системы равна

$$8\pi\varepsilon a \operatorname{sh}\beta \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \operatorname{cosech} n\beta,$$

где $\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}c/a$.

28. Две одинаковые сферы радиуса a, центры которых находятся на расстоянии c друг от друга, заряжены до одинакового потенциала V. Показать, что сила отталкивания между ними равна

$$2\pi\varepsilon V^2 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} (\operatorname{cth}\beta - n \operatorname{cth} n\beta) \operatorname{cosech} n\beta,$$

где $\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}c/a$.

29*. Изолированная проводящая сфера радиуса a помещена посередине между двумя бесконечными параллельными заземленными плоскостями, находящимися на большом расстоянии $2c$ друг от друга. Пренебрегая величинами порядка $(a/c)^2$, показать, что емкость такой сферы равна приблизительно

$$4\pi\varepsilon a\,[1 + (a/c)\ln 2].$$

30*. Две сферы радиусов r_1 и r_2 касаются друг друга. В таком положении их емкости равны соответственно c_1 и c_2. Показать, что

$$c_1 = 4\pi\varepsilon r_2\left(f^2 \sum_1^\infty n^{-2} + f^3 \sum_1^\infty n^{-3} + f^4 \sum_1^\infty n^{-4} + \ldots\right),$$

где $f = r_1(r_1 + r_2)^{-1}$.

31*. Между двумя параллельными бесконечными заземленными плоскостями находится точечный заряд e. Расстояния от заряда до плоскостей равны соответственно a и b. Показать, что потенциал в точке P на прямой, перпендикулярной к плоскостям и проходящей через заряд, равен

$$\frac{e}{8\pi\varepsilon(a+b)}\left[-\Psi\left(\frac{z}{2a+2b}\right) + \Psi\left(\frac{2a-z}{2a+2b}\right) + \Psi\left(\frac{2b+z}{2a+2b}\right) - \Psi\left(\frac{2a+2b-z}{2a+2b}\right)\right],$$

где z — расстояние от заряда до точки P, $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

32. Электрон с зарядом e и массой m, летящий первоначально в горизонтальном направлении со скоростью v, должен пролететь (в вакууме) над плоской незаряженной горизонтальной поверхностью пластинки из диэлектрика длиной d. Пусть в тот момент, когда электрон проходит над краем пластинки, расстояние между ними равно a. Пренебрегая краевым эффектом, показать, что под действием сил, обусловленных изображением, электрон будет втянут в диэлектрик, прежде чем достигнет противоположного его края, если

$$a^3 = \frac{(K-1)\,e^2d^2}{2m\pi^3\varepsilon_v\,(K+1)\,v^2}.$$

33*. Точечный заряд расположен над плоской бесконечной поверхностью диэлектрика. Угол между силовой линией электрического поля в диэлектрике и нормалью к его поверхности равен α; угол между этими же линиями вблизи точечного заряда равен β. Показать, что α и β связаны соотношением

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \left(\frac{2K}{1+K}\right)^{1/2}\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

34*. Заряды e_1 и e_2 расположены на прямой, перпендикулярной к плоской границе раздела двух диэлектрических сред с относительными диэлектрическими проницаемостями K_1 и K_2, на равных расстояниях a от границы. Найти силы, действующие на заряды, и объяснить, почему эти силы не равны.

35*[1]). Два проводника, емкости которых в воздухе равны c_1 и c_2, помещены на прямой, перпендикулярной к плоской границе раздела двух диэлектриков с относительными диэлектрическими проницаемостями k_1 и k_2. Расстояния от проводников до границы раздела, равные соответственно a и b, велики по сравнению с размерами самих проводников. Проводники соединены между собой тонкой проволочкой и заряжены. Доказать, что заряд распределяется по проводникам (приближенно) в отношении

$$k_1\left[\varepsilon_v\frac{4\pi}{c_2}-\frac{k_1-k_2}{2b\,(k_1+k_2)}-\frac{2k_2}{(k_1+k_2)\,(a+b)}\right] : k_2\left[\varepsilon_v\frac{4\pi}{c_1}+\frac{k_1-k_2}{2a\,(k_1+k_2)}-\frac{2k_1}{(k_1+k_2)\,(a+b)}\right]$$

36*. В воздухе, над плоской поверхностью бесконечного диэлектрика, находится проводящая сфера радиуса a. Расстояние между центром сферы и поверхностью диэлектрика равно c. Показать, что ее емкость равна

$$4\pi\varepsilon_v a\,\mathrm{sh}\,\alpha\cdot\sum_1^\infty\left[\frac{(K-1)}{(K+1)}\right]^{n-1}\mathrm{cosech}\,n\alpha,$$

где $\mathrm{ch}\,\alpha = c/a$.

37. Заземленный проводник состоит из двух одинаковых проводящих сфер радиуса a, пересекающихся ортогонально. В плоскости пересечения на расстоянии $3a2^{-1/2}$ от оси симметрии находится точечный заряд q. Показать, что заряд, индуцированный на проводнике, равен $\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5^{1/2}}\right)q$.

38. Плоский заземленный проводящий лист имеет круглое отверстие радиуса a. В плоскости листа на расстоянии b от центра отверстия находится точечный заряд q. Показать, что плотность поверхностного заряда, индуцированного на листе на расстоянии c от центра отверстия и на расстоянии r от заряда q, равна

$$-q\,(a^2-b^2)^{1/2}/[2\pi^2r^2\,(c^2-a^2)^{1/2}].$$

39. Показать, что если в предыдущей задаче заряд распределен по кольцу радиуса b, лежащему в плоскости листа концентрично с отверстием, то плотность индуцированного поверхностного заряда в точке P равна

$$-\frac{q\,(a^2-b^2)^{1/2}}{[2\pi^2\,(c^2-b^2)\,(c^2-a^2)^{1/2}]}$$

40. Пользуясь решением предыдущей задачи и теоремой взаимности Грина, показать (при помощи метода инверсии), что потенциал в точке P поверхности сферы, часть которой покрыта тонкой металлической оболочкой, имеющей форму чаши

---

[1]) Ввиду ошибки у автора эта задача приведена непосредственно из книги Джинса с соответствующим переводом в практическую систему единиц. — *Прим. перев.*

и заряженной до потенциала V_0, равен

$$\frac{2V_0}{\pi}\arcsin\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

Здесь θ — угол между осью симметрии системы и прямой, соединяющей точку пересечения этой оси и поверхности листа с точкой P, α — угол между осью и прямой, соединяющей ту же точку с краем «чаши».

41. Используя решение предыдущей задачи, найти первый член разложения потенциала заряженной сферической «чаши» по сферическим гармоникам. Все точки поверхности «чаши» находятся на одинаковом расстоянии a от начала координат, а угол между ее осью и прямой, соединяющей начало координат с краем «чаши», равен $\frac{1}{2}\beta$. Пользуясь полученным выражением, показать, что емкость такой системы равна

$$4\varepsilon a(\beta+\sin\beta).$$

42. Используя решение задачи 39 и применяя метод инверсии, найти плотность поверхностного заряда, индуцированного на заземленной сферической проводящей «чаше» зарядом, распределенным равномерно (с плотностью $-\sigma_1$) по поверхности, дополняющей «чашу» до сферы. Путем наложения заряда, равномерно распределенного по всей поверхности сферы с плотностью σ_1, показать, что плотности поверхностного заряда на внутренней и внешней сторонах «чаши», заряженной до потенциала V_0, равны соответственно

$$\sigma_i=\frac{\varepsilon V_0}{\pi a}\left[\frac{\sin\alpha}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^{1/2}}-\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right],\qquad \sigma_0=\frac{\varepsilon V_0}{a}+\sigma_i.$$

Обозначения те же, что и в задаче 40.

43*. Поверхность проводника образована внешними поверхностями двух одинаковых сфер, пересекающихся таким образом, что угол между их радиусами в точке пересечения равен $2\pi/3$. Показать, что емкость такого проводника равна

$$2\pi a\varepsilon(5-3^{-1/2}\cdot 4),$$

где a — радиус сфер.

44*. Изолированный незаряженный проводник, образованный двумя одинаковыми сферами радиуса a, пересекающимися под прямым углом, вносится в однородное электрическое поле напряженности E таким образом, что прямая, соединяющая центры сфер параллельна силовым линиям. Показать, что заряды, индуцированные на сферах, равны $\pm 11\pi\varepsilon a^2E/2$.

45*. Поверхность проводника состоит из бо́льших (внешних) частей поверхностей двух одинаковых сфер радиуса a, пересекающихся под углом $\pi/3$, и третьей сферы радиуса c, пересекающейся с каждой из одинаковых сфер под прямым углом. Показать, что емкость такого проводника равна

$$4\pi\varepsilon\left\{c+a\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3}3^{1/2}\right)-ac\left[2(a^2+c^2)^{-1/2}-2(a^2+3c^2)^{-1/2}+(a^2+4c^2)^{-1/2}\right]\right\}$$

46*. Сферическая оболочка радиуса a с маленьким отверстием, площадь которого равна S, заряжена до потенциала V. Доказать, что заряд на внутренней стороне оболочки меньше $\frac{1}{2}\varepsilon VS/a$.

47*. В тонкой проводящей сферической оболочке вырезано отверстие. Оболочка заряжена. Доказать, что в любой точке разность плотностей поверхностного заряда на внутренней и внешней сторонах оболочки постоянна.

48*. Показать, что емкость эллиптической пластинки с малым эксцентриситетом e и площадью A равна приближенно

$$8\varepsilon\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}\left(1+\frac{e^4}{64}+\frac{e^6}{64}\right).$$

49*. Объем эллипсоидального проводника, мало отличающегося от шара, равен объему шара радиуса r. Оси эллипсоида равны $2r(1+\alpha)$, $2r(1+\beta)$, $2r(1+\gamma)$. Пренебрегая кубами величин α, β, γ, показать, что его емкость равна

$$4\pi\varepsilon r\left[1+\frac{2}{15}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right].$$

50. Заряд сплюснутого сфероидального проводника с полуосями a и b ($a<b$) равен Q. Показать, что две половины, на которые сфероид рассекается диаметральной

плоскостью, отталкиваются друг от друга с силой

$$Q^2\,[16\pi\varepsilon\,(b^2-a^2)]^{-1}\ln\frac{b}{a}.$$

51*. Заряд вытянутого сфероидального проводника с полуосями a и b $(a>b)$ равен Q. Показать, что две половины, на которые сфероид рассекается диаметральной плоскостью, отталкиваются друг от друга с силой

$$Q^2\,[16\pi\varepsilon\,(a^2-b^2)]^{-1}\ln\frac{a}{b}.$$

Найти величину этой силы в случае сферы.

52*. Тонкий круглый диск радиуса a окружен сфероидальным проводником, поверхность которого получается вращением эллипса с фокусами S, лежащими на краю диска. Заряд диска равен Q, заряд сфероида Q_1. Показать, что энергия такой системы равна

$$[Q^2\angle BSC+(Q+Q_1)^2\angle SBC]/(8\pi\varepsilon a),$$

где B — точка пересечения оси вращения с поверхностью сфероида, C — центр диска (сфероида).

53*. Конденсатор состоит из двух концентричных и коаксиальных сплюснутых сфероидов с малыми эксцентриситетами δ и δ'. Оси сфероидов, совпадающие по направлению с осью симметрии, равны $2c$ и $2c'$. Пренебрегая квадратами эксцентриситетов, показать, что емкость такого конденсатора равна

$$4\pi\varepsilon cc'\,(c'-c)^{-2}\left[c'-c+\frac{2}{3}\,(\delta c'-\delta' c)\right].$$

Найти с той же степенью точности распределение заряда на каждой из обкладок конденсатора.

54*. Относительная диэлектрическая проницаемость среды, которая заполняет конденсатор, состоящий из двух конфокальных вытянутых сфероидов, является функцией точки и равна $Kl/\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ — расстояние от данной точки до оси вращения. Показать, что емкость такого конденсатора равна

$$\frac{2\pi^2\varepsilon_v Kl}{\ln\left(\dfrac{a_1+b_1}{a+b}\right)},$$

где a, b и a_1, b_1 — полуоси эллипсов, вращением которых получаются поверхности сфероидов.

55*. Тонкая сферическая «чаша» образована частью поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=cz$, лежащей внутри конуса $(x/a)^2+(y/b)^2=(z/c)^2$. «Чаша» соединена с землей при помощи тонкой проволоки. Введем обозначения: O — начало координат, C — точка, диаметрально противоположная O («вершина чаши»), Q — произвольная точка на краю «чаши», P — точка дуги большого круга CQ. Доказать, что заряд E, помещенный в точку O, индуцирует на сфере поверхностный заряд, плотность которого в точке P равна

$$-\frac{Ec}{4\pi abI}\,\frac{CQ}{OP^2\,(OP^2-OQ^2)^{1/2}},\quad\text{где}\quad I=\int_0^{1/2\pi}\frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{1/2}}.$$

56. Заряд q находится на расстоянии c от центра сферической полости радиуса a, вырезанной в бесконечном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью K. Показать, что сила, действующая на заряд, равна

$$\frac{(K-1)\,q^2}{4\pi\varepsilon_v c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1)}{n+K\,(n+1)}\left(\frac{c}{a}\right)^{2n+1}$$

57. Проводящая заземленная сфера радиуса a расположена таким образом, что ее центр находится на оси заряженного кольца, а радиус-вектор c, проведенный из центра сферы к кольцу, образует с осью последнего угол α. Показать, что сила, втягивающая сферу в кольцо, равна

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon c^2}\sum_{0}^{\infty}(n+1)\,P_{n+1}(\cos\alpha)\,P_n(\cos\alpha)\left(\frac{a}{c}\right)^{2n+1}$$

58. Сферические координаты круглого кольца равны a, α. Шар радиуса b из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью K расположен так, что его центр находится в начале координат. Принимая плотность линейного заряда кольца равной τ, показать, что выражение для потенциала между кольцом и сферой имеет вид

$$\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n-\frac{n(K-1)b^{2n+1}}{a^n[n(K+1)+1]r^{n+1}}\right\}P_n(\cos\theta).$$

59. Участок поверхности сферы радиуса a, лежащий между углами $\theta=\alpha$ и $\theta=\pi-\alpha$, несет поверхностный заряд, распределенный с постоянной плотностью σ. Доказать, что выражение для потенциала вне сферы имеет вид

$$\frac{a\sigma}{\varepsilon}\left\{\frac{a}{r}\cos\alpha+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}[P_{2n+1}(\cos\alpha)-P_{2n-1}(\cos\alpha)]\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(\cos\theta)\right.$$

60. В заземленной фотоэлектрической камере, представляющей собой сферу радиуса b, в качестве коллектора используется круглое кольцо радиуса a. Кольцо помещено в центре; заряд его равен Q. Показать, что напряженность поля на поверхности сферы равна

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\frac{4n+1}{b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta).$$

61. Точечный заряд q находится на расстоянии b от центра двух концентрических проводящих заземленных сфер, радиусы которых равны соответственно a и c (причем $a<b<c$). Показать, что в области $a<r<b$ выражение для потенциала имеет вид

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{2n+1}-c^{2n+1}}{b^{n+1}(a^{2n+1}-c^{2n+1})}\left(r^n-\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta).$$

62. На бесконечной проводящей плоскости помещена половина диэлектрического шара радиуса a, прилегающая к плоскости всей площадью большого круга. Прямо над ней, на расстоянии b от плоскости, находится точечный заряд q. Показать, что вне диэлектрика плотность поверхностного заряда, индуцированного на плоскости, равна

$$-\frac{q}{2\pi}\left[\frac{b}{(b^2+r^2)^{3/2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1-K)(2n+1)(2n+2)}{1+(2n+1)(K+1)}\frac{1\cdot3\ldots(2n+1)}{2\cdot4\ldots(2n+2)}\frac{a^{4n+3}}{b^{2n+2}r^{2n+3}}\right]$$

63. Круглый диск радиуса c заряжен до потенциала V_1. Показать, что потенциал, создаваемый таким диском в окружающем пространстве, при $r>c$ равен

$$\frac{2V_1}{\pi}\sum(-1)^n(2n+1)^{-1}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(\cos\theta).$$

Найти значение потенциала в области $r<c$.

64. Два одинаковых кольца радиуса a расположены друг против друга в параллельных плоскостях таким образом, что радиус одного из них виден из центра другого под углом α. Считая заряды колец равными Q и Q', доказать, что сила отталкивания между ними равна

$$\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}(\sin\alpha)^{2n+3}P_{2n+1}(\cos\alpha).$$

65. Проводящие стенки сферической полости радиуса a покрыты изнутри слоем однородного диэлектрика; внутренний радиус такой изоляции равен b. Показать, что на точечный заряд q, находящийся в полости на расстоянии c от центра, действует сила

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nc^{2n-1}\{(K-1)(n+1)a^{2n+1}+[(K+1)n+1]b^{2n+1}\}}{b^{3n+1}\{[(K+1)n+K]a^{2n+1}+(K-1)nb^{2n+1}\}}.$$

66. Точечный заряд q находится на расстоянии c от центра заземленной проводящей сферы радиуса a, покрытой слоем диэлектрика, внешний радиус которого равен b, а относительная диэлектрическая проницаемость равна K. Показать, что выражение для потенциала в диэлектрике имеет вид

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_v c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,b^{2n+1}\,(r^n-a^{2n+1}r^{-n-1})}{c^n\{[(K+1)\,n+1]\,b^{2n+1}+(n+1)\,(K-1)\,a^{2n+1}\}}P_n(\cos\theta).$$

67*. В однородное электрическое поле напряженности F вносится изолированная проводящая сфера радиуса a, полный заряд которой равен нулю. Показать, что если рассечь сферу на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля, то полученные полусферы будут стремиться раздвинуться и потребуется сила, равная $\frac{9}{4}\pi\varepsilon a^2F^2$, чтобы удержать их вместе.

68*. В изолированном незаряженном сферическом проводнике имеется сферическая полость радиуса b. В полости находится проводящий шар радиуса a, заряд которого равен Q. Расстояние c между центрами шара и полости очень мало. Пренебрегая членами порядка c^2 найти потенциал внутри полости и показать, что плотность заряда в точке P поверхности шара равна

$$\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{3c\cos\theta}{b^3-a^3}\right),$$

где θ — угол между радиусом, проходящим через точку P, и прямой, соединяющей центры полости и шара.

69*. Уравнение поверхности проводника имеет вид $r=a\,(1+\delta P_n)$, причем величина δ очень мала. Проводник вносится в однородное электрическое поле напряженности F, параллельное оси гармоник P_n. Показать, что плотность индуцированного заряда в любой точке поверхности такого проводника больше плотности заряда, который возник бы, если бы поверхность проводника была сферической, на величину

$$\left[\frac{3n\varepsilon F\delta}{2n+1}\right][(n+1)\,P_{n+1}+(n-2)\,P_{n-1}].$$

70*. Уравнение поверхности проводника, заряженного до потенциала V, имеет вид $r=a\,(1+\delta P_n)$. Проводник окружен слоем диэлектрика (K), причем поверхность раздела диэлектрика с окружающей средой (воздухом) задана уравнением $r=b\,(1+\eta P_n)$. Пренебрегая квадратами и более высокими степенями величин δ и η, показать, что потенциал в окружающей среде на расстоянии r от начала координат равен

$$\frac{KabV}{(K-1)\,a+b}\left\{\frac{1}{r}+\frac{(2n+1)\,\delta a^n b^{2n+1}+(K-1)\,\eta b^n\,[nb^{2n+1}+(n+1)\,a^{2n+1}]}{(1+n+nK)\,b^{2n+1}+(K-1)\,(n+1)\,a^{2n+1}}\frac{P_n}{r^{n+1}}\right\}$$

71*. Поверхность заземленного проводника задана уравнением

$$r=a\,(1+\eta S_n),$$

где величина η очень мала. Показать, что точечный заряд, находящийся на расстоянии f от начала координат в точке с угловыми координатами θ и φ, индуцирует на проводнике заряд, равный приближенно

$$-\frac{a}{f}\left[1+\left(\frac{a}{f}\right)^n\eta S_n(\theta,\varphi)\right]$$

72*. Заземленная проводящая сфера радиуса c окружена концентричным ей круглым проволочным кольцом радиуса a. Заряд, приходящийся на единицу длины кольца, равен e. Показать, что плотность поверхностного заряда на сфере равна

$$-\frac{e}{2c}\left[1-5\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^2P_2+9\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{c}{a}\right)^4P_4-13\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{c}{a}\right)^6P_6+\ldots\right]$$

73*. Диэлектрический шар окружен тонким круглым проволочным кольцом, несущим заряд Q. Радиус кольца b значительно больше радиуса шара. Показать, что потенциал внутри шара имеет вид

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_v b}\left[1+\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{1+4n}{1+2n\,(1+K)}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}P_{2n}\right]$$

74*. Проводящая сфера радиуса a окружена концентричной диэлектрической (с относительной проницаемостью K) оболочкой, внешний радиус которой равен $2a$. Показать, что, когда такая система вносится в однородное электрическое поле напряженности F, на проводнике появляются заряды, противоположные по знаку и равные по величине

$$36\pi a^2 \varepsilon_v F K/(5K+7).$$

75*. Проводящий шар радиуса a окружен оболочкой из однородного диэлектрика K. Внешний радиус оболочки равен b, а центр ее находится на малом расстоянии γ от центра шара. Предполагая, что потенциал шара равен V, а других проводников в окружающем пространстве не имеется, показать, что плотность заряда на поверхности шара равна приближенно

$$\frac{\varepsilon_v K V b}{a[(K-1)a+b]}\left[1+\frac{6(K-1)\gamma a^2\cos\theta}{2(K-1)a^3+(K+2)b^3}\right]$$

где θ — угол между радиусом, проведенным в ту точку, где ищется плотность заряда, и прямой, соединяющей центры шара и оболочки.

76*. Внутри стеклянной оболочки, ограниченной концентрическими сферами радиусов a и b ($a<b$), находится заряд q, расположенный в точке Q на малом расстоянии c от центра сфер O. Показать, что потенциал в точке P вне оболочки на расстоянии r от точки Q равен приближенно

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_v}\left[\frac{1}{r}+\frac{2c(b^3-a^3)(K-1)^2}{2a^3(K-1)^2-b^3(K+2)(2K+1)}\frac{\cos\theta}{r^2}\right],$$

где K — относительная диэлектрическая проницаемость стекла, а θ — угол между QP и OQ.

77. Показать, что диэлектрический шар радиуса a (относительная проницаемость шара равна K) и точечный заряд q, расположенный на расстоянии c от его центра, притягиваются с силой

$$\frac{(1-K)q^2}{4\pi\varepsilon_v c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{1+(K+1)n}\left(\frac{a}{c}\right)^{2n+1}$$

78. Проводящая сфера радиуса a насажена на проводящий конус, поверхность которого пересекается с поверхностью сферы под прямым углом, а угол раствора равен $2(\pi-\alpha)$. Показать, что в том случае, когда такая система заряжена, выражение для потенциала имеет вид

$$A(r^n-a^{2n+1}r^{-n-1})P_n(\cos\theta),$$

где $0<n<1$ и $P_n(\cos\alpha)=0$ при $\alpha>\frac{1}{2}\pi$.

79. Два коаксиальных проводящих конуса, углы раствора которых, измеренные от положительного направления оси, равны соответственно 2α и 2β, пересекаются ортогонально с проводящей сферой радиуса a. Показать, что если такая система заряжена, то потенциал вне сферы в пространстве между конусами равен

$$A(r^n-a^{2n+1}r^{-n-1})[Q_n(\cos\beta)P_n(\cos\theta)-P_n(\cos\beta)Q_n(\cos\theta)],$$

где n — наименьшее число, для которого

$$Q_n(\cos\beta)P_n(\cos\alpha)-P_n(\cos\beta)Q_n(\cos\alpha)=0.$$

80. Сплюснутый диэлектрический сфероид с поверхностью ξ_0 вносится в однородное электрическое поле E, параллельное оси $\xi=1$. Показать, что поле внутри сфероида однородно и его напряженность равна

$$\frac{E}{(K-1)\zeta_0[(1+\zeta_0^2)\operatorname{arc\,ctg}\zeta_0-\zeta_0]-K}.$$

81. Сфероид, описанный в предыдущей задаче, вносится в однородное поле E, перпендикулярное к оси $\xi=1$. Показать, что поле внутри сфероида однородно и его напряженность равна

$$\frac{2E}{2+(K-1)\zeta_0[(1+\zeta_0^2)\operatorname{arc\,ctg}\zeta_0-\zeta_0]}.$$

82. Вытянутый диэлектрический сфероид с поверхностью η_0 вносится в однородное электрическое поле E, параллельное оси $\xi=1$. Показать, что поле внутри сфероида

однородно и его напряженность равна

$$\frac{E}{(K-1)\,\eta_0\,[(1-\eta_0^2)\,\mathrm{ar\,cth}\,\eta_0+\eta_0]-K}.$$

83. Сфероид, описанный в предыдущей задаче, вносится в однородное поле E, перпендикулярное к оси $\xi=1$. Показать, что поле внутри сфероида однородно и его напряженность равна

$$\frac{2E}{2+(K-1)\,\eta_0\,[(1-\eta_0^2)\,\mathrm{ar\,cth}\,\eta_0+\eta_0]}.$$

84. Сфероид, относительная диэлектрическая проницаемость которого равна K, вносится в однородное электрическое поле E таким образом, что его ось вращения образует угол α с полем. Показать, что на сфероид действует момент, равный

$$\frac{2}{3}\pi\varepsilon_0(K-1)\,m^2nE\,(E_1-E_2)\sin 2\alpha,$$

где n — полуось в направлении оси вращения и m — полуось, перпендикулярная к ней. Для сплюснутого сфероида E_1 и E_2 — поля, полученные соответственно в результате решения задач 80 и 81, причем $\zeta_0=n\,(m^2-n^2)^{-1/2}$. Для вытянутого сфероида E_1 и E_2 — поля, полученные соответственно в результате решения задач 82 и 83, где $\eta_0=n\,(n^2-m^2)^{-1/2}$.

85. Заземленный проводящий диск радиуса a, уравнение которого имеет вид $\zeta=0$, находится в поле точечного заряда q, расположенного в точке 1, ζ_0, 0. Показать, что потенциал, обусловленный индуцированным на диске зарядом, равен

$$V_i=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\,Q_{2n}(j\zeta_0)\,Q_{2n}(j\zeta)\,P_{2n}(\xi).$$

86. Пользуясь теоремой взаимности Грина и результатами, полученными в § 28е гл. V, показать, что потенциал, созданный заряженным кольцом, уравнения которого имеют вид $\zeta=\zeta_0$, $\xi=\xi_0$, равен

$$V_i=\frac{jQ}{4\pi\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(j\zeta_0)\,P_n(\xi_0)\,Q_n(j\zeta)\,P_n(\xi),$$

где $\zeta>\zeta_0$ и Q — заряд кольца. Найти выражение для потенциала, справедливое при $\zeta<\zeta_0$.

87. Заземленный проводящий диск радиуса a находится в поле заряженного кольца, уравнения которого имеют вид $\zeta=\zeta_0$, $\xi=\xi_0$. Заряд кольца равен Q. Показать, что потенциал, создаваемый индуцированным зарядом, равен

$$V_i=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\,Q_{2n}(j\zeta_0)\,P_{2n}(\xi_0)\,Q_{2n}(j\zeta)\,P_{2n}(\xi).$$

88. Верхняя и нижняя половины сплюснутого сфероида $\zeta=\zeta_0$ изолированы друг от друга и заряжены соответственно до потенциалов $+V_0$ и $-V_0$. Показать, что выражение для потенциала во внешнем пространстве имеет вид

$$V=V_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n+1)}{2\cdot4\ldots[2(n+1)]}\frac{(4n+3)\,Q_{2n+1}(j\zeta)}{(2n+1)\,Q_{2n+1}(j\zeta_0)}P_{2n+1}(\xi).$$

Найти выражение для потенциала внутри сфероида.

89. По поверхности вытянутого сфероида $\eta=\eta_0$ распределен с плотностью $\sigma(\xi,\varphi)$ поверхностный заряд. Пользуясь методом, изложенным в § 28д гл. V, показать, что выражение для потенциала внутри сфероида имеет вид

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}M_{mn}P_n^m(\eta)\,P_n^m(\xi)\cos m\,(\varphi-\varphi_m),$$

где коэффициенты M_{mn} равны

$$\frac{(-1)^m(2-\delta_m^0)(2n+1)}{4\pi\varepsilon c_2}\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 Q_n^m(\eta_0)\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\sigma P_n^m(\xi)\cos m(\varphi-\varphi_m)\,h_1h_3\,d\xi\,d\varphi.$$

Величины h_1, h_3 определяются формулами (5.289) и (5.290). Найти аналогичное выражение для потенциала во внешнем пространстве.

90. Используя решение предыдущей задачи, показать, что потенциал точечного заряда q, расположенного в точке ξ_0, η_0, φ_0 при $\eta_1 > \eta_0$, равен

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon c_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_m^0)(-1)^m(2n+1)\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2\times$$

$$\times P_n^m(\xi)\,Q_n^m(\eta)\,P_n^m(\eta_0)\,P_n^m(\xi_0)\cos m(\varphi-\varphi_0).$$

Получить соответствующее выражение при $\eta_1 < \eta_0$.

91. Внутри цилиндрической полости радиуса a, ограниченной заземленными проводящими стенками, расположено (коаксиально полости) заряженное кольцо радиуса b. Пользуясь выражением для потенциала внутри полости, обусловленного точечным зарядом q, находящимся на оси полости, и теоремой взаимности Грина, найти потенциал, создаваемый кольцом на оси. Показать, что при $z < c$ этот потенциал равен

$$\frac{q}{\pi\varepsilon a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\mu_k z\operatorname{sh}\mu_k(L-c)}{\operatorname{sh}\mu_k L}\frac{J_0(\mu_k b)\,J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k[J_1(\mu_k a)]^2},$$

причем координаты оснований полости и плоскости кольца равны соответственно $z=0$, $z=L$ и $z=c$, а значения μ_k выбраны так, что $J_0(\mu_k a)=0$. Показать, что, согласно формуле (3.27), на кольцо действует сила

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(L-2c)}{\operatorname{sh}\mu_k L}\left[\frac{J_0(\mu_k b)}{J_1(\mu_k a)}\right]^2$$

направленная к основанию полости.

92. Цилиндрическая полость ограничена проводящими стенками $z=\pm c$ и $\rho=a$. Полость рассечена плоскостью $z=0$; верхняя и нижняя части изолированы друг от друга и заряжены соответственно до потенциалов $+V_0$ и $-V_0$. Показать, что потенциал внутри полости дается выражением

$$V=\pm V_0\left\{1-\frac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}[\mu_k(c-|z|)]\,J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k\operatorname{sh}\mu_k c\,J_1(\mu_k a)}\right\},$$

где $J_0(\mu_k a)=0$, а знак совпадает со знаком z. Другое выражение для потенциала имеет вид

$$V=V_0\left[\frac{z}{c}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0(n\pi\rho/c)}{nI_0(n\pi a/c)}\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)\right]$$

93. Цилиндрическая полость ограничена проводящими стенками $z=\pm c$, $\rho=a$. Стенки полости заземлены, за исключением площадок на основаниях, имеющих вид дисков радиуса b и заряженных соответственно до потенциалов $+V_0$ и $-V_0$. Показать, что потенциал внутри полости при $\rho > b$ равен

$$\frac{2bV_0}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\mu_k z\,J_1(\mu_k b)\,J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k\operatorname{sh}\mu_k c\,[J_1(\mu_k a)]^2},$$

где $J_0(\mu_k a)=0$, или

$$\frac{2bV_0}{c}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{K_0(n\pi a/c)\,I_0(n\pi\rho/c)-I_0(n\pi a/c)\,K_0(n\pi\rho/c)}{I_0(n\pi a/c)}I_1\left(\frac{n\pi b}{c}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right),$$

а потенциал в области $\rho < b$ равен

$$\frac{V_0}{c}\left[z+2b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{K_0(n\pi a/c)\,I_1(n\pi b/c)+I_0(n\pi a/c)\,K_1(n\pi b/c)}{I_0(n\pi a/c)}\,I_0\left(\frac{n\pi\rho}{c}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)\right]$$

94. Полубесконечная цилиндрическая труба радиуса a имеет проводящие стенки и ограничена с одного конца плоской проводящей пластинкой, перпендикулярной к ее оси и имеющей тот же потенциал, что и труба. На оси трубы на расстоянии b от пластинки находится точечный заряд q. Показать, что на заряд действует сила

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-\mu_k b}}{J_1(\mu_k a)}\right]^2 \quad \text{где} \quad J_0(\mu_k a)=0.$$

95. Область, лежащая ниже плоскости $z=0$ внутри цилиндра с проводящими стенками радиуса a, заполнена диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью K. На оси цилиндра в точке $z=b$ находится заряд q. Показать, что потенциал в области $z>0$ определяется выражением

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\mu_k|z-b|}-\frac{K-1}{K+1}e^{-\mu_k(z+b)}\right]\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k[J_1(\mu_k a)]^2},$$

где $J_0(\mu_k a)=0$. Найти выражение для потенциала в диэлектрике.

96. Поверхность проводника образована вращением окружности радиуса a вокруг одной из ее касательных. Показать, что емкость такого проводника равна

$$8\pi\varepsilon a\sum_{k=1}^{\infty}[J_1(\mu_k a)]^{-1}\int_0^{\infty}e^{-\mu_k a\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi,$$

где $J_0(\mu_k a)=0$.

97. Проводник, описанный в предыдущей задаче, вносится, будучи незаряженным, в однородное электрическое поле E, параллельное оси вращения проводника. Показать, что потенциал результирующего поля, выраженный в полярных координатах, равен

$$\frac{2Ea^2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\mu_k a^2 r^{-1}\cos\theta}\,\frac{J_0(\mu_k a^2 r^{-1}\sin\theta)}{[J_1(\mu_k a)]^2},$$

где $J_0(\mu_k a)=0$.

98. Проводник, рассмотренный в предыдущей задаче, повернут так, что внешнее поле E стало перпендикулярным к оси вращения. Показать, что при $J_0(\mu_k a)=0$ потенциал равен

$$\frac{4Ea^2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\mu_k a^2 r^{-1}\cos\theta}\,\frac{J_1(\mu_k a^2 r^{-1}\sin\theta)}{[J_2(\mu_k a)]^2}\cos\varphi.$$

99. Показать, что выражение для потенциала, созданного заряженным кольцом радиуса a, имеет вид
при $\rho < a$

$$\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon}\int_0^{\infty}K_0(ka)\,I_0(k\rho)\cos kz\,dk$$

или при $\rho > a$

$$\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon}\int_0^{\infty}I_0(ka)\,K_0(k\rho)\cos kz\,dk,$$

где Q — заряд кольца.

100. Кольцо радиуса a, несущее заряд Q, расположено так, что его ось совпадает с осью бесконечного диэлектрического цилиндра радиуса b. Показать, что потенциал в диэлектрике равен

$$\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon}\int_0^{\infty}\Psi(k)\,I_0(k\rho)\,K_0(ka)\cos kz\,dk,$$

где $\Psi(k)=[1+kb(K-1)\,I_0'(kb)\,K_0(kb)]^{-1}$.

101. Посередине между плоскостями $z=c$ и $z=-c$, потенциалы которых равны соответственно Ec и $-Ec$, расположено заземленное тороидальное кольцо, поверхность которого получается путем вращения окружности радиуса a с центром в точке $\rho=b$ относительно оси, лежащей в плоскости окружности. Показать, что потенциал «кольцевых мультиполей», расположенных на окружности $\rho=b$, $z=0$, обращающийся в нуль при $z=0$ и соответствующий полю, перпендикулярному к плоскостям, равен $\partial^{2r}V_1/\partial z^{2r}$, где V_1 — потенциал «кольцевого диполя» с моментом M, равный
при $\rho < b$

$$\frac{M}{2\varepsilon c^2}\sum_{n=1}^{\infty} nK_0\left(\frac{n\pi b}{c}\right) I_0\left(\frac{n\pi\rho}{c}\right)\sin\frac{n\pi z}{c}$$

и при $\rho > b$

$$\frac{M}{2\varepsilon c^2}\sum_{n=1}^{\infty} nI_0\left(\frac{n\pi b}{c}\right) K_0\left(\frac{n\pi\rho}{c}\right)\sin\frac{n\pi z}{c}.$$

Показать далее, что потенциал, обращающийся в нуль не на всей поверхности кольца, а на $2m$ окружностях $\rho=\rho_s$, $z=\pm z_s$, где $0 < s \leqslant m$ и $(\rho_s-b)^2+z_s^2=a^2$, равен

$$V=Ez+\sum_{n=1}^{\infty}(A_1 n+A_2 n^3+\ldots+A_m n^{2m+1})\,K_0\left(\frac{n\pi b}{c}\right) I_0\left(\frac{n\pi\rho}{c}\right)\sin\frac{n\pi z}{c}.$$

Последнее выражение справедливо при $\rho < b$; для случая $\rho > b$ ρ и b надо поменять местами. Коэффициенты A_r равны

$$A_r=E\begin{vmatrix} V_{11} & V_{r-1,1}z_1 V_{r+1,1} & V_{m1}\\ V_{12} & V_{r-1,2}z_2 V_{r+1,2} & V_{m2}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ V_{1m} & V_{r-1,m}z_m V_{r+1,m} & V_{mm}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} V_{11} & V_{21} & V_{m1}\\ V_{12} & V_{22} & V_{m2}\\ \cdot & & \cdot\\ V_{1m} & V_{2m} & V_{mm}\end{vmatrix}.$$

Если $\rho_s < b$, то

$$V_{rs}=\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r+1}K_0\left(\frac{n\pi b}{c}\right) I_0\left(\frac{n\pi\rho_s}{c}\right)\sin\frac{n\pi z_s}{c}.$$

В области $\rho_s > b$ надо поменять местами ρ_s и b. Если воспользоваться только коэффициентом A_1, то условие $V=0$ будет удовлетворяться на окружностях $\rho=b$, $z=\pm a$, что дает прекрасный результат в случае $a \ll c$ и $a \ll b$. Данная задача является типичным примером нахождения приближенного решения.

102. Пользуясь формулами (5.15), (5.375) и (5.377), показать, что потенциал, созданный в окружающем пространстве диском радиуса a, несущим заряд Q, равен

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\int_0^{\infty} e^{-k|z|}J_0(k\rho)\frac{\sin ka}{k}\,dk.$$

103. Потенциал, обусловленный плоским бесконечным проводящим листом, несущим на обеих сторонах равномерно распределенный (с плотностью σ_0) поверхностный заряд, равен V_0. Используя результаты § 28в и 31в гл. V, показать, что потенциал, созданный таким листом при наличии в нем отверстия радиуса a, равен

$$V_0-\frac{2\sigma_0}{\pi\varepsilon}\int_0^{\infty} e^{-k|z|}J_0(k\rho)\left(\frac{a\cos ka}{k}-\frac{\sin ka}{k^2}\right)dk.$$

104. Цилиндр радиуса $\rho=a$ опирается на заземленную плоскость $z=0$. Вдоль цилиндра поддерживается равномерное падение потенциала, причем потенциал цилиндра в том месте, где он пересекается со второй заземленной плоскостью $z=c$, равен V_0. (Цилиндр и вторая плоскость изолированы друг от друга.) Показать, что выражение для потенциала вне цилиндра между плоскостями имеет вид

$$V=\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi z/c)}{n}\frac{K_0(n\pi\rho/c)}{K_0(n\pi a/c)}.$$

105. Потенциалы стенок кольцевой цилиндрической полости $\rho=a$, $\rho=b$, $z=0$, $z=c$ равны соответственно $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(\rho)$, $f_4(\rho)$. Показать, что потенциал внутри полости является суперпозицией четырех функций: двух функций, типа рассмотренных в § 31д гл. V, и двух, типа рассмотренных в § 37 гл. V.

106. Точечный заряд q находится в точке $z=z_0$, $\rho=b$, $\varphi=\beta$. Плоскости $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, а также цилиндр радиуса $\rho=a$ имеют потенциал, равный нулю, причем $0<\beta<\alpha$ и $0<b<a$. Показать, что выражение для потенциала имеет вид

$$V=\frac{2q}{\varepsilon\alpha a^2}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_{s\pi/\alpha}(\mu_r b)\sin(s\pi\beta/\alpha)}{\mu_r[J_{(s\pi/\alpha)+1}(\mu_r a)]^2}e^{-\mu_r|z-z_0|}J_{s\pi/\alpha}(\mu_r\rho)\sin\frac{s\pi\varphi}{\alpha},$$

где $J_{s\pi/\alpha}(\mu_r a)=0$.

107. Полубесконечный заряженный проводящий лист имеет выпуклость в виде сплюснутого сфероида, ось которого совпадает с краем листа. Уравнение поверхности сфероида $\zeta=\zeta_0$. Показать, что выражение для потенциала имеет вид

$$V=C\left\{(1+\zeta^2)^{1/4}-\frac{(1+\zeta_0^2)^{1/2}[(1+\zeta^2)^{1/2}-\zeta]}{(1+\zeta^2)^{1/4}[(1+\zeta_0^2)^{1/2}-\zeta_0]}\right\}(1-\xi^2)^{1/4}\cos\frac{1}{2}\varphi.$$

108. В диэлектрическом шаре радиуса a вырезан сектор; площадью среза шар прилегает к бесконечному проводящему клину с углом раствора α, причем поверхности шара и клина пересекаются ортогонально. Показать, что если клин заряжен, то потенциалы внутри и вне шара равны соответственно

$$V_i=C\frac{\alpha+2\pi}{\alpha+\pi(1+K)}(r\sin\theta)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha},$$

$$V_0=C\left[r^{\pi/\alpha}-\frac{\pi(K-1)a^{\pi/\alpha}}{\alpha+\pi(1+K)}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}+1}\right](\sin\theta)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}.$$

109. Заряженный проводящий клин со сторонами $\varphi=+\alpha$ и $\varphi=-\alpha$ пересекается под прямым углом с заряженной проводящей плоскостью $z=0$. Показать, что в области $-\alpha<\varphi<+\alpha$ и $0<z$ потенциал равен

$$Cz\rho^m\cos m\varphi,$$

где m — наименьшее число, для которого $\cos m\alpha=0$.

110. Даны три заряженные ортогональные проводящие поверхности: клин со сторонами $\varphi=+\alpha$ и $\varphi=-\alpha$, плоскость $z=0$ и цилиндр $\rho=a$. Показать, что в области $-\alpha<\varphi<+\alpha$, $z>0$ и $\rho>a$ потенциал равен

$$Cz(\rho^m-a^{2m}\rho^{-m})\cos m\varphi,$$

где m — наименьшее число, для которого $\cos m\alpha=0$.

111. Даны три заряженные ортогональные проводящие поверхности: клин со сторонами $\varphi=+\alpha$ и $\varphi=-\alpha$, плоскость $\theta=\frac{1}{2}\pi$ и сфера $r=a$. Показать, что в области $-\alpha<\varphi<+\alpha$, $z>0$ и $r>a$ потенциал равен

$$C(r^{m+1}-a^{2m+3}r^{-m-2})\cos\theta\sin^m\theta\cos m\varphi,$$

где m — наименьшее число, для которого $\cos m\alpha=0$.

112. Заряженный проводник имеет глубокое прямоугольное углубление, стенки которого определяются уравнениями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ и $z=0$. Показать, что потенциал внутри углубления, вдали от открытого его конца, равен

$$V=C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\operatorname{sh}\left[(a^2+b^2)^{1/2}\frac{\pi z}{ab}\right]$$

113. Стенки бесконечной заземленной проводящей трубы прямоугольного сечения определяются уравнениями $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$. В точке $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ внутри трубы находится точечный заряд. Показать, что потенциал в такой системе равен

$$V=\frac{2q}{\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m^2a^2+n^2b^2)^{-1/2}e^{-(m^2a^2+n^2b^2)^{1/2}\pi|z-z_0|/ab}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

114. В заземленном проводнике вырезана полость, стенки которой определяются уравнениями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$. В точке x_0, y_0, z_0 находится точечный заряд q. Показать, что потенциал внутри полости будет равен

$$V=\frac{4q}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}A_{mn}(c-z_0)\operatorname{sh}A_{mn}z}{A_{mn}\operatorname{sh}A_{mn}c}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

где $A_{mn}=\pi(m^2a^2+n^2b^2)^{1/2}/ab$. Эта формула справедлива в области $z<z_0$; в области $z>z_0$ надо поменять местами z и z_0. Показать, что z-компонента действующей на заряд силы равна

$$F_z=-\frac{2q^2}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{cosech}A_{mn}c\operatorname{sh}A_{mn}(c-2z_0)\sin^2\frac{n\pi x_0}{a}\sin^2\frac{m\pi y_0}{b}$$

Чтобы получить компоненту F_x, следует в формулах для F_z и A_{mn} заменить a на c, c на a, x_0 на z_0 и z_0 на x_0. Соответственно для F_y следует в выражении для F_z и A_{mn} заменить b на c, c на b, z_0 на y_0 и y_0 на z_0.

115. Показать, что выражение для потенциала диполя $\mathbf{m}$, параллельного оси 0 и расположенного в точке b, α, 0, имеет вид

$$\frac{\mathrm{m}}{4\pi\varepsilon b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_m^0)(m-n-1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{r}{b}\right)^n P_{n+1}^m(\cos\alpha)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi.$$

Формула справедлива при $r<b$. В случае $r>b$ следует заменить $(r/b)^n$ на $(b/r)^{n+1}$.

116. Центр шара, изготовленного из диэлектрика с относительной проницаемостью K и имеющего радиус a, совпадает с началом координат. В точке r находится диполь $\mathbf{m}$, причем угол между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{r}$ равен α. Показать, что на диполь действует момент, равный

$$-\frac{(K-1)\,\mathrm{m}^2}{4\pi\varepsilon_v r^3}\sin\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2-\delta_m^0)\,n\,(m-n-1)\,(n-m)!}{(nK+n+1)\,(n+m)!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\times$$
$$\times\left[(n+1)P_n^m+(n-m+1)P_{n+1}^m\right]P_{n+1}^m$$

аргумент $\cos\alpha$ у функций Лежандра опущен). Показать, что на диполь действует сила

$$-\frac{(K-1)\,\mathrm{m}^2\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_v r^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2-\delta_n^0)\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(m-n-1)\,(n-m)!}{(nK+n+1)\,(n+m)!}\times$$
$$\times\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P_{n+1}^m\,P_n^m.$$

117. Путем вращения вокруг оси x преобразования, рассмотренного в § 14 гл. IV, получить (полагая $u_1=U$ и $u_2=V$) уравнение (5.62) для этого случая. Подставить в уравнение (5.62) вместо U выражение $(\operatorname{ch}u_1-\cos u_2)^{1/2}U_1(u_1)U_2(u_2)$ и показать, что дифференциальные уравнения для U_2 и U_1 имеют вид

$$\frac{d^2U_2}{du_2^2}=-n^2U_2,\quad\frac{d^2U_1}{du_1^2}+\operatorname{cth}u_1\frac{dU_1}{du_1}-\left(n^2-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2u_1}\right)U_1=0.$$

Последнее совпадает с уравнением (5.178), если n заменить на $n-\frac{1}{2}$ и μ на $\operatorname{ch}u_1$.

118. Тор, полученный вращением окружности радиуса b, заданной уравнением $u_1=u_0$ (см. предыдущую задачу), заряжен до потенциала V_0. Показать, что выражение для потенциала во внешнем пространстве имеет вид

$$2V_0(\operatorname{ch}u_1-\cos u_2)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n(2n+1)\,P_{-1/2}^n(\operatorname{cth}u_0)\,P_{n-1/2}(\operatorname{ch}u_1)}{(2n+1)!!\,(\operatorname{sh}u_0)^{1/2}\,P_{n-1/2}(\operatorname{ch}u_0)}\cos nu_2,$$

где $\operatorname{ch}u_0$ равен c/b (c—расстояние от центра окружности u_0 до прямой $u_1=0$).

119. Найти полный заряд тора, описанного в предыдущей задаче, путем сравнения потенциала при $u_1=0$ и $u_2=0$ с потенциалом $q/4\pi\varepsilon r$. Показать, что емкость тора равна

$$8\pi\varepsilon 2^{1/2} b (\operatorname{sh} u_0)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (2n+1) P^n_{-1/2} (\operatorname{cth} u_0)}{(2n+1)!! P_{n-1/2} (\operatorname{ch} u_0)}.$$

120. Тор, описанный в задаче 118, вносится в однородное поле E, параллельное его оси вращения. Показать, что потенциал результирующего поля равен

$$V = Ex + (\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_{n-1/2} (\operatorname{ch} u_1) \sin n u_2,$$

где

$$A_n = \frac{4 (2n+1) (-2)^n n a E_0 P^n_{-1/2} (\operatorname{cth} u_0)}{(2n+1)!! (\operatorname{sh} u_0)^{1/2} P_{n-1/2} (\operatorname{ch} u_0)}.$$

Значения a определяются из уравнения (4.67) и $U=u_0$.

121. Тор, описанный в задаче 118, вносится в однородное поле E, перпендикулярное к его оси вращения. Показать, что потенциал во внешнем пространстве равен

$$E \cos\varphi \left[\rho + (\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P^1_{n-1/2} (\operatorname{ch} u_1) \cos n u_2 \right],$$

где

$$A_n = -\frac{(2n-1)(2n+1)(-2)^{n+1} b (\operatorname{sh} u_0)^{1/2} P^n_{1/2} (\operatorname{cth} u_0)}{(2n+1)!! P^1_{n-1/2} (\operatorname{ch} u_0)}.$$

122. Путем вращения вокруг оси y преобразования, рассмотренного в § 14 гл. IV, получить (полагая $u_1=U$ и $u_2=V$) уравнение (5.62) для этого случая. Подставить в уравнение (5.62) вместо U выражение $(\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^{1/2} U_1(u_1) U_2(u_2)$ и показать, что дифференциальные уравнения для U_1 и U_2 имеют вид

$$\frac{d^2U_1}{du_1^2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 U_1, \qquad \frac{d^2U_2}{du_2^2} + \operatorname{ctg} u_2 \frac{dU_2}{du_2} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 u_2} \right] U_2 = 0.$$

Последнее совпадает с уравнением (5.102), если θ заменить на u_2.

123. Две сферы $u_1=u_0$ и $u_1=-u_0$, полученные в предыдущей задаче, вносятся в однородное поле, имеющее потенциал Ez, таким образом, что прямая, соединяющая их центры, параллельна полю, а потенциалы сфер оказываются равными соответственно V_0 и $-V_0$. Показать, что выражение для потенциала во внешнем пространстве имеет вид

$$Ez + (\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right) u_1 P_n (\cos u_2),$$

где

$$A_n = 2^{3/2} [V_0 - (2n+1) E b \operatorname{sh} u_0] (e^{(2n+1)u_0} - 1)^{-1}.$$

В последнем выражении $\operatorname{ch} u_0 = c/b$, b — радиус сфер, c — расстояние между их центрами.

124. Предполагая в предыдущей задаче, что сферы незаряжены, получить следующее выражение для потенциала:

$$V_0 = Eb \operatorname{sh} u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{e^{(2n+1)u_0} - 1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n+1)u_0} - 1} \right]^{-1}$$

125. Показать, что между сферами, рассмотренными в предыдущей задаче, действует сила, определяемая выражением

$$F = \frac{1}{2} \pi\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) A_n - 2(n+1) A_{n+1}] A_n,$$

где коэффициенты A_n получаются подстановкой V_0 из задачи 124 в выражение для A_n задачи 123.

126. Потенциал внешних источников имеет на поверхности сферы радиуса a значение $f(\theta)$, где θ — полярный угол. Используя разложение § 16ж гл. V и суммируя ряды под знаком интеграла (см. § 17 гл. V), показать, что в области $r < a$

$$V(r, \theta) = \frac{ar^{1/2}}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{r^{1/2} f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \, d\varphi}{|a^2 + r^2 - 2ar(\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta \cos\varphi)|^{1/2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

а) *Электричество*

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, Berlin, 1927.

Gray A., Absolute Measurements in Electricity and Magnetism, v. I, Macmillan, 1888.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.

Peirce B. O., Newtonian Potential Function, Ginn, 1902.

Planck M. K. E. L., Theorie der Elektrizität und Magnetismus, Berlin, 1932.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Thomson W., Tait P. G., Treatise on Natural Philosophy, Cambridge, 1912.

Thomson W., Papers on Electrostatics and Magnetism, Macmillan, 1884.

Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

б) *Математика*

Bate'man H., Electrical and Optical Wave Motion, Cambridge, 1915.

Bateman H., Partial Differential Equations, Dover, 1944.

British Association, Bessel Functions, Part 1, Cambridge, 1937.

Byerly W. E., Fourier's Series and Spherical Harmonics, Ginn, 1893.

Carslaw H. S., Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, 1921. (См. перевод: Карслоу, Теория теплопроводности, М.—Л., 1947.)

Copson E. T., Theory of Functions, Oxford, 1935.

Fletcher A., Miller J. C. P., Rosenhead L., An Index of Mathematical Tables, Scientific Computing Service, London, 1946.

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. III, Berlin, 1928.

Gray A., Mathews G. B., MacRobert T. M., Bessel Functions, Macmillan, 1922.

Harvard University Computation Laboratory, Tables of Bessel Functions of the First Kind of Orders 0 to 78, Harvard University Press, 1946—1950.

Heine E., Anwendungen der Kugelfunctionen, Berlin, 1881.

Hobson E. W., Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931. (См. перевод: Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, М.—Л., 1952.)

Jahnke, Emde, Tables of Functions, Dover, 1943. (См. перевод: Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций, М.—Л., 1948.)

MacRobert T. M., Spherical Harmonics, Dutton, 1927.

Magnus W., Oberhettinger F., Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Chelsea, 1949.

McLachlan N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford, 1934.

Morgan S. P., Tables of Bessel Functions of Imaginary Order and Imaginary Argument, California Institute of Technology, Pasadena, 1947.

Prasad G., Spherical Harmonics..., 2 v., Benares, 1930, 1932.

Riemann, Weber, Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1925.

Watson G. N., Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922. (См. перевод: Ватсон Г., Теория бесселевых функций, М.—Л., 1949.)

Webster A. G., Partial Differential Equations, Leipzig, 1927.

Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, Cambridge, 1935. (См перевод: Уиттекер Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа, М.—Л., 1937.)

Глава VI

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 1. Плотность электрического тока. Уравнение непрерывности. Если два проводника A и B, заряженные соответственно до потенциалов V_A и V_B, привести в соприкосновение с двумя точками третьего проводника, то, как мы видели в § 1 гл. I, заряд переходит от одного проводника к другому до тех пор, пока потенциалы проводников A и B не сравняются. Можно наблюдать два явления, связанных с переходом заряда: нагревание проводника и появление магнитного поля вблизи проводника, по которому перемещаются электрические заряды. Второе из этих явлений будет рассмотрено в следующей главе. Скорость перехода заряда от проводника A к B называется силой электрического тока. Сила тока в любой системе единиц определяется, следовательно, выражением

$$I = \frac{dQ}{dt}, \tag{6.1}$$

где I получается в амперах, если Q выражено в кулонах и t — в секундах. Если при помощи какого-нибудь электромеханического приспособления, например движущейся изолированной ленты, непрерывно переносить заряд от точки соприкосновения проводника B с соединительным проводником к соответствующей точке проводника A с такой скоростью, что разность потенциалов $V_A - V_B$ будет оставаться постоянной, и в то же самое время охлаждать соединительный проводник так, чтобы его температура не менялась, то окажется, что ток и магнитное поле также останутся неизменными. Последнее поэтому можно не рассматривать в теории постоянных токов. Очевидно, что электрический ток в любой точке характеризуется величиной и направлением. Если в точке P проводящей среды взять элемент поверхности dS, нормальный к направлению тока в этой точке, и если ток, текущий через dS, равен $\mathbf{dI}$, то плотность тока в этой точке определяется выражением

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{dI}}{dS}. \tag{6.2}$$

В случае постоянного тока количество электричества, втекающего в любой элемент объема, должно равняться количеству электричества, вытекающему из него. Следовательно, интеграл от нормальной составляющей плотности тока, взятый по поверхности, ограничивающей этот объем, должен быть равен нулю. Отсюда, по теореме Остроградского—Гаусса (3.2), следует

$$\int_S \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_v \nabla\cdot\mathbf{i}\, dv = 0.$$

Так как это равенство выполняется для всех элементов объема, то

$$\nabla\cdot\mathbf{i} = \operatorname{div}\mathbf{i} = 0. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.3) называется уравнением непрерывности, а вектор, удовлетворяющий этому уравнению, называется соленоидальным.

§ 2. Электродвижущая сила. В рассмотренном выше опыте движущаяся лента действует на переносимые ей электрические заряды с силой как раз достаточной для преодоления электростатических сил в пространстве между проводниками A и B и обусловливает тем самым электродвижущую силу (э. д. с.). Величина э. д. с. $\mathscr{E}$ измеряется работой в джоулях, совершаемой лентой при перемещении от B до A заряда в 1 кулон, за вычетом потерь на трение в движущем механизме. Если сила, движущая ленту, увеличивается, то лента будет двигаться ускоренно до тех пор, пока добавочные заряды не увеличат разность $V_A - V_B$ настолько, что электростатические силы опять уравновесят механическую силу, приложенную к ленте. При разрыве проводника между A и B лента останавливается (так как механизм не может преодолеть возросшие электростатические силы) и работа против сил трения прекращается. Следовательно, в этом случае э. д. с. $\mathscr{E}$ в точности равна $V_A - V_B$.

При обычных температурах, чтобы поддерживать силу тока в цепи постоянной, необходимо иметь некоторый источник э. д. с. В разобранном выше примере вопрос о локализации э. д. с. не вызывает затруднений: э. д. с. распределена между A и B вдоль ленты. В химических источниках э. д. с., например гальванических элементах и аккумуляторах, э. д. с. локализована на поверхностях электродов. В термоэлементах она локализована на поверхности соприкосновения двух проводников. В случае металлического контура, помещенного в переменное магнитное поле, возникает э. д. с. индукции (рассматривается в гл. VIII), которая может быть распределена по всем элементам цепи. В динамомашине, замкнутой на внешнюю цепь, э. д. с. распределена по обмотке машины. Во всех этих случаях, если контур разомкнут и разность потенциалов в месте разрыва измеряется прибором, не потребляющим тока (например, электростатическим вольтметром или потенциометром, заэкранированным от внешних воздействий), результат измерения дает сумму э. д. с. в контуре.

Электродвижущая сила вдоль заданного пути обычно определяется иным способом. Напряженность электростатического поля в какой-либо точке была определена как сила, действующая на помещенный в эту точку единичный положительный заряд. О характере этой силы не было сделано никаких высказываний, за исключением того, что она пропорциональна величине заряда. Как будет показано ниже, электрическое сопротивление среды не оказывает влияния на измерение напряженности поля, поскольку сопротивление, подобно вязкому трению, действует только на движущиеся тела. Следовательно, полная сила, действующая на находящийся на ленте заряд, равна нулю, так как электростатическая и механическая силы уравновешиваются. В той части контура, где течет ток, действуют только электростатические силы. Поэтому линейный интеграл от $\mathbf{E}$ по замкнутому контуру равен разности потенциалов между проводниками A и B, которая, как было показано, равна $\mathscr{E}$. Таким образом,

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}. \tag{6.4}$$

Эта формула определяет э. д. с. по замкнутому пути интегрирования. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ полезно иногда рассматривать как сумму двух компонент: электростатической компоненты $\mathbf{E}'$, которая описывается скалярным потенциалом и для которой интеграл по любому замкнутому пути равен нулю, и компоненты $\mathbf{E}''$ (по природе соленоидальной),

которая обусловлена э. д. с. и для которой интеграл по замкнутому пути отличен, вообще говоря, от нуля. Компонента $\mathbf{E}''$ полезна при рассмотрении распределенных э. д. с.; но для э. д. с., локализованных в поверхностном слое, введение $\mathbf{E}''$ излишне, так как в этом случае $\mathbf{E}''$ обращается в бесконечность в самом слое и равна нулю во всем остальном пространстве. Значение интеграла от $\mathbf{E}''$ зависит от выбора пути интегрирования. В частности, в примере с лентой интеграл от $\mathbf{E}''$ равен нулю по любому замкнутому пути, лежащему целиком на ленте или целиком вне ее.

Во многих случаях можно выбрать границы, пересечение которых при интегрировании запрещено, таким образом источники э. д. с., например лента в рассмотренном выше примере, оказываются исключенными. Тогда интеграл от $\mathbf{E}$ по всем разрешенным замкнутым путям оказывается равным нулю и в рассматриваемой области можно пользоваться скалярным потенциалом. Даже при распределенной э. д. с. могут существовать такие границы, что для всех разрешенных путей интегрирования интеграл (6.4) обращается в нуль. В этом случае невозможно провести различие между $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ и термины э. д. с. и потенциал равнозначны. Именно в этом смысле используется $\mathscr{E}$ в следующем параграфе; для напряженности поля в этом случае можно написать

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \nabla \mathscr{E}. \tag{6.5}$$

§ 3. Закон Ома. Удельное сопротивление. Если в эксперименте, описанном в § 1, все физические условия, такие, как температура и коэффициент полезного действия, остаются неизменными, а э. д. с. увеличивается, то после достижения стационарного состояния окажется, что ток увеличился пропорционально э. д. с. Это закон Ома. Для устройства, в котором отсутствуют механические потери, отношение э. д. с. между точками A и B к протекающему току называется электрическим сопротивлением R_{AB} между этими точками, так что

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I_{AB}} = \frac{\mathscr{E}_{AB}}{I_{AB}} \tag{6.6}$$

Построим в точке P проводящей среды элементарный цилиндр, основания которого dS перпендикулярны к току в точке P, а боковые стенки, длина которых равна ds, параллельны току. Э. д. с. между основаниями цилиндра будет равна $(\partial \mathscr{E}/\partial s)\, ds = \nabla \mathscr{E} \cdot \mathbf{ds}$, и через цилиндр будет протекать ток $i\, dS$. Применяя закон Ома к этому цилиндру, запишем соотношение (6.6) в виде

$$R_P = \frac{\nabla \mathscr{E} \cdot \mathbf{ds}}{i\, dS} = \frac{|\nabla \mathscr{E}| \cos \alpha\, ds}{i\, dS},$$

где α — угол между $\nabla \mathscr{E}$ и $\mathbf{ds}$. Сопротивление R_P цилиндра, у которого ds численно равно dS, обозначается через τ и называется удельным сопротивлением среды в точке P. Таким образом,

$$\tau = \frac{|\nabla \mathscr{E}|}{i} \cos \alpha. \tag{6.7}$$

Если τ не зависит от направления тока, то угол α должен равняться нулю, так что направления градиента потенциала и тока совпадают. В этом случае проводящая среда называется изотропной. Величина, обратная удельному сопротивлению τ, называется проводимостью. Обозначая проводимость через γ, можно записать формулу (6.7) в виде

$$\mathbf{i} = \frac{\nabla \mathscr{E}}{\tau} = \gamma \nabla \mathscr{E}. \tag{6.8}$$

На основании формул (6.8) и (6.4) для замкнутого пути в проводящей среде будет иметь место равенство

$$\oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \mathscr{E}. \tag{6.9}$$

§ 4. Тепловое действие электрического тока. В § 1 было отмечено, что проводник нагревается проходящим по нему током. Температуру проводника можно поддерживать постоянной, удаляя выделяющееся тепло. Но если в проводнике не происходит никаких изменений, то очевидно, что выделившаяся в нем энергия каким-то способом была внесена в систему извне. В случае с движущейся лентой, перенося заряды от проводника B к A, мы, очевидно, совершаем работу против электростатических сил. Из определения потенциала следует, что эта работа W равна $Q(V_A - V_B)$, так что подводимая мощность будет выражаться формулой

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B)\left(\frac{dQ}{dt}\right) = (V_A - V_B) I_{AB}. \tag{6.10}$$

Отсюда при помощи соотношения (6.6) получим

$$P = I_{AB}^2 R_{AB}. \tag{6.11}$$

Если I, V и R выражены в электростатической или абсолютной электромагнитной системах единиц, то P получается в эргах в секунду. Если I выразить в амперах, V — в вольтах и R — в омах, т. е. воспользоваться практической системой единиц, то P получится в ваттах. Полная таблица единиц приведена в приложении. Тепло выделившееся при прохождении тока, называется джоулевым теплом.

§ 5. Линейные проводники. Законы Кирхгофа. Последовательные и параллельные соединения проводников. Рассмотрим задачу о распределении тока в системе проводников, поперечные сечения которых достаточно малы по сравнению с их длиной, так что изменение потенциала в узлах (так мы будем называть места соединения двух или большего числа проводников) мало по сравнению с изменением потенциала между соседними узлами. Будем называть такую систему цепью, составленной из линейных проводников. При расчете таких цепей удобнее оперировать не с плотностью тока, а с полным током, проходящим через сечение проводника. Из § 1 и 2 вытекают два очень важных правила, известных под названием законов Кирхгофа. Если применить уравнение непрерывности к любому узлу цепи, считая токи, направленные к узлу, положительными, а направленные от узла отрицательными, то получается первый закон:

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле, равна нулю.

Из определения э. д. с., данного в § 2, и закона Ома следует, что, обходя один за другим проводники, образующие замкнутый контур в электрической цепи, и считая при этом токи, текущие в направлении обхода, и э. д. с., стремящиеся создать ток в этом направлении, положительными, а токи, текущие в обратном направлении и соответствующие э. д. с., — отрицательными, мы получим второй закон:

2. В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений IR равна алгебраической сумме э. д. с.

Если n проводников так подключены друг к другу, что ток последовательно проходит один за другим все проводники, то такое соединение называется последовательным. По закону Ома разность потенциалов между концами такой цепи будет равна

$$IR_1 + IR_2 + \ldots + IR_n.$$

Если всю цепь рассматривать как один проводник с сопротивлением R, то разность потенциалов будет равна IR. Приравнивая эти выражения, получаем

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{6.12}$$

Таким образом, когда новый проводник образован при помощи последовательного соединения проводников, его сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных проводников.

Соединение проводников называется параллельным, если несколько проводников соединены так, что ток, поступающий в систему, разделяется на отдельные токи, каждый из которых проходит не более, чем по одному проводнику. Разность потенциалов между концами проводников будет в этом случае одна и та же, т. е.

$$I_1R_1 = I_2R_2 = \quad = I_nR_n.$$

Пусть I — полный ток и R — эквивалентное сопротивление цепи. Тогда $I_1R_1 = I_2R_2 = \quad = I_nR_n = IR$. Ток I_s в проводнике с сопротивлением R_s будет равен

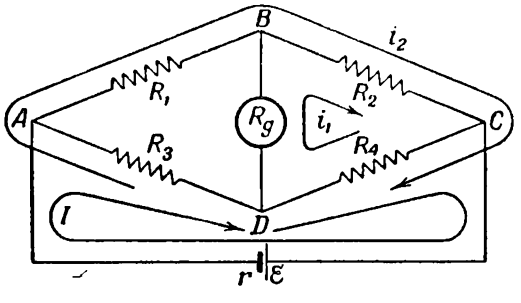
$$I_s = \frac{R}{R_s} I. \tag{6.13}$$

Составляя из выражений вида (6.13) сумму всех токов, равную общему току I, и разделив ее на IR, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{6.14}$$

Таким образом, когда новый проводник образуется при помощи параллельного соединения нескольких проводников, величина, обратная его сопротивлению, равна сумме величин, обратных сопротивлениям отдельных проводников.

§ 6. Расчет электрических цепей. Контурные токи. Мост Уитстона. Задачу, с которой обычно приходится иметь дело при расчете цепей, можно сформулировать так: даны сопротивления всех ветвей, величины и направления всех э. д. с., требуется найти токи во всех ветвях. Иногда оказывается возможным разбить цепь на группы последовательно и параллельно соединенных проводников и найти решение по формулам предыдущего параграфа. Общее решение поставленной задачи можно получить, вводя специальное обозначение для тока в каждой ветви и написав 1-й закон Кирхгофа для q узлов (что дает q уравнений) и 2-й закон Кирхгофа для n независимых контуров (что дает еще n уравнений). Всего получается $(n+q)$ уравнений, определяющих $(n+q)$ токов. Объем работы можно сильно сократить, введя так называемые контурные токи, автоматически удовлетворяющие 1-му закону Кирхгофа, после чего остается решить систему только из n уравнений. Ток в каждой ветви можно записать как сумму этих контурных токов. В качестве примера рассмотрим схему, называемую мостом Уитстона (фиг. 60). Она часто применяется для сравнения неизвестного сопротивления с известным. Во «внешний» контур включена э. д. с. $\mathcal{E}$;



Фиг. 60.

сопротивление этой ветви равно r. Контурные токи можно выбрать по-разному. Выбор контурных токов должен допускать различные токи в каждой из ветвей. Выбрав контурные токи так, как это показано на фиг. 60, и написав 2-й закон Кирхгофа для контуров DBA, BCD и $ABC\mathcal{E}$, получим

$$i_1 R_g \quad i_2(R_1+R_3)+IR_3=0; \tag{6.15}$$

$$i_1(R_g+R_2+R_4)+i_2(R_2+R_4)-IR_4=0; \tag{6.16}$$

$$i_1 R_2+i_2(R_1+R_2)+Ir=\mathcal{E}. \tag{6.17}$$

Если задача заключается в том, чтобы выразить один ток через другой, например ток i_1 через I, то можно обойтись только двумя из этих уравнений. Из уравнений (6.15) и (6.16) находим

$$i_1=\frac{R_1R_4-R_2R_3}{R_g(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_3)(R_2+R_4)}I. \tag{6.18}$$

Если же заданы только э. д. с. и сопротивления, то приходится решать систему из трех уравнений (6.15)—(6.17). Это нетрудно сделать, пользуясь теорией определителей. Для i_1 будем иметь

$$(R_1R_4-R_2R_3)\mathcal{E}\cdot[R_g(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_gr(R_1+ \\ +R_2+R_3+R_4)+r(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+ \\ +R_3R_4R_1+R_4R_1R_2]^{-1}. \tag{6.19}$$

Ток в любой ветви равен алгебраической сумме протекающих по ней контурных токов. Например, в ветви BC ток равен i_1+i_2. На практике одно из сопротивлений R_1, R_2, R_3 и R_4 моста Уитстона неизвестно, а остальные, из которых, по крайней мере, одно переменное, заданы. Регулировкой переменного сопротивления добиваются отсутствия тока i_1 в гальванометре, который включают вместо R_g. При этом условии, как легко видеть, соблюдается равенство $R_1R_4=R_2R_3$, откуда и определяется неизвестное сопротивление.

§ 7. Цепи из одинаковых звеньев. В некоторых случаях приходится иметь дело с цепями, которые можно разделить на большое число одинаковых звеньев, причем связь каждого звена с соседними одинакова. Тогда вместо решения системы, состоящей из большого числа уравнений, можно сформулировать соотношение между токами в соседних контурах в виде разностного уравнения, при решении которого следует учитывать условия на концах цепи. В качестве примера применения этого метода рассмотрим цепь, состоящую из генератора и нагрузочного сопротивления R, причем ток от генератора к нагрузке подводится по одному проводу, а обратным проводом служит земля. Провод подвешен на n одинаковых изоляторах, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Сопротивления участков провода между генератором и 1-м изолятором, между каждой парой изоляторов и между последним изолятором и нагрузкой одинаковы и равны ρ, а сопротивление земли ничтожно мало. В сухую погоду, когда никакой утечки через изоляторы нет, ток генератора равен I_1, но при влажной погоде для получения того же тока в нагрузке от генератора приходится брать ток I_2. Определим величину сопротивления каждого изолятора r, считая, что утечка во всех изоляторах одинаковая.

Для решения этой задачи начертим схему цепи (фиг. 61), перенумеруем изоляторы от 1 до n и введем контурные токи. Закон Кирхгофа для контура s имеет вид

$$i_{s-1}r-i_s(2r+\rho)+i_{s+1}r=0,$$

или

$$i_{s-1}+i_{s+1}=\left(2+\frac{\rho}{r}\right)i_s. \tag{6.20}$$

Решение уравнения (6.20) (см. Двайт, 651.03) имеет вид

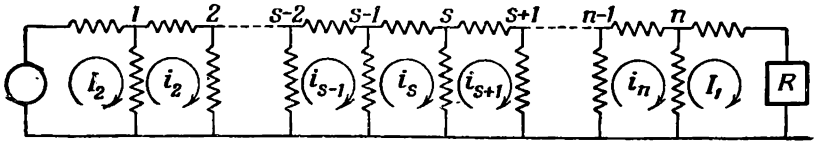
$$i_s=A\operatorname{ch}s\theta+B\operatorname{sh}s\theta, \tag{6.21}$$

причем

$$\operatorname{ch}\theta=1+\tfrac{1}{2}\rho/r,$$

или

$$r=\frac{\rho}{2(\operatorname{ch}\theta-1)}=\frac{\rho}{4\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta}. \tag{6.22}$$



Фиг. 61.

Чтобы найти A и B, заметим, что в первом контуре

$$I_2=i_1=A\operatorname{ch}\theta+B\operatorname{sh}\theta,$$

а в $(n+1)$-м контуре $I_1=A\operatorname{ch}(n+1)\theta+B\operatorname{sh}(n+1)\theta$. Из этих уравнений определяем A и B:

$$A=\frac{I_2\operatorname{sh}(n+1)\theta-I_1\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{sh}n\theta},$$

$$B=\frac{-I_2\operatorname{ch}(n+1)\theta+I_1\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}n\theta}.$$

Подстановка значений A и B в решение (6.21) дает

$$i_s=\frac{I_2\operatorname{sh}(n-s+1)\theta+I_1\operatorname{sh}(s-1)\theta}{\operatorname{sh}n\theta}. \tag{6.23}$$

Для последнего контура получим

$$I_1\left(1+\frac{\rho+R}{r}\right)=i_n.$$

Подставляя r из выражения (6.22) и i_n из выражения (6.23), после упрощений найдем

$$2I_1R\operatorname{sh}n\theta\operatorname{sh}\tfrac{1}{2}\theta+\rho I_1\operatorname{ch}\left[\tfrac{1}{2}(2n+1)\theta\right]-\rho I_2\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}\theta=0. \tag{6.24}$$

Уравнение (6.24) можно решить графически, построив его левую часть как функцию θ и найдя пересечение этой кривой с осью θ. Подстановка найденного значения θ в формулу (6.22) дает величину r. Если сопротивление провода мало по сравнению с сопротивлением изолятора, то $4\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta\to\theta^2$, так что $n\theta\to n(\rho/r)^{1/2}$. Если эти величины малы, то можно считать (см. Двайт, 657.2), что $\operatorname{ch}x=1+\frac{1}{2}x^2$, $\operatorname{sh}x=x$, и тогда решение для θ^2 будет иметь вид

$$\theta^2=\frac{8\rho(I_2-I_1)}{8nRI_1+\rho[I_1(2n+1)^2-I_2]}.$$

Ввиду того, что $I_1 - I_2$ мало по сравнению с I_1, этой величиной в знаменателе можно пренебречь, и, поскольку, согласно формуле (6.22), $r = \rho\theta^{-2}$, получим

$$r = \frac{nI_1\,[2R + (n+1)\,\rho]}{2\,(I_2 - I_1)} = \frac{n\,(2R + R_1)\,I_1}{2\,(I_2 - I_1)}\,, \tag{6.25}$$

где R_1 — сопротивление всего провода без учета утечки.

§ 8. Линия с непрерывно распределенной утечкой. От случая отдельных изоляторов легко перейти к случаю линии с непрерывно распределенной изоляцией. Расстояние между изоляторами теперь нужно считать бесконечно малым, так что, если сопротивления провода и утечки на единицу длины соответственно равны T и S, то $\rho = T\,dx$ и $S = r\,dx$. Следовательно, имеет место уравнение

$$(i_{s+1} - i_s) - (i_s - i_{s-1}) = \left[\left(\frac{di}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{di}{dx}\right)_x\right] dx =$$
$$= \frac{d^2 i}{dx^2}\,dx^2 = \left(\frac{\rho}{r}\right) i_s = \left(\frac{T}{S}\right) i\,dx^2.$$

Разностное уравнение (6.20) переходит теперь в дифференциальное:

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = \left(\frac{T}{S}\right) i. \tag{6.26}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$i = A\,\mathrm{ch}\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} x - B\,\mathrm{sh}\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} x.$$

Предполагая, что граничные условия, как и прежде, имеют вид $i = I_2$ при $x = 0$ и $i = I_1$ при $x = L$, получим

$$i = \frac{I_2\,\mathrm{sh}\left[\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2}(L - x)\right] + I_1\,\mathrm{sh}\left[\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} x\right]}{\mathrm{sh}\left[\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} L\right]} \tag{6.27}$$

Это выражение соответствует выражению (6.23) и позволяет найти ток в любой точке линии. Напряжение на изоляции в любой точке линии по закону Ома равно $-S\,(di/dx)$, так как ток, протекающий через изоляцию между точками x и $x + dx$, равен $-(di/dx)\,dx$, а сопротивление утечки этого участка равно S/dx.

Примем, как и раньше, что изоляция идеальна при сухом кабеле и что при влажном кабеле приходится брать от генератора ток I_2, чтобы получить в нагрузке ток I_1. Пусть по этим данным требуется вычислить S. Если R — сопротивление нагрузки, то напряжение на конце линии будет $I_1 R = -S\,(di/dx)_{x=L}$. Подставляя сюда значение di/dx из выражения (6.27), найдем

$$I_1 R\,\mathrm{sh}\left[\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} L\right] + (TS)^{1/2} I_1\,\mathrm{ch}\left[\left(\frac{T}{S}\right)^{1/2} L\right] - (TS)^{1/2} I_2 = 0. \tag{6.28}$$

Это уравнение соответствует уравнению (6.24) и точно так же может быть решено относительно S графически. Если S много больше T, то можно ограничиться тем же приближением, что и при получении выражения (6.25). В результате получим

$$S = \frac{(2R + LT)\,LI_1}{2\,(I_2 - I_1)} = \frac{(2R + R_1)\,LI_1}{2\,(I_2 - I_1)}\,. \tag{6.29}$$

Выражение (6.29) соответствует выражению (6.25). Оно показывает, что сопротивление равномерно распределенной утечки эквивалентно сосредоточенному сопротивлению утечки S/L, включенному посередине линии.

§ 9. Общая теория цепей. В § 6 было отмечено, что выбор контурных токов можно сделать по-разному, лишь бы они были независимыми и допускали бы существование различных токов в каждой отдельной ветви цепи. Если число узлов цепи q и число ветвей p, то полное число независимых контурных токов n определяется формулой

$$n = p - q + 1. \tag{6.30}$$

В мосте Уитстона (см. § 6) $p = 6$, $q = 4$ и $n = 3$. Обозначим сопротивление ветви, по которой протекает только один контурный ток i_p, через R_p, а сопротивление ветви, по которой протекают два или большее число токов, — через R_{pq} (i_p и i_q — два тока из тех, которые протекают по данной ветви). Сумму сопротивлений всех ветвей, по которым протекает ток i_p, обозначим R_{pp}, так что если ни в одной ветви не протекает больше двух токов, то

$$R_{pp} = R_p + R_{p1} + \ldots + R_{pn}. \tag{6.31}$$

Если ток i_s нигде не протекает по ветви, общей с током i_p, то в формуле (6.31) отсутствует индекс s.

Выбрав независимые контурные токи и используя введенные выше обозначения, можно написать законы Кирхгофа для n независимых контуров цепи в следующей форме:

$$\begin{aligned} R_{11} i_1 \pm R_{12} i_2 \pm R_{13} i_3 \pm \quad & \pm R_{1n} i_n = \pm \mathscr{E}_1, \\ \pm R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \pm R_{23} i_3 \pm \quad & \pm R_{2n} i_n = \pm \mathscr{E}_2, \\ \pm R_{n1} i_1 \pm R_{n2} i_2 \pm R_{n3} i_3 \pm \ldots + R_{nn} i_n & = \pm \mathscr{E}_n. \end{aligned} \tag{6.32}$$

В этих уравнениях R_{pp} всегда положительно; в уравнениях, где встречается R_{pp}, R_{pq} следует брать со знаком плюс, когда токи i_p и i_q проходят по общей ветви в одном и том же направлении, и со знаком минус, когда они текут навстречу друг другу. Электродвижущая сила $\mathscr{E}_p$ берется со знаком плюс, если она помогает току i_p, и со знаком минус, если она ему противодействует. Если токи i_j и i_k нигде не проходят по одной и той же ветви, то в уравнениях (6.32) член R_{jk} отсутствует. Заметим, что, по определению,

$$R_{pq} = R_{qp}. \tag{6.33}$$

Если две ветви не имеют общего узла, то контурные токи всегда можно выбрать таким образом, что в каждой из них будет протекать только один ток, хотя для этого приходится, вообще говоря, вводить три (или большее число) тока в некоторых других ветвях. Выбрав таким образом токи, обозначим через Δ_{pq} алгебраическое дополнение элемента R_{pq} в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & \pm R_{1q} & \pm R_{1n} \\ \pm R_{p1} & \pm R_{pq} & \pm R_{pn} \\ \pm R_{n1} & \pm R_{nq} & + R_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.34}$$

Заметив, что вследствие равенства (6.33)

$$\Delta_{pq} = \Delta_{qp}. \tag{6.35}$$

Найдем из системы уравнений (6.32) ток i_q для случая, когда единственная э. д. с. $\mathscr{E}_p$, действующая в цепи, включена в ветвь, по которой проте-

кает только один ток i_p, и, наоборот, найдем ток i_p, когда единственная э. д. с. $\mathscr{E}_q$ включена в ветвь, несущую ток i_q. Мы получим

$$i_q = \frac{\mathscr{E}_p \Delta_{pq}}{\Delta} \quad \text{и} \quad i_p = \frac{\mathscr{E}_q \Delta_{pq}}{\Delta}. \tag{6.36}$$

Из формул (6.35) и (6.36) следует важное соотношение взаимности: если $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_q$, то $i_p = i_q$. Иными словами, если э. д. с., включенная в одну из двух ветвей, вызывает некоторый ток в другой ветви, то та же самая э. д. с., будучи включенной во вторую ветвь, вызывает в первой такой же ток.

Если э. д. с. $\mathscr{E}$ включена в r-ю ветвь, то вместо формул (6.36) мы будем иметь

$$i_q = \frac{\mathscr{E}_r \Delta_{rq}}{\Delta} \quad \text{и} \quad i_p = \frac{\mathscr{E}_r \Delta_{rp}}{\Delta}.$$

Откуда, поделив одно равенство на другое, находим

$$\frac{i_q}{i_p} = \frac{\Delta_{rq}}{\Delta_{rp}}. \tag{6.37}$$

Формула (6.37) позволяет выразить отношение любых двух токов через сопротивления элементов цепи.

Докажем теперь теорему Тевенина, которая оказывается иногда полезной при расчете цепей. Эта теорема утверждает, что, если напряжение разомкнутой цепи между двумя ее концами A и B равно V_0, а ток, текущий между A и B, при замыкании их накоротко, равен I, то сопротивление всей цепи, измеренное между точками A и B при условии, что из цепи удалены все источники э. д. с., а все сопротивления остались неизменными, будет равно $R = V_0/I$. Из теоремы следует, что подключение точек A и B к любой другой цепи равносильно подключению к ней батареи с э. д. с. V_0 и внутренним сопротивлением R. Чтобы доказать теорему, предположим, что к точкам A и B подключено очень большое сопротивление R_p. Тогда в детерминанте (6.34) все члены, не содержащие R_p, будут пренебрежимо малы по сравнению с членами, содержащими R_p, так что, принимая во внимание выражение (6.31), $\Delta \to R_p \Delta_{pp}$ при $R_p \to \infty$. Разность потенциалов между A и B, создаваемая всеми э. д. с., включенными в цепь, как видно из формулы (6.36), будет равна

$$R_p i_p = \frac{R_p}{\Delta} \sum \mathscr{E}_q \Delta_{pq} \xrightarrow[R_p \to \infty]{} V_0 = \frac{1}{\Delta_{pp}} \sum \mathscr{E}_q \Delta_{pq}.$$

Если точки A и B замкнуты накоротко, то, сопоставляя это выражение с формулой (6.36), получаем

$$I = \frac{1}{\Delta} \sum \mathscr{E}_q \Delta_{pq} = V_0 \frac{\Delta_{pp}}{\Delta}$$

Сравнивая полученную формулу с выражением для сопротивления цепи между точками A и B, которое можно получить из формулы (6.36), будем иметь

$$R = \frac{\mathscr{E}_p}{i_p} = \frac{\Delta}{\Delta_{pp}} = \frac{V_0}{I}, \tag{6.38}$$

что и доказывает теорему.

Существует класс цепей, имеющих большое практическое значение, для которых контурные токи можно выбрать так, что будут удовлетворены следующие условия: имеется по крайней мере одна ветвь, через которую проходит только один ток; в ветвях, где текут два тока, они направлены навстречу друг другу; через любую ветвь протекает не более двух токов. В этом случае в детерминанте (6.34) и в левых частях уравнений (6.32) все

члены вида R_{pp} положительны и члены вида R_{pq} отрицательны. Токи мы имеем право перенумеровать как нам угодно, поэтому при решении уравнений относительно i_1 можно допустить, что в ветви, где включена э. д. с. $\mathscr{E}$, протекают токи i_2 и i_3. В правых частях уравнений (6.32) мы заменим $\mathscr{E}_2$ на $-\mathscr{E}_{23}$, $\mathscr{E}_3$ на $+\mathscr{E}_{23}$ и положим $\mathscr{E}_p = 0$ при $p \neq 2$ или 3. Вместо формулы (6.35) получаем

$$i_1 = \frac{\Delta_{21}\mathscr{E}_2 + \Delta_{31}\mathscr{E}_3}{\Delta} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} R_{12}-R_{13} & -R_{1n} \\ -R_{32}+R_{33} & -R_{3n} \\ -R_{42} \quad R_{43} & -R_{4n} \\ \\ -R_{n2}-R_{n3} & +R_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_{12}-R_{13} & R_{1n} \\ +R_{22}-R_{23} & -R_{2n} \\ -R_{42}-R_{43} & -R_{4n} \\ \\ R_{n2}-R_{n3} & +R_{nn} \end{vmatrix} \right\} \frac{\mathscr{E}_{23}}{\Delta}.$$

Два определителя в скобках отличаются только своими вторыми строками. Их сумма равна, следовательно, определителю, вторая строка которого получается сложением соответствующих элементов вторых строк этих определителей и имеет вид

$$-R_{32}+R_{22}, \quad +R_{33}-R_{23}, \quad -R_{34}-R_{24}, \quad -R_{3n}-R_{2n},$$

а остальные строки такие же, как у каждого из складываемых определителей. Величина определителя не меняется, если к каждому элементу какой-нибудь строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки. Заменим поэтому вторую строку суммой всех строк, так что окончательное выражение с учетом соотношений (6.31) и (6.33) примет вид

$$i_1 = \begin{vmatrix} -R_{12}-R_{13}-R_{14} & R_{1n} \\ +R_2 \quad +R_3 \quad +R_4 & +R_n \\ -R_{42} \quad R_{43}+R_{44} & R_{4n} \\ \\ R_{n2}-R_{n3}-R_{n4} & +R_{nn} \end{vmatrix} \frac{\mathscr{E}_{23}}{\Delta}. \tag{6.39}$$

Если обозначить этот определитель через Δ_{123}, то для рассматриваемой цепи получаются формулы, аналогичные формулам (6.36),

$$i_1 = \frac{\Delta_{123}}{\Delta}\mathscr{E}_{23} \quad \text{и} \quad i_{23} = \frac{\Delta_{123}}{\Delta}\mathscr{E}_1. \tag{6.40}$$

Формулы (6.40) обычно оказываются более удобными, чем формулы (6.36), так как знаки уже приняты во внимание при выборе контурных токов.

§ 10. Сопряженные проводники. Двойной мост Кельвина. Два проводника в электрической цепи называются сопряженными, если источник э. д. с., будучи включенным в один из них, не создает тока в другом и наоборот. Если R_p и R_q — два сопряженных проводника, то условие их сопряженности, как следует из формул (6.36), имеет вид

$$\Delta_{pq} = 0. \tag{6.41}$$

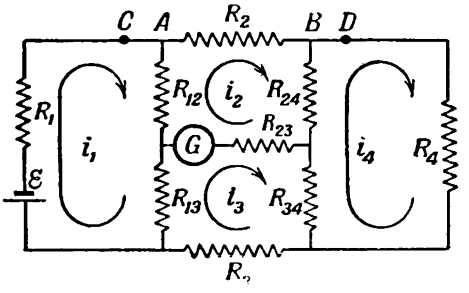
Если контурные токи выбраны так, что справедлива формула (6.39), то условие сопряженности проводников R_1 и R_{23} принимает вид

$$\Delta_{123} = 0. \tag{6.42}$$

Условие баланса для моста Уитстона, описанного в § 6, можно получить, исходя из соотношения (6.42), если обозначить на фиг. 60 через i_1 ток I,

а через i_2 и i_3 соответственно токи в треугольниках ABD и BCD. Мост Уитстона не пригоден для измерения очень малых сопротивлений, так как сопротивления контактов делаются сравнимыми с измеряемым сопротивлением. Этот недостаток устраняется в измерительной схеме, показанной на фиг. 62, где измеряемое сопротивление заключено между точками A и B, а ток к нему подводится через контакты C и D. Сопротивление контактов A и B много меньше сопротивлений $R_{12}+R_{13}$ и $R_{24}+R_{34}$. Требуется найти, при каких условиях ток через гальванометр равен нулю, или, что то же самое, найти условие сопряженности сопротивлений R_1 и R_{23}. Ввиду того, что токи i_1 и i_4 не имеют общей ветви, R_{14} следует положить равным нулю. Условие баланса моста, согласно соотношениям (6.42) и (6.39), имеет вид

$$\Delta_{123}=\begin{vmatrix} -R_{12}-R_{13} & 0 \\ +R_2+R_3+R_4 & \\ R_{42}-R_{43}+R_{44} & \end{vmatrix}=0. \quad (6.43)$$



Фиг. 62.

Уже отсюда видно, что искомое условие баланса моста не зависит от R_1 и, значит, от сопротивления контакта C; но нужно, чтобы оно также не зависело от сопротивления контакта D, т. е. от R_4. Таким образом, в определителе (6.43) коэффициент при R_4 и коэффициент при членах, не содержащих R_4, должны порознь равняться нулю. Последние, согласно соотношению (6.31), все входят в R_{44}; следовательно, минор элемента R_{44} в определителе (6.43) должен обращаться в нуль, т. е. $-R_{12}R_3+R_{13}R_2=0$. Кроме того, должен быть равен нулю минор элемента R_4, т. е. $-R_{12}R_{43}+R_{13}R_{42}=0$. Из этих двух выражений следует

$$\frac{R_{12}}{R_{13}}=\frac{R_{24}}{R_{34}}=\frac{R_2}{R_3}. \quad (6.44)$$

Итак, если ток в ветви R_{23} отсутствует, R_2 можно выразить через R_3 при условии, что отношения R_{12}/R_{13} и R_{24}/R_{34} известны и равны друг другу.

§ 11. Постоянные токи в проводящих средах. В § 1 [формула (6.3)] было показано, что если в установившемся состоянии в проводящей среде нигде не происходит накопления зарядов, то дивергенция плотности тока $\mathbf{i}$ всюду равна нулю. Согласно закону Ома [формула (6.8)], плотность тока $\mathbf{i}$ в изотропной среде пропорциональна градиенту потенциала и обратно пропорциональна удельному сопротивлению. Из этих формул следует, что

$$\nabla\cdot\mathbf{i}=\nabla\cdot\left(\frac{1}{\tau}\nabla V\right)=0. \quad (6.45)$$

Если среда однородная, то τ — постоянная величина и уравнение (6.45) принимает вид

$$\nabla^2 V=0. \quad (6.46)$$

Сравнивая уравнения (6.45) и (6.46) с уравнениями (3.5) и (3.6), мы видим, что эти уравнения совпадают с уравнением Лапласа, а величина, обратная удельному сопротивлению τ, т. е. проводимость среды, играет ту же роль, что и диэлектрическая проницаемость среды в электростатике. Отсюда вытекает возможность использования в теории постоянных токов математического аппарата электростатики. Трубки тока находятся в таком же отношении к эквипотенциальным поверхностям, как и силовые трубки в электро-

статике. На границе двух проводящих сред потенциал и нормальная компонента плотности тока должны оставаться непрерывными, так что в соответствии с условиями (1.48) и (1.49) условия на границе имеют вид

$$\frac{1}{\tau'}\frac{\partial V'}{\partial n} = \frac{1}{\tau''}\frac{\partial V''}{\partial n}, \tag{6.47}$$

$$V' = V'' \tag{6.48}$$

Эти соотношения полностью определяют связь значений градиента потенциала по обе стороны границы. Поэтому, если относительные диэлектрические проницаемости обеих сред также различны и не пропорциональны соответствующим проводимостям, то для удовлетворения добавочному граничному условию необходимо ввести еще одну переменную. Считая, что на границе распределен поверхностный заряд с плотностью σ, на основании уравнения (6.45) получаем

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_v} = K_1\frac{\partial V_1}{\partial n} - K_2\frac{\partial V_2}{\partial n} = -(K_1\tau_1 - K_2\tau_2)\, i_n. \tag{6.49}$$

Рассматривая магнитные силы, действующие между проводниками, несущими токи (см. следующую главу), можно, казалось бы, придти к заключению, что распределение токов, вычисленное путем решения уравнений (6.45) и (6.46), неправильно, вследствие смещения элементов тока, обусловленного магнитным взаимодействием. В действительности в изотропных неферромагнитных проводниках при наличии магнитного поля всегда имеет место увеличение сопротивления, называемое иногда «продольным эффектом Холла» [1]). Вследствие этого в тех областях проводника, где напряженность магнитного поля больше, сопротивление возрастает относительно сильнее, чем в областях с меньшей напряженностью магнитного поля, и относительная плотность тока там уменьшается. Например, в случае постоянного тока в цилиндрическом проводнике плотность тока вблизи оси несколько больше, чем на периферии. Если этот проводник помещен во внешнее однородное поперечное магнитное поле, которое складывается с собственным магнитным полем тока на одной стороне цилиндра и вычитается из него на другой, то появляется боковое смещение тока в направлении, совпадающем с направлением силы, действующей на проводник. При этом положение эквипотенциальных поверхностей не изменяется и не возникает никаких дополнительных поперечных сил, действующих на проводник, по которому течет ток. Хотя изменение сопротивления проводника можно измерить, однако соответствующее смещение тока при обычных температурах слишком мало, чтобы его можно было заметить. Обычный поперечный эффект Холла вызывает изменение положения эквипотенциальных поверхностей, зависящее от свойств проводника, но распределение тока в этом случае остается неизменным. Однако можно поставить опыт таким образом, что распределение тока в контуре изменится; это изменение наблюдается при помощи чувствительных приборов лишь в очень сильных полях. Итак, изменение распределения тока в проводниках, обусловленное магнитными взаимодействиями, пренебрежимо мало, и результаты, полученные путем решения уравнений (6.45) и (6.46) при заданных граничных условиях, можно рассматривать, поскольку речь идет о влиянии этого взаимодействия, как точные.

Так как удельное сопротивление зависит от температуры, а протекающий по проводнику ток выделяет тепло, то при сильных токах найденные решения окажутся неточными; наибольшие отклонения будут наблю-

[1]) Классическую теорию эффекта Холла можно найти в книге Р. Беккера. Электронная теория, М.—Л., 1936. — *Прим. перев.*

даться там, где большая плотность тока вызывает сильное нагревание среды. Поэтому наши результаты будут точны только в том случае, если температурный коэффициент сопротивления среды и плотность тока малы или если токи кратковременны.

§ 12. Общие теоремы. Общие теоремы, выведенные в гл. III из теоремы Грина, можно записать в форме, удобной для решения рассматриваемых в настоящей главе задач.

1. Если всюду на границах проводника задано значение потенциала V, а также заданы величина и местонахождение всех источников или стоков тока внутри него, то потенциал V однозначно определен во всех точках проводника.

2. Если всюду на поверхности проводника задано значение нормальной компоненты плотности тока, а также заданы величина и местонахождение всех источников или стоков тока внутри него, то тем самым определено значение разности потенциалов между любыми двумя точками проводника.

3. Если удельное сопротивление части проводника возрастает, то сопротивление всего проводника возрастает или остается неизменным.

4. Если удельное сопротивление части проводника уменьшается, то сопротивление всего проводника уменьшается или остается неизменным.

К этим теоремам можно добавить еще одну, доказательство которой будет дано ниже.

5. В проводнике всегда устанавливается такое распределение тока, при котором выделяется минимальное количество тепла.

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что имеется отступление от распределения, задаваемого законом Ома (6.8), и что добавочная плотность тока равна $\mathbf{j}$. Так как не должно быть накопления зарядов, эта добавочная плотность тока $\mathbf{j}$ должна удовлетворять уравнению непрерывности $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Тепло, выделяющееся в элементе трубки тока в проводнике, согласно выражениям (6.8) и (6.11), равно

$$dP = \left[\left(\frac{1}{\tau}\nabla V + \mathbf{j}\right) dS\right]^2 \tau \left(\frac{ds}{dS}\right) = \tau \left(\frac{1}{\tau}\nabla V + \mathbf{j}\right)^2 d\mathrm{v}.$$

Здесь dS — поперечное сечение элементарной трубки и ds — ее длина. Интегрирование дает

$$P = \int_{\mathrm{v}} \left[\frac{1}{\tau}(\nabla V)^2 + 2\mathbf{j}\cdot\nabla V + \tau \mathbf{j}^2\right] d\mathrm{v}. \tag{6.50}$$

Применив теорему Грина (3.21) ко второму интегралу, полагая $\mathbf{j} = \nabla\Phi$ и $\Psi = V$, будем иметь

$$\int_{\mathrm{v}} \mathbf{j}\cdot\nabla V \, d\mathrm{v} = -\int_{\mathrm{v}} V\nabla \, \mathbf{j} d\mathrm{v} + \int_{S} V\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} dS.$$

Первый член в правой части равен нулю, так как $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Второй член также равен нулю, поскольку величина полного тока через электрод задана. Следовательно, в правой части выражения (6.50) отличны от нуля только первый и третий интегралы. Первый дает количество тепла, выделяющееся в проводнике, в том случае, когда выполняется закон Ома. Третий интеграл всегда положителен, поэтому при всяком отклонении от закона Ома количество выделенного тепла увеличивается.

§ 13. Двухмерный ток. Как было отмечено в § 1 гл. IV, в электростатике, строго говоря, не существует двухмерных задач ввиду того, что любой цилиндрический проводник имеет конечную длину, а получить

резкую границу электрического поля на концах цилиндра невозможно, так как в природе нет сред с нулевой диэлектрической проницаемостью. Напротив, многие задачи о токах в проводниках являются строго двухмерными, так как ток можно сосредоточить в конечной области, ограничивая эту область изолирующей поверхностью. К этому типу задач принадлежат все задачи о токах в тонких плоских проводящих пленках. Для решения этих задач применимы все методы, описанные в гл. IV. Наиболее эффективным из них является метод сопряженных функций.

В § 10 гл. IV было показано, что решение уравнения (6.48) в случае потенциала, зависящего только от x и y, имеет вид

$$U(x, y) \quad \text{или} \quad V(x, y), \tag{6.51}$$

где

$$W = U + jV = f(z) = f(x + jy). \tag{6.52}$$

Если V — потенциальная функция, то плотность тока i в любой точке, согласно формулам (4.57) и (6.7), будет равна

$$i = \frac{1}{\tau}\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| = \frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{1}{\tau}\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{6.53}$$

Если выбрать в качестве потенциальной функции U, то

$$i = \frac{1}{\tau}\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| = \frac{1}{\tau}\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.54}$$

В формулах (6.53) и (6.54) принято то же самое правило знаков, что и в формуле (4.57).

Таким образом, если проводник ограничен эквипотенциальными линиями U_1 и U_2 и силовыми линиями V_1 и V_2, то ток через него будет равен

$$I = \int_{V_1}^{V_2} i\,ds = \frac{1}{\tau}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\partial U}{\partial n}\,ds = \frac{1}{\tau}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\partial V}{\partial s}\,ds = \frac{V_2 - V_1}{\tau}$$

Сопротивление проводника по закону Ома равно

$$R = \frac{|U_2 - U_1|}{|I|} = \tau\frac{|U_2 - U_1|}{|V_2 - V_1|} \tag{6.55}$$

Если в формуле (6.55) эквипотенциальные линии U_1 и U_2 являются замкнутыми кривыми, то электростатическая емкость между электродами, находящимися в вакууме, будет равна (см. § 12 гл. IV)

$$C = \frac{\varepsilon_0 [V]}{|U_2 - U_1|}, \tag{6.56}$$

где через $[V]$ обозначен интеграл от V, взятый по замкнутому контуру вдоль U_1 или U_2. Таким образом, зная C, можно найти сопротивление между U_1 и U_2, если проводящая среда заполняет то же самое пространство, что и электростатическое поле. При помощи формул (6.55) и (6.56) находим

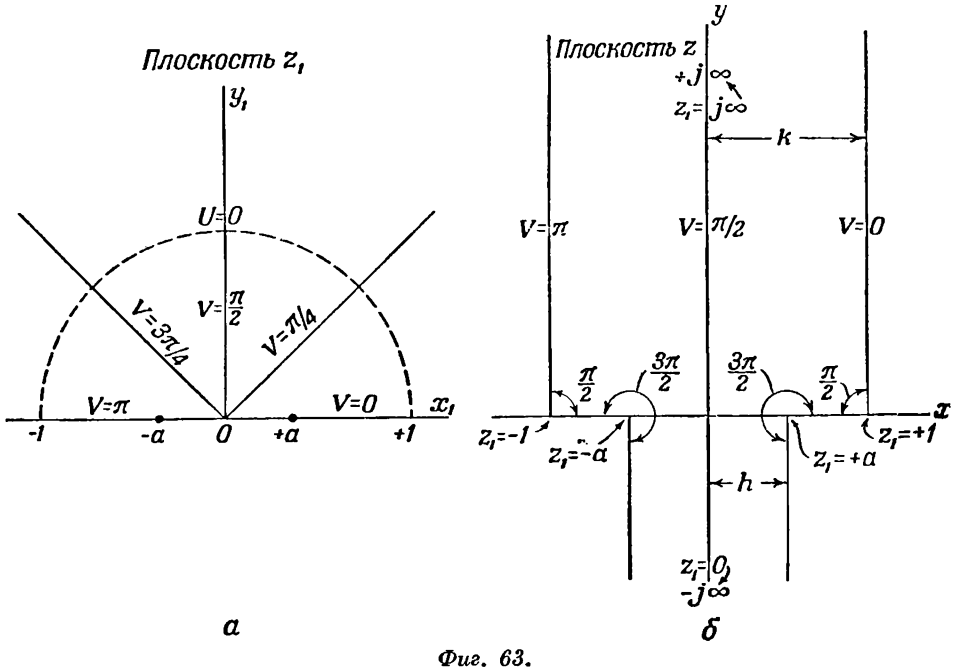
$$R = \frac{\tau\varepsilon_0}{C} \tag{6.57}$$

Так, из формулы (4.69) следует, что сопротивление на единицу длины между двумя параллельными цилиндрическими электродами, оси которых находятся на расстоянии D друг от друга, равно

$$R = \frac{\tau}{2\pi}\operatorname{ar\,ch}\left(\pm\frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}\right), \tag{6.58}$$

где τ — удельное сопротивление среды между цилиндрами, а R_1, R_2 — их радиусы. Знак минус соответствует случаю, когда один цилиндр расположен внутри другого, знак плюс — случаю, когда ни один из цилиндров не охватывает другого.

§ 14. Длинная лента со скачкообразно меняющейся шириной. Применим изложенную выше теорию к вычислению распределения тока в длинной, однородной по толщине проводящей ленте, полуширина которой меняется скачком от h до k. Область ленты вблизи уступа показана на



Фиг. 63.

фиг. 63, *б*. Очевидно, что такая граница получается, если давать действительной оси плоскости z_1 углы наклона $\pi/2$, $3\pi/2$, 0, $3\pi/2$ и $\pi/2$ соответственно в точках -1, $-a$, 0, $+a$ и $+1$. Чтобы после наклона получить между точками $-a$ и $+a$ конечное расстояние, необходимо поместить начало координат плоскости z_1 в точке $z=-j\infty$ плоскости z. Подставляя значения всех α и u в выражение (4.85), найдем

$$\frac{dz}{dz_1}=c\frac{(z_1^2-a^2)^{1/2}}{z_1(z_1^2-1)^{1/2}}=\frac{cz_1}{[(z_1^2-1)(z_1^2-a^2)]^{1/2}}-\frac{ca^2}{z_1[(z_1^2-1)(z_1^2-a^2)]^{1/2}}. \qquad (6.59)$$

Прежде чем выполнять интегрирование, определим входящие в выражение (6.59) постоянные a и c по методу, изложенному в § 29 гл. IV. Как и в § 29 гл. IV, $dz_1=jr_1e^{j\theta_1}d\theta_1=jz_1d\theta_1$ при постоянном r_1. Когда величина r_1 очень мала и θ_1 изменяется от 0 до π в плоскости z_1, y является большой отрицательной постоянной величиной, а x изменяется в плоскости z от $+h$ до $-h$. Из выражения (6.59) тогда находим

$$\int_{+h}^{-h}dz=jc\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{r_1^2e^{2j\theta_1}-a^2}{r_1^2e^{2j\theta_1}-1}\right)^{1/2}d\theta_1\right]_{r_1\to 0}=\pm jc\int_0^{\pi}a\,d\theta_1,$$

откуда $h = \mp \frac{1}{2} jc\pi a$. Аналогично, y — большая положительная постоянная величина при $r_1 \to \infty$, так что

$$\int_{+h}^{-h} dz = jc \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{r_1^2 e^{2j\theta_1} - a^2}{r_1^2 e^{2j\theta_1} - 1} \right)^{1/2} d\theta_1 \right]_{r_1 \to \infty} = \pm jc \int_0^{\pi} d\theta_1.$$

Откуда $k = \mp \frac{1}{2} jc\pi$. Решая относительно c и a, будем иметь

$$a = \frac{h}{k} \quad \text{и} \quad c = \mp \frac{2jk}{\pi}. \tag{6.60}$$

Подставим эти значения в выражение (6.59), заменим z_1^2 в первом члене и a^2/z_1^2 — во втором на $(u^2 + a^2)/(1 + u^2)$ и проинтегрируем (см. Двайт, 120). В результате получим

$$z = \frac{2}{\pi} \left\{ k \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{(z_1^2 - a^2)}{(1 - z_1^2)} \right]^{1/2} + h \operatorname{arc\,tg} \left[a \frac{(1 - z_1^2)^{1/2}}{(z_1^2 - a^2)^{1/2}} \right] \right\}.$$

Постоянная интегрирования отсутствует, так как из этой формулы следует, что, когда $y_1 = 0$ и $x_1 = \pm a$, $z = \pm h$, а когда $y_1 = 0$ и $x_1 = \pm 1$, $z = \pm k$.

Физически очевидно, что вдоль разных границ проводника проходят различные линии тока. Если положить $W = \ln z_1$, или $z_1 = e^W$, где U — потенциальная функция, то (см. фиг. 63, *а*) линия тока $V = 0$ будет проходить от $x_1 = +\infty$ до $x_1 = 0$ и линия тока $V = \pi$ — от $x_1 = -\infty$ до $x_1 = 0$. Следовательно (см. фиг. 63, *б*), эти линии тока будут проходить соответственно по правой и левой границам ленты, сверху вниз, а полный ток в ленте будет равен $I = \pi/\varsigma$. Подставляя $z_1 = e^W$, получим

$$z = \frac{2}{\pi} \left[k \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{e^{2W} - a^2}{1 - e^{2W}} \right)^{1/2} + h \operatorname{arc\,tg} a \left(\frac{1 - e^{2W}}{e^{2W} - a^2} \right)^{1/2} \right], \tag{6.61}$$

причем действительная часть z положительна, если положительна действительная часть z_1.

Если ς — сопротивление между противоположными сторонами квадрата с площадью 1 $м^2$, вырезанного из того же самого листового проводника, что и лента, то сопротивление широкого участка ленты (длиной y_k) будет $R_k = \varsigma |y_k|/2k$, а узкого (длиной y_h) $R_h = \varsigma |y_h|/2h$. Когда два таких участка ленты, широкий и узкий, соединены между собой так, как это показано на фиг. 63, *б*, сопротивление всей ленты будет не $R_k + R_h$, а $R_k + R_h + \Delta R$, где ΔR — добавочное сопротивление, обусловленное деформацией линий тока вблизи места соединения. Если $y_k \gg k$ и $y_h \gg h$, то эквипотенциальные линии на фиг. 63, *б* параллельны оси. Вычислим для этого случая ΔR. На оси y $V = \frac{1}{2}\pi$, так что $e^{2W} = -e^{2U}$ и выражение (6.61), если заменить $\operatorname{arc\,tg} ju$ на $j \operatorname{ar\,th} u$ и положить $x = 0$, даст

$$y = \frac{2}{\pi} \left[k \operatorname{ar\,th} \left(\frac{e^{2U} + a^2}{1 + e^{2U}} \right)^{1/2} - h \operatorname{ar\,th} a \left(\frac{1 + e^{2U}}{e^{2U} + a^2} \right)^{1/2} \right]. \tag{6.62}$$

Пусть $U = U_1 \to +\infty$, тогда e^{2U} очень велико и (см. Двайт, 4 и 5.3)

$$y_k = \frac{2}{\pi} \left(k \operatorname{ar\,th} \frac{2e^{2U_1} + a^2}{2e^{2U_1} + 1} - h \operatorname{ar\,th} a \frac{2e^{2U_1} + 1}{2e^{2U_1} + a^2} \right).$$

Пользуясь формулой (702) из справочника Двайта и пренебрегая 1, a и a^2 по сравнению с e^{2U}, получим

$$y_h = \frac{1}{\pi}\left(k \ln \frac{4e^{2U_1}}{1-a^2} - h \ln \frac{1+a}{1-a}\right) =$$

$$= \frac{2kU_1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(k \ln \frac{4k^2}{k^2-h^2} - h \ln \frac{k+h}{k-h}\right) = \frac{2kU_1}{\pi} + A.$$

Если $U = U_2 \to -\infty$, то e^{2U} очень мало и, как и раньше,

$$y_h = \frac{2}{\pi}\left[k \operatorname{ar\,th} \frac{2a^2 + e^{2U_2}}{a(2+e^{2U_2})} - h \operatorname{ar\,th} \frac{a^2(2+e^{2U_2})}{2a^2+e^{2U_2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k \ln \frac{1+a}{1-a} - h \ln \frac{4a^2}{(1-a^2)e^{2U_2}}\right] =$$

$$= \frac{2hU_2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(k \ln \frac{k+h}{k-h} - h \ln \frac{4h^2}{k^2-h^2}\right) = \frac{2hU_2}{\pi} + B.$$

Вычитая из первого выражения второе, найдем $U_1 - U_2$

$$U_1 - U_2 = \frac{\pi y_h}{2k} - \frac{\pi y_h}{2h} - \pi\left(\frac{A}{2k} - \frac{B}{2h}\right)$$

и, в силу формулы (6.55),

$$R = \varsigma \frac{U_1 - U_2}{\pi} = -\frac{\varsigma}{2}\left(\frac{A}{k} - \frac{B}{h}\right) + \frac{\varsigma y_h}{2k} + \frac{\varsigma |y_h|}{2h} = \Delta R + R_k + R_h.$$

Подставляя значения A и B, для ΔR после упрощений получим следующее выражение:

$$\Delta R = \frac{\varsigma}{2\pi}\left[\frac{h^2+k^2}{hk} \ln \frac{k+h}{k-h} + 2 \ln \frac{k^2-h^2}{4hk}\right] \tag{6.63}$$

Другие примеры применения этого метода можно найти в задачах, помещенных в конце главы.

§ 15. Трехмерное распределение тока. Если пространство между двумя электродами целиком заполнено однородной изотропной проводящей средой, то распределение тока и сопротивление между электродами можно получить, решая электростатическую задачу о емкости между теми же самыми электродами, при замене проводящей среды диэлектриком. В обоих случаях нужно найти решение уравнения

$$\nabla^2 V = 0. \tag{6.64}$$

В электростатической задаче, если электроды находятся в вакууме, граничные условия, согласно формуле (1.40), имеют вид

$$V = V_a, \quad Q_a = -\int_S \varepsilon_v \frac{\partial V}{\partial n}\, dS_a. \tag{6.65}$$

В задаче о токе соответствующие условия, согласно формуле (6.5), можно записать в виде

$$V = V_a, \quad I_a = -\int_S \frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial n}\, dS_a. \tag{6.66}$$

Так как граничные условия одинаковы, эквипотенциальные поверхности в обоих случаях в точности совпадают. Сопротивление, по закону Ома, будет равно

$$R = \frac{|V_b - V_a|}{|I_a|} = \tau\varepsilon_v \frac{|V_b - V_a|}{|Q_a|} = \frac{\tau\varepsilon_v}{C}, \tag{6.67}$$

где C — емкость между электродами, находящимися в вакууме. Если можно найти такую электростатическую задачу, в которой боковые стенки силовой трубки имеют ту же форму, что и граница между проводником (с удельным сопротивлением τ) и изолирующей средой и, кроме того, эквипотенциальные поверхности концов силовой трубки совпадают по форме с идеально проводящими контактами на концах проводника, то сопротивление проводника можно выразить, согласно формуле (6.67), через «емкость» силовой трубки. Под емкостью в этом случае подразумевается отношение заряда на конце трубки к разности потенциалов между ее концами.

§ 16. Системы электродов. Две сферы. Удаленные электроды. Если в однородную изотропную проводящую среду с удельным сопротивлением τ помещены n идеально проводящих электродов, то все соотношения между потенциалами электродов и вытекающими из них (или втекающими в них) токами можно найти при помощи методов, изложенных в § 14—19 гл. III. Для этого нужно только заменить заряд Q_s в электростатической задаче на ток I_s s-го электрода и умножить емкостные коэффициенты на $(\tau\varepsilon_v)^{-1}$, а потенциальные — на $\tau\varepsilon_v$.

Например, для двух сфер с радиусами a и b, одна из которых находится внутри или снаружи другой и расстояние между центрами которых равно C, из уравнений (2.39), учитывая, что $I_1 = -I_2$, получим

$$V_1 - V_2 = \tau\varepsilon_v (s_{11} - 2s_{12} + s_{22}) I_1,$$

так что сопротивление между ними равно

$$R = \left| \frac{V_1 - V_2}{I_1} \right| = \tau\varepsilon_v (s_{11} - 2s_{12} + s_{22}). \tag{6.68}$$

В § 9а гл. V методом изображений были вычислены значения c_{11}, c_{12} и c_{22} для этого случая. Используя эти величины, для сопротивления R в соответствии с определителем (2.41) получаем

$$R = \tau\varepsilon_v \frac{c_{11} + 2c_{12} + c_{22}}{c_{12}^2 - c_{11} c_{22}}. \tag{6.69}$$

Формула (6.69) мало пригодна, если одна сфера находится внутри другой. В этом случае можно использовать метод, изложенный в § 20 гл. V.

Если два электрода находятся в бесконечной проводящей среде на большом расстоянии друг от друга, то из формул (6.68) и (6.69) следует, что

$$R = \tau \left(\frac{\varepsilon_v}{C_a} - \frac{1}{2\pi r} + \frac{\varepsilon_v}{C_b} \right), \tag{6.70}$$

где r — расстояние между электродами, а C_a и C_b — электростатические емкости каждого из них в отдельности.

§ 17. Задача о проводящем шаре. Для иллюстрации применения метода сферических гармоник к решению задач, в которых рассматриваются границы между проводником и изолятором, вычислим потенциал во всех точках проводящего шара с удельным сопротивлением τ, в том случае, когда ток I входит в один его полюс $\theta = 0$ и вытекает из противоположного $\theta = \pi$. В силу симметрии потенциал экваториальной плоскости можно принять равным нулю, так что в соответствии с § 16 и гл. V в разложении потенциала будут присутствовать только нечетные гармоники. Для потенциала, который должен быть конечным в начале координат, получаем

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta). \tag{6.71}$$

Чтобы определить A_{2n+1}, продифференцируем выражение (6.71) по r, положим $r=a$, умножим на $P_{2m+1}(\mu)\,d\mu$ и проинтегрируем от $\mu=0$ до $\mu=1$. Из соотношения (5.92) следует, что в правой части останется только член, для которого $m=n$, так что, заменив m на n, получим

$$\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial r} P_{2n+1}(\mu)\,d\mu = (2n+1)\,A_{2n+1}\,a^{2n}\int_0^1 [P_{2n+1}(\mu)]^2\,d\mu. \qquad (6.72)$$

Применим формулу (5.127) к интегралу в правой части. При $r=a$ производная $\partial V/\partial r$ равна нулю всюду, за исключением площадки ΔS поверхности электрода, т. е. окрестности $\mu=1$; эта площадка так мала, что на ней $P_{2n+1}(\mu)$ можно заменить на $P_{2n+1}(1)=1$. Согласно формуле (6.8), $\partial V/\partial r=|\nabla\mathscr{E}|=\tau i_r$; поскольку $dS=-2\pi a^2 d\mu$, для A_{2n+1} находим

$$A_{2n+1}=\frac{4n+3}{2n+1}\frac{a^{-2n}}{2\pi a^2}\tau\int_{\Delta S}(-i_r)\,dS=\frac{\tau I}{2\pi a^2}\frac{4n+3}{2n+1}\frac{1}{a^{2n}},$$

и, следовательно, выражение (6.71) принимает вид

$$V=\frac{\tau I}{2\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta). \qquad (6.73)$$

Этот ряд можно разбить на четыре более простых ряда и заменить в них $2n+1$ на m. Таким образом, получим,

$$V=\frac{\tau I}{2\pi a}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2m}\right)P_m(\mu)-\left(1+\frac{1}{2m}\right)P_m(-\mu)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^m$$

Обозначая расстояния до полюсов через R_0 и R_π, можно, согласно выражению (5.17), произвести суммирование этих рядов:

$$V=\frac{\tau I}{2\pi}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{2}\int\frac{dr}{rR_0}-\frac{1}{R_\pi}-\frac{1}{2}\int\frac{dr}{rR_\pi}\right). \qquad (6.74)$$

Пусть R_0 и R_π образуют с осью шара углы α_0 и α_π, так что $R_0\cos\alpha_0=a-r\cos\theta$ и $R_\pi\cos\alpha_\pi=a+r\cos\theta$. Появляющиеся при интегрировании (см. Пайерс, 182) в выражении (6.74) логарифмические члены $\ln r$ сокращаются, и для потенциала V получаем

$$V=\frac{\tau I}{2\pi}\left\{\frac{1}{R_0}-\frac{1}{a}\ln[R_0(1+\cos\alpha_0)]-\frac{1}{R_\pi}+\frac{1}{a}\ln[R_\pi(1+\cos\alpha_\pi)]\right\} \qquad (6.75)$$

Очевидно, что

$$V\xrightarrow[R_0\to 0]{}\frac{\tau I}{2\pi R_0}\quad\text{и}\quad V\xrightarrow[R_\pi\to 0]{}-\frac{\tau I}{2\pi R_\pi},$$

так что исходное разложение (6.73) остается верным вблизи полюсов.

В рассматриваемом случае в силу симметрии границы трубок тока являются поверхностями вращения. Уравнение поверхности трубки, по которой протекает ток I_1, можно получить, интегрируя нормальную компоненту плотности тока $-(1/\tau)\,(\partial V/\partial r)$ по сегменту, вырезанному трубкой на сфере, и приравнивая результат интегрирования току $+I_1$. Для этой цели выражение (6.74) более удобно, чем (6.75). Интеграл от членов, содержащих величины, обратные расстояниям, был вычислен в § 11б гл. I; поскольку элемент поверхности равен $2\pi r^2\sin\theta\,d\theta$, для тока I_1 будем иметь

$$I_1=2I\left(\frac{1-\cos\alpha_0}{2}+\frac{1-\cos\alpha_\pi}{2}\right)+\frac{rI}{2}\left(\int_0^\theta\frac{\sin\theta\,d\theta}{R_0}-\int_0^\theta\frac{\sin\theta\,d\theta}{R_\pi}\right).$$

Полагая $x = \cos\theta$ и интегрируя (см. Двайт, 191.01), получим

$$I_1 = I\left[2 - \cos\alpha_0 - \cos\alpha_\pi + \frac{1}{2a}(R_0 + R_\pi - 2a)\right].$$

Если β — тупой угол между R_0 и R_π, то

$$R_\pi - 2a\cos\alpha_\pi = R_0\cos\beta,\quad R_0 - 2a\cos\alpha_0 = R_\pi\cos\beta$$

и уравнение трубок тока приводится к виду

$$I_1 = I\left(1 + \frac{R_0 + R_\pi}{2a}\cos\beta\right). \tag{6.76}$$

Эта формула подтверждает выполнение граничных условий, так как на поверхности шара второй член в скобках равен нулю и $I_1 = I$.

§ 18. Задача о сплошном проводящем цилиндре. Для иллюстрации применения бесселевых функций к задаче о проводнике, ограниченном цилиндрической изолирующей поверхностью, вычислим распределение потенциала в сплошном проводящем круглом цилиндре, длина которого равна $2c$, радиус a, удельное сопротивление τ, в том случае, когда ток I подводится к нему при помощи электродов, имеющих вид узких кольцевых поясков, прижатых к цилиндру на расстоянии b по обе стороны от его экватора. Ширину пояска будем считать настолько малой, что физически измерить ее невозможно, но в то же время отличной от нуля в математическом смысле, так что плотность тока и потенциал всюду будут конечны. Принимая экваториальную плоскость за плоскость нулевого потенциала, получаем, что решение уравнения непрерывности, остающееся конечным на оси, в соответствии с § 33а гл. V и формулой (5.311), имеет вид

$$V = \sum_n A_n I_0(k_n\rho)\sin k_n z. \tag{6.77}$$

На границе $z = c$ должно быть $\partial V/\partial z = 0$. Это граничное условие удовлетворяется, если, имея в виду, что $\cos[(2n+1)\pi/2] = 0$, положить

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2c}. \tag{6.78}$$

Чтобы определить A_n, продифференцируем выражение (6.77) по ρ [используя соотношения (5.440)], положим $\rho = a$, умножим результат на $\sin k_n z$ и проинтегрируем от 0 до c. В правой части останется только тот член, для которого $k_p = k_n$ (см. Двайт, 435). Поэтому, заменив p на n, получаем

$$\int_0^c \frac{\partial V}{\partial\rho}\sin k_n z\,dz = A_n I_1(k_n a)\int_0^{k_n c}\sin^2 k_n z\,d(k_n z).$$

Применим к интегралу в правой части выражение (430.20) из справочника Двайта. На границе $\rho = a$, $\partial V/\partial\rho$ равно нулю всюду, за исключением поверхности ΔS, покрытой электродом и лежащей в окрестности $z = b$. Эта поверхность настолько мала, что на ней $\sin k_n z$ можно принять равным $\sin k_n b$. Из формулы (6.8), полагая $2\pi a\,dz = dS$, получим для интеграла в левой части

$$\frac{\sin k_n b}{2\pi a}\tau\int_{\Delta S} i\,dS = \frac{\tau I}{2\pi a}\sin k_n b.$$

Постоянные A_n будут равны

$$A_n = \frac{2\tau I}{(2n+1)\pi^2 a}\,\frac{\sin k_n b}{I_1(k_n a)}. \tag{6.79}$$

Формулы (6.77)—(6.79) дают искомое решение.

В рассмотренной задаче границы трубок тока являются поверхностями вращения. Уравнение поверхности трубки, несущей ток I', можно получить, интегрируя плотность тока $-(1/\tau)\,(\partial V/\partial z)$ по поверхности диска, вырезанного трубкой, и приравнивая результат интегрирования току $-I'$:

$$I' = +\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} 2\pi k_n A_n \cos k_n z \int_0^{\rho} I_0(k_n\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Интегрируя это выражение при помощи формулы (5.441) и подставляя значение A_n из формулы (6.79), получим

$$I' = \frac{4I\rho}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin k_n b \cos k_n z\, I_1(k_n\rho)}{(2n+1)\,I_1(k_n a)}, \tag{6.80}$$

где значения k_n вычисляются по формуле (6.78).

§ 19. Сопротивление земли. В геофизике существует метод исследования структуры земной коры, основанный на измерении распределения потенциала на земной поверхности при прохождении тока между двумя или бо́льшим числом поверхностных электродов. Рассмотрим простейший случай, когда до глубины a удельное сопротивление земли равно τ_1, а на большей глубине оно равно τ_2. Применим метод, изложенный в § 31г гл. V, для нахождения распределения потенциала около точечного электрода. Решение в случае двух или большего числа электродов можно найти при помощи суперпозиции. Потенциал, созданный уединенным электродом, можно получить из выражения (5.378), заменяя, согласно § 15, заряд q на $2\pi\varepsilon I$. Следует иметь в виду, что в этом случае $2I$ соответствует току, рассмотренному в § 15, так как весь ток протекает в нижнем полупространстве. Таким образом, для потенциала одного электрода имеем

$$V = \frac{\tau_1 I}{2\pi r} = \frac{\tau_1 I}{2\pi}\int_0^{\infty} J_0(k\rho)\,e^{-k|z|}\,dk. \tag{6.81}$$

Как и в § 31г гл. V, для получения решения в области τ_1 мы должны учесть добавочный потенциал, обусловленный разрывом непрерывности при $z=a$; этот потенциал может содержать как члены e^{-kz}, так и члены e^{kz} ввиду того, что z в данной области является конечной величиной. Таким образом,

$$V_1 = \frac{\tau_1 I}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\Phi(k)\,J_0(k\rho)\,e^{-kz}\,dk + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty}\Psi(k)\,J_0(k\rho)\,e^{+kz}\,dk + \int_0^{\infty} J_0(k\rho)\,e^{-kz}\,dk\right]. \tag{6.82}$$

На поверхности земли $z=0$ и линии тока должны быть горизонтальны; так как последний член формулы (6.82) уже удовлетворяет этому условию, то этому же условию должны удовлетворять и остальные члены формулы (6.82). Следовательно, условие $\partial V_1/\partial z = 0$ при $z=0$ дает

$$-\Phi(k) + \Psi(k) = 0. \tag{6.83}$$

Потенциал в области τ_2 должен обращаться в нуль на бесконечности и, следовательно, может иметь только такой вид:

$$V_2 = \frac{\tau_1 I}{2\pi}\int_0^{\infty}\Theta(k)\,J_0(k\rho)\,e^{-kz}\,dk. \tag{6.84}$$

Граничные условия при $z=a$, согласно соотношениям (6.47) и (6.48), записываются следующим образом:

$$V_1=V_2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\tau_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}=\frac{1}{\tau_2}\frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

После подстановки соответствующих выражений из формул (6.82)—(6.84) и исключения $J_0(k\rho)$ получаем

$$e^{-ka}+\Phi(k)(e^{ka}+e^{-ka})-\Theta(k)e^{-ka}=0, \tag{6.85}$$

$$-\tau_2 e^{-ka}+\tau_2\Phi(k)(e^{ka}-e^{-ka})+\tau_1\Theta(k)e^{-ka}=0. \tag{6.86}$$

Исключив $\Theta(k)$ из этих уравнений, обозначив $(\tau_1-\tau_2)/(\tau_1+\tau_2)$ через β и подставив в формулу (6.82), находим распределение потенциала на поверхности земли (где $z=0$)

$$V_s=\frac{\tau_1 I}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1-\beta e^{-2ka}}{1+\beta e^{-2ka}}J_0(k\rho)\,dk. \tag{6.87}$$

Разлагая знаменатель выражения (6.87) в ряд (см. Двайт, 9.04) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$V_s=\frac{\tau_1 I}{2\pi}\left[\int_0^\infty J_0(k\rho)\,dk+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta^n\int_0^\infty e^{-2nka}J_0(k\rho)\,dk\right]$$

Подстановка интеграла из выражения (5.372) дает

$$V_s=\frac{\tau_1 I}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^n}{(4n^2a^2+\rho^2)^{1/2}}\right] \tag{6.88}$$

Если принять теперь поверхность земли за плоскость xy, то при токе I между электродами, находящимися в точках $x=+b$ и $x=-b$, для потенциала на поверхности (поскольку $\rho_+=[(x-b)^2+y^2]^{1/2}$ и $\rho_-=[(x+b)^2+y^2]^{1/2}$) можно написать

$$V_s=\frac{\tau_1 I}{2\pi}\left\{\frac{1}{\rho_+}-\frac{1}{\rho_-}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta)^n\left[(4n^2a^2+\rho_+^2)^{-1/2}-(4n^2a^2+\rho_-^2)^{-1/2}\right]\right\}. \tag{6.89}$$

Случай любого числа слоев был рассмотрен Стефанеско и Шлюмбергером[1].

§ 20. Токи в тонких изогнутых пленках. Если тонкую однородную по толщине изогнутую пленку можно развернуть на плоскость, то, выполнив эту операцию, мы сведем задачу к двухмерной и сможем применить для ее решения методы § 13. Если же развертывание на плоскость невозможно, то приходится применять другие методы. Из уравнений (3.13) и (6.46) следует, что уравнение непрерывности в ортогональных криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)=0. \tag{6.90}$$

Пусть u_1 и u_2 — ортогональные криволинейные координаты на рассматриваемой поверхности, а u_3 — расстояние, отсчитанное в направлении, нормальном к поверхности. Пленка настолько тонкая, что распределение тока на обеих ее сторонах одинаково и, следовательно, $\partial V/\partial u_3=0$. Толщина

[1] Stefanesco, Schlumberger, Journ. d. Phys., I, 132 (1930).

пленки всюду одинаковая, так что h_3 не зависит от u_1 и u_2[1]. При этих условиях уравнение (6.90) принимает вид

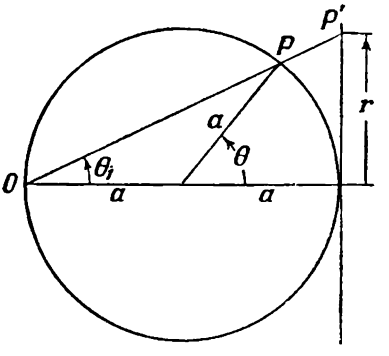
$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)=0. \qquad (6.91)$$

Это уравнение и следует решить, чтобы найти распределение тока.

§ 21. Распределение тока в сферической пленке. Считая, что для сферической пленки V не зависит от r, можно на основании уравнения (3.17) представить уравнение (6.91) в виде

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (6.92)$$

где θ — полярный, а φ — азимутальный угол. Хотя сферическую пленку нельзя развернуть на плоскость, однако каждую точку сферической поверхности можно спроектировать на бесконечную плоскость таким образом, что величины углов не изменятся. Эта операция называется стереографической проекцией и весьма похожа на инверсию. На одном из концов диаметра строят плоскость, касательную к сфере. Линия, проходящая через другой конец диаметра O и точку P (фиг. 64), пересекает плоскость в точке P', которая называется проекцией точки P. Пусть Ψ — решение уравнения непрерывности для плоскости, где это уравнение, согласно (4.4), имеет вид



Фиг. 64.

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (6.93)$$

При проектировании на сферу системы кривых, изображающих Ψ, азимутальный угол не меняется. Из фиг. 64 видно, что r и θ связаны соотношением

$$r=2a\operatorname{tg}\theta_1=2a\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta.$$

Уравнение спроектированных кривых можно получить, если в уравнение (6.93) подставить θ и φ вместо r и φ:

$$r\frac{\partial}{\partial r}=r\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta};$$

тогда уравнение (6.93) примет вид

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}=C.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.92). Таким образом, стереографическая проекция решения уравнения непрерывности для плоскости дает решение этого уравнения для тонкой однородной сферической пленки.

В § 10 гл. IV было показано, что U и V являются решениями уравнения $\nabla^2 V=0$, где

$$U+jV=f(x+jy)=f(r\cos\varphi+jr\sin\varphi),$$

[1] Ортогональные криволинейные координаты u_1 и u_2 всегда можно выбрать таким образом, чтобы внутренняя и внешняя поверхности пленки совпадали с координатными поверхностями $u_3=\text{const}$. Если пленка тонкая и однородная по толщине, то, очевидно, при этом коэффициент h_3, по крайней мере внутри пленки, не зависит от u_1 и u_2. — *Прим. перев.*

если $f(z)$ — аналитическая функция. Из сказанного выше вытекает, что если

$$U + jV = f\left[2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta (\cos\varphi + j \sin\varphi)\right], \tag{6.94}$$

то и U и V будут решениями уравнения непрерывности на поверхности сферы радиуса a, причем, если U — потенциальная функция, то V — функция потока, и наоборот. Из законов инверсии следует, что прямые на плоскости при проектировании на сферу дают окружности, проходящие через точку O, а окружности на плоскости переходят в окружности на сфере.

В качестве примера найдем распределение потенциала в сферической пленке радиуса a, имеющей поверхностное удельное сопротивление ς, когда ток I втекает в нее в точке $\theta = \alpha$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ и вытекает в точке $\theta = \alpha$, $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$. Заменяя, согласно § 15, величину заряда $2\pi\varepsilon_v$ в соотношении (4.66) на $\varepsilon_v \varsigma I$, мы получим для распределения потенциала U в плоской пленке следующее выражение:

$$\operatorname{cth} \frac{2\pi U}{\varsigma I} = \frac{x^2 + y^2 + b^2}{2by} = \frac{r^2 + b^2}{2br \sin\varphi}.$$

Но, как видно из фиг. 64, $r = 2a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$, так что

$$\operatorname{cth} \frac{2\pi U}{\varsigma I} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \sin\varphi} = \frac{1 - \cos\alpha \cos\theta}{\sin\alpha \sin\theta \sin\varphi}. \tag{6.95}$$

Таким же путем из соотношения (4.68) можно получить уравнение линии тока:

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi V}{\varsigma I} = \frac{r^2 - b^2}{2br \cos\varphi} = \frac{\cos\alpha - \cos\theta}{\sin\alpha \sin\theta \cos\varphi}. \tag{6.96}$$

§ 22. Поверхность вращения. В качестве другого примера найдем решение уравнения (6.91) для поверхности, образованной вращением кривой $y = f(z)$ вокруг оси z [$f(z)$ — однозначная функция z]. Очевидно, что на такой поверхности положение любой точки P можно определить ортогональными координатами z и φ, где φ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг оси z. Положим в § 20 координату u_1 численно равной z, а $u_2 = \varphi$. В силу симметрии h_1 и h_2 не зависят от φ. Тогда уравнение (6.91) принимает вид

$$\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{6.97}$$

Чтобы найти решение этого уравнения, введем новую переменную u, равную нулю при $z = z_0$ и удовлетворяющую соотношению

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{или} \quad u = \int_{z_0}^{z} \frac{h_1}{h_2} dz. \tag{6.98}$$

Тогда уравнение (6.97) принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{6.99}$$

Как было показано в § 10 гл. IV, решениями этого уравнения являются функции $U(u, \varphi)$ или $V(u, \varphi)$, причем

$$U + jV = F(u + j\varphi). \tag{6.100}$$

Чтобы выразить u через заданные величины, нужно вычислить h_1 и h_2. Уравнение поверхности имеет вид

$$\rho = f(z), \tag{6.101}$$

так что

$$d\rho = f'(z)\,dz$$

и

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2\,d\varphi^2 = \{[f'(z)]^2 + 1\}\,dz^2 + [f(z)]^2\,d\varphi^2,$$

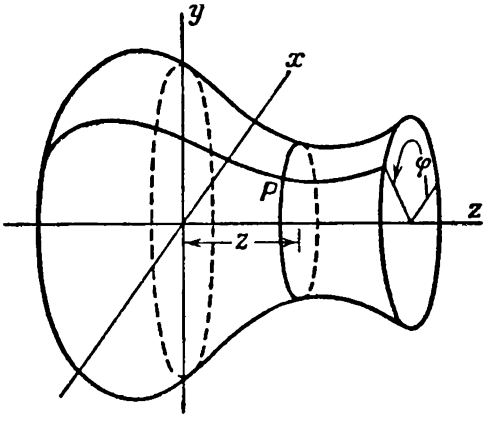
откуда

$$h_1 = \{[f'(z)]^2 + 1\}^{1/2}, \qquad h_2 = f(z). \tag{6.102}$$

Подставляя эти значения в соотношение (6.98), получим

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{\{[f'(z)]^2 + 1\}^{1/2}}{f(z)}\,dz. \tag{6.103}$$

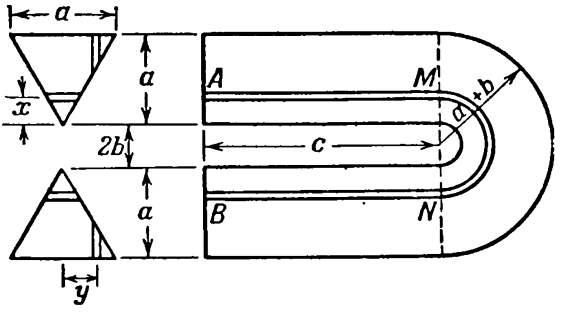
Поскольку при увеличении φ на $2n\pi$ мы возвращаемся к той же линии на поверхности, для однозначности полученного решения необходимо, чтобы $F(u + j\varphi)$ была периодической функцией φ с периодом 2π. По форме решение совпадает с решением для цилиндрической поверхности, которую можно развернуть в плоскую ленту. Если, как показано на фиг. 65, поверхность вращения замкнута на одном конце, то $f(z) = 0$ в точке пересечения поверхности с осью z и, согласно выражению (6.103), эквивалентный цилиндр будет простираться до $u = -\infty$. Если один из концов поверхности не замкнут (фиг. 65), то эквивалентный цилиндр также будет оканчиваться при некотором положительном значении u и граничные условия на краю цилиндра будут выражаться той же функцией угла φ, что и граничные условия на краю поверхности вращения, изображенной на фигуре.



Фиг. 65.

§ 23. Предельные значения сопротивления. Общие теоремы, изложенные в § 12, часто дают возможность найти предельные значения, между которыми заключено сопротивление проводника, даже в том случае, когда нельзя вычислить точное значение. Для нахождения нижнего предела сопротивления разместим внутри проводника тонкие идеально проводящие слои таким образом, чтобы они, с одной стороны, совпадали по возможности точнее с действительными эквипотенциальными поверхностями, а с другой стороны, давали возможность вычислить сопротивление полученного проводника. Как следует из § 12, это сопротивление будет равно сопротивлению исходного проводника или будет меньше его. Чтобы найти верхний предел, введем внутрь проводника как можно ближе к действительным линиям тока тонкие слои изолятора с таким расчетом, чтобы оказалось возможным вычислить сопротивление измененного проводника. Как известно из § 12, это сопротивление будет равно сопротивлению исходного проводника или будет больше его.

Например, сопротивление между двумя электродами данной формы имеет промежуточное значение между сопротивлениями, соответствующими электродам, поверхности которых описаны вокруг данных электродов и вписаны в них. В качестве характерного примера рассмотрим сопротивление между идеально проводящими электродами, прижатыми к концам A и B подковообразного проводника с треугольным поперечным сечением (фиг. 66). Для получения верхнего предела сопротивления введем в проводник бесконечно тонкие слои изолятора и расположим их на очень малом расстоянии друг от друга таким образом, чтобы ток в проводнике протекал только по прямым линиям и полуокружностям. Длина такого слоя, как видно из фиг. 66, равна $2c+\pi(b+x)$. Площадь соответствующего поперечного сечения равна $x\,dx$, и, следовательно, сопротивление



Фиг. 66.

$$dR_u=\frac{\tau\,[2c+\pi(b+x)]}{x\,dx}.$$

Все слои параллельны, так что, согласно формуле (6.14), верхний предел сопротивления (см. Двайт, 91.1) будет равен

$$R_u=\Big(\int\frac{1}{dR_u}\Big)^{-1}=\Big(\frac{1}{\tau}\int_0^a\frac{x\,dx}{2c+\pi b+\pi x}\Big)^{-1}=$$

$$=\pi^2\tau\left[\pi a-(2c+\pi b)\ln\frac{2c+\pi(a+b)}{2c+\pi b}\right]^{-1} \qquad (6.104)$$

Чтобы найти нижний предел сопротивления, введем в сечения M и N проводника идеально проводящие слои. В прямолинейных частях проводника AM и NB ток распределится равномерно, и сопротивление их будет равно $4c\tau/a^2$. В закругленной части MN проводник имеет форму треугольной силовой трубки в двухмерном электростатическом поле, описываемом функцией $W=\ln z$. Отсюда следует, что функция потока и потенциальная функция имеют вид

$$U=\ln r \quad \text{и} \quad V=\theta. \qquad (6.105)$$

Сопротивление полоски, лежащей на расстоянии y (см. фиг. 66), в силу формулы (6.55), равно

$$dR_l''=\tau\pi\Big(\ln\frac{a+b}{b+2y}\,dy\Big)^{-1}$$

Полоски соединены параллельно, следовательно, (см. Двайт, 620),

$$R_l''=\Big(\int\frac{1}{dR_l''}\Big)^{-1}=\pi\tau\Big(2\int_0^{1/2a}\ln\frac{a+b}{b+2y}\,dy\Big)^{-1}=-\frac{\pi\tau}{b\ln(a+b)-b\ln b-a}.$$

Так как изогнутая часть проводника и обе прямолинейные части соединены последовательно, то нижнее предельное значение сопротивления будет равно

$$R_l=\tau\left[\frac{4c}{a^2}-\frac{\pi}{b\ln(a+b)-b\ln b-a}\right]. \qquad (6.106)$$

§ 24. Токи в анизотропных средах. Слои в земной коре. Взяв дивергенцию выражения (6.8), мы получим

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla V) = -\nabla \cdot \mathbf{i} = 0. \tag{6.107}$$

Если среда не изотропна, то ее проводимость в различных направлениях различна, и γ нельзя выносить из-под знака ∇. Однако если среда однородна, то проводимость ее по любому направлению одинакова. В этом случае можно, как это было сделано в соотношениях (1.58) и (3.8), выбрать систему прямоугольных координат таким образом, что уравнение (6.107) примет вид

$$\gamma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \gamma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \gamma_z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6.108}$$

Вследствие особенностей образования земной коры часто оказывается, что ее проводимость в горизонтальном направлении больше, чем в вертикальном. Если направить ось z по вертикали, то уравнение (6.108) можно записать следующим образом:

$$\gamma_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \gamma_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6.109}$$

Если ввести новую переменную, определяемую соотношением

$$u = \left(\frac{\gamma_h}{\gamma_v} \right)^{1/2} z = \alpha z, \tag{6.110}$$

то уравнение (6.109) примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0. \tag{6.111}$$

Для решения уравнения (6.111) применимы все методы, изложенные в гл. V, однако необходимо либо выразить граничные условия в координатах x, y, u и потребовать, чтобы решение уравнения (6.111) им удовлетворяло, либо, наоборот, перейти в решении уравнения (6.111) к переменным x, y, z. Предположим, что сферический электрод радиуса R до половины погружен в землю. Граничное условие имеет в этом случае вид $V = V_0$ при $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (u/\alpha)^2 = R^2$. Следовательно, в системе x, y, u это условие должно выполняться для сфероида

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} + \frac{u^2}{\alpha^2 R^2} = 1.$$

Из выражений (5.8) и (5.9), полагая $a^2 = b^2 = R^2$ и $c^2 = \alpha^2 R^2$, получаем решение

$$V = V_0 \left[\int_\theta^\infty \frac{d\theta}{(a^2+\theta)(c^2+\theta)^{1/2}} \right] \Bigg/ \left[\int_0^\infty \frac{d\theta}{(a^2+\theta)(c^2+\theta)^{1/2}} \right]$$

Полагая $x = a^2 + \theta$ и принимая во внимание, что $\alpha > 1$, будем иметь (см. Двайт, 192.11)

$$V = V_0 \frac{\operatorname{ar\,th}\,[(c^2-a^2)/(c^2+\theta)]^{1/2}}{\operatorname{ar\,th}\,[(c^2-a^2)/c^2]^{1/2}}.$$

Но из уравнений (5.284) и (5.285) следует, что

$$c^2 + \theta = (c^2 - a^2)\,\eta^2,$$

и выражение для потенциала принимает вид

$$V = V_0 \left[\operatorname{ar\,th} \left(\frac{\gamma_h - \gamma_v}{\gamma_h} \right)^{1/2} \right]^{-1} \operatorname{ar\,th} \frac{1}{\eta} =$$

$$= V_0 \left[\operatorname{ar\,ch} \left(\frac{\gamma_h}{\gamma_v} \right)^{1/2} \right]^{-1} \operatorname{ar\,sh} (\eta^2 - 1)^{-1/2}. \tag{6.112}$$

Согласно соотношениям (5.287) и (5.288),

$$u = az = R(a^2-1)^{1/2}\eta\xi,$$
$$x^2+y^2 = R^2(a^2-1)(1-\xi^2)(\eta^2-1).$$

Исключая ξ, получим

$$\frac{x^2+y^2}{R^2(a^2-1)(\eta^2-1)} + \frac{a^2z^2}{R^2(a^2-1)\eta^2} = 1. \qquad (6.113)$$

Наименьшее значение η будет на электроде, где $\eta = a/(a^2-1)^{1/2}$. Поэтому знаменатель первого члена всегда больше, чем знаменатель второго, так что эквипотенциальные поверхности имеют форму неконфокальных сплюснутых сфероидов. На поверхности земли $z=0$ и эквипотенциальные линии определяются уравнением

$$V = V_0\left[\operatorname{ar\,ch}\left(\frac{\gamma_h}{\gamma_v}\right)^{1/2}\right]^{-1}\operatorname{ar\,sh} R\left[\frac{\gamma_h-\gamma_v}{\gamma_v(x^2+y^2)}\right]^{1/2} \qquad (6.114)$$

Для точечного электрода, когда величина R очень мала, в выражении (6.114) можно заменить ar sh через угол. Учитывая, что остальная часть выражения (6.114) пропорциональна току I, получим

$$V = CI(x^2+y^2)^{-1/2}. \qquad (6.115)$$

Кривые, определяемые этим уравнением, имеют тот же вид, что и в случае изотропной среды.

§ 25. Ток, обусловленный движением пространственного заряда. Уравнение Чайльда. До сих пор мы рассматривали токи в проводниках, суммарный заряд которых был равен нулю. Рассмотрим теперь токи в проводниках, несущих заряды только одного знака, так что суммарный заряд отличен от нуля. Движение зарядов следует считать настолько медленным, что формулы электростатики остаются справедливыми. В этом случае должно удовлетворяться уравнение Пуассона (3.6), согласно которому

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_v}, \qquad (6.116)$$

где V — потенциал и ρ — плотность заряда. Допустим, что все заряды одинаковы, что каждый из них связан с массой m и что всю свою энергию они получают от наложенного поля. Тогда энергия частицы, скорость которой равна v, а заряд q, в точке с потенциалом V будет

$$mv^2 = 2q(V_0 - V), \qquad (6.117)$$

где V_0 — потенциал в начальной точке. Плотность тока в произвольной точке будет равна

$$\mathbf{i} = \rho\boldsymbol{v}. \qquad (6.118)$$

В простейшем случае заряды в неограниченном количестве эмиттируются плоскостью $x=0$ и ускоряются по направлению к плоскости $x=b$ под действием приложенного напряжения V_0. На плоскости $x=0$ эмиссия зарядов продолжается до тех пор, пока не исчезнет увлекающее их электрическое поле. Поэтому граничное условие имеет вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \qquad (6.119)$$

Скорости всех зарядов направлены по оси x, так что, исключая ρ и v из уравнения (6.116) при помощи формул (6.117) и (6.118), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{i}{\varepsilon_v}\left[\frac{m}{2q(V_0-V)}\right]^{1/2}.$$

Умножая это выражение на dV/dx и интегрируя от $V=V_0$ и $dV/dx=0$ до V и dV/dx, будем иметь

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2=\frac{4i}{\varepsilon_v}\left[\frac{m(V_0-V)}{2q}\right]^{1/2} \tag{6.120}$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень и интегрируя от $V=V_0$, $x=0$ до $V=0$ и $x=b$, найдем плотность тока

$$i=\frac{4\varepsilon_v}{q}\left(\frac{2q}{m}\right)^{1/2}\frac{V_0^{3/2}}{b^2}. \tag{6.121}$$

Это выражение известно под названием закона Чайльда. Оно показывает, что при неограниченной эмиссии зарядов из одной пластины ток между пластинами пропорционален потенциалу в степени $^3/_2$. Такой ток называется «током, ограниченным пространственным зарядом». Как видно из формулы (6.121), ограничение пространственным зарядом значительно сильнее сказывается на заряженных атомах, чем на электронах, вследствие их большей массы.

На практике эмиттер часто имеет вид тонкого, круглого цилиндра, а эмиттированные заряды перемещаются по направлению к большому цилиндру, концентричному с эмиттером. В этом случае удобно воспользоваться цилиндрическими координатами, и если I — полный ток на единицу длины цилиндров, то уравнение (6.118) принимает вид

$$I=2\pi r\rho v. \tag{6.122}$$

Записав уравнение (6.116) в цилиндрических координатах при помощи уравнения (3.18), исключив, согласно формулам (6.117) и (6.122), ρ и v и заменив V_0-V на V, получим

$$r\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{dV}{dr}=\frac{I}{2\pi\varepsilon_v}\left(\frac{m}{2qV}\right)^{1/2} \tag{6.123}$$

Непосредственное решение этого уравнения затруднительно, если даже вообще возможно. Можно, однако, получить его решение в виде ряда следующим способом: предположим, что q, m и V входят в искомое решение в такой же форме, как и в выражение (6.121), и будем искать решение (6.123) в виде

$$I=\frac{8\pi\varepsilon_v}{9}\left(\frac{2q}{m}\right)^{1/2}\frac{V^{3/2}}{r\beta^2}. \tag{6.124}$$

Нужно определить β^2 так, чтобы удовлетворялось уравнение (6.123). Подстановка выражения (6.124) в уравнение (6.123) дает

$$3\beta\frac{d^2\beta}{d\gamma^2}+\left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2+4\beta\frac{d\beta}{d\gamma}+\beta^2-1=0, \tag{6.125}$$

где

$$\gamma=\ln\left(\frac{r}{a}\right). \tag{6.126}$$

Решение этого уравнения можно найти обычным методом в виде ряда

$$\beta=\gamma-\frac{2}{5}\gamma^2+\frac{11}{120}\gamma^3-\frac{47}{3300}\gamma^4+\ldots \tag{6.127}$$

В формуле (6.126) через a обозначен радиус внутреннего цилиндра. Таблица значений β как функции r/a опубликована Ленгмюром.

ЗАДАЧИ

1. Некоторый прибор должен работать от 6-вольтовой аккумуляторной батареи. Батарея, хотя и имеет весьма малое сопротивление, но не может давать нужный ток достаточно долгое время. Чтобы преодолеть это затруднение, генератор постоянного тока, э. д. с. которого может колебаться от 100 до 120 *в*, соединяют последовательно с сопротивлением, подобранным так, что когда генератор с последовательно подключенным сопротивлением присоединяется параллельно к батарее, последняя не дает тока при наибольшем значении э. д. с. генератора. Какую часть тока будет давать батарея, когда э. д. с. генератора имеет наименьшее значение?

2. Требуется, чтобы температура печи не выходила за известные пределы, несмотря на то, что напряжение в линии колеблется от 100 до 120 *в*. При наивысшей температуре печь потребляет 1,5 *а* при 60 *в* и при низшей температуре 1 *а* при 30 *в*. В распоряжении имеется «балластная лампа», через которую проходит ток, равный точно 2 *а* при любом напряжении от 30 до 50 *в*. Показать, что при использовании двух реостатов существует, по крайней мере, два способа решения поставленной задачи и что требуемые пределы сопротивлений реостатов в одном случае будут 70—140 *ом* и 6,67—40 *ом* и в другом 5—20 *ом* и 30—120 *ом*.

3. Через некоторый прибор независимо от величины приложенного напряжения проходит ток i_1. Напряжение на прибор подается с потенциометра, имеющего сопротивление R и подключенного к батарее с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Параллельно прибору включен вольтметр, сопротивление которого R_1. Найти ток, текущий через батарею, как функцию показаний вольтметра.

4. Батарея с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ включена между точками A и B цепи. Ветви AD, AC, CD, BC, CE и BE имеют сопротивления, соответственно равные r, $2r$, r, R, $2R$, R. Когда к точкам D и E подключается вторая батарея, то оказывается, что ток через первую батарею равен нулю. Показать, что э. д. с. второй батареи равна $(4R+3r)\,\mathscr{E}_1/[2(r+R)]$.

5. Напряжение на стрелку электрометра подается от неподвижного и подвижного контактов A и B присоединенного к батарее потенциометра AC, имеющего большое сопротивление. При помощи вольтметра с большим, но неизвестным сопротивлением измеряются напряжения V, V_1 и V_2 соответственно между точками AC, BC и AB. Показать, что после того как вольтметр будет отключен, истинное напряжение, поданное на стрелку электрометра, будет равно $V_2V/(V_1+V_2)$.

6. К батарее, имеющей внутреннее сопротивление r и э. д. с. $\mathscr{E}$, подключены параллельно друг другу две проволоки, каждая из которых имеет длину D и сопротивление ρ (на единицу длины). На каждой из проволок имеется подвижной контакт, расположенный на одной проволоке на расстоянии x от конца, а на другой—на расстоянии y от того же конца. Между контактами включено сопротивление R. Показать, что ток через R равен

$$\frac{2D\rho\,(y-x)\,\mathscr{E}}{\rho^2D\,(x-y)^2-(2r+\rho D)\,[2\rho D\,(x+y)+2RD-\rho\,(x+y)^2]}.$$

7. Углы квадрата A, B, C, D соединены между собой и с центром квадрата проволокой, сопротивление которой на единицу длины равно r. В сторону AB включен гальванометр, а в диагональ AC, между точкой C и центром, включена батарея. Показать, что если проволоку между точкой B и центром в диагонали BD заменить сопротивлением $r\,(2+2^{1/2}3)^{-1}$, то ток через гальванометр будет равен нулю.

8*. Однородная проволока длиною 4 *а* согнута в квадрат, противоположные вершины которого соединены прямолинейными кусками такой же проволоки. К точке пересечения диагоналей подведен ток заданной величины, выходящий через одну из вершин квадрата. Найти силу тока в различных ветвях цепи и показать, что полное сопротивление цепи равно сопротивлению куска проволоки, имеющего длину $2^{1/2}a/(2^{1/2}2+1)$.

9*. Из однородной проволоки изготовлен каркас в виде прямоугольника со сторонами $2a$ и $3a$, разделенный проволоками, параллельными его сторонам на квадраты со сторонами a. Сопротивление контактов во всех точках пересечения проволок считается ничтожно малым. Показать, что для тока, входящего в один угол каркаса и выходящего из противоположного угла, полное сопротивление цепи равно сопротивлению куска проволоки длиною 121 a/69.

10*. На телеграфной линии возникает повреждение, вследствие которого в некотором месте между линией и землей появляется сопротивление определенной величины. Показать, что при неизменной батарее на передающем конце линии ток на приемном ее конце будет наименьшим, если повреждение находится посередине линии.

11*. Сопротивление трех проволок BC, CA, AB одинакового сечения и материала равны соответственно a, b, c. Четвертая проволока, имеющая постоянное сопротивле-

ние d, соединяет точку A со скользящим контактом на стороне BC. Показать, что для тока, входящего в точку A и выходящего из скользящего контакта, наибольшее сопротивление равно $(a+b+c)\,d/(a+b+c+4d)$, и найти наименьшее сопротивление.

12*. Гальванический элемент имеет э. д. с. 0,85 *в* и внутреннее сопротивление 10 *ом*. Показать, что наибольший ток, который можно получить в проволоке, имеющей сопротивление 22,5 *ом*, от батареи, составленной некоторым способом из 5 таких элементов, равен в точности 0,06 *а*.

13*. Шесть точек A, A', B, B', C, C' соединены медными проволоками, длины которых равны (в метрах): $AA'=16$; $BC=B'C=1$; $BC'=B'C'=2$; $AB=A'B'=6$; $AC'=A'C'=8$. Точки B и B' также соединены проволоками (каждая длиной в 1 *м*) с зажимами батареи, внутреннее сопротивление которой равно сопротивлению r метров проволоки. Все проволоки имеют одинаковое сечение. Показать, что ток в проволоке AA' равен току в простом контуре, состоящем из той же батареи, замкнутой проволокой длиною $(31r+104)$ метров.

14*. Две станции A и B соединены телеграфной линией, один конец которой в A соединен с одним из зажимов батареи, а другой конец в B—с одним из зажимов приемного аппарата. Вторые зажимы приемного аппарата и батареи заземлены. В результате повреждения линии в точке C между линией и землей появляется сопротивление r. Сопротивлениями батареи, приемного аппарата и земли можно пренебречь, а сопротивление участков AC и CB линии равны соответственно p и q. Показать, что при возникновении утечки ток в приемном аппарате уменьшается в отношении $r(p+q):qr+rp+pq$.

15*. Два гальванических элемента, э. д. с. которых равны соответственно e_1 и e_2, а внутренние сопротивления равны r_1 и r_2, присоединены параллельно друг другу к проволоке с сопротивлением R. Показать, что ток в проволоке равен $(e_1r_2+e_2r_1)/(r_1R+r_2R+r_1r_2)$ и найти отношение токов, протекающих через элементы.

16*. Цепь имеет форму тетраэдра $PQRS$; в ветвь PQ включена батарея с э. д. с. E, сопротивление этой ветви вместе с внутренним сопротивлением батареи равно R. Сопротивление каждой из ветвей QR и RP равно $\frac{1}{3}r$, каждой из ветвей PS и RS равно $\frac{2}{3}r$, и сопротивление ветви QS равно r. Найти ток в каждой ветви.

17*. Пусть A, B, C, D—четыре вершины моста Уитстона; сопротивления плечей моста AB, BD, AC, CD равны соответственно c, β, b, γ. Ток в диагонали BC, куда включен гальванометр, равен нулю. В эту диагональ включают батарею с э.д.с. E, причем полное сопротивление в цепи гальванометра после включения батареи равно a. Найти ток через гальванометр.

18*. Нужно найти место повреждения в кабеле AB длиной 50 *км*. При включении на конце A батареи с э.д.с., равной 200 *в*, найдено, что если изолировать конец B, его потенциал будет равен 40 *в*. Если, наоборот, изолировать конец A, то для получения на нем потенциала в 40 *в* нужно подключить к концу B батарею с э. д. с., равной 300 *в*. Показать, что расстояние от места повреждения до конца A равно 19,05 *км*.

19*. В контур с заданной величиной э. д. с. и заданным сопротивлением включается добавочное сопротивление. Найти величину этого сопротивления, при которой в нем будет выделяться наибольшее количество тепла.

20*. Сопротивления противолежащих плечей моста Уитстона равны соответственно a, a' и b, b'. Показать, что если поменять местами диагонали, содержащие гальванометр и батарею, то будет соблюдаться равенство

$$E\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C'}\right)=\frac{(a-a')(b-b')(G-R)}{(aa'-bb')},$$

где C и C'—токи через гальванометр в обоих случаях, G и R—сопротивления ветвей, содержащих гальванометр и батарею, и E—э.д.с. батареи.

21*. Несколько ламп накаливания (N), каждая из которых имеет сопротивление r, питаются от генератора с постоянной э.д.с. и сопротивлением, равным R (включая и сопротивление проводов). Считая, что световой поток, излучаемый каждой лампой, пропорционален квадрату выделяемого тепла, показать, что для получения максимальной световой отдачи при заданном количестве горючего для двигателя следует соединять лампы в параллельные группы, каждая из которых содержит n ламп, где n—целое число, ближайшее к числу $(2NR/r)^{1/2}$.

22*. К батарее, имеющей э. д. с. E и внутреннее сопротивление B, подключены две параллельные ветви. Первая ветвь с полным сопротивлением R содержит вольтметр, в котором имеется скачок потенциала такой величины, что протекающий через него единичный ток совершает в единицу времени работу, равную p единицам работы. Сопротивление второй ветви равно r. Показать, что если $E>p(B+r)/r$, то ток через батарею равен $[E(R+r)-pr]/[Rr+B(R+r)]$.

23*. Тридцать проводников одинакового сопротивления соединены между собой так же, как ребра додекаэдра. Показать, что сопротивление всей цепи току, подведен-

ному к двум противолежащим вершинам, равно $^7/_6$ сопротивления отдельного проводника.

24*. Цепь состоит из проводников PA, PB, PC, PD, AB, BC, CD, DA с сопротивлениями, равными соответственно α, β, γ, δ, $\gamma+\delta$, $\delta+\alpha$, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$. В ветвь AD включена батарея с э. д. с. E. Показать, что ток в ветви BC равен

$$P(\alpha\beta+\gamma\delta)E/[2P^2Q+(\beta\delta-\alpha\gamma)^2], \quad \text{где} \quad P=\alpha+\beta+\gamma+\delta, \quad Q=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta.$$

25*. Из проволоки изготовлен каркас в виде правильного шестиугольника, вершины которого соединены с центром проволоками, каждая из которых имеет сопротивление, равное $1/n$ сопротивления стороны шестиугольника. Показать, что сопротивление каркаса току, подведенному к двум его противоположным вершинам, равно сопротивлению стороны шестиугольника, умноженному на $2(n+3)/[(n+1)(n+4)]$.

26*. Концы B и B' двух длинных одинаковых параллельных проволок AB и $A'B'$ соединены проволокой пренебрежимо малого сопротивления, а концы A и A' подключены к зажимам элемента, внутреннее сопротивление которого равно сопротивлению куска проволоки длиною r. Длина каждой проволоки равна l. Точно такой же элемент подключается к перемычке между проволоками на расстоянии x от концов A и A'. Показать, что после подключения второго элемента ток в проволоке BB' увеличится в отношении

$$\frac{2(2l+r)(x+r)}{r(4l+r)+2x(2l-r)-4x^2}.$$

27*. На одной и той же телеграфной линии расположены три станции A, B, C. Оператор, находящийся на станции A, знает, что между A и B возникло повреждение, и обнаруживает, что от одной и той же батареи ток на станции A равен i, если линия в B изолирована, а в C заземлена, равен i', если линия заземлена в B, и равен i'', если B и C изолированы. Показать, что повреждение возникло на расстоянии

$$\frac{ka-k'b+(b-a)^{1/2}(ka-k'b)^{1/2}}{k-k'}$$

от станции A, где $AB=a$, $BC=b-a$, $k=i''/(i-i'')$, $k'=i''/(i'-i'')$.

28*. Шесть проводников соединяют попарно четыре точки A, B, C, D. Сопротивления этих проводников равны a, α, b, β, c, γ, где a, α означают соответственно сопротивления проводников BC, AD и т. д. Показать, что сопротивление такой цепи между точками A и B лежит в пределах от $[c^{-1}+(a+b)^{-1}+(\alpha+\beta)^{-1}]^{-1}$ до

$$\{c^{-1}+[(a^{-1}+b^{-1})^{-1}+(\alpha^{-1}+\beta^{-1})^{-1}]^{-1}\}^{-1}.$$

29*. Каждая из двух одинаковых прямых проволок A_0A_n и B_0B_n разделена на n равных участков точками $A_1, \ldots, A_{n-1}$, $B_1, \ldots, B_{n-1}$. Сопротивление каждого участка, а также замыкающей проволоки A_nB_n равно R. Соответственные точки проволок от 1-й до n-й соединены поперечными проволоками, и к концам A_0B_0 подключена батарея. Показать, что если через все поперечные проволоки протекает одинаковый ток, то сопротивление проволоки A_sB_s должно быть равно $[(n-s)^2+(n-s)+1]R$.

30*. Каждая из n точек соединена со всеми остальными проволоками, имеющими одинаковые сопротивления r. К двум из этих точек подключена батарея с э. д. с. E и внутренним сопротивлением R. Показать, что ток в проволоке, соединяющей те две точки, к которым подключена батарея, равен $2E/(2r+nR)$.

31*. Шесть точек A, B, C, D, P, Q соединены девятью проводниками AB, AP, BC, BQ, PQ, QC, PD, DC, AD. В проводник AD включена э. д. с., а в проводник PQ — гальванометр. Обозначив сопротивление проводника XY через r_{XY}, показать, что ток через гальванометр равен нулю, если

$$(r_{BC}+r_{BQ}+r_{CQ})(r_{AB}r_{DP}-r_{AP}r_{DC})+r_{BC}(r_{BQ}r_{DP}-r_{AP}r_{CQ})=0.$$

32*. Цепь образована путем соединения каждой из пяти точек 1, 2, 3, 4, 5 со всеми остальными. Показать, что условие сопряженности проводников 2—3 и 1—4 имеет вид

$$(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})(K_{12}K_{34}-K_{13}K_{24})=$$
$$=K_{52}(K_{54}K_{13}-K_{34}K_{15})+K_{53}(K_{24}K_{51}-K_{54}K_{12}),$$

где через K_{pq} обозначена проводимость между точками p и q.

33*. Каждая из двух замкнутых проволок разделена на mn равных частей, соединенных проводниками. Сопротивление каждой из mn частей равно R. В каждый соединяющий m-й проводник включена одинаковая батарея; полные сопротивления этих проводников равны между собой. Сопротивление каждого из остальных $(mn-n)$ соединяющих проводников равно h. Доказать, что ток через соединяющий r-й проводник

(считая от ближайшей батареи) равен

$$\frac{\frac{1}{2}C(1-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}^r\alpha+\operatorname{tg}^{m-r}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^m\alpha},$$

где C — ток через каждую батарею и $\sin 2\alpha = h/(h+R)$.

34*. Длинная телеграфная линия $AA_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ подвешена на n равноотстоящих изоляторах в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$. К концу A подключен один из полюсов батареи с э. д. с. E и внутренним сопротивлением B; другой полюс батареи, так же как и конец линии A_{n+1}, заземлен. Сопротивления отрезков линии $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ одинаковы и равны R. При влажной погоде возникает утечка через изоляторы на землю; сопротивление каждого изолятора равно r. Показать, что сила тока на участке линии A_pA_{p+1} равна

$$\frac{E\operatorname{ch}(2n-2p+1)\alpha}{B\operatorname{ch}(2n+1)\alpha+(Rr)^{1/2}\operatorname{sh}(2n+2)\alpha},$$

где $2\operatorname{sh}\alpha=(R/r)^{1/2}$.

35*. Из n кусков однородной проволоки, каждый из которых имеет сопротивление σ, изготовлен каркас в виде правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Вершины многоугольника соединены с его центром O прямолинейными кусками той же проволоки. Показать, что, если точка O имеет постоянный потенциал, равный нулю, а точка A_1 — потенциал V, то ток в проводнике A_rA_{r+1} будет равен

$$\frac{2V\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}(n-2r+1)\alpha}{\sigma\operatorname{ch}n\alpha},$$

где α определяется уравнением $\operatorname{ch}2\alpha=1+\sin(\pi/n)$.

36*. Из однородной проволоки изготовлен каркас, имеющий форму призмы с $2n$ гранями. Основания призмы имеют вид правильных многоугольников с $2n$ сторонами, каждая из которых имеет сопротивление r. Сопротивление каждого из ребер призмы равно R. Показать, что сопротивление между двумя противоположными вершинами равно

$$\frac{nr}{4}+\frac{R\operatorname{th}\theta}{2\operatorname{th}n\theta},$$

где

$$\operatorname{sh}^2\theta=\frac{1}{2}\frac{r}{R}.$$

37*. Цепь образована проводниками, соединяющими каждую из n точек со всеми остальными. Сопротивления всех проводников одинаковы, и в проводник, соединяющий точки A_1 и A_2, включена э. д. с. Показать, что токи протекают только в проводниках, проходящих через точки A_1 и A_2, и найти эти токи.

38*. Каждая предыдущая точка из последовательности n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соединена с последующей проводником сопротивлением ρ; то же имеет место для последовательности точек $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Между каждой парой соответствующих точек обеих последовательностей, например между A_r и B_r, включено сопротивление R. К точкам A_1 и B_n подведен постоянный ток i. Показать, что в точке A_1 ток распределяется между ветвями A_1A_2 и A_1B_1 в отношении

$$\frac{\operatorname{sh}n\alpha-\operatorname{sh}(n-2)\alpha-2\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}n\alpha+\operatorname{sh}(n-2)\alpha-2\operatorname{sh}(n-1)\alpha},$$

где $\operatorname{ch}\alpha=(R+\rho)/R$.

39*. Подземный кабель длиной a имеет плохую изоляцию, так что по всей его длине имеется равномерно распределенная утечка. Проводимость утечки равна $1/\rho'$ на единицу длины кабеля, а сопротивление единицы длины кабеля равно ρ. К одному из концов кабеля подключен полюс батареи, другой полюс которой заземлен. Доказать, что ток на противоположном конце кабеля имеет такую же величину, как в случае кабеля без утечки, имеющего полное сопротивление

$$(\rho\rho')^{1/2}\operatorname{sh}\left[a\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{1/2}\right]$$

40. Две прямые проволоки сопротивлением r на единицу длины соединены на одном конце. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ одной проволоки соединены через сопротивления $R, 2R, \ldots, mR$ с точками $B_1, B_2, \ldots, B_m$ другой проволоки. Расстояния точек A_n и B_n от соединенных концов проволок равны соответственно n^2x и n^2y. Разность потенциа-

лов между A_m и B_m равна $\mathscr{E}$. Показать, что между точками A_n и B_n течет ток

$$i_n=\frac{\mathscr{E}P_n(\mu)}{(m+1)R[P_m(\mu)-P_{m+1}(\mu)]}$$

где $\mu=1+r(x+y)/R$.

41. Проволока, рассмотренная в предыдущей задаче, перерезана между точками A_{s-1} и A_s и B_{s-1} и B_s. Показать, что если $s<n<m$, то ток между A_n и B_n будет равен

$$i_n=\frac{\mathscr{E}[(Q_{s-1}P_n-P_{s-1}Q_n)]}{(m+1)R[(P_m-P_{m+1})Q_{s-1}+(Q_m-Q_{m+1})P_{s-1}]},$$

где аргумент функций Лежандра равен $1+r(x+y)/R$.

42. Цилиндрический стержень длиной l и радиуса a, изготовленный из вещества с удельным сопротивлением τ, установлен перпендикулярно к плоским параллельным поверхностям двух полубесконечных масс того же вещества. Показать, что сопротивление R между связанными таким образом массами заключено в пределах

$$\frac{\tau l}{\pi a^2}+\frac{\tau}{2a}<R<\frac{\pi\tau}{2[\pi a-l\ln(1+\pi a/l)]}.$$

При $l=0$ оба предела дают одно и то же точное значение.

43*. Цилиндрический кабель состоит из медного провода, покрытого тонким изолирующим слоем из материала с заданным удельным сопротивлением. Показать, что при заданных значениях сечений провода и оболочки сопротивление утечки кабеля будет наибольшим в том случае, когда поверхности провода и оболочки представляют собой прямые круглые коаксиальные цилиндры.

44*. К однородному круглому диску подводится ток при помощи двух идеально проводящих проволок круглого сечения. Радиус проволок равен a, и расстояние между их центрами равно d. Проволоки расположены перпендикулярно к краю диска. Показать, что сопротивление между проволоками равно $2(\varsigma/\pi)\operatorname{ar\,ch}(d/2a)$, где ς — удельное сопротивление.

45. Два электрода малого радиуса δ расположены на средней линии бесконечной ленты, окруженной изолятором. Расстояние между электродами равно $2a$. Ширина ленты π, ее удельное сопротивление ς. Показать, что сопротивление между электродами приближенно равно

$$\frac{\varsigma}{\pi}\ln\frac{\operatorname{sh}2a}{\delta}.$$

46. В отличие от предыдущей задачи электроды расположены симметрично на линии, перпендикулярной к краям ленты. Показать, что в этом случае сопротивление между ними приближенно равно

$$\frac{\varsigma}{\pi}\ln\left(\frac{2\operatorname{tg}a}{\delta}\right).$$

47. Электроды расположены так же, как и в задаче 45, но края ленты ограничены идеальным проводником. Показать, что сопротивление между электродами приближенно равно

$$\frac{\varsigma}{\pi}\ln\left(\frac{2\operatorname{th}a}{\delta}\right).$$

48*. Круглый медный диск с удельным сопротивлением ς_1 (на единицу поверхности) помещен на очень большой лист оловянной фольги с удельным сопротивлением ς_0. К такому сложному проводнику при помощи электродов подводится ток. Показать, что функция тока в листе фольги, соответствующая электроду, через который к фольге подводится ток e, является мнимой частью функции

$$-\frac{\varsigma_0 e}{2\pi}\left[\ln(z-c)+\frac{\varsigma_0-\varsigma_1}{\varsigma_0+\varsigma_1}\ln\frac{cz}{cz-a^2}\right],$$

где a — радиус медного листа, z — комплексная переменная (начало координат в центре листа, действительная ось проходит через электрод), c — расстояние от электрода до начала координат.

49*. Однородная проводящая пленка имеет вид поверхности, полученной вращением цепной линии $y^2+z^2=c^2\operatorname{ch}^2(x/c)$. Доказать, что при протекании тока C через электрод, находящийся в точке x_0, y_0, z_0, потенциал в точке x, y, z будет равен

$$\text{const}-\frac{C\varsigma}{4\pi}\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{c}-\frac{yy_0+zz_0}{[(y^2+z^2)(y_0^2+z_0^2)]^{1/2}}\right\}.$$

50. В круглый цилиндр радиуса R и длины L, изготовленный из проводящего материала с удельным сопротивлением τ, вставлены два электрода в виде тонких пластинок, края которых параллельны оси цилиндра. Оба электрода и ось цилиндра лежат в одной плоскости, причем расстояние между краем каждого из электродов и осью цилиндра c мало по сравнению с R. Показать, что сопротивление между электродами приближенно равно

$$\frac{\pi\tau/2L}{\ln 2R/c}.$$

51. К точке P бесконечной плоской проводящей пленки подводится ток, который выходит из нее в бесконечности. В пленке вырезано круглое отверстие, не затрагивающее точки P. Показать, что разность потенциалов между двумя любыми точками на краю отверстия вдвое больше разности потенциалов, которая существовала между этими точками до того, как отверстие было прорезано.

52. Изолятор имеет форму усеченного конуса с высотою h, радиусом нижнего основания a_1 и радиусом верхнего основания a_2. Нижнее основание конуса находится на металлической пластине, а на его верхнем основании установлен круглый металлический стержень, ось которого является продолжением оси конуса. Радиус стержня равен a_3. Показать, что поверхностное сопротивление изолятора между пластиной и стержнем равно

$$\frac{\varsigma}{2\pi}\left\{\frac{[h^2+(a_1-a_2)^2]^{1/2}}{a_1-a_2}\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\ln\left(\frac{a_2}{a_3}\right)\right\},$$

где ς — удельное сопротивление поверхности изолятора.

53. К точке $\theta=\alpha$, $\varphi=0$ сферической проводящей пленки подводится ток, вытекающий из нее в точке $\theta=\alpha$, $\varphi=\pi$ (здесь θ — полярный, а φ — азимутальный угол). Показать, что распределение потенциала в пленке дается выражением

$$A\ln\left(\frac{1-\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi}{1-\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi}\right)+C.$$

54. В шар радиуса a, изготовленный из изолятора, вставлены концы двух металлических стержней радиуса b. Удельное сопротивление изолятора очень велико, а поверхностное сопротивление равно ς. Продолжения осей обоих стержней пересекаются в центре сферы под углом α. Показать, что поверхностное сопротивление между стержнями равно

$$\frac{\varsigma}{\pi}\operatorname{ar\,ch}\left(\frac{a}{b}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

55. Ток протекает по тонкой пленке, уравнение которой имеет вид $(z/a)^2+(\rho/b)^2=1$, где $\rho^2=x^2+y^2$ и $a>b$. Показать, что потенциал V на пленке равен либо U_1, либо U_2, где $U_1+jU_2=f(\alpha+j\varphi)$, $\operatorname{tg}\varphi=y/x$ и

$$\alpha=\operatorname{ar\,th}\left(\frac{bz}{[a^4-(a^2-b^2)z^2]^{1/2}}\right)+\frac{(a^2-b^2)^{1/2}}{b}\arcsin\left[\frac{z(a^2-b^2)^{1/2}}{a^2}\right]$$

Функция $f(\alpha+j\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π и, кроме того, $\partial V/\partial\alpha=0$ при $z=\pm a$ или $\alpha=\pm\infty$, если в этих точках нет источников или стоков тока; в противном случае $\partial V/\partial\varphi=0$.

56. Вместо вытянутой сфероидальной пленки, о которой шла речь в предыдущей задаче, рассмотреть пленку в виде сплюснутого сфероида, для которого $a<b$. Показать, что результат будет таким же, как в предыдущей задаче, за исключением того, что α будет иметь новое значение

$$\alpha=\operatorname{ar\,th}\left(\frac{bz}{[a^4+(b^2-a^2)z^2]^{1/2}}\right)-\frac{(b^2-a^2)^{1/2}}{b}\operatorname{ar\,sh}\left[\frac{z(b^2-a^2)^{1/2}}{a^2}\right]$$

57. Будем считать поверхность земли плоской, а ее удельное сопротивление равным τ_0 всюду, за исключением области внутри полубесконечного вертикального конуса с вершиной на поверхности. Удельное сопротивление земли внутри конуса обозначим через τ_1. Ток I подводится к поверхности земли в точке $\varphi=0$ на расстоянии $r=a$ от вершины конуса. Показать, что потенциал в произвольной точке $r<a$ вне конуса

выражается формулой

$$V_0 = I\,(ar)^{-1/2}\,\pi^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\varphi\int_0^{\infty}\left[A_m(p)\,P^m_{jp-1/2}(\mu)+B_m(p)\,P^m_{jp-1/2}(-\mu)\right]\cos(p\ln r)\,dp,$$

$$A_m(p)=\frac{(\tau_1-\tau_2)\,B_m(p)}{\tau_2 S'-\tau_1 S}=\frac{\tau_1(\tau_1-\tau_2)(2-\delta^0_m)\cos(p\ln a)}{P^{m'}_{jp-1/2}(0)\left[\tau_1-\tau_2+(-1)^m(\tau_1 S-\tau_2 S')\right]},$$

$$S'=\frac{\partial\left[P^m_{jp-1/2}(\cos\alpha)\right]/\partial(\cos\alpha)}{\partial\left[P^m_{jp-1/2}(-\cos\alpha)\right]/\partial(\cos\alpha)},\qquad S=\frac{P^m_{jp-1/2}(\cos\alpha)}{P^m_{jp-1/2}(-\cos\alpha)}$$

58. Источник тока I, имеющий форму круглой тонкой петли, находится внутри сплошного цилиндра, изготовленного из проводящего материала. Петля расположена коаксиально цилиндру; длина цилиндра равна L, радиус равен a. Основания цилиндра имеют бесконечно большую проводимость и заземлены. Показать, что распределение потенциала в цилиндре при $z<c$ выражается формулой

$$\frac{\tau I}{\pi a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\mu_k z\operatorname{sh}\mu_k(L-c)}{\operatorname{sh}\mu_k L}\,\frac{J_0(\mu_k b)\,J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k\left[J_0(\mu_k a)\right]^2},$$

где μ_k выбраны так, что $J_1(\mu_k a)=0$, а координаты петли $\rho=b$, $z=c$.

59. Два кольца, сделанные из тонкой проволоки радиуса d, расположены коаксиально с бесконечно длинным цилиндром радиуса a, изготовленным из проводящего материала. Кольца погружены в поверхность цилиндра на глубину d. Показать, что если μ_k выбрано так, что $J_1(\mu_k a)=0$, то сопротивление между кольцами приблизительно равно

$$R=\frac{\tau}{\pi a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\left[1-e^{-\mu_k(c-2d)}\right]e^{-\mu_k d},$$

где c — расстояние между центрами колец.

60. В круглом проводящем цилиндре, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно a и b, прорезана во всю длину узкая продольная щель. Края щели поддерживаются при потенциалах $\frac{1}{2}V_0$ и $-\frac{1}{2}V_0$, так что ток обтекает вокруг цилиндра. Показать, что электростатическое поле при $r<a$ и $r>b$ определяется соответственно преобразованиями

$$W=\frac{V_0}{\pi}\ln(a+z)\quad\text{и}\quad W=\frac{V_0}{\pi}\ln\frac{z}{z+b}.$$

61. Ток i подведен к полюсам тонкой проводящей сферической пленки радиуса a, имеющей поверхностное удельное сопротивление ς. Показать, что электростатический потенциал в любой точке внутри пленки дается формулой

$$V=\frac{\varsigma I}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\mu).$$

62. Ось цилиндрической проволоки радиуса a, изготовленной из проводящего материала с удельным сопротивлением τ_1, совпадает с осью z. Среда вне проволоки между $z=-c$ и $z=c$ имеет удельное сопротивление τ_2. Все остальное пространство заполнено изолятором. Показать, что отношение сопротивления участка, заключенного между $z=c$ и $z=-c$, в случае идеально изолированной проволоки к сопротивлению того же участка при наличии конечного сопротивления среды $\tau_2\gg\tau_1$ равно приближенно

$$\frac{R_\infty}{R}=1+\frac{16c\tau_1}{\pi^2 a\tau_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_1\left[\frac{1}{2}(2n+1)\pi a/c\right]}{(2n+1)^2K_0\left[\frac{1}{2}(2n+1)\pi a/c\right]}.$$

63. Углы широкой ленты (фиг. 63, *б*) срезаны под углом 45° так, что полуширина ленты линейно возрастает от h до k. Показать, что при наличии такого перехода сопротивление вблизи середины длинной ленты превышает сумму сопротивлений обеих ее частей (с несрезанными углами) на величину

$$\frac{\varsigma}{\pi hk}\left[(h^2+k^2)\operatorname{ar\,th}\frac{h}{k}+(k^2-h^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{k}+hk\ln\frac{k^4-h^4}{8h^2k^2}\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizätet und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, М.—Л., 1939.)

Geiger—Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XIII, Berlin, 1928.

Gray A., Absolute Measurements in Electricity and Magnetism, v. I, Macmillan, 1888.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. I, Oxford, 1881.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. X, Leipzig, 1930.

Глава VII

МАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ

§ 1. Определение единицы силы тока (ампера) через величину магнитного момента. Как уже было упомянуто в предыдущей главе, между проводниками с током возникают силы взаимодействия, известные под названием магнитных сил. Это магнитное взаимодействие было тщательно исследовано Ампером. В одном из своих экспериментов он обнаружил, что если два проводника, по которым циркулируют противоположно направленные токи равной величины, расположить достаточно близко друг к другу, то они перестают взаимодействовать с остальными контурами. Возьмем несколько небольших плоских проволочных петель, ток к которым подводится через два плотно сплетенных изолированных провода, так что наблюдаемые магнитные силы будут обусловлены только петлями. Располагая петли на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, и пропуская через них постоянный ток, можно заметить, что они действуют друг на друга с такими же силами и моментами, как электрические диполи, расположенные на месте петель и ориентированные вдоль нормали к их плоскостям. Рассмотрим три небольшие петли, несущие постоянные токи. Для каждой выбранной из них пары можно измерить силу взаимодействия и, зная расстояния между петлями, определить при помощи выражения (1.18) произведения $\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2 = A$, $\mathrm{m}_1\mathrm{m}_3 = B$ и $\mathrm{m}_2\mathrm{m}_3 = C$ и отсюда найти $\mathrm{m}_1^2 = AB/C$, $\mathrm{m}_2^2 = AC/B$ и $\mathrm{m}_3^2 = BC/A$. Считая окружающую среду вакуумом и заменив $1/\varepsilon$ на $\mu_v = 4\pi \cdot 10^{-7}$, мы получим, что величина «магнитного момента» m отдельной петли равна произведению площади петли (в квадратных метрах) на ток в ней (в амперах). Отсюда ампер можно определить как такой ток, который, протекая по небольшой плоской проволочной петле, создает магнитный момент, равный по величине площади петли. В среде, отличающейся от вакуума, силы и моменты будут другими. При этом всюду вместо μ_v появляется множитель μ, называемый магнитной проницаемостью среды.

§ 2. Магнитная индукция и магнитная проницаемость. Если на проводник с током, помещенный в некоторую область, действует магнитная сила, то говорят, что в этой области существует магнитное поле. Будем измерять распределение магнитного поля при помощи небольшой петли-пробника точно так же, как можно было бы измерять распределение электрического поля посредством небольшого электрического диполя. Если петля может свободно поворачиваться, то под действием поля она примет определенную ориентацию. Положительным направлением магнитного поля условимся считать такое нормальное к плоскости петли направление, в котором перемещался бы винт с правой резьбой при его вращении в направлении протекания тока по петле. Как и в электростатике, напряженность магнитного поля можно найти, измерив величину момента, действующего на петлю. Таким образом, мы определим магнитную индукцию **B** или

плотность магнитного потока как такой направленный вдоль магнитного поля вектор, величина которого (в веберах на квадратный метр) равна вращающему моменту (в ньютон-метрах), действующему на петлю с единичным магнитным моментом, ориентированным перпендикулярно к полю. Этот вращающий момент, а следовательно, и **B** зависят от среды, в которой производится измерение. Относительную магнитную проницаемость вещества K_m мы определим как отношение магнитной индукции в некоторой точке пространства, полностью заполненного данным веществом, к значению магнитной индукции в той же точке в вакууме при сохранении конфигурации проводников и величин протекающих в них токов. Магнитная проницаемость μ равна произведению $\mu_v K_m$.

Осуществление экспериментов, на которых основываются определения μ и **B**, в случаях жидких и газообразных сред не вызывают принципиальных затруднений. Но внутри твердого тела производить измерения при помощи проволочной петли, очевидно, уже невозможно. Если все пространство вне небольшой области, в которой находится петля, заполнено одной жидкостью, а эта область заполнена другой жидкостью, то измеряемое значение **B** не будет зависеть от формы и размеров выделенной области только в том случае, когда обе жидкости имеют одинаковые магнитные проницаемости. Таким образом, для определения **B** и μ в некоторой точке P однородного изотропного твердого тела следует вырезать в нем маленькую полость, содержащую точку P, и заполнить ее такой жидкостью, чтобы измерение в точке P не зависело от формы и размера полости. Полученные значения **B** и μ в точке P будут такими же, как и до создания полости. В § 25 настоящей главы, используя граничные условия, выведенные в § 22, мы опишем экспериментальный метод определения **B** и μ, пригодный и в случае магнитно-анизотропных кристаллов.

Пусть в нашем распоряжении имеется большое число маленьких петель, в каждой из которых циркулирует ток I. Не изменяя площади петель, составим из них сетку таким образом, чтобы векторы магнитной индукции, обусловленные двумя близлежащими петлями, всюду оставались параллельными друг другу. Из опыта Ампера следует, что магнитный эффект всех внутренних петель при этом исчезает и результирующее магнитное поле будет таким же, как если бы ток I протекал лишь по границе, образованной крайними петлями независимо от формы самой поверхности сетки. Но, как известно, магнитная индукция, обусловленная каждой элементарной петлей с площадью dS, совпадает с электрическим полем, порождаемым электрическим диполем с моментом $\mu\varepsilon I\, dS$. Следовательно, магнитная индукция, обусловленная контуром, несущим ток I, будет такой же, как напряженность электрического поля однородного электрического двойного слоя мощностью $\mu\varepsilon I$, опирающегося на этот контур (см. § 13 гл. I). Этот магнитный эквивалент двойного слоя называют обычно магнитным листом. Однако если мы в поисках этого листа будем следовать вдоль магнитной силовой линии, создаваемой некоторым электрическим контуром, то окажется, что наше движение будет происходить по замкнутому пути, нигде не пересекающему магнитной неоднородности, соответствующей электрическому двойному слою. Таким образом, магнитный лист в действительности не существует и является лишь удобным понятием, используемым при вычислении магнитных полей. Более того, отсюда следует, что не существует магнитных источников или стоков, соответствующих зарядам в электростатике, так что

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{7.1}$$

Из формулы (1.32) следует, что работа, затрачиваемая при перемещении единичного электрического заряда с одной стороны однородного

электрического двойного слоя мощностью $\mu\varepsilon I$ на другую сторону по пути, огибающему край слоя, равна μI, поскольку разность между телесными углами, под которыми виден двойной слой из начальной и конечной точек пути, составляет 4π. Таким образом, если напряженность электрического поля равна $\mathbf{E}$, то

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \mu I,$$

где $\mathbf{ds}$ — элемент пути. Но, как мы видели, магнитная индукция, обусловленная током I, будет всюду такая же, как напряженность электрического поля, создаваемая однородным электрическим двойным слоем мощностью $\mu\varepsilon I$, опирающимся на контур, по которому протекает ток I, поэтому в вакууме $\oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = \mu_v I$, а в однородной среде с магнитной проницаемостью μ

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = \mu I. \tag{7.2}$$

Но, согласно формуле (6.2), $I = \int \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS$, где $\mathbf{i}$ — плотность тока, а S площадь, ограниченная кривой s; таким образом, $\oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = \mu \int \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS$. Преобразовав левую часть этого равенства при помощи теоремы Стокса (3.3), получим

$$\int_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = \mu \int_S \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{7.3}$$

Легко заметить, что равенство (7.3) выполняется для любого замкнутого пути, даже если этот путь включает только часть полного тока, ибо в последнем случае любая часть поверхности, пронизываемая токами, которые этим путем не охватываются, будут пересекаться с ними дважды: один раз в положительном направлении и один раз в отрицательном, или не будет пересекаться совсем, что в любом случае не даст никакого вклада в интеграл. Таким образом, соотношение (7.3) должно иметь место и для подинтегральных выражений; для области с однородной магнитной проницаемостью из (7.3) вытекает

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{i}. \tag{7.4}$$

§ 3. Магнитный вектор-потенциал. Однородное поле. Как известно, дивергенция вектора, являющегося ротором другого вектора, тождественно равна нулю, и, следовательно, этот вектор удовлетворяет уравнению (7.1). Таким образом, можно ввести новый вектор $\mathbf{A}$, называемый магнитостатическим вектор-потенциалом, такой, что его дивергенция равна нулю, а ротор равен $\mathbf{B}$, т. е.

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{7.5}$$

Обычная формула для rot rot $\mathbf{A}$ дает

$$\nabla\times[\nabla\times\mathbf{A}] = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) \quad (\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{A} = \quad \nabla^2\mathbf{A}.$$

Подставляя в соотношение (7.4) для области с однородной магнитной проницаемостью, находим

$$-\nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{i}, \tag{7.6}$$

или, выписывая компоненты векторов,

$$\mathbf{i}\nabla^2 A_x + \mathbf{j}\nabla^2 A_y + \mathbf{k}\nabla^2 A_z = \quad \mu(\mathbf{i}i_x + \mathbf{j}i_y + \mathbf{k}i_z). \tag{7.7}$$

Таким образом, компоненты A_x, A_y, A_z удовлетворяют уравнению Пуассона (3.6). Решение этого уравнения было найдено в § 10 гл. III (3.28):

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{i_x\,dv}{r}, \qquad A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{i_y\,dv}{r}, \qquad A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{i_z\,dv}{r}. \tag{7.8}$$

Складывая компоненты, получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{i}\,dv}{r}. \tag{7.9}$$

В области вне проводника $\mathbf{i}$ обращается в нуль, а внутри тонкого провода, поперечное сечение которого равно dS, $i_x\,dv = i\,dS\,dx = I\,dx$. Поэтому, складывая компоненты векторов, получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{I}\,ds}{r}. \tag{7.10}$$

Физически такое представление является более удовлетворительным, чем оперирование с магнитным листом, так как величина $\mathbf{A}$ зависит только от конфигурации контура, силы тока и места нахождения точки наблюдения и так как при этом не вводится никаких искусственных неоднородностей. Это выражение приводит к правильному значению линейного интеграла от $\mathbf{B}$ по любому пути. Очевидно, вектор $\mathbf{A}$ можно рассматривать как сумму векторов, каждый из которых обусловлен некоторым элементом тока замкнутого контура и параллелен этому элементу.

В декартовых координатах вектор-потенциал, описывающий однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное вдоль оси x, имеет только две компоненты:

$$A_y = -\alpha z B, \qquad A_z = (1-\alpha)\,yB, \tag{7.11}$$

где α — произвольное число. Очевидно, отличной от нуля будет лишь x-компонента ротора этого выражения, равная $\mathbf{B}$. В сферических координатах вектор-потенциал однородного поля, параллельного оси $\theta = 0$, равен

$$A_\varphi = \frac{1}{2} Br\sin\theta. \tag{7.12}$$

В цилиндрических координатах для вектор-потенциала однородного поля, параллельного оси z, будем иметь

$$A_\varphi = \frac{1}{2} B\rho. \tag{7.13}$$

В сплюснутых сфероидальных координатах вектор-потенциал однородного поля, параллельного оси $\xi = 1$, равен

$$A_\varphi = \frac{c_1 B}{2j} P_1^1(\xi)\,P_1^1(j\eta), \tag{7.14}$$

а в вытянутых сфероидальных координатах

$$A_\varphi = \frac{c_2 B}{2} P_1^1(\xi)\,P_1^1(\eta). \tag{7.15}$$

Разумеется, все эти формулы не представляют собой наиболее общую форму записи вектор-потенциала $\mathbf{A}$, описывающего данное поле $\mathbf{B}$, ибо это поле не изменяется, если к $\mathbf{A}$ добавить градиент любой скалярной величины.

§ 4. Теоремы единственности в магнитостатике. В § 11 гл. III были найдены необходимые условия внутри и на границе области для однозначного определения электростатического потенциала внутри нее.

Это доказательство без всяких изменений применимо и в магнитостатике — к системам, содержащим магнитодвижущую силу (см. § 29 настоящей главы), при условии, что в рассматриваемой области отсутствуют электрические токи, которые могут привести к неоднозначности в определении магнитодвижущей силы. Но при использовании вектор-потенциала требуется иное доказательство единственности. Покажем, что если заданы положение и величина всех токов внутри замкнутой поверхности, а также значение тангенциальной составляющей вектор-потенциала или магнитной индукции на самой поверхности, то значение магнитной индукции внутри рассматриваемой области определяется единственным образом. Та часть поля, которая обусловлена внутренними источниками, определяется формулами (7.5) и (7.10) однозначно. Допустим теперь, что одним и тем же внешним источникам и одинаковым значениям указанных выше величин на границе области соответствуют два различных поля **B** и **B′** внутри нее. Если $\nabla\cdot\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}'=0$, то $\nabla^2(\mathbf{A}-\mathbf{A}')$ обращается в нуль во всем рассматриваемом объеме и, следовательно, при подстановке функции

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{A}-\mathbf{A}'$$

в выражение (3.23) мы получим

$$\int_{\mathrm{v}}(\mathbf{B}-\mathbf{B}')^2\,d\mathrm{v}=\sum_{j=1}^{n}\int_{S_j}(\mathbf{A}\quad\mathbf{A}')\cdot[(\mathbf{B}-\mathbf{B}')\times\mathbf{n}]\,dS_j. \tag{7.16}$$

Если на поверхности S $\mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{n}\times\mathbf{A}'$ или $\mathbf{B}\times\mathbf{n}=\mathbf{B}'\times\mathbf{n}$, то поверхностный интеграл обращается в нуль, так что в любом случае $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$ в каждой точке внутри объема v, поскольку величина $(\mathbf{B}-\mathbf{B}')^2$ является положительной.

Но если разность $\mathbf{B}-\mathbf{B}'$ равна нулю внутри всего объема, то **A** и **A′** могут отличаться друг от друга внутри лишь на градиент скаляра. Однако, как было показано в § 11 гл. III, при обращении градиента скаляра в нуль на поверхности S он оказывается равным нулю во всем объеме v, поэтому при обращении разности $\mathbf{A}-\mathbf{A}'$ в нуль на поверхности S она равна нулю всюду внутри v; тем самым **A** однозначно определяется через свое значение на поверхности S.

§ 5. Разложение вектор-потенциала по ортогональным функциям. В электростатике после нахождения потенциала, обусловленного заданным распределением зарядов, для того, чтобы удовлетворить условиям на границах с диэлектриком или проводником, к этому потенциалу добавляют подходящий возмущенный потенциал. Пользуясь этим методом в случае вектор-потенциалов, нужно, найдя по формуле (7.9) ту часть вектор-потенциала, которая обусловлена заданным распределением токов, добавить к ней такой вектор-потенциал возмущенного поля, чтобы их суперпозиция удовлетворяла магнитным граничным условиям.

Метод непосредственного решения уравнения Лапласа для вектор-потенциала весьма сложен, так как оператор Лапласа, применяемый к вектору, действует не только на величины составляющих вектора, но и на единичные векторы, как это видно из выражений (11.46) и (11.47). За исключением случая декартовых координат, это приводит к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных, решение которых может оказаться очень сложным. Следует поэтому попытаться отыскать более простой способ решения.

Как мы уже видели [см. формулу (3.4)], в свободном пространстве, где нет электрических зарядов, дивергенция электрического поля равна нулю, и поскольку это поле можно представить как градиент скаляра [см.

выражение (1.6)], его ротор также обращается тождественно в нуль. Аналогично, пользуясь выражениями (7.1) и (7.4), находим, что в свободном пространстве, где нет электрических токов, дивергенция и ротор магнитной индукции равны нулю. Следует ожидать, что в таких областях для этих двух полей можно написать разложение по ортогональным функциям в одинаковой форме. Подобное разложение уже было получено в гл. V при решении уравнения Лапласа, являющегося уравнением второго порядка в частных производных. Это уравнение разбивалось на три дифференциальных уравнения в полных производных, каждое из которых содержало единственную координату и было связано с другими при помощи двух индексов (постоянных разделения). Таким образом, каждый член в разложении содержал два индекса и шесть постоянных интеграции. Как только что указывалось, исходя из математического подобия электрического и магнитного полей, можно ожидать, что в разложении вектор-потенциала, определяющего вектор магнитной индукции, будет содержаться то же самое число индексов и постоянных.

Этот потенциал должен определяться тремя скалярными потенциальными функциями, потому что в декартовых координатах каждая компонента вектор-потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако эти компоненты не являются независимыми, а связаны соотношением $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, поэтому можно использовать самое большее две независимые скалярные функции. Более того, ниже будет показано, что при соответствующем их выборе магнитостатическое поле может определяться только одной из этих функций. Общее выражение для вектор-потенциала, приводящее к равной нулю дивергенции, имеет вид

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}, \tag{7.17}$$

где $\mathbf{W}$ является вектором, определяемым двумя скалярными потенциальными функциями. В дальнейшем для удовлетворения граничным условиям в задачах о вихревых токах и о электромагнитном излучении будет удобно разложить $\mathbf{W}$ на две взаимно ортогональные компоненты, каждая из которых определяется своей скалярной потенциальной функцией, т. е.

$$\mathbf{W} = \mathbf{u}W_1 + \mathbf{u} \times \nabla W_2, \tag{7.18}$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, выбираемый так, чтобы

$$\begin{gathered} \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{W}) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{W}) = 0, \\ \nabla^2 W_1 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 W_2 = 0. \end{gathered} \tag{7.19}$$

Легко проверить путем представления в декартовых координатах, что если $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ или $\mathbf{r}$, то

$$\nabla^2 \mathbf{u} W_1 = \mathbf{u} \nabla^2 W_1 \quad \text{или} \quad \mathbf{u} \nabla^2 W_1 + 2 \nabla W_1 \quad \text{и} \quad \nabla^2 (\mathbf{u} \times \nabla W_2) = \mathbf{u} \times \nabla (\nabla^2 W_2), \tag{7.20}$$

так что выбор $\mathbf{u}$ в соответствии с условием (7.19) возможен. Из аналогии между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ вытекает, что $\mathbf{B}$ подобно $\mathbf{E}$ можно представить через одну скалярную потенциальную функцию. Это предположение подтверждается исследованием той части $\mathbf{A}$, которая соответствует функции W_2. Действительно,

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \quad \nabla \times (\mathbf{u} \times \nabla W_2) = \mathbf{u} (\nabla^2 W_2) - \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla W_2), \tag{7.21}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad \nabla \times (\mathbf{u} \times \nabla W_2) = \mathbf{u} (\nabla^2 W_2) - \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla W_2) - \nabla W_2. \tag{7.22}$$

Поскольку $\nabla^2 W_2 = 0$, то часть вектор-потенциала $\mathbf{A}$, определяемая функцией W_2, оказывается градиентом скаляра, и поэтому в магнитостатическом случае она не влияет на значение величины $\mathbf{B}$.

Пусть u_1, u_2, u_3 — ортогональные криволинейные координаты, а вектор $\mathbf{u}$, определенный выше, ориентирован в направлении u_1; тогда, выражая W_1 в виде $U(u_1)F(u_2, u_3)$, будем иметь $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=0$. (Доказательство см. у Ласса, стр. 48 и 57.)

В последующих параграфах развитая здесь теория будет применена для нахождения решения уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A}=0 \tag{7.23}$$

в форме

$$\mathbf{A}=\mathbf{u}_1'U_{11}U_{12}U_{13}+\mathbf{u}_2'U_{21}U_{22}U_{23}+\mathbf{u}_3'U_{31}U_{32}U_{33},$$

где $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$, $\mathbf{u}_3'$ — единичные векторы в направлении координат u_1, u_2, u_3, а U_{rs} — функция только u_s. Решение должно быть записано в таком виде, чтобы вектор-потенциал можно было вычислить в любой точке внутри объема, не содержащего источников и ограниченного семейством поверхностей, на каждой из которых одна координата сохраняется постоянной и тангенциальные компоненты вектор-потенциала заданы.

§ 6. Вектор-потенциал в цилиндрических координатах. В гл. V было найдено, что общее решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах выражается в виде суммы членов, содержащих, за исключением некоторых частных случаев, функции Бесселя. Найдем теперь аналогичное решение для вектор-потенциала, который на поверхности прямого круглого цилиндра можно разложить по ортогональным функциям. Выражая тангенциальную компоненту вектор-потенциала на поверхности в виде суммы таких решений, можно тем самым определить его значение в любой внутренней точке цилиндра. Пользуясь решением уравнения $\nabla^2W_1=0$, выраженном в функциях Бесселя (см. § 30б гл. V), и полагая $\mathbf{u}=\mathbf{k}$ для функции W, входящей в соотношение (7.17), получим

$$\mathbf{W}=\mathbf{k}k^{-1}(Ae^{kz}+Be^{-kz})[CJ_n(k\rho)+DY_n(k\rho)]\sin(n\varphi+\delta_n). \tag{7.24}$$

Тогда из соотношения (7.17) для вектор-потенциала имеем

$$\begin{aligned} A_\rho &= -(Ae^{kz}+Be^{-kz})[CJ_n(k\rho)+DY_n(k\rho)]\,n(k\rho)^{-1}\cos(n\varphi+\delta_n),\\ A_\varphi &= (Ae^{kz}+Be^{-kz})[CJ_n'(k\rho)+DY_n'(k\rho)]\sin(n\varphi+\delta_n), \end{aligned} \tag{7.25}$$

что совпадает с ортогональной поверхностной векторной функцией, определенной ранее выражением (5.347). Если для данного значения z какая-либо из компонент вектора $\mathbf{k}\times\mathbf{A}$ при $\rho=a$ обращается в нуль, то при этом значении z вектор $\mathbf{k}\times\mathbf{A}$ можно представить в виде суммы таких функций. Редко употребляемая форма записи, содержащая φ, получается, если δ_n положить равным нулю, $n\to 0$, а произведения nA и nB сохранить конечными.

Чтобы получить решение, соответствующее тангенциальной компоненте вектора $\mathbf{A}$, заданной на боковой поверхности, воспользуемся функциями (5.311), ортогональными по z и φ. Тогда вместо выражения (7.24) получим

$$\begin{aligned} A_\rho &= -[CI_n(k\rho)+DK_n(k\rho)]\,n(k\rho)^{-1}\cos(kz+\gamma_k)\cos(n\varphi+\delta_n),\\ A_\varphi &= [CI_n'(k\rho)+DK_n'(k\rho)]\cos(kz+\gamma_k)\sin(n\varphi+\delta_n). \end{aligned} \tag{7.26}$$

Компонента z удовлетворяет скалярному уравнению Лапласа; ее можно записать в виде

$$A_z=[C'I_n(k\rho)+D'K_n(k\rho)]\cos(kz+\gamma_k')\cos(n\varphi+\delta_n'). \tag{7.27}$$

Решения, полученные выше, непригодны при значениях $k=0$ и $n\neq 0$. В этом случае решения, соответствующие выражениям (7.26) и (7.27), будут

$$\begin{aligned} A_\rho &= (a\rho^{n-1}+B\rho^{-n-1})(Cz+D)\sin(n\varphi+\delta_n),\\ A_\rho &= (-A\rho^{n-1}+B\rho^{-n-1})(Cz+D)\cos(n\varphi+\delta_n),\\ A_z &= (A'\rho^n+B'\rho^{-n})(C'z+D')\cos(n\varphi+\delta_n'). \end{aligned} \tag{7.28}$$

При $k=0$ не существует решений, одновременно ортогональных по ρ и φ и приводящих к заданному значению A на торцах цилиндров. Если же равны нулю k и n, то из соотношения (5.308) можно найти некоторые представляющие интерес формы решений, если положить

$$\mathbf{W}=\mathbf{k}[(Az\varphi+B\varphi+Cz+D)\ln\rho+(Ez+F)\varphi], \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned} A_\rho &= A\rho^{-1}z\ln\rho+B\rho^{-1}\ln\rho+E\rho^{-1}z+F,\\ A_\varphi &= -A\rho^{-1}z\varphi-B\rho^{-1}\varphi-C\rho^{-1}z-D\rho^{-1},\\ A_z &= (G\varphi+H)\ln\rho+I\varphi. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Другие крайне редко требующиеся решения можно найти путем использования в выражении для функции W векторов **i**, **j** или **r**.

§ 7. Вектор-потенциал в сферических координатах. В гл. V общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах было представлено в виде суммы членов, содержащих сферические гармоники. Теперь требуется получить аналогичное решение для вектор-потенциала, которое обладает свойством ортогональности на поверхности сферы, так что можно выразить тангенциальные компоненты вектор-потенциала на поверхности в виде суммы таких решений и тем самым определить его величину в любой внутренней точке. Пользуясь решением уравнения $\nabla^2 W_1=0$ в виде сферических гармоник (см. § 24 гл. V) и полагая $\mathbf{u}=\mathbf{r}$, получим для W и **A** (см. § 5) следующие выражения:

$$\mathbf{W}=\mathbf{r}(Ar^n+Br^{-n-1})[CP_n^m(\cos\theta)+DQ_n^m(\cos\theta)]\sin(m\varphi+\delta_m), \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} A_\theta &= (Ar^n+Br^{-n-1})[CP_n^m(\cos\theta)+DQ_n^m(\cos\theta)]\,m\,\mathrm{cosec}\,\theta\cos(m\varphi+\delta_m),\\ A_\varphi &= (Ar^n+Br^{-n-1})[CP_n^{m'}(\cos\theta)+DQ_n^{m'}(\cos\theta)]\sin\theta\sin(m\varphi+\delta^m). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Здесь **A** — ортогональная поверхностная векторная функция, упоминаемая в § 24б гл. V. При $m=0$ и $\delta_m=\pi/2$ это соотношение принимает вид

$$A_\varphi=(Ar^n+Br^{-n-1})[CP_n^1(\cos\theta)+DQ_n^1(\cos\theta)]. \tag{7.33}$$

Часто бывает полезно выражать **B** через W. При $\mathbf{u}=\mathbf{r}$ получим

$$\mathbf{B}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{r}W)=-\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla W)=r\frac{\partial}{\partial r}(\nabla W)+2\nabla W$$

или, выписывая компоненты этого выражения, будем иметь

$$B_r=\frac{\partial^2(rW)}{\partial r^2},\qquad B_\theta=\frac{\partial^2(rW)}{r\,\partial r\,\partial\theta},\qquad B_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(rW)}{\partial r\,\partial\varphi}. \tag{7.34}$$

§ 8. Выражение для вектор-потенциала через значение магнитной индукции на оси. Применяемые для фокусирования электронных пучков магнитные линзы обычно конструируются из коаксиальных катушек с током или эквивалентных им магнитов, так что вектор-потенциал имеет только φ-компоненту. Для расчета фокусирующих характеристик таких линз удобно иметь выражение для вектор-потенциала через значение магнитной индукции и ее производных на оси системы. Пусть $\mathbf{W}=\mathbf{k}W$, где W — решение

уравнения Лапласа [см. (3.45)], тогда из выражения (7.17) имеем

$$A_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z + j\rho \sin\theta) \sin\theta \, d\theta, \tag{7.35}$$

где $\Phi(z)$ — действительная функция, разложение в ряд Тейлора которой имеет вид (Двайт, 39)

$$\Phi(z, \rho) = \Phi(z) + \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} j\rho \sin\theta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} (j\rho \sin\theta)^2 + \ldots \tag{7.36}$$

Подстановка выражения (7.36) в (7.35) и интегрирование от 0 до 2π дают

$$A_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} \Phi(z)}{\partial z^{2n+1}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+1} \tag{7.37}$$

Магнитная индукция $\nabla \times A_\rho$ на оси, где $\rho = 0$, равна

$$B_0(z) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho}\right]_{\rho=0} = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}. \tag{7.38}$$

Теперь, подставляя это в выражение (7.37), можно выразить $A_\varphi(\rho, z)$ через индукцию $B_0(z)$ и ее производные

$$A_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \frac{\partial^{2n} B_0(z)}{\partial z^{2n}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+1} \tag{7.39}$$

Элементы тока, возбуждающего поля подобного рода, представляют собой коаксиальные круговые петли, поэтому значения ρ и z, в пределах которых справедливо выражение (7.39), будут такими же, как и в случае круглых петель. Для нахождения этих пределов подставим $B_0(z)$ из формулы (7.55) в выражение (7.39) и сравним результаты с решением задачи 27, справедливым при любых значениях ρ и z. Для этого следует, воспользовавшись выражением (5.314), разложить функцию $J_1(k\rho)$ в ряд, изменить порядок суммирования и интегрирования и подставить вместо интегралов производные выражения (5.357). Совпадение результатов показывает, что выражение (7.39) однозначно определяет вектор-потенциал для всех значений ρ и z, которые можно достигнуть, не пересекая поверхностей с током. Последнее ограничение необходимо потому, что внешние поля любых токов, циркулирующих внутри замкнутой поверхности, не изменяются, если эти токи заменить соответствующим образом подобранными токами, текущими по поверхности.

§ 9. Уравнение аксиально симметричных трубок магнитной индукции. Магнитное поле можно представить наиболее наглядно путем нанесения линий потока или линий магнитной индукции. При аксиальной симметрии картина поля в любой плоскости, проходящей через ось, будет одинаковой, а токи — ортогональными к этим плоскостям; в этом случае уравнение линий магнитной индукции легко можно получить из выражения для вектор-потенциала, имеющего лишь A_φ-составляющую. Путем вращения вокруг оси симметрии каждой линии потока образуется поверхность трубки магнитной индукции. Каждую трубку можно охарактеризовать величиной магнитного потока N внутри нее. Эту величину можно получить путем интегрирования нормальной составляющей индукции по любому сечению S трубки. Таким образом, уравнение поверхности такой трубки будет

$$N = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = f(\rho, z). \tag{7.40}$$

Пользуясь теоремой Стокса (3.3), преобразуем это выражение к виду

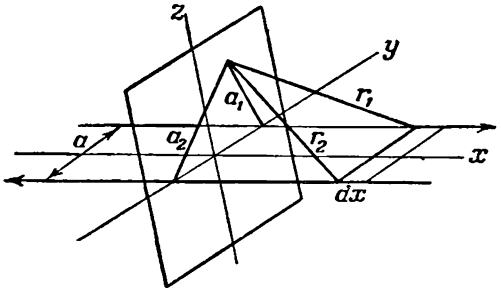
$$N = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}. \tag{7.41}$$

Для сечения, расположенного в плоскости, перпендикулярной к оси z, путь интегрирования s является окружностью длиной $2\pi\rho$, на которой величина A_φ постоянна, поэтому уравнение поверхности силовой трубки будет

$$N = 2\pi\rho A_\varphi(\rho, z). \tag{7.42}$$

В системе ортогональных криволинейных координат u_1, u_2 и φ, обладающей аксиальной симметрией, расстояние ρ является функцией u_1 и u_2, поэтому уравнение силовой трубки имеет вид

$$N = 2\pi\rho(u_1, u_2) A_\varphi(u_1, u_2). \tag{7.43}$$



Фиг. 67.

§ 10. Вектор-потенциал и поле двухпроводной линии. Применим сначала формулу (7.10) для нахождения магнитного поля токов, один из которых течет в длинном прямом проводе в одном направлении, а другой — в параллельном проводе, находящемся от первого на расстоянии a, в обратном направлении. Поскольку все элементы проводов направлены вдоль оси x (фиг. 67), вектор $\mathbf{A}$ имеет лишь компоненту A_x. Согласно формуле (7.10),

$$A_x = \frac{\mu I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dx = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[(a_1^2+x^2)^{-1/2}-(a_2^2+x^2)^{-1/2}\right]dx =$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi}\left|\ln\frac{r_1+x}{r_2+x}\right|_0^{\infty} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{a_2}{a_1}. \tag{7.44}$$

Отсюда видно, что поверхности постоянного вектор-потенциала являются поверхностями круглых цилиндров, совпадающими с эквипотенциальными поверхностями в электростатике, когда заряды двух проводов равны $+\mu\varepsilon I$ и $-\mu\varepsilon I$, а $V = -q(2\pi\varepsilon)^{-1}\ln(a_2/a_1)$. При $\mu I = 2\pi$ уравнением этих цилиндров будет уравнение (4.67), если заменить в нем U на A_x и x на z. Магнитное поле $\nabla \times \mathbf{A}$ направлено под прямым углом к соответствующему электрическому полю ∇V, а их численные значения одинаковы. Из соотношений (3.14) — (3.16) следует, что компоненты магнитной индукции в вакууме соответственно равны (так как $h_1 = h_2 = h_3 = 1$)

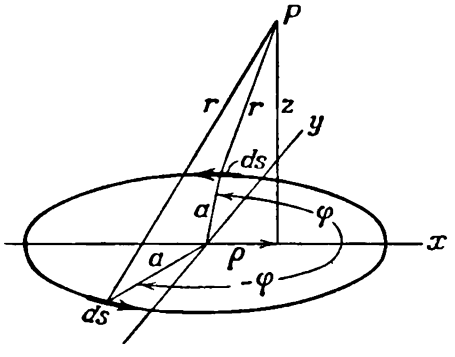
$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{7.45}$$

Ввиду того, что $a_1 = \left[\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2+z^2\right]^{1/2}$ и $a_2 = \left[\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2+z^2\right]^{1/2}$ имеем

$$B_y = \frac{\mu I z}{2\pi}\left(\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}\right), \tag{7.46}$$

$$B_z = -\frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{y+\frac{1}{2}a}{a_2^2}-\frac{y-\frac{1}{2}a}{a_1^2}\right) \tag{7.47}$$

§ 11. Вектор-потенциал и поле круглой петли. Вычислим вектор-потенциал в точке P (см. фиг. 68), пользуясь сферическими координатами. Вследствие симметрии величина A, очевидно, не зависит от φ. Поэтому для простоты выберем точку P в плоскости xz, где $\varphi = 0$. Объединяя попарно равноотстоящие от P элементы длиною ds, имеющие координаты $+\varphi$ и $-\varphi$, мы видим, что результирующий вектор A направлен нормально к плоскости ρz. Следовательно, вектор A имеет только одну компоненту A_φ. Пусть ds_φ — составляющая элемента ds в этом направлении, тогда формулу (7.10) можно записать в виде



Фиг. 68.

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{4\pi}\oint \frac{ds_\varphi}{r} = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^\pi \frac{a\cos\varphi\, d\varphi}{(a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Для очень маленькой петли $r_0 = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \gg a$, и поэтому

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^\pi \frac{a\cos\varphi}{r_0}\left(1+\frac{a\rho\cos\varphi}{r_0^2}\right)d\varphi \approx \frac{a^2\mu I\rho}{4r^3} = \frac{a^2\mu I\sin\theta}{4r^2}. \qquad (7.48)$$

Введя магнитный момент петли m (см. § 1), равный $\pi a^2 I$ и направленный вверх, находим

$$\mathbf{A} = \mu(\mathbf{m}\times\mathbf{r})(4\pi r^3)^{-1}. \qquad (7.49)$$

Если это приближение не годится, то, полагая $\varphi = \pi + 2\theta$, так что $d\varphi = 2d\theta$ и $\cos\varphi = 2\sin^2\theta - 1$, будем иметь

$$A_\varphi = \frac{\mu a I}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin^2\theta - 1)\,d\theta}{[(a+\rho)^2+z^2-4a\rho\sin^2\theta]^{1/2}}.$$

Введем величину

$$k^2 = 4a\rho[(a+\rho)^2+z^2]^{-1} \qquad (7.50)$$

и после некоторых преобразований получим

$$A_\varphi = \frac{k\mu I}{2\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k^2}-1\right)\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}} - \frac{2}{k^2}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta\right] =$$

$$= \frac{\mu I}{\pi k}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)K - E\right] =$$

$$= \frac{\mu I}{32}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2}k^3\left(1+\frac{3}{4}k^2+\frac{75}{128}k^4+\ldots\right), \qquad (7.51)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Для определения магнитной индукции следует написать, пользуясь выражениями (3.14) — (3.16), компоненты ротора в цилиндрических координатах. Как известно (см. § 6 гл. III), в этом случае $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$,

поэтому

$$B_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$B_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}(A_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho}(A_z) = 0, \tag{7.52}$$

$$B_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi).$$

Производные от K и E соответственно равны (см. Двайт, 789.1 и 789.2)

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \qquad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}.$$

А из соотношения (7.50) имеем

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{zk^3}{4a\rho}, \qquad \frac{\partial k}{\partial \rho} = \frac{k}{2\rho} - \frac{k^3}{4\rho} - \frac{k^3}{4a}.$$

Выполняя дифференцирование, группируя члены и заменяя k, согласно выражению (7.50), получим

$$B_\rho = \frac{\mu I}{2\pi}\frac{z}{\rho[(a+\rho)^2+z^2]^{1/2}}\left[-K + \frac{a^2+\rho^2+z^2}{(a-\rho)^2+z^2}E\right], \tag{7.53}$$

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{[(a+\rho)^2+z^2]^{1/2}}\left[K + \frac{a^2-\rho^2-z^2}{(a-\rho)^2+z^2}E\right] \tag{7.54}$$

Численные значения B_ρ и B_z для любых ρ и z находятся путем определения k из выражения (7.50) с последующим отысканием в таблицах (см. Двайт, стр. 208 – 210) соответствующих значений K и E. На оси симметрии, где $\rho = 0$, имеем

$$B_\rho = \frac{0}{0} \to 0 \quad \text{и} \quad B_z = \frac{\frac{1}{2}\mu a^2 I}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{7.55}$$

§ 12. Поле токов, текущих по сферической пленке. Введем функцию потока ψ и определим ее значение в некоторой точке P на тонкой сферической пленке радиуса a как полный ток, протекающий по пленке через любую кривую, проведенную на пленке между точкой P и точкой, где значение ψ равно нулю. Компоненты плотности тока оказываются, таким образом, связанными с функцией ψ уравнением

$$i_\theta = \frac{-1}{a\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \qquad i_\varphi = \frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{7.56}$$

Найдем вектор-потенциал и магнитное поле, обусловленное этими токами. Поскольку любую возможную функцию ψ можно выразить в виде суммы поверхностных гармоник, то достаточно вычислить поле распределения $\psi_n^m = S_n^m(\theta, \varphi)$, а затем посредством суперпозиции найти поле, соответствующее произвольной функции ψ. Обозначим магнитную индукцию вне пленки через $\mathbf{B}_0$, а внутри – через $\mathbf{B}_i$. Применяя соотношение (7.2) к небольшому контуру длиной $\Delta\theta$, окружающему элемент пленки и лежащему в плоскости $\varphi = \text{const}$, получим

$$\mu i_\varphi a \Delta\theta = [(B_\theta)_0 - (B_\theta)_i]\,\Delta\theta.$$

Воспользуемся соотношениями (7.56) и введем скалярную функцию W из выражения (7.34), тогда

$$\mu\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2(rW_0)}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{\partial^2(rW_i)}{\partial r\,\partial \theta}.$$

Аналогично, взяв контур в направлении φ, получим

$$-\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2(rW_0)}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2(rW_i)}{\partial r\,\partial\varphi}.$$

Умножим первое уравнение на $d\theta$, а второе — на $\sin\theta\,d\varphi$ и затем вычтем одно из другого. В результате обе части оказываются полными дифференциалами, поэтому после интегрирования, помня, что при $r=a$ $W_0=W_i$, будем иметь

$$\mu\psi=\frac{\partial}{\partial r}(rW_0-rW_i)=a\left(\frac{\partial W_0}{\partial r}-\frac{\partial W_i}{\partial r}\right). \tag{7.57}$$

Рассматривая ψ в виде $S_n^m(\theta,\varphi)$, мы обязаны, исходя из соотношения (7.31), взять решение в форме

$$W_0=-\frac{\mu}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}S_n^m(\theta,\varphi),\qquad W_i=-\frac{\mu}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}S_n^m(\theta,\varphi), \tag{7.58}$$

так как при этом выполняются требуемые условия, а именно: $W_0=W_i$ при $r=a$, W_0 конечная функция на бесконечности, а W_i — конечная функция в начале координат. Следовательно, согласно выражению (7.17), вектор-потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}
&(A_r)_0=0,\ (A_\theta)_0=-\frac{\mu}{(2n+1)\sin\theta}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\frac{\partial}{\partial\varphi}[S_n^m(\theta,\varphi)],\\
&(A_\varphi)_0=\frac{\mu}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\frac{\partial}{\partial\theta}[S_n^m(\theta,\varphi)],\\
&(A_r)_i=0,\ (A_\theta)_i=-\frac{\mu}{(2n+1)\sin\theta}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\frac{\partial}{\partial\varphi}[S_n^m(\theta,\varphi)],\\
&(A_\varphi)_i=\frac{\mu}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}[S_n^m(\theta,\varphi)].
\end{aligned} \tag{7.59}$$

В каждой из этих составляющих множитель, содержащий θ, можно выразить посредством соотношений (5.207) и (5.208) в виде суммы двух присоединенных функций Лежандра.

§ 13. Зональные токи в сферической пленке. Практически наиболее важным является тот случай, когда токи текут в сферической пленке по линиям постоянной широты. Вследствие аксиальной симметрии все величины в этом случае не зависят от φ. Функцию потока можно записать следующим образом:

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta). \tag{7.60}$$

Плотность тока имеет только φ-составляющую

$$i_\varphi=\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{a}\frac{\partial P_n(u)}{\partial\theta}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n\sin\theta}{a}\frac{\partial P_n(u)}{\partial u}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{a}P_n^1(u), \tag{7.61}$$

где $u=\cos\theta$. Если магнитная проницаемость во всем пространстве равна μ, то в соответствии с выражениями (7.58) функция W примет вид

$$W_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\mu C_n}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n(u),\ W_i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\mu C_n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}P_n(u). \tag{7.62}$$

Вектор-потенциал, согласно соотношениям (7.59), равен

для $r < a$

$$\mathbf{A} = \varphi\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-C_n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^1(u), \tag{7.63}$$

для $r > a$

$$\mathbf{A} = \varphi\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-C_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(u). \tag{7.64}$$

Заметим здесь, что поскольку $(\varphi)_x = -\sin\varphi$, $(\varphi)_y = \cos\varphi$, то величины A_x и A_y удовлетворяют уравнению (7.7) для свободного пространства ($\mathbf{i} = 0$). Легко видеть, что выражение для A имеет ту же форму, что и (7.33). Компоненты магнитной индукции получаются из соотношений (7.62) или (7.63) и (7.64). Таким образом, пользуясь выражениями (7.34), имеем

для $r < a$

$$B_r = \frac{\partial^2 (rW_i)}{\partial r^2} = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)C_n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n(u), \tag{7.65}$$

для $r > a$

$$B_r = \frac{\partial^2 (rW_0)}{\partial r^2} = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)C_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} P_n(u). \tag{7.66}$$

А из выражений (7.63) и (7.64) получаем

для $r < a$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} = +\frac{\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)C_n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n^1(u), \tag{7.67}$$

для $r > a$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nC_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} P_n^1(u). \tag{7.68}$$

Эти выражения не только позволяют определить магнитную индукцию тока, текущего по проводу, намотанному на сферу с произвольной плотностью, но и показывают также, каким образом следует намотать этот провод на сферу, чтобы получить заданное поле. Так, например, в случае однородного поля внутри сферы $B_r = B\cos\theta$ и $B_\theta = -B\sin\theta$, поэтому, согласно выражениям (7.65) и (7.67), все $C_n = 0$, за исключением C_1. Таким образом, из соотношения (7.61) следует, что плотность намотки провода пропорциональна величине $d[P_n(\cos\theta)]/d\theta = -\sin\theta$. Если воспользоваться выражениями (7.63) и (7.64), то, согласно формуле (7.42), уравнения поверхности силовых трубок, можно записать в виде

$$N = 2\pi r \sin\theta A_\varphi. \tag{7.69}$$

§ 14. Представление поля круглой петли через сферические гармоники. Предположим, что плотность тока на поверхности сферы всюду равна нулю, за исключением полосы $\theta = \alpha$, ширина которой настолько мала, что физически ее трудно измерить, но все же она отлична от нуля, так что плотность тока и вектор-потенциал—функции всюду ограниченные. Пользуясь выражениями (7.61) и (7.62), можно написать

$$i = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(u).$$

Будем вычислять величины C_n, так же как и в гл. V, путем умножения обеих частей равенства на $P_m^1(u)$ и интегрирования от $u=-1$ до $u=1$. Согласно соотношению (5.92), все члены справа исчезают, кроме тех, для которых $n=m$, и в соответствии с выражением (5.194) имеем

$$C_n = -\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} aiP_n^1(u)\,du.$$

Плотность тока i отлична от нуля лишь в полосе $\theta=\alpha$ шириной Δs; эта полоса настолько узка, что функцию $P_n^1(\cos\theta)$ на ней можно считать постоянной, имеющей значение $P_n^1(\cos\alpha)$. Тогда интеграл оказывается равным

$$P_n^1(\cos\alpha)\int ia\sin\theta\,d\theta = P_n^1(\cos\alpha)\sin\alpha\int_S i\,ds = I\sin\alpha P_n^1(\cos\alpha).$$

Таким образом,

$$C_n = -\frac{(2n+1)\,I\sin\alpha}{2n(n+1)}P_n^1(\cos\alpha). \tag{7.70}$$

Пользуясь выражением (7.63), находим вектор-потенциал в области $r<a$

$$\mathbf{A} = \varphi\frac{\mu I}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{n(n+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^1(\cos\alpha)\,P_n^1(\cos\theta), \tag{7.71}$$

а из выражений (7.65) и (7.67) получаем компоненты магнитной индукции

$$B_r = \frac{\mu I\sin\alpha}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}P_n^1(\cos\alpha)\,P_n(\cos\theta), \tag{7.72}$$

$$B_\theta = -\frac{\mu I\sin\alpha}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}P_n^1(\cos\alpha)\,P_n^1(\cos\theta), \tag{7.73}$$

где $\cos\theta=u$. Для области $r>a$ аналогичные выражения получаются, как и прежде, при помощи соотношений (7.66) и (7.68). Пусть начало координат находится в центре петли, тогда $\alpha=\pi/2$, $\cos\alpha=0$ и $P_n^1(0)=-(n+1)P_{n+1}(0)$, так что четные значения n исключаются; пользуясь результатами § 16з гл. V, для $r<a$ получим

$$B_r = -\frac{\mu I}{2a}\sum_{\substack{n=1\\(n\text{—нечетное})}}^{\infty}(-1)^{(n+1)/2}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots n\cdot(n+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)(n+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}P_n(\cos\theta), \tag{7.74}$$

$$B_\theta = \frac{\mu I}{2a}\sum_{\substack{n=1\\(n\text{—нечетное})}}^{\infty}(-1)^{(n+1)/2}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots n\cdot(n+1)}{n\cdot2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)(n+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}P_n^1(\cos\theta). \tag{7.75}$$

Если r больше a, то в выражении (7.74) следует заменить $(r/a)^{n-1}$ на $(a/r)^{n+2}$, а в выражении (7.75) $(r/a)^{n-1}$ на $-n(a/r)^{n+2}/(n+1)$.

Согласно уравнению (7.42) и соотношению (7.71), уравнения поверхности силовых трубок будут иметь вид

$$N = 2\pi r\sin\theta\,A_\varphi. \tag{7.76}$$

§ 15. Закон Био и Савара. Поле прямолинейного провода. Применим операцию ротора к обеим частям выражения (7.10)

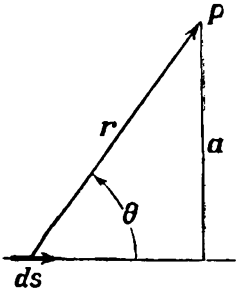
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \nabla \times \frac{\mathbf{ds}}{r},$$

где

$$\nabla \times \frac{\mathbf{ds}}{r} = \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{ds} + \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \times \mathbf{ds}.$$

Поскольку координаты точки, для которой вычисляется **B**, не входят в **ds**, ибо последний зависит только от конфигурации контура, то по отношению к оператору ∇ величина **ds** является постоянной и первый член в правой части последнего выражения равен нулю. Но $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$, так что

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3}. \qquad (7.77)$$



Фиг. 69.

Если θ есть угол, измеряемый от **ds** к **r**, то можно написать

$$B = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{\sin\theta\, ds}{r^2}, \qquad (7.78)$$

причем **B** направлено перпендикулярно к плоскости, содержащей ds и r[1]. Если θ отсчитывается по часовой стрелке, то **B** направлено от наблюдателя. Био и Савар установили этот закон только для прямолинейных токов.

В этом случае, обозначая через a расстояние от точки P до провода (фиг. 69), имеем

$$r^2 = a^2 + s^2, \qquad \sin\theta = \frac{a}{r},$$

так что выражение для магнитной индукции (7.78) принимает вид (см. Двайт, 200.03)

$$B = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{a\, ds}{(a^2+s^2)^{3/2}} = \frac{\mu I}{2\pi a} \left| \frac{s}{(a^2+s^2)^{1/2}} \right|_0^\infty = \frac{\mu I}{2\pi a}. \qquad (7.79)$$

§ 16. Поле соленоида с произвольным шагом намотки. В качестве одного из элементов электрической цепи очень часто применяется соленоид. Он состоит из провода, намотанного в виде спирали, изображенной на фиг. 70. Пусть уравнение этой спирали имеет вид

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = a\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad (7.80)$$

где α — шаг намотки, т. е. z возрастает на $2\pi a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ при увеличении φ на 2π. Напишем z-компоненту вектора **B** [см. выражение (7.77)]

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{[\mathbf{ds}\times\mathbf{r}]_z}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{r_y ds_x - r_x ds_y}{r^3}. \qquad (7.81)$$

Компоненты **r** и **ds** для точки наблюдения, расположенной на оси соленоида, будут равны

$$r_x = -a\cos\varphi, \qquad ds_x = -a\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$r_y = -a\sin\varphi, \qquad ds_y = a\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$r_z = -a\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha + C, \qquad ds_z = a\,\mathrm{tg}\,\alpha\, d\varphi.$$

[1]) Поскольку **r** и **ds** в выражении (7.77) стоят под знаком интеграла, утверждение автора об их перпендикулярности вектору **B** лишено смысла (только в случае прямолинейных токов вектор **B** перпендикулярен **r** и **ds**). — *Прим. перев.*

Найдем поле на оси соленоида, имеющего N витков; поле подводящих проводников не будем принимать во внимание, считая, что его можно вычислить отдельно. Расположим начало координат в точке, где требуется вычислить B_z, и подставим в выражение (7.81) значение $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = a(1 + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}$. Выбирая пределы интегрирования

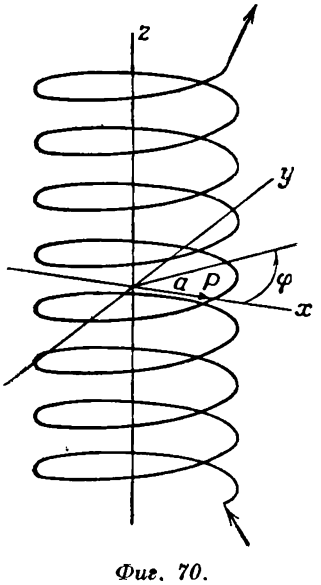
$$\varphi_1 = -N\pi + \frac{b}{a \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = N\pi + \frac{b}{a \operatorname{tg} \alpha},$$

находим после интегрирования (см. Двайт, 200.03), что компонента B_z на расстоянии b от центра соленоида равна

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi a \operatorname{tg} \alpha} \left\{ \frac{N\pi a \operatorname{tg} \alpha + b}{[a^2 + (N\pi a \operatorname{tg} \alpha + b)^2]^{1/2}} + \frac{N\pi a \operatorname{tg} \alpha - b}{[a^2 + (aN\pi \operatorname{tg} \alpha - b)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Обозначая через β_1 и β_2 углы между осью соленоида и векторами, проведенными из точки b к концам провода, образующего соленоид, полученное выражение можно записать в виде



Фиг. 70.

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi a \operatorname{tg} \alpha} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1). \tag{7.82}$$

Следует заметить, что если точка b находится внутри соленоида, то один из углов (β_1 или β_2) должен быть больше $\pi/2$, поэтому один из косинусов всегда отрицателен. Пусть расстояние между крайними концами провода соленоида равно L, тогда

$$L = 2\pi N a \operatorname{tg} \alpha$$

и при наличии n витков на единицу длины $N = Ln$, так что

$$B_z = \frac{1}{2} \mu n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1). \tag{7.83}$$

Формулы (7.82) и (7.83) для аксиальной компоненты поля на оси являются совершенно строгими. Однако если $\alpha \neq 0$, то кроме этой компоненты существуют также и другие. Вычисления, аналогичные только что проделанным, дают

$$B_x = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{r_z\, ds_y - r_y\, ds_z}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha\, (-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)\, d\varphi}{r^3} \tag{7.84}$$

Это выражение, вообще говоря, отлично от нуля.

$$B_y = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{r_x\, ds_z - r_z\, ds_x}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{-a^2 \operatorname{tg} \alpha\, (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)\, d\varphi}{r^3}. \tag{7.85}$$

Этот интеграл в общем случае также не равен нулю. Таким образом, силовые линии не являются прямыми, а имеют вид спиралей.

В важном случае бесконечно длинного соленоида выражения (7.82) и (7.83) принимают вид

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi a \operatorname{tg} \alpha} = n\mu I. \tag{7.86}$$

При этом x-компонента обращается в нуль, так как выражение (7.84) будет представлять собой интеграл от нечетной функции, а вместо выражения (7.85) получаем

$$B_y = -2\pi n^2 a\mu I \int_0^\infty \frac{\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}{[(2n\pi a)^2+\varphi^2]^{3/2}}\,d\varphi.$$

Проинтегрируем второй член, стоящий под знаком интеграла, по частям, полагая $u = \sin\varphi$, $dv = \varphi[(2n\pi a)^2+\varphi^2]^{-3/2}\,d\varphi$, после чего получим

$$B_y = -2\pi n^2 a\mu I\left\{\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{[(2n\pi a)^2+\varphi^2]^{3/2}} + \int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{[(2n\pi a)^2+\varphi^2]^{1/2}}\right\}$$

Если положить $\varphi = 2n\pi a\,\mathrm{sh}\,\psi$, то второй интеграл оказывается, согласно формуле (5.444), равным $K_0(2n\pi a)$: эта величина является модифицированной функцией Бесселя второго рода, рассматривавшейся в § 34б гл. V. Очевидно, значение первого интеграла можно получить посредством дифференцирования второго интеграла по аргументу $2n\pi a$ и деления результата на $-2n\pi a$, так что в соответствии с формулой (5.444) имеем

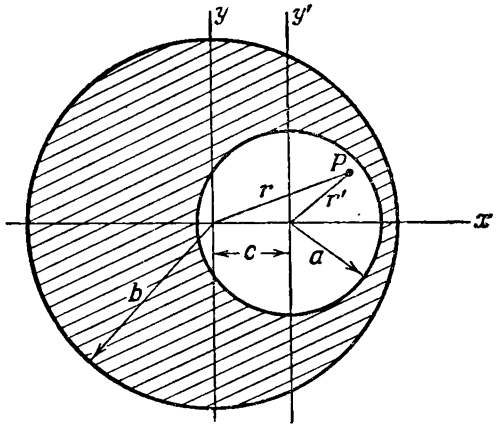
$$B_y = -n\mu I\,[2n\pi a K_0(2n\pi a) + K_1(2n\pi a)]. \qquad (7.87)$$

Если $\alpha = 0$ или $n = \infty$, то $B_y = 0$ и поле является аксиальным. При $\alpha = \pi/2$ или $n = 0$ соленоид превращается в прямолинейный провод, параллельный оси z и расположенный от нее на расстоянии a. В этом случае $B_z = 0$ и, как следует из результатов § 34а гл. V, $K_0 \to -\ln(2n\pi a)$ и $K_1 \to 1/(2n\pi a)$, откуда

$$B_y \underset{n\to 0}{\longrightarrow} -\frac{\mu I}{2\pi a},$$

что вполне согласуется с выражением (7.79).

§ 17. Поле в цилиндрической полости внутри проводящего круглого стержня. Вычисление магнитного поля, обусловленного заданным распределением плотности тока, часто сильно упрощается, если пользоваться суперпозицией известных решений. В качестве примера применения этого метода рассмотрим проводящую среду (с единичной относительной магнитной проницаемостью), заполняющую все пространство между двумя бесконечными цилиндрическими поверхностями. Найдем магнитную индукцию внутри малого цилиндра радиуса a, лежащего внутри большого цилиндра радиуса b, считая расстояние между их осями равным c (см. фиг. 71). Пусть плотность тока всюду в поперечном сечении одинакова и имеет лишь z-составляющую (i_z). В отсутствие полости значение B_θ на окружности радиуса r, проведенной через точку P, было бы постоянным и, согласно формуле (7.2), равнялось бы



Фиг. 71.

$$\mu\pi r^2 i = \oint \mathbf{B}'\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B'_\theta, \quad \text{или} \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{i}\times\mathbf{r}.$$

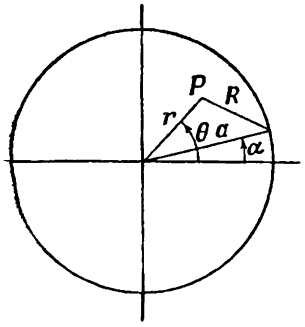
Добавление такого же выражения для тока с плотностью $-i$, протекающего только по внутреннему цилиндру, приводит к тому, что суммарная плотность тока во внутреннем цилиндре оказывается равной нулю, а магнитная индукция равной

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_v \mathbf{i} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2}\mu_v \mathbf{i} \times \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mu_v ic(\mathbf{k} \times \mathbf{i}_1) = \mathbf{j}\frac{1}{2}\mu_v ic, \tag{7.88}$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы в направлении осей x, y и z. Полный ток I равен $(\pi b^2 - \pi a^2)i$, и однородное поле в полости определяется выражением

$$B_y = \frac{\mu c I}{2\pi (b^2 - a^2)}. \tag{7.89}$$

§ 18. Поле токов, текущих вдоль цилиндрической проводящей пленки. Предположим, что в бесконечной круглой цилиндрической пленке токи текут параллельно оси z и что плотность тока $\mathbf{i}$ можно выразить через круговые поверхностные гармоники, т. е.



Фиг. 72.

$$i_z = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha). \tag{7.90}$$

Как следует из § 10, вектор-потенциал в точке P, находящейся на расстоянии R от бесконечного провода, несущего ток I, параллелен ему и равен $\left(\frac{1}{2}\mu I/\pi\right) \ln R$. Таким образом, согласно выражениям (7.8), вектор-потенциал, обусловленный всей цилиндрической пленкой (см. фиг. 72), определяется выражением

$$A_z = \frac{1}{2}\mu\pi^{-1} \int_0^{2\pi} ia \ln R \, d\alpha. \tag{7.91}$$

Но из выражения (4.18) следует

$$\ln R = \ln a - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m (\cos m\theta \cos m\alpha + \sin m\theta \sin m\alpha). \tag{7.92}$$

Подставляя выражения (7.90) и (7.92) в (7.91), получим интегралы в пределах от 0 до 2π от произведений $\cos mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$ и $\sin mx \cos nx$. Все эти интегралы (см. Двайт, 858.1 и 852.2) при $m \neq n$ обращаются в нуль. При $m = n$ интеграл от $\sin 2m\alpha = 2 \sin m\alpha \cos m\alpha$ тоже равен нулю, а от $\sin^2 m\alpha$ и $\cos^2 m\alpha$ равен π (см. Двайт, 858.4); отсюда выражение (7.91) принимает вид

$$A_z = \mu a C_0 \ln a + \frac{\mu a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta). \tag{7.93}$$

§ 19. Сила, действующая на электрический контур в магнитном поле. Из эксперимента, описанного в § 1, найдено, что силы, действующие в магнитном поле на небольшую проволочную петлю с током, являются точно такими же, как и силы, действующие в электрическом поле на электрический диполь. Мы видели также, что любой электрический контур можно рассматривать как границу сетки, каждая ячейка которой представ-

ляет собой одну из таких петель. Используя формулу (1.11), можно, таким образом, написать выражение для силы, действующей на элемент сетки dS с током I. Подставляя $\mathbf{n}I\,dS$ вместо $\mathbf{m}$ и $\mathbf{B}$ вместо $\mathbf{E}$, получим

$$d\mathbf{F} = I(\mathbf{n}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}\,dS. \tag{7.94}$$

Воспользуемся далее хорошо известным соотношением

$$\nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{n} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{n}) + (\mathbf{n}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{B}). \tag{7.95}$$

Поскольку оператор ∇ не действует на $\mathbf{n}$, первые два члена справа обращаются в нуль. Согласно соотношению (7.4), $\nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{i}$, а так как внутри петли тока нет, то $\nabla\times\mathbf{B} = 0$. Подставляя $\nabla\times\mathbf{A}$ вместо $\mathbf{B}$ [см. формулу (7.5)], получим следующее выражение для полной силы, действующей на контур:

$$\mathbf{F} = I\nabla\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\,dS = I\nabla\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\times\mathbf{A}\,dS.$$

Применим теорему Стокса (3.3) и воспользуемся опять соотношением (7.95), где заменим $\mathbf{n}$ на $\mathbf{ds}$, а $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$. Замечая, что оператор ∇ не действует на $\mathbf{ds}$, имеем

$$\mathbf{F} = I\nabla\oint \mathbf{A}\cdot\mathbf{ds} = I\oint[(\mathbf{ds}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{ds}\times(\nabla\times\mathbf{A})]. \tag{7.96}$$

Однако

$$\oint(\mathbf{ds}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \oint(\mathbf{i}dA_x + \mathbf{j}dA_y + \mathbf{k}dA_z) = 0,$$

потому что dA_x, dA_y и dA_z — полные дифференциалы, а A_x, A_y и A_z — однозначные функции. Помня, что $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$, из выражения (7.96) находим

$$\mathbf{F} = I\oint \mathbf{ds}\times\mathbf{B} \quad \text{или} \quad I\oint B\sin\theta\,ds = \oint dF, \tag{7.97}$$

где $\theta < \pi$ — угол, отсчитываемый от $\mathbf{ds}$ к $\mathbf{B}$. Если линия наблюдения перпендикулярна к $\mathbf{ds}$ и $\mathbf{B}$, а θ отсчитывается по часовой стрелке, то сила направлена в сторону от наблюдателя.

Эксперименты Ампера не приводят к однозначному закону для сил, действующих между элементами контуров. В самом деле, из выражений (7.97) и (7.77) следует, что сила взаимодействия между двумя контурами равна

$$\mathbf{F} = I\oint \mathbf{ds}\times\mathbf{B} = \mu II'\oint\oint \frac{\mathbf{ds}\times(\mathbf{ds}'\times\mathbf{r})}{4\pi r^3} = \mu II'\oint\oint \frac{\mathbf{ds}'(\mathbf{ds}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}')}{4\pi r^3} \tag{7.98}$$

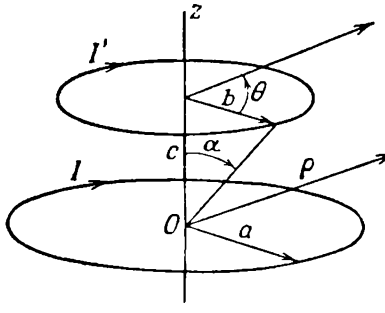
Линейный интеграл по контуру s в первом члене последнего выражения обращается в нуль, потому что $\mathbf{r}/r^3$ является градиентом скаляра $1/r$. Отсюда получаем два выражения для силы взаимодействия между элементами контуров

$$C\frac{\mathbf{ds}\times(\mathbf{ds}'\times\mathbf{r})}{r^3} \quad \text{или} \quad C\frac{\mathbf{r}(\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}')}{r^3}. \tag{7.99}$$

Сопоставляя выражения (7.77) и (7.97), нетрудно видеть, что в случае двух почти совпадающих контуров, по которым циркулируют равные и противоположно направленные токи, когда, согласно опытам Ампера, магнитное поле обращается почти в нуль, основной вклад в выражение для силы дают лишь близко расположенные элементы, для которых r мало. При этом сила оказывается направленной в сторону положительных значений r.

Следовательно, контуры отталкиваются, в результате чего появляется магнитное поле. Этот случай составляет полную противоположность случаю электрического поля, где сила взаимодействия между равными по величине и противоположными по знаку зарядами стремится их сблизить и тем самым уничтожить имеющееся электрическое поле. Таким образом, в природе энергии электрического и магнитного полей имеется коренное различие. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе, в связи с законом индукции Фарадея. Все эти формулы для сил, действующих на контуры в магнитном поле, хорошо подтверждаются экспериментально.

§ 20. Примеры на вычисление сил взаимодействия между электрическими контурами. Для двух бесконечных параллельных проводов, находящихся на расстоянии a друг от друга и несущих токи I и I', согласно выражениям (7.79) и (7.97), поскольку $\sin\theta = 1$, мы имеем



Фиг. 73.

$$\mathbf{F}_a = \frac{\mu II'}{2\pi a^2} \oint \mathbf{ds}' \times [\mathbf{s}_1 \times \mathbf{a}].$$

Отсюда, очевидно, сила отталкивания на единицу длины равна

$$F_1 = \pm \frac{\mu II'}{2\pi a}. \qquad (7.100)$$

Положительный знак берется при противоположном направлении токов I и I', а отрицательный — при одинаковом направлении их.

Вычислим теперь силу взаимодействия двух коаксиальных проволочных петель радиусов a и b, по которым протекают токи I и I', как показано на фиг. 73. Вследствие симметрии очевидно, что сила взаимодействия является силой притяжения, поэтому, согласно выражению (7.97), единственной эффективной компонентой магнитной индукции оказывается B_ρ; величина этой компоненты одинакова для всех элементов каждого из контуров. Поскольку координаты контура с током I' равны $\rho = b$, $z = c$, то сила определяется выражением

$$F = I' B_\rho(a, b, c) \int_0^{2\pi} b\, d\theta = 2\pi b I' B_\rho(a, b, c).$$

Подставляя сюда значение B_ρ из соотношения (7.53), получим

$$F = \frac{\mu II' c}{[(a+b)^2 + c^2]^{1/2}} \left[-K + \frac{(a^2+b^2+c^2)E}{(a-b)^2+c^2} \right], \qquad (7.101)$$

где, согласно выражению (7.50), модуль k равен

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2+c^2}.$$

Сила будет иметь обратное направление, если один из токов направить в противоположную сторону.

Это выражение для силы нетрудно представить в виде ряда. Действительно, объединяя выражения (7.97) и (7.72), при $c^2 + b^2 > a^2$ будем иметь

$$F = -\pi\mu II' \sin\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} \right)^{1/2n} P_n^1(\cos\alpha) P_n(0), \qquad (7.102)$$

потому что в выражении (7.72) $\cos\theta = u = 0$ и $r = a$, а в выражении (7.97) $\oint ds = 2\pi a$.

Другой более быстро сходящийся ряд можно получить следующим способом.

Если две петли имеют разные радиусы, то можно выбрать начало координат в вершине кругового конуса, проходящего через эти петли и имеющего угол раствора, равный 2β. Пусть r — радиус-вектор малой петли, s — радиус-вектор большой петли; тогда сила взаимодействия между петлями равна

$$F = 2\pi r I' \sin\beta\,(B_r \sin\beta + B_\theta \cos\beta),$$

где B_r и B_θ определены выражениями (7.72) и (7.73). Таким образом,

$$F = \pi\mu I I' \sin^3\beta \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{1}{n} P_n^1(\cos\beta)\,[nP_n(\cos\beta) - \cos\beta P_n'(\cos\beta)].$$

Суммирование начинается с $n = 2$, потому что член, соответствующий $n = 1$, равен нулю. Последнее выражение можно упростить, используя результаты § 2 гл. IV и соотношение (5.119). Заменим n на $n+1$, где $1 \leqslant n < \infty$, и учитывая, что $r/s = a/b$ при $b > a$, получим

$$F = -\pi\mu I I' \sin^2\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} P_{n+1}^1(\cos\beta)\, P_n^1(\cos\beta). \qquad (7.103)$$

§ 21. Вектор-потенциал и вектор намагниченности. Определение вектор-потенциала, данное выражением (7.9), оказалось достаточным во всех рассмотренных выше случаях, когда вся область предполагалась заполненной средой с постоянной магнитной проницаемостью. Если же μ изменяется непрерывно или имеет разрывы непрерывности, то для однозначного определения вектор-потенциала необходимо рассмотреть природу намагничивания. В § 7 гл. XII будет приведено экспериментальное подтверждение того, что намагниченность обусловливается круговыми токами или вращением электрических зарядов внутри тела. Введем вектор $\mathbf{M}$ — магнитный момент (на единицу объема), обусловленный этими токами (или спинами), и назовем его вектором намагниченности. При помощи выражения (7.49), полагая $\mu = \mu_v$ и измеряя $\mathbf{r}$ от точки наблюдения, для вектор-потенциала, описывающего поле, создаваемое намагниченностью $\mathbf{M}$, получим

$$\mathbf{A}_M = -\frac{\mu_v}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{r^3}\, dv = \frac{\mu_v}{4\pi} \int_v \mathbf{M}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv. \qquad (7.104)$$

Преобразуем это уравнение, пользуясь векторными тождествами

$$\nabla\times p\mathbf{q} = \nabla p\times\mathbf{q} + p\nabla\times\mathbf{q} \qquad (7.105)$$

и

$$\int_v \nabla\times\mathbf{M}\, dv = \int_S \mathbf{n}\times\mathbf{M}\, dS, \qquad (7.106)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к поверхности S, ограничивающей объем v. Соотношение (7.106) доказывается при помощи теоремы Остроградского—Гаусса (3.2), если подставить в нее $\mathbf{A} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, так что $\nabla\cdot(\mathbf{M}\times\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{M}$ и

$$\mathbf{a}\cdot\int_v \nabla\times\mathbf{M}\, dv = \int_S \mathbf{M}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS = \mathbf{a}\cdot\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{M}\, dS.$$

Поскольку это справедливо для произвольного вектора **a**, то отсюда вытекает справедливость соотношения (7.106). Применение соотношений (7.105) и (7.106) к выражению (7.104) дает

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A}_M = \int_V \frac{\nabla\times\mathbf{M}}{r}\,dv - \int_V \nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{r}\right)dv = \int_V \frac{\nabla\times\mathbf{M}}{r}\,dv + \int_S \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{n}}{r}\,dS. \quad (7.107)$$

При однородной намагниченности внутри рассматриваемой ограниченной области выражение (7.107) более удобно, чем (7.104), ибо в этом случае интеграл по объему в выражении (7.107) обращается в нуль. Пусть **i** — плотность истинного тока, тогда полный вектор-потенциал равен

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{i}+\nabla\times\mathbf{M}}{r}\,dv + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{n}}{r}\,dS. \quad (7.108)$$

Если заданы только распределения тока и величины магнитной проницаемости, как это и имеет место в большинстве случаев, то для применения этой формулы нужно выразить M через μ и **B**. Для этого заметим, что на больших расстояниях от замкнутых контуров конечных размеров магнитная индукция и, следовательно, намагниченность обратно пропорциональны квадрату (или более высоким степеням) r, поэтому интеграл по поверхности в выражении (7.107) исчезает. Если магнитная проницаемость μ в этой области постоянна и магнитный момент M обусловлен лишь током **i**, то вектор-потенциал должен также определяться выражением (7.9), откуда, сравнивая его с соотношением (7.108), имеем

$$\mu\mathbf{i} = \mu_0(\mathbf{i} + \nabla\times\mathbf{M}). \quad (7.109)$$

Мы определяем μ в изотропной, но не однородной среде таким образом, чтобы это уравнение оставалось в силе. При помощи его исключим $\mu\mathbf{i}$ из соотношения (7.4) и, принимая во внимание, что при постоянном значении μ окончательное уравнение должно сводиться к соотношению (7.4), а также учитывая, что в соответствии с экспериментальными данными вектор M пропорционален B и имеет одинаковое с ним направление, получим

$$\nabla\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{i} = \nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad (7.110)$$

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B}. \quad (7.111)$$

Аналогично тому, как соотношение (7.2) получается из (7.4), нетрудно вывести из (7.110) следующее соотношение:

$$\oint \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}}{\mu} = I. \quad (7.112)$$

§ 22. Граничные условия для магнитных полей и для вектор-потенциалов. В предыдущем параграфе мы определили вектор-потенциал A для тех областей, где намагниченность не является однородной, а также на поверхностях, где она терпит разрыв. Найдем граничные условия, которым должен удовлетворять вектор-потенциал A. Каждая из трех компонент A определяется скалярным выражением, аналитически совпадающим с выражением (1.8) и имеющим в случае вакуума вид

$$4\pi\varepsilon_0 V = \int_V \frac{\rho\,dv}{r} + \int_S \frac{\sigma\,dS}{r}$$

Это выражение определяет электростатический потенциал в свободном пространстве, обусловленный распределением электрических зарядов с объемной

плотностью ρ и с поверхностной плотностью σ. Из электростатики известно, что значение потенциала V_i на внутренней стороне поверхности S, определяемое этими интегралами, равно значению потенциала V_0 на внешней стороне поверхности S. Далее, применяя теорему Гаусса о потоке электрической индукции к небольшому дискообразному элементу объема, примыкающему к элементу dS поверхности и настолько тонкому, что dv можно считать пренебрежимо малым по сравнению с $(dS)^{3/2}$, после сокращения на dS получим соотношение

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_v}.$$

Таким образом, мы знаем граничные условия, которым удовлетворяют интегралы вида (1.8), а следовательно, и каждая компонента выражения (7.108). Складывая все компоненты и заменяя $1/\varepsilon_v$ на μ_v, получим

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_i \tag{7.113}$$

и, как следует из выражения (7.111),

$$\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial n} = -\mu_v(\mathbf{M}\times\mathbf{n}) = -\frac{\mu-\mu_v}{\mu}[(\nabla\times\mathbf{A}_i)\times\mathbf{n}]. \tag{7.114}$$

Если с одной стороны от границы имеется намагниченность $\mathbf{M}'$, а с другой стороны $\mathbf{M}''$, то для получения граничных условий достаточно представить себе, что граница является тонким слоем с некоторой магнитной проницаемостью, для границ которого можно написать условия (7.113) и (7.114), относя их к одной и той же нормали. Исключая затем $\mathbf{A}_0$ и $\partial\mathbf{A}_0/\partial n$, найдем

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'' \tag{7.115}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}''}{\partial n} = \mu_v[(\mathbf{M}'-\mathbf{M}'')\times\mathbf{n}]. \tag{7.116}$$

Чтобы выразить второе граничное условие через величину магнитной проницаемости, вместо $\partial/\partial n$ напишем $\mathbf{n}\cdot\nabla$ и воспользуемся соотношением

$$\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'') = \nabla[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')] - \mathbf{n}\times[\nabla\times(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')] - (\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')\cdot\nabla\mathbf{n} - (\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')\times(\nabla\times\mathbf{n}).$$

Вследствие условия (7.113) последние два члена пропадают. Заменяя $\nabla\times(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')$ на $\mathbf{B}'-\mathbf{B}''$ и используя выражение (7.5), после некоторых преобразований получим

$$\nabla[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')] = \mathbf{n}\times(\mathbf{B}'-\mu_v\mathbf{M}'-\mathbf{B}''+\mu_v\mathbf{M}'').$$

Подставляя значение $\mathbf{M}$ из соотношения (7.111), найдем

$$\nabla(A_n'-A_n'') = \mu_v\mathbf{n}\times\left(\frac{\mathbf{B}'}{\mu'}-\frac{\mathbf{B}''}{\mu''}\right).$$

Согласно условию (7.115), $A_n'-A_n''$ равно нулю на всей границе, поэтому градиент этого выражения вдоль границы также обращается в нуль. Таким образом, $\nabla(A_n'-A_n'')$ является вектором, нормальным к границе. Но правая часть вышенаписанного соотношения представляет собой вектор, направленный вдоль поверхности границы, поэтому

$$\mathbf{n}\times\left(\frac{\mathbf{B}'}{\mu'}-\frac{\mathbf{B}''}{\mu''}\right) = 0. \tag{7.117}$$

Теперь можно написать граничные условия, накладываемые на компоненты вектора $\mathbf{A}$, в системе ортогональных криволинейных координат

u_r, u_s и u_t, рассмотренных в § 4, 5 и 6 гл. III. Пусть на границе координата u_r является постоянной, тогда, согласно условию (7.115), имеем

$$A'_r = A''_r, \quad A'_s = A''_s \quad \text{и} \quad A'_t = A''_t. \tag{7.118}$$

Введем в левую часть выражения (7.117) $\nabla \times \mathbf{A}$ вместо $\mathbf{B}$, после чего, используя соотношения (3.14)—(3.16), получим

$$\frac{1}{\mu'}\left[\frac{\partial (h_{r,s} A'_{r,s})}{\partial u_{t,r}} - \frac{\partial (h_{t,r} A'_{t,r})}{\partial u_{r,s}}\right] = \frac{1}{\mu''}\left[\frac{\partial (h_{r,s} A''_{r,s})}{\partial u_{t,r}} - \frac{\partial (h_{t,r} A''_{t,r})}{\partial u_{r,s}}\right] \tag{7.119}$$

Соотношения (7.118) и (7.119) являются искомыми граничными условиями.

Чтобы получить граничные условия, накладываемые на $\mathbf{B}$, заметим, прежде всего, что, согласно условию (7.115), разность вектор-потенциалов в двух точках на границе раздела двух сред сохраняется при переходе через границу. Следовательно, производные от вектор-потенциала по обе стороны от границы, взятые в одинаковом направлении, параллельном границе, должны быть также равны между собой. Вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{A}$ лежит в касательной плоскости к границе, поэтому $\nabla \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{A}$ содержит только подобные производные. Напишем известное векторное тождество для дивергенции векторного произведения

$$\nabla \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{A} = -\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{n}. \tag{7.120}$$

При подстановке сюда $\mathbf{A}' - \mathbf{A}''$ вместо $\mathbf{A}$ последний член, согласно условию (7.115), исчезает, и мы получаем

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A}''. \tag{7.121}$$

Подставляя $\mathbf{B}$ вместо $\nabla \times \mathbf{A}$, находим

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}''. \tag{7.122}$$

Таким образом, нормальные компоненты магнитной индукции на границе раздела двух сред меняются непрерывно. Исходя из выражения (7.117), для тангенциальных компонент магнитной индукции находим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\mu'}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}') = \frac{1}{\mu''}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}''). \tag{7.123}$$

Часто оказывается возможным ввести два вектора $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$, отличающихся от $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ и являющихся более простыми. Роторы этих векторов всюду дают то же значение магнитной индукции, что и роторы $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$; однако эти векторы, как будет показано в § 5 гл. VIII, удовлетворяют вместо условия (7.115) следующим граничным условиям:

$$a'_r \neq a''_r \quad \text{и} \quad a'_{s,t} = a''_{s,t}. \tag{7.124}$$

На примере, разбираемом в следующем параграфе, будет ясно видно, что эти векторы являются более удобными при вычислении, чем $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$. Они не определяются однозначно (как $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$) при помощи интегралов типа (7.108). Мы будем называть их квазивектор-потенциалами.

§ 23. Пример использования векторов a и A. В качестве примера использования граничных условий, выведенных в предыдущем параграфе, рассмотрим бесконечный провод с током I, простирающийся в z-направлении. Пусть окружающая провод среда в области положительных значений z обладает магнитной проницаемостью μ', а в области отрицательных значений z — магнитной проницаемостью μ''. Из выражения (7.10) видно, что простейшими векторами $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$, которые удовлетворяют условию (7.119)

и не удовлетворяют условию (7.115) и роторы которых дают правильное значение $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$, являются

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{k}\left(\frac{1}{2}\pi^{-1} I\mu' \ln \rho\right) \quad \text{и} \quad \mathbf{a}'' = -\mathbf{k}\left(\frac{1}{2}\pi^{-1} I\mu'' \ln \rho\right) \tag{7.125}$$

Вектор, определяемый выражением (7.108), должен удовлетворять на границе раздела двух сред условию $\mathbf{A}' = \mathbf{A}''$. Часть объемного интеграла в выражении (7.108), содержащая I, дается выражением (7.10). К этому решению необходимо добавить другой потенциал для того, чтобы удовлетворить новому граничному условию. Рассмотрение решений (7.30), записанных в цилиндрической системе координат, показывает, что наиболее подходящей формой является форма cz/ρ. Подставляя это и вводя произвольные постоянные C_1 и C_2, мы получим

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2}\pi^{-1} I \{-\mathbf{k}\mu_v (\ln \rho + C_1) + \boldsymbol{\rho}\,[(\mu' - \mu_v)\, z\rho^{-1} + C_2]\}, \tag{7.126}$$

$$\mathbf{A}'' = \frac{1}{2}\pi^{-1} I \{-\mathbf{k}\mu_v (\ln \rho + C_1) + \boldsymbol{\rho}\,[(\mu'' - \mu_v)\, z\rho^{-1} + C_2]\}. \tag{7.127}$$

Вторые члены соответствуют значениям вектор-потенциала, даваемым интегралом (7.104). Векторы магнитной индукции $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$, получаемые из соотношений (7.126) и (7.127), совпадают с теми, которые получаются из соотношений (7.125).

§ 24. Метод изображений для токов в случае плоской границы. Сходство граничных условий для **B**, полученных в § 22 настоящей главы, с условиями для **D**, полученными в § 18 гл. I, приводит к мысли о том, что метод изображений, развитый в § 6 гл. V, можно применить и при вычислении магнитного поля, создаваемого электрическим контуром, расположенным вблизи плоской границы полупространства, заполненного средой с магнитной проницаемостью μ. Пусть граница раздела совпадает с плоскостью $z = 0$, контур расположен в области положительных значений z, а среда с проницаемостью μ — в области отрицательных значений z. Обозначим через **A** вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого одним этим контуром. По методу изображений (§ 6 гл. V) квазивектор-потенциал над границей можно представить в виде $\mathbf{A} + \mathbf{a}'$, а под границей — в виде $\mathbf{a}''$, где

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z), \tag{7.128}$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{i}C_1' f_1(x, y, -z) + \mathbf{j}C_2' f_2(x, y, -z) + \mathbf{k}C_3' f_3(x, y, -z), \tag{7.129}$$

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{i}C_1'' f_1(x, y, z) + \mathbf{j}C_2'' f_2(x, y, z) + \mathbf{k}C_3'' f_3(x, y, z). \tag{7.130}$$

Исходя из условий (7.124) при $z = 0$, получаем

$$a_z + a_z' \neq a_z'' \quad \text{и} \quad a_{x,y} + a_{x,y}' = a_{x,y}''$$

или

$$1 + C_1' = C_1'', \qquad 1 + C_2' = C_2'', \qquad 1 + C_3' \neq C_3''. \tag{7.131}$$

Граничные условия при $z = 0$ для производных, определяемые соотношением (7.119), будут удовлетворены, если положить

$$\mu(1 - C_1') = \mu_v C_1'', \quad \mu(1 - C_2') = \mu_v C_2'', \quad \mu(1 + C_3') = \mu_v C_3'' \tag{7.132}$$

Поскольку $\mathbf{a}''$ и **A** имеют одинаковую форму, получим

$$C_1' = C_2' = -C_3' = \frac{\mu - \mu_v}{\mu + \mu_v}, \qquad C_1'' = C_2'' = C_3'' = \frac{2\mu}{\mu + \mu_v}. \tag{7.133}$$

Таким образом, магнитная индукция вне среды с проницаемостью μ обусловливается как бы двумя контурами: первоначальным контуром с током I и контур-изображением с током $I' = [(\mu - \mu_0)/(\mu + \mu_0)]\, I$. Направление тока I' таково, что проекции I и I' на границу раздела сред совпадают друг с другом и по положению и по направлению. В среде с проницаемостью μ магнитную индукцию можно представить себе как обусловленную одним лишь первоначальным контуром, по которому вместо тока I циркулирует ток $I'' = 2I\mu/(\mu + \mu_0)$.

§ 25. Магнитная индукция и магнитная проницаемость в кристаллах. Сходство граничных условий для **B**, выведенных в § 22 настоящей главы, и условий для **D**, полученных в § 18 гл. I, подсказывает, что метод измерения **D** и **E**, описанный в § 19 гл. I, можно применить для **B** и μ. Вырежем в исследуемом теле небольшую дискообразную полость, толщина которой пусть будет очень малой по сравнению с ее радиусом, так что магнитная индукция в полости, вдали от ее краев, будет определяться лишь граничными условиями на плоских поверхностях. Если полость ориентировать таким образом, чтобы магнитная индукция внутри оказалась направленной нормально к плоским границам полости, то, согласно соотношению (7.122), значение **B** в полости будет равно значению **B** в среде. Вырежем теперь полость в виде длинного тонкого цилиндра. Магнитная индукция внутри нее вдали от концов будет полностью определяться граничными условиями на боковых стенках цилиндра. Если полость ориентировать таким образом, чтобы магнитная индукция оказалась направленной вдоль оси цилиндра, то, пользуясь выражением (7.123), нетрудно убедиться, что отношение $\mathbf{B}'/\mu_0$ внутри полости равно отношению $\mathbf{B}/\mu$ в среде. Эти два измерения позволяют определить **B** и μ. Если произвести этот опыт в магнитноанизотропной среде, то обнаружится, что, вообще говоря, направления **B** и **B**′ будут различными. Однако в кристалле существуют по крайней мере три такие ориентации поля, вдоль которых **B** и **B**′ совпадают по направлению. Эти направления являются магнитными осями кристалла; вдоль каждой из них величина μ может принимать разные значения. В некоторых кристаллах **B** и **B**′ имеют одинаковое направление для всех ориентаций поля в некоторой плоскости и для поля, перпендикулярного к этой плоскости. К этому вопросу мы еще возвратимся в § 3 и 4 гл. XII.

§ 26. Двухмерные магнитные поля. В прямоугольных координатах граничные условия для тангенциальной составляющей магнитостатического вектор-потенциала совпадают с условиями для электростатического скалярного потенциала, если величину ϵ заменить на $1/\mu$. В двухмерном случае, когда имеются только магнитные поля, параллельные плоскости xy, токи должны протекать лишь в z-направлении и, следовательно, вектор-потенциал может иметь только одну компоненту A_z, которая с необходимостью оказывается тангенциальной ко всем поверхностям. Если отношение μ/μ_0 очень велико, то, согласно условию (7.119), все поверхности, на которых A_z — постоянная величина, т. е. поверхности равного вектор-потенциала (эквивекторпотенциальные поверхности), будут ортогональными к границе. Таким образом, величина A_z ведет себя как электростатическая функция потока на электрической эквипотенциальной поверхности. Величина **B** вычисляется из A_z точно так же, как электрическое поле вычисляется из функции потока. Действительно, в прямоугольных координатах, где $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, пользуясь выражением (3.15) и (3.16), имеем

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \qquad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{7.134}$$

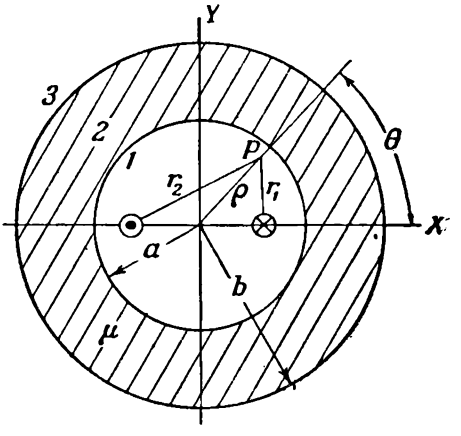
что совпадает с соотношением (4.56).

При отсутствии тока уравнение (7.7) принимает вид

$$\nabla^2 A_z = 0; \tag{7.135}$$

для решения его применимы все методы, рассмотренные в гл. IV.

§ 27. Магнитное экранирование двухпроводной линии. Для иллюстрации применения результатов предыдущего параграфа вычислим величину магнитной индукции снаружи цилиндрического экрана с внутренними и внешними радиусами a и b, имеющего проницаемость μ и окружающего два параллельных прямолинейных провода, расположенных симметрично относительно оси цилиндра и несущих противоположно направленные токи (см. фиг. 74). Очевидно, при решении этой задачи следует использовать круговые гармоники, с которыми мы имели дело в § 2 гл. IV. В § 10 гл. VII было показано, что вектор-потенциал двух противоположно направленных токов определяется выражением



Фиг. 74.

$$A_z = \frac{\mu_v I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{7.136}$$

Из соотношения (4.17), полагая там $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi$, а также $\rho_0 = c$, для $\rho > c$ получим следующие ряды:

$$\ln r_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c}{\rho}\right)^n \cos n\theta + \ln \rho,$$

$$\ln r_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c}{\rho}\right)^n (-1)^n \cos n\theta + \ln \rho.$$

Составим их разность, тогда четные члены сократятся; заменяя затем n на $2n+1$, получим

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{2n+1} \cos (2n+1)\theta. \tag{7.137}$$

Для нахождения потенциала в области, окружаемой экраном, нужно добавить к полученному выражению потенциал, обусловленный присутствием экрана и конечный в начале координат; тогда

$$A_{1z} = \frac{\mu_v I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n+1} \rho^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{2n+1} \right] \cos (2n+1)\theta. \tag{7.138}$$

В области *2*, обладающей магнитной проницаемостью μ, ρ не принимает ни нулевое, ни бесконечное значение, поэтому следует написать

$$A_{2z} = \frac{\mu_v I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (B_{2n+1} \rho^{2n+1} + C_{2n+1} \rho^{-2n-1}) \cos (2n+1)\theta. \tag{7.139}$$

Снаружи экрана потенциал должен исчезать на бесконечности

$$A_{3z}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}\,\rho^{-2n-1}\cos(2n+1)\theta. \tag{7.140}$$

Граничные условия (7.118) и (7.119) должны удовлетворяться при всех значениях θ, поэтому каждый член рядов (7.138)—(7.140) должен удовлетворять этим условиям; в результате этого после умножения на a^{2n+1} или b^{2n+1} при $\rho=a$ получаются следующие соотношения:

$$A_{2n+1}\,a^{4n+2}+\frac{1}{2n+1}\,c^{2n+1}=B_{2n+1}\,a^{4n+2}+C_{2n+1} \tag{7.141}$$

и

$$\mu A_{2n+1}\,a^{4n+2}-\frac{\mu}{2n+1}\,c^{2n+1}=\mu_0 B_{2n+1}\,a^{4n+2}-\mu_0 C_{2n+1}. \tag{7.142}$$

При $\rho=b$ получаем

$$B_{2n+1}\,b^{4n+2}+C_{2n+1}=D_{2n+1} \tag{7.143}$$

и

$$\mu_0 B_{2n+1}\,b^{4n+2}-\mu_0 C_{2n+1}=-\mu D_{2n+1}. \tag{7.144}$$

Разрешая относительно D_{2n+1}, находим

$$A_{3z}=\frac{4\mu I}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(K_m+1)^2-(K_m-1)^2\left(\frac{a}{b}\right)^{4n+2}\right]^{-1}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{c}{\rho}\right)^{2n+1}\cos(2n+1)\theta. \tag{7.145}$$

Поле снаружи экрана определяется выражениями (3.15) и (3.16), где, согласно § 6 гл. III, $h_1=1$ и $h_2=\rho$

$$B_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta},\qquad B_\theta=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}. \tag{7.146}$$

§ 28. Метод изображений для токов в двухмерных системах. Выражения для векторного потенциала поля прямолинейного тока I и для скалярного потенциала поля линейного заряда q имеют одинаковую форму. Более того, как было показано, двухмерные магнитный векторный потенциал и электростатический скалярный потенциал удовлетворяют одинаковым по форме уравнениям Лапласа и граничным условиям (если K заменить на $1/K_m$). Отсюда следует, что результаты § 5 гл. IV применимы к прямолинейному току I, параллельному оси круглого цилиндра с проницаемостью μ и радиусом a и находящемуся от этой оси на расстоянии b. Таким образом, вектор-потенциал в области вне цилиндра, обусловленный наличием последнего, является таким же, как если бы вместо цилиндра был помещен ток — изображение I', расположенный между током I и осью цилиндра (параллельно оси и на расстоянии a^2/b от нее), и ток $-I'$, протекающий вдоль оси. Вектор-потенциал внутри цилиндра оказывается таким же, как при замене тока I на ток I''. Токи I' и I'' определяются выражением (4.37), если K заменить на $1/K_m$, т. е.

$$I'=\frac{K_m-1}{K_m+1}I\quad\text{и}\quad I''=\frac{2K_m}{K_m+1}I. \tag{7.147}$$

При $K_m\to\infty$ $I'\to I$, поэтому законы изображений для токов на границах сред с большой относительной магнитной проницаемостью совпадают с законами изображений для электрических линейных зарядов в проводниках, с тем лишь важным отличием, что изображения тока имеют тот же

знак, а изображения заряда — противоположный знак. Таким образом, системы изображений, рассмотренные в § 5, 6 и 7 гл. IV, можно использовать и для токов. При этом нужно только помнить о знаках и замене K на $1/K_m$.

§ 29. Магнитодвижущая сила и напряженность магнитного поля. При изучении магнитного поля сразу же поражает наличие многих общих свойств у вектора магнитной индукции и у электрического тока. Прежде всего имеем [соотношения (6.3) и (7.1)]

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{7.148}$$

Далее, для простого замкнутого пути имеем [соотношения (6.9) и (7.112)]

$$\oint \frac{\mathbf{i} \cdot d\mathbf{s}}{\sigma} = \mathscr{E} \quad \text{и} \quad \oint \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{\mu} = I. \tag{7.149}$$

Магнитный вектор-потенциал вычисляется на основании соотношения (7.108). Совершенно ясно, что можно с таким же успехом, как это было проделано в гл. VI, провести аналогичное рассуждение и определить новую скалярную величину, подобную $\mathscr{E}$, которую будем называть магнитодвижущей силой Ω (м. д. с.). Таким образом, для замкнутого пути вокруг тока I магнитодвижущая сила равна

$$\Omega = I, \tag{7.150}$$

где I измеряется в амперах, а Ω – в ампервитках. Ввиду того, что магнитодвижущая и электродвижущая силы являются функциями многозначными, их величины зависят от выбранного пути интегрирования. Используя метод, применепный в § 2 гл. VI к $\mathscr{E}$, часто можно ввести соответствующие перегородки так, чтобы вдоль любого разрешенного замкнутого пути интеграл (7.149) обращался в нуль. В этом случае Ω приобретает характер скалярного потенциала. В простейших случаях такая перегородка известна под названием магнитного листа. Легко видеть, что в выражении (7.149) магнитная проницаемость μ играет роль проводимости σ (см. гл. VI), поэтому для магнитных контуров можно установить соотношение, аналогичное закону Ома (6.8), т. е.

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla \Omega. \tag{7.151}$$

Для градиента магнитодвижущей силы удобно ввести особое обозначение. Введенную таким образом величину, взятую с обратным знаком ($-\mathbf{H}$), мы будем называть напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Omega = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \tag{7.152}$$

В системе MKS **H** измеряется в ампервитках на метр. Выражая интеграл (7.149) через **H**, получим

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I. \tag{7.153}$$

Это соотношение не зависит от магнитной проницаемости среды. Из выражений (7.148) и (7.151) нетрудно получить соотношение, аналогичное соотношению (6.46), а именно:

$$\nabla^2 \Omega = 0. \tag{7.154}$$

Исходя из соотношений (6.3), (6.9) и (6.46), были получены условия, которым должна удовлетворять электродвижущая сила на границе двух сред с различными проводимостями. Подобным же образом можно было бы,

исходя из соотношений (7.148), (7.149) и (7.154), вывести условия, которым должна удовлетворять магнитодвижущая сила Ω на границе двух сред с различными магнитными проницаемостями. Проще, однако, обратиться к соотношениям (7.122) и (7.123) и использовать (7.152). Тогда из соотношения (7.122) найдем

$$\mu' \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} = \mu'' \mathbf{H}'' \cdot \mathbf{n}, \tag{7.155}$$

а из соотношения (7.123) получим

$$\mathbf{H}' \times \mathbf{n} = \mathbf{H}'' \times \mathbf{n} \tag{7.156}$$

или, вводя магнитодвижущую силу, имеем

$$\mu' \frac{\partial \Omega'}{\partial n} = \mu'' \frac{\partial \Omega''}{\partial n} \tag{7.157}$$

и

$$\Omega' = \Omega''. \tag{7.158}$$

Следует отметить, что магнитодвижущая сила удовлетворяет точно таким же соотношениям [см. (7.154), (7.157), (7.158)], как и электростатический потенциал [см. (3.6), (1.48) и (1.49)]. Однако она отличается от последнего тем, что является неоднозначной функцией, если в поле не создавать перегородок, препятствующих обходу по замкнутому пути вокруг любого тока; при наличии перегородок магнитодвижущая сила Ω является однозначной функцией в области вне этих перегородок, и ее можно исследовать методами электростатики. При таком ограничении величина Ω называется скалярным магнитным потенциалом; им мы будем пользоваться для получения решения магнитостатических задач по аналогии с соответствующими электростатическими решениями.

Например, для нахождения экранирующего действия сферической оболочки, внешний и внутренний радиусы которой равны b и a, а магнитная проницаемость равна μ, и которая помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, можно воспользоваться выражением (5.140). Мы видим, что поле внутри оболочки остается однородным, а величина магнитной индукции внутри оказывается равной

$$\mathbf{B}_i = \frac{9K_m \mathbf{B}}{9K_m - 2(K_m - 1)^2 (a^3 b^{-3} - 1)}. \tag{7.159}$$

Ввиду того, что соотношения (7.157) и (7.158) совпадают по форме с соотношениями (1.48) и (1.49), закон преломления магнитных силовых линий на границе двух изотропных магнитных сред, получаемый из первых соотношений, будет совпадать с законом преломления электрических силовых линий, который выводится из вторых соотношений и выражается формулой (1.51). Таким образом, на границе двух сред магнитные силовые линии резко изменяют свое направление, согласно закону

$$\mu' \operatorname{ctg} \alpha' = \mu'' \operatorname{ctg} \alpha'', \tag{7.160}$$

где α' — угол, образуемый силовой линией и нормалью к границе в среде с магнитной проницаемостью μ', а α'' — соответствующий угол в среде с магнитной проницаемостью μ''.

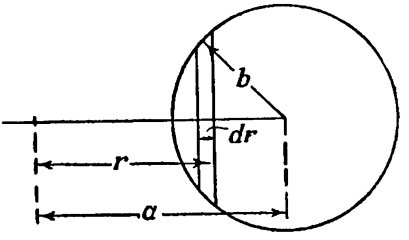
§ 30. Магнитный контур. Тор. В предыдущем параграфе была указана близкая математическая аналогия между магнитной индукцией и плотностью электрического тока. Чтобы при решении магнитостатических задач можно было пользоваться методами, развитыми в гл. VI для решения динамических задач, удобно ввести несколько новых магнитных величин.

Магнитный поток N через поверхность S соответствует электрическому току I, что видно из их определений:

$$I = \int_S \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS, \quad N = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{7.161}$$

Единицей потока в системе MKS является вебер. Магнитное сопротивление R' между двумя точками в контуре соответствует электрическому сопротивлению; они определяются аналогичными соотношениями:

$$R_{AB} = \frac{\mathscr{E}_{AB}}{I_{AB}}, \quad R'_{AB} = \frac{\Omega_{AB}}{N_{AB}}. \tag{7.162}$$



Фиг. 75.

Для иллюстрации расчета таких контуров найдем поток в торе, который имеет магнитную проницаемость μ и на который намотано n витков провода, несущего ток I. Пусть радиус сечения тора равен b, а расстояние от центра этого сечения до оси тора равно a. Из определения (7.150) следует, что магнитодвижущая сила для замкнутого пути вдоль тора (от 0 до 2π) равна nI. Поскольку, вследствие симметрии, величина H не зависит от θ, то магнитодвижущая сила на отрезке пути, заключенном между 0 и θ, будет пропорциональна θ, т. е.

$$\Omega = \frac{nI\theta}{2\pi}. \tag{7.163}$$

Согласно выражению (7.152), имеем

$$H_\theta = -\frac{\partial\Omega}{r\partial\theta} = -\frac{In}{2\pi r}.$$

Таким образом, при заданном значении r величина H_θ является постоянной и тор можно разбить на ряд цилиндрических слоев, как это показано на фиг. 75, не изменяя его магнитного сопротивления. Магнитное сопротивление одного такого слоя будет равно

$$dR' = \frac{\text{Длина}}{\mu\cdot\text{Площадь}} = \frac{2\pi r}{\mu a\,dS}.$$

Но $dS = 2[b^2-(a-r)^2]^{1/2}\,dr$, и ввиду того, что эти слои соединяются параллельно, имеем

$$\frac{1}{R'} = \int\frac{1}{dR'} = \frac{\mu}{\pi}\int_{a-b}^{a+b}\frac{[b^2-(a-r)^2]^{1/2}}{r}\,dr.$$

Интегрируя (см. Пайерс, 187) и подставляя пределы, получаем

$$\frac{1}{R'} = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)\pi\,[a-(a^2-b^2)^{1/2}].$$

Пользуясь выражением (7.162), найдем поток внутри тора

$$N = \frac{\Omega}{R'} = \mu nI\,[a-(a^2-b^2)^{1/2}]. \tag{7.164}$$

§ 31. Магнитный контур с воздушным зазором. Очевидно, что в случае непрерывного магнитопровода с высокой магнитной проницаемостью и достаточно большой всюду площадью поперечного сечения магнитный поток в контуре будет почти полностью сконцентрирован внутри магнитопровода.

Однако если в этом магнитопроводе имеется разрыв, то поток, проходя через зазор, распределится таким образом, что магнитодвижущая сила будет удовлетворять всюду уравнению (7.154), а на границе зазора — условиям (7.157) и (7.158). Если магнитная проницаемость среды μ'' очень велика по сравнению с магнитной проницаемостью зазора μ', то, как следует из соотношения (7.160), $\alpha' \to 0$ и силовые линии в зазоре подходят перпендикулярно к границе среды. В случае, когда произведение μ' на часть длины пути магнитного контура, лежащую в среде с высокой магнитной проницаемостью, мало по сравнению с произведением μ'' на длину воздушного зазора, можно практически считать полное магнитное сопротивление сосредоточенным в зазоре при условии, что поперечное сечение магнитной среды нигде не является слишком малым. Это имеет место, например, для многих электрических машин. Если поверхности, ограничивающие зазор, параллельны и их площадь A велика по сравнению с расстоянием d между ними, то поле в зазоре можно считать однородным и краевым эффектом пренебречь; тогда магнитное сопротивление зазора равно d/A.

Для получения строгого решения в других случаях следует пользоваться вектор-потенциалом или непосредственно вектором магнитной индукции, используя закон Био и Савара, а также граничные условия, рассмотренные в § 22. Этот путь, однако, часто бывает сопряжен с длительными математическими вычислениями, что не оправдывается требуемой на практике точностью. В таких случаях достаточно точный результат можно получить и при помощи скалярного магнитного потенциала, применяя методы, развитые в гл. IV и V. Как уже упоминалось в § 29, при этом возникает необходимость создавать искусственные перегородки обычно где-нибудь в той части магнитного контура, которая обладает большой магнитной проницаемостью. При большой магнитной проницаемости мы приписываем потенциалу в этой части среды одно значение с одной стороны от перегородки и другое значение—с другой стороны. Когда конфигурация системы позволяет расположить перегородку вдали от зазора, вносимая при этом ошибка ничтожно мала.

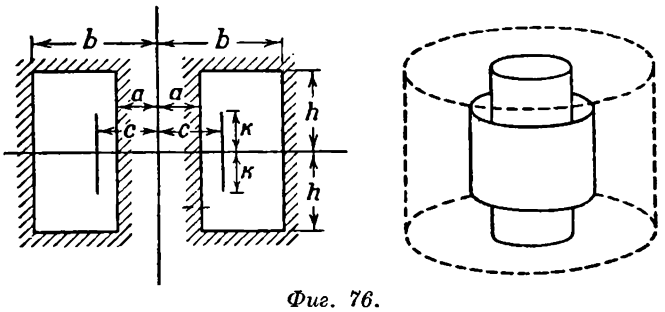
§ 32. Поле в трансформаторе броневого типа. В качестве примера нахождения приближенного решения путем введения предположения о бесконечной магнитной проницаемости вычислим поле тока, протекающего в проводе, намотанном в виде тонкого симметрично расположенного цилиндрического слоя на цилиндрическом сердечнике броневого трансформатора. Напишем уравнение стенок, образующих «окно» трансформатора, в цилиндрических координатах в виде $z = -h$, $z = +h$, $\rho = a$ и $\rho = b$. Равномерная плотная обмотка, намотанная на каркасе $\rho = c$ в пределах от $z = -k$ до $z = +k$, имеет n витков на единицу длины, по которым течет ток I. Эту обмотку можно рассматривать как одиночную однородную оболочку с полным током $I_0 = 2nIk$, обтекающим сердечник параллельно плоскости z, как показано на фиг. 76. Найдем магнитную индукцию в «окне». В силу симметрии вектор-потенциал будет иметь лишь одну компоненту A_φ. Из § 6 следует, что в цилиндрических координатах решение содержит либо обычные, либо модифицированные функции Бесселя. В первом случае применимы методы, изложенные в § 30з и 30и гл. V (окончательные результаты приведены в задачах 31 и 32 в конце этой главы).

Пользуясь методом, рассмотренным в § 37 гл. V, найдем решение, содержащее модифицированные функции Бесселя. Если A имеет лишь φ-компоненту, величина которой не зависит от φ, то решение получается из выражения (7.26), где следует положить $n = 0$ и $\delta = \pi/2$. Поскольку

$\rho=0$ и $\rho=\infty$ находятся вне рассматриваемой области, то нельзя исключить ни $I_1(k\rho)$, ни $K_1(k\rho)$, т. е. решение запишется в виде

$$A_\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m I_1\left(\frac{m\pi\rho}{h}\right)+D_m K_1\left(\frac{m\pi\rho}{h}\right)\right]\cos\frac{m\pi z}{h}, \tag{7.165}$$

где учтено, что $B_\rho=-\partial A_\varphi/\partial z$ обращается в нуль при $z=\pm h$, а также принята во внимание симметрия относительно плоскости $z=0$. В дальнейшем



Фиг. 76.

удобно пользоваться следующими обозначениями [см. формулы (5.441), (5.442)]:

$$R_1(m, s, t)=K_0\left(\frac{m\pi s}{h}\right)I_1\left(\frac{m\pi t}{h}\right)+I_0\left(\frac{m\pi s}{h}\right)K_1\left(\frac{m\pi t}{h}\right), \tag{7.166}$$

$$R_0(m, s, t)=\frac{h}{m\pi t}\frac{\partial(tR_1)}{\partial t}=K_0\left(\frac{m\pi s}{h}\right)I_0\left(\frac{m\pi t}{h}\right)-I_0\left(\frac{m\pi s}{h}\right)K_0\left(\frac{m\pi t}{h}\right). \tag{7.167}$$

Легко видеть, что

$$R_0(m, s, s)=0. \tag{7.168}$$

Обозначим вектор-потенциал при $a<\rho<c$ через A'_φ и при $c<\rho<b$ через A''_ρ. Тогда три из четырех остающихся граничных условий запишутся в виде

$$A'_\varphi=A''_\varphi, \quad \text{если} \quad \rho=c,$$

$$B'_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A'_\varphi)}{\partial\rho}=0, \quad \text{если} \quad \rho=a, \tag{7.169}$$

$$B''_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A''_\varphi)}{\partial\rho}=0, \quad \text{если} \quad \rho=b. \tag{7.170}$$

Из выражений (7.167) и (7.168) очевидно, что все эти условия будут удовлетворены, если положить

$$A'_\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C_m R_1(m, b, c)\,R_1(m, a, \rho)\cos\frac{m\pi z}{h}, \tag{7.171}$$

$$A''_\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C_m R_1(m, a, c)\,R_1(m, b, \rho)\cos\frac{m\pi z}{h}. \tag{7.172}$$

Определим C_m из граничного условия на поверхности катушки. Для получения этого граничного условия заметим, что линейный интеграл вдоль пути, окружающего витки и расположенного между $z=0$ и $z=z$, не зависит от величины индуцированной намагниченности и что для пути $\rho=c$, плотно

примыкающего к стенке цилиндра, этот интеграл, согласно формуле (7.2), равен

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^z (B'_z - B''_z)_{\rho=c}\, dz = \mu_v n I z.$$

Дифференцируя полученный результат по z, находим

$$(B'_z - B''_z)_{\rho=c} = \mu_v n I, \quad \text{если} \quad -k < z < +k, \tag{7.173}$$

$$(B'_z - B''_z)_{\rho=c} = 0, \quad \text{если} \quad k < |z| < h. \tag{7.174}$$

Из выражений (7.169)—(7.172) получаем

$$B'_z - B''_z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} C_m [R_0(m, a, c) R_1(m, b, c) - R_1(m, a, c) R_0(m, b, c)] \cos \frac{m\pi z}{h},$$

что при помощи соотношения (5.412) сводится к следующему:

$$B'_z - B''_z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{c} R_0(m, a, b) \cos \frac{m\pi z}{h}.$$

Для определения C_m умножим обе части этого выражения на $\cos(q\pi z/h)\,dz$ и проинтегрируем в пределах от $-h$ до $+h$. Все члены справа (см. Двайт, 858.2) пропадают, за исключением того, для которого $m = q$. Из соотношений (7.173) и (7.174) видно, что интеграл слева равен нулю для всех значений z, кроме $-k < z < +k$, отсюда

$$\mu_v n I \int_{-k}^{+k} \cos \frac{m\pi z}{h}\, dz = \frac{2\mu_v n I h}{m\pi} \sin \frac{m\pi k}{h} = C_m \frac{h}{c} R_0(m, a, b).$$

Разрешая это относительно C_m и подставляя в выражения (7.171) и (7.172), получаем

для $a < \rho < c$

$$A'_\varphi = \frac{2\mu_v n I c}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{R_1(m, b, c) R_1(m, a, \rho)}{R_0(m, a, b)} \sin \frac{m\pi k}{h} \cos \frac{m\pi z}{h}, \tag{7.175}$$

для $c < \rho < b$

$$A''_\varphi = \frac{2\mu_v n I c}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{R_1(m, a, c) R_1(m, b, \rho)}{R_0(m, a, b)} \sin \frac{m\pi k}{h} \cos \frac{m\pi z}{h}. \tag{7.176}$$

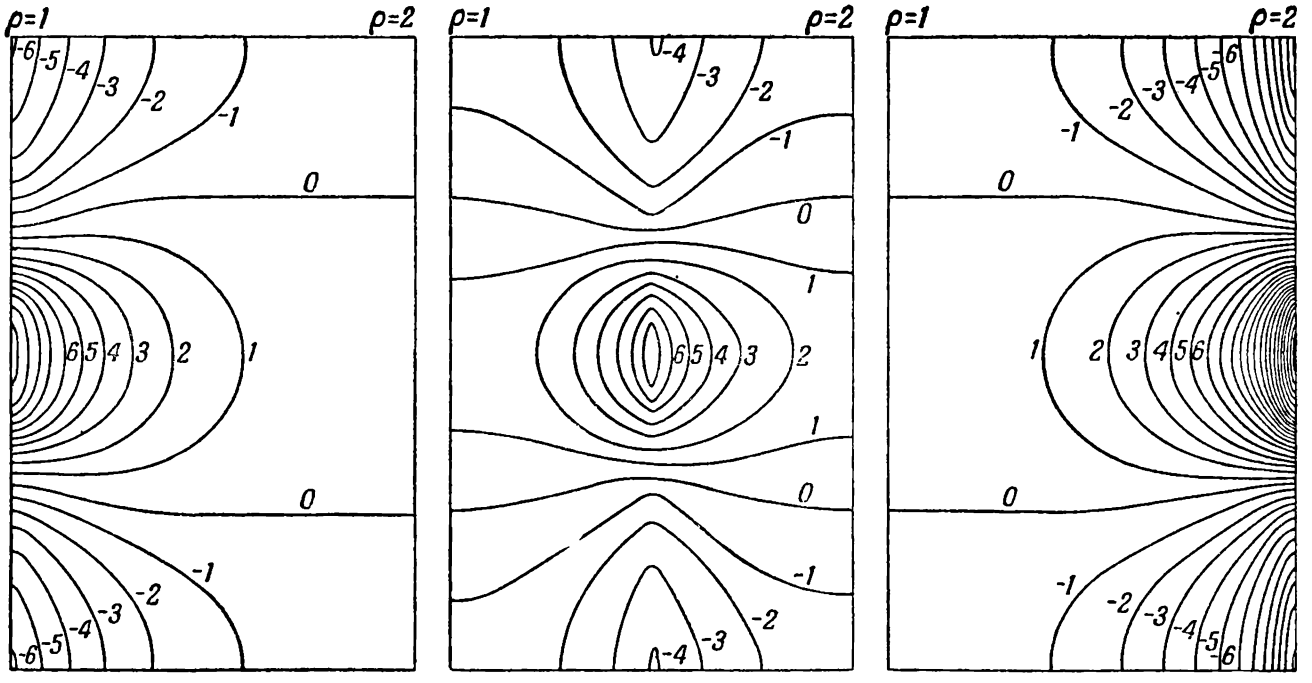
Согласно выражению (7.43) уравнение силовой трубки имеет вид

$$N = 2\pi\rho A_\varphi. \tag{7.177}$$

В случае соприкосновения катушки с внутренним сердечником $a = c$ и вектор-потенциал внутри «окна» трансформатора равен A''_φ. При соприкосновении катушки с внешней стенкой $c = b$ и вектор-потенциал внутри «окна» трансформатора будет равен A'_ρ. В обоих случаях выражения (7.175) и (7.176) значительно упрощаются, поскольку в силу соотношений (5.412) и и (5.440)

$$R_1(m, s, s) = \frac{h}{m\pi s}. \tag{7.178}$$

Выражения (7.175) и (7.176) показывают, что если обмотка занимает всю высоту окна ($h = k$), поток рассеяния будет отсутствовать, так как магнитная проницаемость железа предполагается бесконечной. На фиг. 77,*а*, *б* и *в*

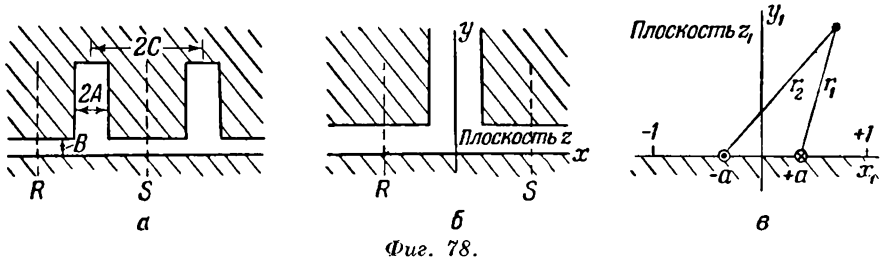


Фиг. 77. Линии индукции потока рассеяния в плоскости сечения окна трансформатора броневого типа, изображенного на фиг. 76.

а—обмотка расположена при $\rho=1$, *б*—обмотка расположена при $\rho=1{,}5$, *в*—обмотка расположена при $\rho=2$. Кривые вычислены по формулам (7.175)—(7.177) при $a=1$, $b=2$, $h=\frac{1}{4}\pi$, $k=\frac{1}{16}\pi$, $\mu=\infty$, $\mu_0 nI=10$.

изображен поток рассеяния при расположении катушки во внутреннем сердечнике, в середине «окна» и у внешней стенки. В каждом случае число ампервитков предполагается одним и тем же, а обмотка — расположенной в пределах от $z = -h/4$ до $z = +h/4$.

§ 33. Полюс с расщепленным наконечником. Эффективный воздушный зазор. Предположим, что в одной из плоских границ воздушного зазора, ширина которого равна B, проделаны два параллельных паза шириной $2A$, расстояние между серединами которых равно $2C$. Если $C - A$ велико по сравнению с B, то на поле вблизи одного из пазов наличие другого паза не оказывает практически никакого влияния, поэтому поле вблизи каждого паза можно вычислять совершенно независимо. Пусть глубина паза велика по сравнению с его шириной, тогда влиянием на поле со стороны дна паза можно пренебречь и считать паз бесконечно



Фиг. 78.

глубоким. Таким образом, участок RS на фиг. 78, *а* можно рассматривать как участок RS на фиг. 78, *б*, где внешние границы простираются до бесконечности. Пусть магнитная проницаемость материала настолько велика, что м. д. с. полностью падает в воздушном зазоре, как это упоминалось в § 31. Отверстие паза имеет форму многоугольника с нулевыми внутренними углами при $x = \pm\infty$ и углами $3\pi/2$ при $x = \pm A$, $y = B$. Таким образом, обратное преобразование Шварца переведет эту границу в действительную ось на плоскости z_1. Пусть вершины углов, равных $3\pi/2$, переходят в точки $x_1 = \pm 1$, тогда углы, равные нулю, перейдут в точки $x_1 = \pm a$, где $a^2 < 1$. Согласно выражению (4.85), точки на плоскостях z и z_1 связаны между собой соотношением

$$\frac{dz}{dz_1} = C' \frac{(z_1^2 - 1)^{1/2}}{z_1^2 - a^2}. \tag{7.179}$$

Магнитная цепь в плоскости z_1, сечение которой показано на фиг. 78, *в*, представляет собой двухпроводную линию, рассмотренную в § 10. Поскольку магнитное сопротивление той части цепи, которая находится под осью x_1, равно нулю, вектор-потенциал над осью x_1 равен удвоенному выражению (7.44), т. е.

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \tag{7.180}$$

что, согласно выражению (4.62), является действительной частью функции

$$W = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{a + z_1}{a - z_1}. \tag{7.181}$$

Прежде чем определить W в плоскости z, следует проинтегрировать соотношение (7.179). В результате получим

$$z = C' \int \frac{dz_1}{(z_1^2 - 1)^{1/2}} + C'(a^2 - 1) \int \frac{dz_1}{(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - 1)^{1/2}}.$$

В первом интеграле выпишем в явном виде j и воспользуемся формулой (320.01) из справочника Двайта, а во втором интеграле положим $z_1 = au(u^2-1)^{-1/2}$ и применим формулу (200.01) из справочника Двайта. Заменив C' на jC, можно написать эти интегралы в нескольких эквивалентных формах, причем правильность знака в каждой из этих форм должна быть проверена путем дифференцирования и сравнения с выражением (7.179). Эти формулы следующие:

$$z = C \arcsin z_1 + C\frac{(1-a^2)^{1/2}}{a} \operatorname{ar\,sh}\left\{\frac{1-a^2}{(a/z_1)^2-1}\right\}^{1/2} \tag{7.182а}$$

$$z = C \arcsin z_1 + jC\frac{(1-a^2)^{1/2}}{a} \arcsin\left\{z_1\left[\frac{1-a^2}{z_1^2-a^2}\right]^{1/2}\right\}, \tag{7.182б}$$

$$z = \frac{\pi}{2}C + jC \operatorname{ar\,ch} z_1 + jC\frac{(1-a^2)^{1/2}}{a} \arcsin\left\{\frac{1-a^2}{1-(a/z_1)^2}\right\}^{1/2} \tag{7.182в}$$

$$z = C \arcsin z_1 + jC\frac{\pi(1-a^2)^{1/2}}{2a} + C\frac{(1-a^2)^{1/2}}{a} \operatorname{ar\,ch}\left\{\frac{1-a^2}{1-(a/z_1)^2}\right\}^{1/2} \tag{7.182г}$$

Если $z_1 > 1$, то $x = +A = \frac{1}{2}C\pi$ из соотношения (7.182в), откуда $C = 2A/\pi$, а если $1 > z_1 > a$, то $y = B = \frac{A}{a}(1-a^2)^{1/2}$ из соотношения (7.182г), откуда $a = A(A^2+B^2)^{-1/2}$. Согласно выражению (7.181) (см. Двайт, 702), имеем

$$W = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{1+(z_1/a)}{1-(z_1/a)} = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\operatorname{ar\,th}\frac{z_1}{a}, \quad \text{или} \quad z_1 = a\operatorname{th}\frac{\pi W}{2\mu_0 I}. \tag{7.183}$$

Тогда (см. Двайт, 650.08)

$$\frac{z_1}{(z_1^2-a^2)^{1/2}} = \operatorname{sh}\frac{\pi W}{2\mu_0 I}$$

После подстановки этого выражения в соотношение (7.182в) получим

$$z = \frac{2}{\pi}\left\{A \arcsin\left[\frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}}\operatorname{th}\frac{\pi W}{2\mu_0 I}\right] + B \operatorname{ar\,sh}\left[\frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}\operatorname{sh}\frac{\pi W}{2\mu_0 I}\right]\right\}. \tag{7.184}$$

В нашем распоряжении имеются эквивалентные формы записи функции преобразования (7.182б), (7.182в) и (7.182г). Для учета влияния паза на величину магнитного сопротивления воздушного зазора следует вычислить поток на участке между R и S при наличии паза и в его отсутствие. Из выражения (7.183) следует, что точкам действительной оси соответствуют действительные значения W. Для больших значений $U = A_z$ на оси x, что имеет место, когда величина $C-A$ значительно больше B, мы имеем

$$\operatorname{th}\frac{\pi A_z}{2\mu_0 I} \to 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}\frac{\pi A_z}{2\mu_0 I} \to \frac{1}{2}e^{\pi A_z/(2\mu_0 I)}$$

и, поскольку $\arcsin[A/(A^2+B^2)^{1/2}] = \operatorname{arc\,tg}(A/B) = (\pi/2) - \operatorname{arc\,tg}(B/A)$, выражение (7.184) можно написать в виде

$$x = A + \frac{2}{\pi}\left\{-A \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A} + B \operatorname{ar\,sh}\left[\frac{B}{2(A^2+B^2)^{1/2}}e^{\pi A_z/(2\mu_0 I)}\right]\right\},$$

или

$$A_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\ln\left\{\frac{2}{B}(A^2+B^2)^{1/2}\operatorname{sh}\left[\frac{\pi(x-A)}{2B} + \frac{A}{B}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A}\right]\right\}$$

и, в случае $(x-A) \gg B$,

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right) + \frac{2\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{A}{B}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A} + \frac{(x-A)\pi}{2B}\right]. \qquad (7.185)$$

Так как в начале координат $A_z = 0$ [см. выражение (7.181)], то его значение в любой точке x, согласно соотношениям (7.134), равно

$$A_z = \int_0^x \frac{\partial A_z}{\partial x}\,dx = -\int_0^x B_y\,dx.$$

Этот интеграл представляет собой магнитный поток, выходящий из нижней плоскости на участке от $x=0$ до $x=C$. Для создания на этом же участке такого же магнитного потока в отсутствие паза (т. е. когда $A'=0$), но при прежнем значении магнитодвижущей силы, ширина воздушного зазора B' должна быть выбрана равной

$$B' = \frac{\mu_0 I\,(A+C)}{A_z} = \frac{\pi\,(A+C)\,B}{\pi C + 2A\operatorname{arc\,tg}\,(B/A) + B\ln\left[1+(A/B)^2\right]}. \qquad (7.186)$$

Таким образом, зазор шириной B' при отсутствии пазов обладает таким же магнитным сопротивлением, как и зазор шириной B при наличии пазов, если ширина последних равна $2A$, а расстояние между ними равно $2C$.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что магнитная индукция в центре проволочной петли, по которой протекает ток и которая имеет форму правильного плоского многоугольника с $2n$ сторонами и расстоянием $2a$ между параллельными сторонами, равна

$$\frac{\mu n I}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2n},$$

где I — ток в петле.

2. Провод протянут по окружности радиуса a всюду, за исключением дуги с углом 2φ, где он следует вдоль хорды. Образованная таким образом проволочная петля подвешивается в точке, противоположной центру хорды, так, что плоскость петли при этом оказывается перпендикулярной к другому прямолинейному проводу, проходящему через ее центр. Показать, что если токи в петле и в проводе равны i и i', то момент, действующий на петлю, равен

$$\frac{\mu i i' a}{\pi}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

3. Провод образует плоскую спираль, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = R\theta/(2\pi N)$, где N — число всех витков, а R — радиус-вектор, проведенный из центра к наружному концу спирали. Показать строго, что при протекании по спирали тока I аксиальная составляющая магнитной индукции вдоль оси на расстоянии z от плоскости спирали равна

$$\frac{\frac{1}{2}\mu N I}{R}\left(-R\,(R^2+z^2)^{-1/2} + \ln\left\{\left[R+(R^2+z^2)^{1/2}\right]z^{-1}\right\}\right).$$

4. Плоскость круглой проволочной петли радиуса b, по которой протекает ток i, образует с однородным магнитным полем B угол β. Показать, что если внутрь петли поместить концентрично шар радиуса a, обладающий магнитной проницаемостью μ, то действующий момент возрастет на величину

$$\frac{K_m - 1}{K_m + 2}\,2\pi B i a^3 b^{-1}\cos\beta.$$

5. Две проводящие полосы шириной A располагаются параллельно на расстоянии B друг от друга, образуя противоположные стороны прямоугольной призмы. По этим полосам протекает один и тот же ток I в противоположных направлениях. Показать,

что при равномерном распределении тока сила отталкивания между полосами равна (на единицу длины)

$$\mu I^2(\pi A^2)^{-1}\left\{A\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}-\frac{1}{2}B\ln\left(\frac{A^2+B^2}{B^2}\right)\right\}$$

6. Электродинамометр состоит из двух квадратных проволочных петель, длина стороны каждой из которых равна a; одна из петель может вращаться вокруг оси, проходящей через середину противоположных сторон обеих петель. Считая петли пересекающимися на этой оси, показать, что момент, действующий на подвижную петлю в том положении, когда она образует с неподвижной петлей угол $\pi/2$, равен

$$\frac{\mu I^2 a}{2\pi}\left\{2^{1/2}(3^{1/2}-1)+2\ln\left[\frac{5^{1/2}(1+2^{1/2})}{1+6^{1/2}}\right]+4\operatorname{arc\,ctg}(6^{1/2}\cdot 2)-2\arccos\frac{1}{5}\right\},$$

где I — ток, протекающий по обеим петлям.

7. Два круглых цилиндра, по каждому из которых в z-направлении протекает равномерно распределенный ток $\frac{1}{2}I$, расположены так, что их оси имеют координаты $x=+c$ и $x=-c$. Эти цилиндры находятся внутри круглой цилиндрической оболочки с осью, проходящей через точку $x=0$; по оболочке протекает в противоположном направлении равномерно распределенный ток I. Показать, что сила, направленная к центру и действующая на один из внутренних цилиндров, равна $\mu I^2/(16\pi c)$.

8*. Показать, что в любой точке вдоль силовой линии вектор-потенциал, описывающий поле тока, протекающего по окружности, обратно пропорционален расстоянию между центром окружности и основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость, в которой расположена окружность. Пользуясь этим свойством, начертить линии постоянного вектор-потенциала.

9*. Ток i течет в контуре, имеющем форму эллипса, длина которого l, а площадь A. Показать, что магнитная индукция в центре равна $\frac{1}{4}\mu il/A$.

10*. Ток i протекает по окружности радиуса a, а ток i' — в очень длинном прямом линейном проводе, лежащем в той же плоскости. Показать, что сила взаимного притяжения между ними равна

$$\mu ii'(\sec\alpha-1),$$

где 2α — угол, под которым видна окружность из ближайшей к окружности точки прямолинейного провода.

11*. Две проволочные петли с радиусами a и b, имеющие общий центр, могут свободно вращаться вокруг изолированной оси, являющейся общим диаметром обеих петель. Показать, что при протекании по петлям токов i и i' для удержания плоскостей петель под прямым углом требуется приложить момент

$$\frac{1}{2}\pi\mu\frac{b^2}{a}\left(1-\frac{9}{16}\frac{b^2}{a^2}\right)ii'$$

При этом отношение b/a предполагается настолько малым, что величиной $(b/a)^4$ можно пренебречь.

12*. Токи i и i' протекают по квадратным петлям, длина стороны каждой из которых равна a; стороны взаимно параллельны, а плоскости петель расположены под прямым углом к прямой длиной c, соединяющей центры петель. Показать, что петли притягиваются с силой

$$\frac{2\mu ii'}{\pi}\left\{\frac{c(2a^2+c^2)^{1/2}}{a^2+c^2}+1-\frac{a^2+2c^2}{c(a^2+c^2)^{1/2}}\right\}$$

13*. Ток i протекает в прямоугольной петле со сторонами длиной $2a$ и $2b$; петля может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через ее центр и параллельной сторонам длиной $2a$. Другой ток i' течет в длинном прямолинейном проводе, параллельном оси и расположенном от нее на расстоянии d. Доказать, что для удержания петли в положении, при котором плоскость петли образует угол φ с плоскостью, проходящей через центр петли и прямолинейный провод, требуется приложить к петле момент

$$\frac{2\mu ii'abd(b^2+d^2)\sin\varphi}{\pi(b^4+d^4-2b^2d^2\cos 2\varphi)}.$$

14*. Круглая проволочная петля радиуса a концентрична сферической оболочке из мягкого железа (внутренний радиус оболочки b, внешний радиус c). Показать, что при протекании по петле постоянного тока I наличие железной оболочки приводит к возрастанию числа линий магнитной индукции, пронизывающих петлю, приблизительно на величину

$$\frac{\pi I a^4 \mu_v (K_m-1)(K_m+2)(c^3-b^3)}{2b^3[(K_m+2)(2K_m+1)c^3-2(K_m-1)^2 b^3]}.$$

15*. В железе, заполняющем все пространство и имеющем магнитную проницаемость μ, вырезана круглая цилиндрическая полость. Внутри полости параллельно ее оси проходит провод, по которому течет постоянный ток I. Доказать, что провод притягивается к ближайшей стенке полости с силой (на единицу длины)

$$\frac{\mu_v I^2 (K_m-1)}{2\pi d (K_m+1)},$$

где d — расстояние между проводом и его электростатическим изображением в полости.

16*. Показать, что при наличии в среде с магнитной проницаемостью μ однородного магнитного поля можно удалить любую шаровую область и поместить в образовавшуюся полость (концентрично) шар с магнитной проницаемостью μ_1 и сферическую оболочку с магнитной проницаемостью μ_2, не исказив внешнего поля, при условии, что $\mu_1 \gtrless \mu \gtrless \mu_2$ и что выбрано соответствующее отношение объемов шара и оболочки. Доказать также, что поле внутри шара однородно, а его напряженность больше или меньше напряженности внешнего поля в зависимости от того, больше или меньше μ по сравнению с μ_1.

17*. Шар радиуса a, изготовленный из мягкого железа, помещен в однородное магнитное поле, параллельное оси z. Показать, что силовые линии вне шара располагаются на поверхностях вращения, уравнения которых имеют вид

$$\left\{1+\frac{2(K_m-1)}{K_m+2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right\}(x^2+y^2)=\text{const},$$

где r — расстояние от центра шара.

18*. Шар из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ помещается в магнитное поле, скалярный потенциал которого является однородным полиномом степени n относительно x, y, z. Показать, что скалярный потенциал внутри шара равен первоначальному значению, умноженному на $(2n+1)/(nK_m+n+1)$.

19*. Показать, что если вместо шара, описанного в предыдущей задаче, поместить оболочку с радиусами a, b, то поле внутри полости изменится в отношении

$$(2n+1)^2 K_m : (nK_m+n+1)(nK_m+n+K_m)-n(n+1)(K_m-1)^2\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}$$

20*. Бесконечно длинный полый железный цилиндр с магнитной проницаемостью μ, внутренний и внешний радиусы которого равны a и b, помещается в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к образующим цилиндра. Показать, что число линий индукции, пронизывающих область, занимаемую цилиндром, изменяется при помещении цилиндра в поле в отношении

$$b^2(K_m+1)^2-a^2(K_m-1)^2 : 2K_m[b^2(K_m+1)-a^2(K_m-1)].$$

21. В сплюснутой сфероидальной пленке $\zeta=\zeta_0$ ток имеет зональное распределение, так что между $\xi=1$ и $\xi=\xi_0$ функция распределения тока $\psi(\xi_0)=\sum C_n P_n(\xi_0)$. Используя полученный в § 11 интеграл, вычисляемый по формулам § 28д гл. V, показать, что при $\zeta<\zeta_0$ вектор-потенциал поля этого тока равен

$$-\varphi\mu I (1+\zeta_0^2)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n(n+1)}Q_n^1(j\zeta_0)P_n^1(j\zeta)P_n^1(\xi).$$

22. Пользуясь предыдущей задачей, показать, что для области $\zeta<\zeta_0$ вектор-потенциал, описывающий поле тока I, циркулирующего в проволочной петле ζ_0, ξ_0, выражается формулой

$$-\varphi\frac{1}{2}\mu I (1+\zeta_0^2)^{1/2}(1-\xi_0^2)^{1/2}\sum n^{-2}(n+1)^{-2}(2n+1)Q_n^1(j\zeta_0)P_n^1(\xi_0)P_n^1(j\zeta)P_n^1(\xi).$$

Получить результат для области $\zeta>\zeta_0$.

23. Показать, что если сфероид, описанный в задаче 21, является не сплюснутым, а вытянутым, то в области $\eta < \eta_0$

$$A = -\varphi\mu (\eta_0^2 - 1)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n(n+1)} Q_n^1(\eta_0) P_n^1(\eta) P_n^1(\xi).$$

24. Вытянутые сфероидальные координаты проволочной петли, по которой циркулирует ток I, равны ξ_0, η_0. Показать, что вектор-потенциал поля этой петли равен

$$-\varphi \frac{1}{2} \mu I [(\eta_0^2 - 1)(1 - \xi_0^2)]^{1/2} \sum n^{-2} (n+1)^{-2} (2n+1) P_n^1(\xi_0) Q_n^1(\eta_0) P_n^1(\eta) P_n^1(\xi).$$

25. Пусть в систему, описанную в предыдущей задаче, вносится вытянутый сфероид, обладающий магнитной проницаемостью μ. Показать, что если поверхность этого сфероида задана в виде $\eta = \eta_1$, то изменение вектор-потенциала в области $\eta > \eta_1$, обусловленное внесением сфероида, равно

$$-\varphi \frac{\mu_v I}{2} (K_m - 1)(\eta_0^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_0^2)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{P_n^1(\xi_0) Q_n^1(\eta_0) P_n^1(\eta_1) P_n(\eta_1) Q_n^1(\eta) P_n^1(\xi)}{Q_n^1(\eta_1) f_n(\eta_1) - K_m Q_n(\eta_1) f_n^1(\eta_1)}.$$

26. Показать, что вектор-потенциал, обусловленный током I, протекающим в плоской проволочной петле радиуса a, расположенной в плоскости $z = 0$, определяется в области $\rho > a$ формулой

$$A_\varphi = \mu a I \pi^{-1} \int_0^{\infty} I_1(ka) K_1(k\rho) \cos kz \, dk.$$

Для $\rho < a$ следует в этой формуле поменять местами ρ и a.

27. Показать, что вектор-потенциал, обусловленный током I, циркулирующим в плоской проволочной петле радиуса a, равен

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \mu a I \int_0^{\infty} J_1(ka) J_1(k\rho) e^{-k|z|} dk.$$

28. Ток I циркулирует по проволочной петле радиуса a, расположенной коаксиально с бесконечным цилиндром радиуса b. Проницаемость цилиндра равна μ. Показать, что часть вектора-потенциала, обусловленная наличием цилиндра, определяется вне цилиндра формулой

$$\mu_v a I \pi^{-1} \int_0^{\infty} \Phi(k) K_1(ka) K_1(k\rho) \cos kz \, dk,$$

где

$$\Phi(k) = \frac{(K_m - 1) kb I_0(kb) I_1(kb)}{(K_m - 1) kb K_0(kb) I_1(kb) + 1}.$$

Написать формулу, определяющую вектор-потенциал во внутренней области.

29. На участке длиной $2c$ поверхности круглого цилиндра радиуса a циркулирует вокруг оси цилиндра равномерно распределенный ток I. Показать, что в области $\rho > a$ вектор-потенциал определяется формулой

$$A_\varphi = \frac{\mu a I}{\pi c} \int_0^{\infty} \frac{1}{k} I_1(ka) K_1(k\rho) \cos kz \sin kc \, dk.$$

30. На плоской круглой проволочной петле радиуса a, расположенной параллельно бесконечной пластине толщиной t на расстоянии b от поверхности последней, протекает ток I. Показать, что если материал, из которого изготовлена пластина, обладает магнитной проницаемостью μ, то вектор-потенциал перед пластиной (где находится

петля), внутри пластины и за пластиной определяется соответственно формулами

$$A_1=\frac{1}{2}\mu_v aI\int_0^\infty J_1(k\rho)\,J_1(ka)\,[e^{-k|z|}+C(K_m^2-1)(1-e^{-2kt})\,e^{k(z-2b)}]\,dk,$$

$$A_2=\mu_v K_m aI\int_0^\infty J_1(k\rho)\,J_1(ka)\,C\{(K_m+1)\,e^{-kz}-(K_m-1)\,e^{k[z-2(b+t)]}\}\,dk,$$

$$A_3=2\mu_v K_m aI\int_0^\infty J_1(k\rho)\,J_1(ka)\,Ce^{-kz}\,dk,$$

где ρ отсчитывается от оси петли, z — от плоскости петли и

$$C=[(K_m+1)^2-(K_m-1)^2\,e^{-2kt}]^{-1}.$$

31. Бесконечный сплошной круглый цилиндр радиуса a_1 и магнитной проницаемости $\mu=\infty$ расположен коаксиально с бесконечной цилиндрической трубой, выполненной из того же материала и имеющей внутренний радиус a_2. В пространстве между ними помещено коаксиальное проводящее кольцо, ограниченное поверхностями: $\rho=b_1$ и $\rho=b_2$, $z=c_1$ и $z=c_2$. По кольцу циркулирует ток I, точное значение плотности которого [см. выражения (6.105)] задано строго в виде $i_\rho=I\,[\rho(c_2-c_1)\ln(b_2/b_1)]^{-1}$. Показать, что вектор-потенциал в области $z>c_2>c_1$ при $a_1<\rho<a_2$ определяется формулой

$$A_\varphi=\sum_{n=1}^\infty C_n(e^{k_nc_2}-e^{k_nc_1})\,e^{-k_nz}R_1(k_n\rho),$$

где $R_m(k_n\rho)=Y_0(k_na_1)\,J_m(k_n\rho)-J_0(k_na_1)\,Y_m(k_n\rho)$, а k_n выбрано так, что $R_0(k_n a_2)=0$ и

$$C_n=\frac{\mu\pi^2 I\,[R_0(k_nb_2)-R_0(k_nb_1)]\,[J_0(k_na_2)]^2}{4k_n(c_2-c_1)\ln(b_2/b_1)\{[J_0(k_na_1)]^2-[J_0(k_na_2)]^2\}}.$$

32. Предположим, что железо в трансформаторе броневого типа обладает бесконечной магнитной проницаемостью, а стенки «окна» заданы уравнениями $\rho=a_1$, $\rho=a_2$, $z=0$, $z=L$. Используя результаты предыдущей задачи и результаты, полученные в § 30 гл. V, показать, что поле тока, циркулирующего в проводящем кольце, ограниченном поверхностями $\rho=b_1$, $\rho=b_2$, $z=c_1$, $z=c_2$, описывается снаружи проводника вектор-потенциалом следующего вида:

в области $z<c_1<c_2$

$$A'_\varphi=2\sum_{n=1}^\infty C_nR_1(k_n\rho)\{\mathrm{sh}[k_n(L-c_2)]-\mathrm{sh}[k_n(L-c_1)]\}\,\mathrm{ch}(k_nz)\,[\mathrm{sh}(k_nL)]^{-1},$$

а в области $c_1<c_2<z$

$$A''_\varphi=-2\sum_{n=1}^\infty C_nR_1(k_n\rho)\,[\mathrm{sh}(k_nc_2)-\mathrm{sh}(k_nc_1)]\,\mathrm{ch}[k_n(L-z)]\,[\mathrm{sh}(k_nL)]^{-1},$$

где постоянные определяются так же, как и в предыдущей задаче. В области $c_1<z<c_2$ имеем

$$A_\varphi=\frac{c_2-z}{c_2-c_1}A'_\varphi+\frac{z-c_1}{c_2-c_1}A''_\varphi.$$

33. Стенки бесконечно длинной трубы, обладающие бесконечной магнитной проницаемостью, заданы уравнениями

$$x=0,\quad x=a,\quad y=0,\quad y=b.$$

Параллельно стенкам вдоль линии $x=c$, $y=d$ ($0<c<a$ и $0<d<b$) протянут провод, по которому течет ток I. Показать, что вектор-потенциал внутри трубы равен

в области $0<y<d$

$$A'_z=\frac{2\mu I}{\pi}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m}\,\mathrm{cosech}\,\frac{m\pi b}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{m\pi}{a}(b-d)\,\mathrm{ch}\,\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{m\pi c}{a}\cos\frac{m\pi x}{a},$$

в области $d < y < b$

$$A_z'' = \frac{2\mu I}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{cosech} \frac{m\pi b}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi d}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} (b-y) \cos \frac{m\pi c}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \ldots$$

34. Показать, что компоненты силы (на единицу длины) в предыдущей задаче равны

$$F_y = \frac{\mu I^2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{cosech} \frac{m\pi b}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} (2d-b) \cos^2 \frac{m\pi c}{a},$$

$$F_x = \frac{\mu I^2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{cosech} \frac{m\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{b} (2c-a) \cos^2 \frac{m\pi d}{b}.$$

Заметим, что всюду, за исключением очень малых c и d, ряды сходятся очень быстро.

35. Бесконечно длинный провод, по которому течет ток I, расположен вдоль линии $x=a$, $y=b$ между двумя бесконечными пластинами ($y=0$ и $y=c$), обладающими бесконечно большой магнитной проницаемостью. Показать, что вектор-потенциал между пластинами определяется выражением

$$U = -\frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\left(\cos \frac{\pi b}{c} - \operatorname{ch} \frac{\pi (x-a)}{c} \cos \frac{\pi y}{c} \right)^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi (x-a)}{c} \sin^2 \frac{\pi y}{c} \right]$$

Это выражение представляет собой действительную часть функции

$$W = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \left[\cos \frac{\pi b}{c} - \operatorname{ch} \frac{\pi (z-a)}{c} \right]$$

Заметим, что поле является однородным и имеет противоположное направление при $x \gg a$ и $x \ll a$.

36. Бесконечный провод, по которому течет ток I, расположен в плоскости $z=z_0$, справа от бесконечного полупространства, заполненного веществом с бесконечной магнитной проницаемостью. Граница этого полупространства представляет собой плоскость $x=0$, имеющую круглый цилиндрический бугорок или круглую цилиндрическую выемку радиуса b с центром в точке $x=c$. Используя результат задачи 49 гл. IV, показать, что вектор-потенциал является действительной частью функции

$$W = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \{[f(z) - f(z_0)][f(z) + f(z_0^*)]\},$$

где

$$f(z) = -\frac{\pi (b^2-c^2)^{1/2} \{[z+j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha} + [z-j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}\}}{\alpha \{[z+j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha} - [z-j(b^2-c^2)^{1/2}]^{\pi/\alpha}\}}$$

и $\cos \alpha = c/b$. Для бугорка $0 < \alpha < \pi$, а для выемки $\pi < 2\alpha < 2\pi$.

37. Используя соотношение $-\ln(z-a) = \int_0^{\infty} k^{-1} [e^{-k(z-a)} - e^{-k}]\, dk$, где действительная часть $(z-a)$ положительна, показать, что поле провода, по которому течет ток I и который расположен в плоскости $x=a$ между двумя плоскими границами ($x=0$ и $x=b$, где $0 < a < b$) двух полубесконечных сред с магнитной проницаемостью μ_v, находится посредством следующих преобразований:

в области $0 < x < b$

$$W_1 = -\frac{\mu_v I}{2\pi} \left\{ \ln(z-a) - 2\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \frac{\operatorname{ch}[k(z+a-b)] + \beta e^{-kb} \operatorname{ch}[k(z-a)]}{e^{kb} - \beta^2 e^{-kb}} - \frac{e^{-k}}{1-\beta} \right\} dk \right\},$$

в области $b < x$

$$W_2 = \frac{\mu_v I}{\pi (K_m+1)} \int_0^{\infty} \frac{K_m}{k} \left(e^{-kz} \frac{e^{ka} + \beta e^{-ka}}{1-\beta^2 e^{-2kb}} - \frac{e^{-k}}{1-\beta} \right) dk,$$

в области $x < 0$

$$W_3 = \frac{\mu_v I}{\pi (K_m+1)} \int_0^{\infty} \frac{K_m}{k} \left[e^{kz} \frac{e^{-ka} + \beta e^{k(a-2b)}}{1-\beta^2 e^{-2kb}} - \frac{e^{-k}}{1-\beta} \right] dk,$$

где U — вектор-потенциал, $\mu^{-1}V$ — скалярный потенциал, $W=U+jV$ и $\beta=(K_m-1)\times$ $\times(K_m+1)^{-1}$.

38. Показать, что поле провода, по которому течет ток I и который расположен в плоскости $x=d$ между двумя плоскими границами ($x=-c$ и $x=+c$, где $-c<d<+c$) двух полубесконечных сред с магнитной проницаемостью μ, находится посредством следующих преобразований:

в области $-c<x<c$

$$W_1=-\frac{\mu_v I}{2\pi}\left(\ln\frac{z-d}{2c}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\ln\left\{1-\frac{4nc^2+[z-(-1)^n d]^2}{4n(n+1)c^2}\right\}\right),$$

в области $c<x$

$$W_2=-\frac{\mu_v K_m I}{\pi(K_m+1)}\left(\ln\frac{z-d}{2c}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\ln\left\{1+\frac{-2c+z-(-1)^n d}{2(n+1)c}\right\}\right),$$

в области $x<-c$

$$W_3=-\frac{\mu_v K_m I}{\pi(K_m+1)}\left(\ln\frac{z-d}{2c}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\ln\left\{-1+\frac{2c+z-(-1)^n d}{2(n+1)c}\right\}\right),$$

где $\beta=(K_m-1)(K_m+1)^{-1}$, U — вектор-потенциал, $\mu^{-1}V$ — скалярный потенциал и $W=$ $=U+jV$. Этот результат можно получить непосредственно путем применения метода изображений или путем разложения знаменателя в функции преобразования, рассмотренной в предыдущей задаче, с последующим интегрированием и заменой z на $z+c$, b на $2c$ и $a-c$ на d. Чтобы величина U вблизи начала координат была конечной, следует добавить к ней бесконечно большую постоянную величину

$$\mu_v K_m I\,[\pi(K_m+1)]^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\ln[2(n+1)c].$$

39. Сравнить первый интеграл в § 11, определяющий A_φ, с выражением (5.191) и показать, что вектор-потенциал поля, обусловленного током I, циркулирующим в круглой проволочной петле радиуса a, равен

$$A=2^{-1/2}\mu I(\operatorname{ch}u_1-\cos u_2)^{1/2}P^1_{-1/2}(\operatorname{ch}u_1),$$

где в соответствии с § 14 гл. IV $2ap\operatorname{cth}u_1=r^2+a^2$ и $2az\operatorname{ctg}u_2=r^2-a^2$.

40. Используя задачу 117 гл. V, результаты § 14 гл. IV, выражения (7.32) и (5.206), добавить к выражению для A_φ, данному в предыдущей задаче, такие члены, чтобы магнитное поле оказалось тангенциальным к тору ($\operatorname{ch}u_1=c/b$), полученному путем вращения окружности радиуса b вокруг прямой, лежащей в плоскости этой окружности на расстоянии c от ее центра. Показать, что полученная сумма равна

$$A_\varphi=\mu I\left(\frac{\operatorname{ch}u_1-\cos u_2}{2}\right)^{1/2}\frac{P^1_{-1/2}\left(\frac{c}{b}\right)}{Q^1_{-1/2}\left(\frac{c}{b}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-\delta^0_n)\,Q^1_{n-1/2}\left(\frac{c}{b}\right)P^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}u_1)}{-(2n-1)(2n+1)P^1_{n-1/2}\left(\frac{c}{b}\right)}\cos nu_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizätet und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, М.—Л., 1939.)

Attwood S. S., Electric and Magnetic Fields, Wiley, 1932.

Curtis H. L., Electrical Measurements, McGraw-Hill, 1937.

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, B. XV, Berlin, 1927.

Gray A., Absolute Measurements in Electricity and Magnetism, v. II, Macmillan, 1888.

Hague B., Electromagnetic Problems in Electrical Engineering, Oxford, 1929. (См. перевод: Хэг Б., Электромагнитные расчеты, М.—Л., 1934.)

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.
Lass, Harry, Vector and Tensor Analysis, McGraw-Hill, 1950.
Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.
Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. II, Oxford, 1881.
Moullin E. B., Principles of Electromagnetism, Oxford, 1932.
Peirce B. O., Newtonian Potential Function, Ginn, 1902.
Planck M. K. E. L., Theorie der Electrizität und Magnetismus, Berlin, 1932.
Poor V. C., Electricity and Magnetism, Wiley, 1931.
Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)
Walker M., Conjugate Funktions for Engineers, Oxford, 1933.
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, B. XI, Leipzig, 1932.

Глава VIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 1. Закон индукции Фарадея. Сто лет тому назад Фарадей и, независимо от него, Генри обнаружили, что если магнитный поток N [см. выражение (7.161)], пронизывающий замкнутый проводящий контур, изменяется, то в контуре возникает ток. Направление этого индуцированного тока таково, что его собственный магнитный поток препятствует изменению первоначального магнитного потока. Таким образом, если поток через контур в некотором направлении увеличивается, то поток, обусловленный индуцированным током, направлен в сторону, противоположную этому направлению; если же первоначальный поток уменьшается, то поток, обусловленный индуцированным током, направлен в ту же сторону, что и первоначальный поток. Индуцированные токи всегда стремятся сохранить статускво магнитного поля. Электродвижущая сила индукции (в вольтах) равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока (в веберах в 1 сек.)

$$\mathscr{E} = -\frac{dN}{dt}. \tag{8.1}$$

Здесь возможны некоторые ограничения, о которых будет сказано позднее.

Совершенно несущественно, благодаря чему изменяется поток: можно перемещать относительно контура источник, создающий этот поток, можно изменять величину потока, перемещать контур или изменять его форму. Фарадей доказал справедливость соотношения (8.1) для замкнутого металлического контура, но поскольку мы знаем, что тангенциальная составляющая $\nabla\mathscr{E} = \mathbf{E}$ одинакова по обе стороны поверхности проводника, соотношение (8.1) должно быть справедливо и для электродвижущей силы вдоль пути, проходящего вне проводника. Можно, следовательно, утверждать, что соотношение (8.1) справедливо для любого замкнутого пути, и написать, пользуясь выражением (7.161), для двухсторонней поверхности S

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{8.2}$$

Преобразуя левую часть соотношения (8.2) на основании теоремы Стокса (3.3), получим

$$\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\times\mathbf{E}\,dS = -\int_S \frac{d}{dt}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Поскольку это должно выполняться для произвольной поверхности, мы имеем

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{8.3}$$

в *вебер* /$(м\cdot сек)^2$. Если $\mathbf{E}$ возникло исключительно вследствие электромагнитной индукции (специальный случай $\mathbf{E}''$, рассмотренный в § 2 гл. IV)

и не имеет ни источников, ни стоков, то дивергенция **E** равна нулю. Если вектор **A** получен из формулы (7.10), то его дивергенция также равна нулю. Заменим теперь в соотношении (8.3) **B** на $\nabla \times \mathbf{A}$ и переменим местами d/dt и rot; тогда нетрудно видеть, что роторы векторов **E** и $-d\mathbf{A}/dt$ равны между собой. Если два вектора обладают всюду одинаковыми роторами и дивергенциями, то они равны друг другу; отсюда получаем соотношение

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \tag{8.4}$$

которое связывает напряженность электрического поля или э. д. с. на 1 *м* с вектор-потенциалом, изменение которого порождает это поле.

Соотношение (8.1) применимо во всех случаях, когда происходит изменение потока сквозь недеформируемые контуры, а также в тех случаях, когда поток изменяется вследствие деформации контура, при условии, что все элементы контура, соединенные вначале, не разъединяются в течение всего процесса. Можно придумать такие эксперименты с использованием скользящих контактов, когда возможность применения соотношения (8.1) является сомнительной или просто неясной. Эти случаи можно было бы рассмотреть, концентрируя внимание не на области, охватываемой цепью, а на элементах самой цепи, и затем уже прилагая соотношение (8.4).

Другая формулировка закона индукции дается в гл. XVI, где показывается, исходя из специальной теории относительности, что если наблюдатель перемещается относительно неподвижного контура, создающего магнитную индукцию **B**, то он обнаружит, вообще говоря, наличие некоторой электродвижущей силы. Пусть **v** — скорость движения, **E** — напряженность электрического поля, возникающего благодаря движению; тогда из соотношения (16.93) получим

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \tag{8.5}$$

где **E** измеряется в *в/м*, **v** — в *м/сек* и **B** — в *вебер/м*^{2}.

§ 2. Взаимная энергия двух контуров. Рассмотрим теперь работу, необходимую для сближения двух контуров, в которых циркулируют постоянные токи I и I'. Каждый контур содержит э. д. с., являющуюся источником или поглотителем энергии и обеспечивающую постоянство токов в течение всего времени. Для контура *1*, пользуясь законом Ома (6.6) и (8.1), имеем

$$IR = \mathscr{E} - \frac{dN}{dt},$$

где $\mathscr{E}$ — вышеупомянутая э. д. с. Энергия, потребляемая в контуре *1* при его перемещении из бесконечности за время t, равна, согласно соотношению (6.11).

$$I^2R \int_0^t dt = I \int_0^t \mathscr{E}\, dt \pm I \int_0^N dN = I \int_0^t \mathscr{E}\, dt \pm NI,$$

где N — поток через первый контур, создаваемый вторым контуром при их окончательном взаимном расположении. Очевидно, последний член выражает работу, совершенную в первом контуре благодаря наличию магнитного поля второго контура. В то же время для поддержания во втором контуре тока постоянным в нем затрачивается работа $\pm N'I'$. Таким образом, общая энергия, затраченная источниками э. д. с. в двух контурах для поддержания постоянства токов при сближении этих контуров, равна

$$\pm (IN + I'N').$$

Подставляя вектор-потенциал в соотношение (7.161) и пользуясь теоремой Стокса и формулой (7.10), получим

$$N=\int_S \mathbf{B}'\ \mathbf{n}\,dS=\int_S \nabla\times\mathbf{A}'\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint \mathbf{A}'\ \mathbf{ds}=\frac{\mu I'}{4\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}'}{r}$$

и аналогично

$$N'=\frac{\mu I}{4\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}'}{r}, \tag{8.6}$$

так что затраченная энергия представляется в виде

$$W_{\mathcal{E}}=\pm(IN+I'N')=\pm\frac{\mu II'}{2\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}'}{r}. \tag{8.7}$$

Закон Фарадея показывает, что если два контура притягиваются друг к другу, то индуцированная э. д. с. приводит к возникновению такого поля, которое стремится изменить направление тока в каждом контуре, поэтому источники э. д. с. должны доставлять энергию для поддержания постоянства токов I и I'. В случае, когда контуры отталкиваются друг от друга, происходит обратное явление.

Рассмотрим механическую работу, совершаемую против магнитных сил при движении двух контуров. Согласно соотношению (7.98), сила, действующая на контур *1*, равна (в ньютонах)

$$\mathbf{F}=I\oint\mathbf{ds}\times\mathbf{B}=\frac{\mu II'}{4\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}\times(\mathbf{ds}'\times\mathbf{r})}{r^3}=\frac{\mu II'}{4\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}'(\mathbf{ds}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{r}(\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}')}{r^3}$$

При интегрировании по контуру *1* первый член пропадает, поскольку подинтегральное выражение $\mathbf{r}/r^3$ можно представить как градиент скаляра $1/r$. Тогда механическая работа, затраченная только на перемещение от $r=\infty$ до $r=r$, равна

$$W_{me}=\int_\infty^r\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=-\frac{\mu II'}{4\pi}\oint\oint\int_\infty^r\frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}'\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{dr}}{r^3}=\frac{\mu II'}{4\pi}\oint\oint\frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{ds}'}{r} \tag{8.8}$$

Сравнивая соотношения (8.7) и (8.8), мы видим, что половина энергии, затрачиваемой батареей в цепи, идет на совершение механической работы. Но поскольку единственная разница между начальным и конечным состояниями заключается в изменении магнитного поля, окружающего контуры, то и разница в значениях энергии должна быть равна изменению энергии магнитного поля. Таким образом, при относительном перемещении двух контуров, несущих постоянные токи, механическая работа, совершаемая контуром, возрастает или уменьшается в той же мере, как и энергия магнитного поля. Это объясняет кажущийся парадокс, упоминаемый в § 19 гл. VII. Отсюда также следует, что если известна энергия W_B магнитных полей двух контуров, то можно вычислить механическую силу или момент, стремящихся увеличить координату θ, беря производную этой энергии по θ, т. е.

$$F=+\frac{\partial W_B}{\partial\theta}. \tag{8.9}$$

§ 3. Энергия магнитного поля. Найдем энергию, требуемую для создания магнитного поля одиночного контура. Воспользуемся результатами, полученными в последнем параграфе, и будем считать, что все пространство заполнено однородной изотропной средой с проницаемостью μ. Построим поле, составляя контур из бесконечно тонких нитей тока. Пусть результирующая плотность тока всюду конечна. Знаменатель в соотношении (8.8)

не может обратиться в нуль, так как конечные нити тока расположены друг от друга на конечном расстоянии. Чтобы получить правильное значение энергии, в соотношение (8.8) для одиночного контура необходимо добавить множитель $^1/_2$, поскольку интегрирование учитывает не только работу при приближении нити a к b, но также работу при приближении нити b к a. Введем, кроме того, в соотношение (8.8) плотность токов в соответствии с формулой (6.2); тогда оно примет вид

$$W_B = \frac{\mu}{8\pi} \int_v \int_{v'} \frac{\mathbf{i}\, dv \cdot \mathbf{i}'\, dv'}{r}, \tag{8.10}$$

где r — расстояние между элементарными объемами dv и dv', $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}'$ — плотности тока в этих объемах; интегрирование по пространству производится дважды, причем, как и в § 2, мы полагаем, что в области интегрирования μ постоянно. Заменяя $\mathbf{i}$ согласно выражению (7.4), а $\int_v (\mathbf{i}'/r)\, dv'$ согласно выражению (7.8), имеем

$$W_B = \frac{1}{2\mu} \int_v \nabla \times \mathbf{B} \quad \mathbf{A}\, dv. \tag{8.11}$$

Пользуясь формулой для дивергенции векторного произведения

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] - \nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = B^2 - \nabla \quad [\mathbf{A} \times \mathbf{B}],$$

получим

$$W_B = \frac{1}{2\mu} \int_v B^2\, dv - \frac{1}{2\mu} \int_v \nabla \quad [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]\, dv,$$

где интегрирование распространяется на все пространство. По теореме Остроградского — Гаусса (3.2) второй интеграл можно преобразовать в поверхностный интеграл по бесконечной сфере. Этот интеграл исчезает, поскольку из выражения (7.8) следует, что $\mathbf{A}$ стремится к нулю как $1/r$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ как $1/r^2$, а площадь поверхности возрастает только как r^2, так что

$$\int_v \nabla \quad [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]\, dv = \int_S [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}\, dS \xrightarrow[r \to \infty]{} 0.$$

Таким образом, окончательное выражение для энергии получаем в виде

$$W_B = \frac{1}{2\mu} \int_v B^2\, dv. \tag{8.12}$$

Энергию можно считать локализованной в пространстве, где находится магнитное поле, окружающее ток; плотность энергии равна $\frac{1}{2} B^2/\mu$. Сравнивая это с выражением (2.18), определяющим энергию электростатического поля, мы видим, что магнитное поле так же, как и электростатическое, можно, для наглядности, трактовать при помощи системы натяжений.

§ 4. Коэффициент взаимной индукции. Коэффициент взаимной индукции M_{12} двух контуров определяется как поток N_{12} через контур *1*, обусловленный единичным током в контуре *2*. В системе единиц MKS единицей взаимной индукции является генри. Математическая запись определения M_{12} имеет вид

$$M_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}\, dS_1, \tag{8.13}$$

или

$$M_{12} = \oint \mathbf{A}_2 \ d\mathbf{s}_1, \tag{8.14}$$

где $\mathbf{A}_2$ — вектор-потенциал поля, созданного единичным током в контуре *2*. Пользуясь выражением (8.6), можно написать

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint\oint \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} = M_{21}. \tag{8.15}$$

Поток через контур *1*, обусловленный током I_2 в контуре *2*, будет равен, как это вытекает из формулы (8.13),

$$N_{12} = M_{12} I_2. \tag{8.16}$$

Из формулы (8.1) получаем, что э. д. с. в контуре *1*, наводимая при изменении тока в контуре *2*, равна

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \tag{8.17}$$

Из соотношения (8.8) видно, что взаимную энергию двух контуров можно представить следующим выражением:

$$W_{12} = M_{12} I_1 I_2. \tag{8.18}$$

Согласно выражению (8.12), общая энергия двух контуров равна

$$W_t = \frac{1}{2\mu} \int_V (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\ (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\, dv = \frac{1}{2\mu} \left(\int_V B_1^2\, dv + 2 \int_V \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2\, dv + \int_V B_2^2\, dv \right).$$

Первый член определяет энергию, требуемую для установления тока I_1, а последний — тока I_2; средний член выражает энергию их взаимодействия. Следовательно, из выражения (8.18) имеем

$$M_{12} I_1 I_2 = \frac{1}{\mu} \int_V \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2\, dv. \tag{8.19}$$

Согласно формуле (8.9) сила или момент, стремящиеся увеличить некоторую координату θ, определяющую положение одного контура относительно другого, выражается соотношением

$$F = I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta}. \tag{8.20}$$

§ 5. Граничные условия для a. В § 22 гл. VII были использованы условия для производных квазивектор-потенциала **a** на границе раздела двух сред с различной проницаемостью. В предыдущем параграфе мы впервые встретились с соотношением (8.14), содержащим интеграл от **a**, поэтому теперь нужно рассмотреть те граничные условия, которые необходимо наложить на вектор **a**, для того чтобы это соотношение было пригодно и в местах нарушения непрерывности. Возьмем небольшой прямоугольный контур, длинные стороны которого находятся близко друг к другу, но расположены по обе стороны от границы раздела двух сред с различной проницаемостью. По мере сближения этих сторон площадь прямоугольника стремится к нулю, так что поток через этот контур, обусловленный током I_2, текущим во втором контуре, должен исчезать. Но, согласно соотношениям (8.14) и (8.16), этот поток равен $N = I_2 \oint \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{s}$. Поскольку короткие стороны прямоугольника исчезающе малы, основной вклад в интеграл дадут большие стороны длиной L, которые, однако, настолько коротки, что вектор **a** вдоль них можно считать постоянным.

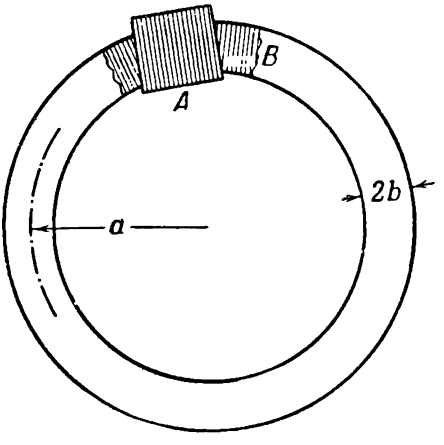
Но, согласно выражениям (7.122) и (7.123), тангенциальная компонента вектора **a** имеет одинаковое направление по обе стороны поверхности раздела, поэтому, ориентируя прямоугольник вдоль u_s и u_t, мы получим для соответствующих тангенциальных компонент вектора **a**

$$\oint \mathbf{a}_{s,t} \cdot \mathbf{ds}_{s,t} = L(a'_{s,t} - a''_{s,t}) = 0$$

Таким образом,

$$a'_{s,t} = a''_{s,t}. \tag{8.21}$$

§ 6. Коэффициент взаимной индукции простейших контуров. В качестве простого примера вычисления коэффициента взаимной индукции рассмотрим две плотно намотанные катушки A и B, изображенные на фиг. 79. Катушка B содержит n витков и намотана на кольце с проницаемостью μ. Катушка A имеет m витков. Поскольку весь поток проходит через кольцо, из соотношений (7.164) и (8.16) получим



Фиг. 79.

$$M_{12} = \mu n m [a - (a^2 - b^2)^{1/2}]. \tag{8.22}$$

Если $a \gg b$, то a можно вынести из-под корня и остаток разложить в ряд (Двайт, 5.3), оставляя лишь квадратичные члены. Тогда

$$M_{12} = \frac{\mu n m b^2}{2a} \tag{8.23}$$

Если $A = \pi b^2$, $n_1 = n/(2\pi a)$ — число витков на единицу длины, то коэффициент взаимной индукции между бесконечным соленоидом, намотанным на цилиндр площади A и проницаемости μ, и окружающей цилиндр катушкой, содержащей m витков, равен

$$M_{12} = \mu n_1 m A. \tag{8.24}$$

Этот результат можно было бы сразу получить, воспользовавшись непосредственно выражением (7.86).

§ 7. Коэффициент взаимной индукции двух колец. Используя соотношение (8.14), можно написать выражение для коэффициента взаимной индукции двух коаксиальных проволочных колец. Вектор-потенциал кольца A (см. фиг. 80) имеет лишь φ-составляющую и одинаков для всех элементов кольца B, поэтому из соотношения (8.14) получим

$$M_{BA} = \oint \mathbf{A}_A \cdot \mathbf{ds}_B = 2\pi b \left| A_A \right|_{c=b}^{z=c}.$$

Таким образом, согласно выражению (7.51), имеем

$$M_{12} = 2\mu k^{-1} (ab)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K - E \right], \tag{8.25}$$

где, как видно из выражения (7.50),

$$k^2 = 4ab [(a+b)^2 + c^2]^{-1}. \tag{8.26}$$

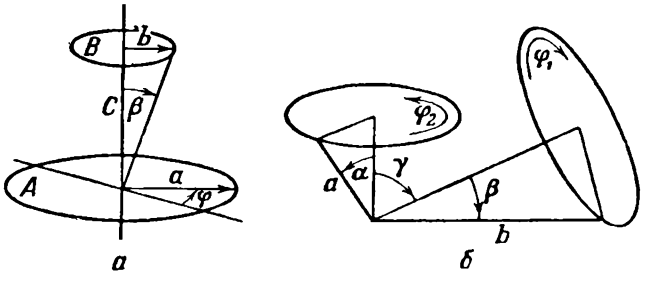
Численное значение K и E можно найти в справочнике Двайта (1040 и 1041). Точно таким же образом, исходя из соотношения (7.71), получается

другое выражение для M_{12}. Считая $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \beta$ и используя результаты § 16з гл. V, при $b^2 + c^2 < a^2$ находим

$$M_{12} = \pi\mu b \sum_{\substack{n=1 \\ (n\text{—нечетное})}}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n}{n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n+1)} \left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)^{1/2n} P_n^1(\cos\beta). \quad (8.27)$$

В случае $b^2 + c^2 > a^2$ следует написать вместо $[(b^2 + c^2)/a^2]^{1/2n}$ выражение $[a^2/(b^2 + c^2)]^{(n+1)/2}$.

Исходя из выражений (8.14), (7.72) и (5.217), можно вычислить взаимную индукцию двух произвольно ориентированных колец, если их оси



Фиг. 80.

пересекаются. Так, в случае, изображенном на фиг. 80, *б*, при $b > a$, взяв за начало координат точку пересечения осей и отсчитывая угол θ между ними от оси кольца a, получим

$$M_{12} = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} [B_r]_b \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (8.28)$$

Если θ' — угол, отсчитываемый от оси кольца b, то, заменяя в соотношении (7.72) величину $P_n(\cos\theta')$ в соответствии с выражением (5.217), где $\gamma \equiv \Theta$, $a \equiv r$ и $I = 1$, будем иметь

$$[B_r]_b = \frac{\mu \sin\beta}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n P_n^1(\cos\beta) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_m^0) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\gamma) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi.$$

После подстановки этого выражения в соотношение (8.28) и интегрирования по φ остаются лишь члены, содержащие $m = 0$. Согласно соотношению (5.118), интегрирование по θ дает

$$-\int_1^{\cos\alpha} P_n(\cos\theta) \, d(\cos\theta) = \frac{\sin^2\alpha \, P_n'(\cos\alpha)}{n(n+1)} = \frac{\sin\alpha \, P_n^1(\cos\alpha)}{n(n+1)}$$

и для коэффициента взаимной индукции получаем выражение

$$M_{12} = \pi\mu a \sin\alpha \sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{a}{b}\right)^n P_n^1(\cos\alpha) P_n^1(\cos\beta) P_n(\cos\gamma). \quad (8.29)$$

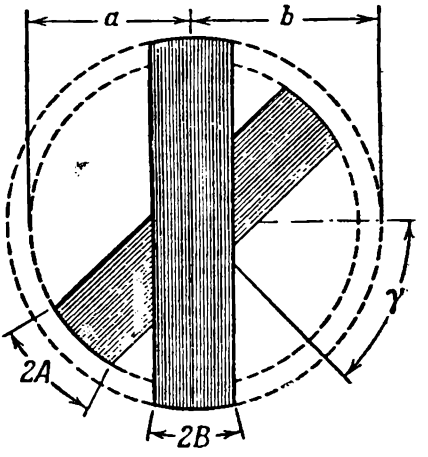
§ 8. Переменная взаимная индукция. На фиг. 81 изображено устройство, часто употребляемое для получения переменной взаимной индукции (вариометр). Каждая катушка содержит один слой провода, намотанного на каркас со сферической поверхностью. Одна катушка вращается относи-

тельно другой, находясь с ней на общей оси. Обозначим через γ угол между плоскостями катушек, через a и b радиусы двух сферических поверхностей и через $2A$ и $2B$ угловую ширину обмоток катушек. Допустим, что катушки состоят из плоских проволочных колец, равномерно распределенных с плотностью n колец на единицу длины. Число витков n' на единицу угла для каждой катушки будет тогда $n'_a = n_a a \sin\alpha$ и $n'_b = n_b b \sin\beta$ соответственно. Взаимная индукция между элементами двух катушек, согласно выражению (8.29), равна

$$dM_{ab} = \pi a^2 b \mu n_a n_b \sin^3\alpha \sin^3\beta \sum \frac{1}{n(n+1)} \frac{a^n}{b^n} P'_n(\mu_a) P'_n(\mu_b) P_n(\cos\gamma)\, d\alpha\, d\beta.$$

Общая взаимная индукция получится после интегрирования по обеим катушкам, т. е.

$$M_{ab} = \int_{\alpha=\frac{1}{2}\pi-A}^{\alpha=\frac{1}{2}\pi+A} \int_{\beta=\frac{1}{2}\pi-B}^{\beta=\frac{1}{2}\pi+B} dM_{ab}.$$



Фиг. 81.

Обозначая $\cos\alpha$ или $\cos\beta$ через u, приходим при помощи соотношения (5.123) к интегралам вида

$$\int (1-u^2) \frac{dP_n(u)}{du} du = \frac{n(n+1)}{2n+1} \int [P_{n-1}(u) - P_{n+1}(u)]\, du. \quad (8.30)$$

Интегрируя [см. соотношение (5.120)] и производя упрощения, согласно выражению (5.118), получаем

$$f_n(A) = \frac{n}{(n-1)(n+2)} \left\{ [(n+1) - (n-1)u^2] P_n(u) - 2u P_{n-1}(u) \right\}_{\sin A}^{-\sin A} \quad (8.31)$$

Если n — четное число, то оба предельных значения равны и, следовательно, исчезают, так что остаются значения лишь для случая, когда n — нечетное число.

Для $n = 1$ необходимо специальное исследование. В этом случае из выражения (8.30) имеем

$$f_1(A) = \left[u \left(1 - \frac{u^2}{3} \right) \right]_{\sin A}^{-\sin A} = -\frac{2}{3} \sin A (3 - \sin^2 A). \quad (8.32)$$

Аналогичные выражения получаем для B. В результате находим

$$M_{ab} = \pi \mu a^2 b n_a n_b \sum_{\substack{n=1 \\ (n\text{—нечетное})}}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{a}{b}\right)^n f_n(A) f_n(B) P_n(\cos\gamma). \quad (8.33)$$

Коэффициенты, зависящие от заданных размеров катушки, можно вычислить, после чего формула принимает вид

$$M_{ab} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n\text{—нечетное})}}^{\infty} M_n P_n(\cos\gamma), \quad (8.34)$$

где γ — угол между плоскостями катушек.

§ 9. Самоиндукция. Как следует из выражения (8.12), магнитная энергия одиночного контура, по которому течет ток I_1, пропорциональна B^2; но, поскольку индукция B пропорциональна I_1, имеем

$$W_B = \frac{1}{2\mu}\int_v B^2\, dv = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2. \tag{8.35}$$

Коэффициент пропорциональности L_{11}, являющийся величиной постоянной, называется коэффициентом самоиндукции или самоиндукцией контура. Другая полезная формула для вычисления самоиндукции получается путем подстановки выражения (7.4) в выражение (8.11), а именно:

$$W_B = \frac{1}{2}\int \mathbf{i}\cdot\mathbf{A}\, dv = \frac{1}{2}L_{11}I^2, \tag{8.36}$$

где интегрирование производится по области, в которой имеется ток. В системе MKS единицей индуктивности является генри.

Самоиндукция контура, состоящего из бесконечно тонкой проволоки, по которой течет конечный ток, оказывается бесконечной, так как величина **B** вблизи провода обратно пропорциональна расстоянию до него. Следовательно, при конечной длине провода интеграл в выражении (8.35) логарифмически расходится (dv можно представить в виде $r\,dr\,d\theta$). Это означает, что при вычислении самоиндукции мы обязаны учитывать геометрические размеры провода и нигде не принимать плотность тока i бесконечной. Будем рассматривать провод как пучок нитей тока, каждая из которых обладает бесконечно малым поперечным сечением dS и несет ток $i\,dS$. При установлении тока в таком проводе магнитный поток каждой нити тока пересекает соседние нити и по закону Фарадея (8.1) возбуждает в них э. д. с. индукции, направленную противоположно току и равную $\mathscr{E} = -dN/dt$, где dN/dt — изменение потока, пронизывающего контур, в 1 сек. Для поддержания тока I_1 источник энергии должен кроме работы, затрачиваемой на преодоление сопротивления, совершать еще работу, равную (в 1 сек.)

$$\mathscr{E}I_1 = I_1\frac{dN_1}{dt} \tag{8.37}$$

Энергия, запасаемая магнитным полем в 1 сек., равна dW/dt, поэтому из выражений (8.35) и (8.37) имеем

$$I_1\frac{dN_1}{dt} = L_{11}I_1\frac{dI_1}{dt}.$$

Сокращая I_1 и интегрируя от момента времени, когда ток отсутствовал до момента окончательного установления тока, получим

$$N_{11} = L_{11}I_1. \tag{8.38}$$

Таким образом, можно определить самоиндукцию контура как приращение потока, пронизывающего контур, при изменении тока на единицу. Электродвижущая сила, наведенная в контуре при изменении тока, равна

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{dN_{11}}{dt} = -L_{11}\frac{dI_1}{dt}. \tag{8.39}$$

§ 10. Вычисление самоиндукции. Тонкий провод. Из всего вышесказанного естественно следует, что при вычислении самоиндукции нужно отдельно рассматривать две области: область вне провода и область внутри провода. Вклад последней бывает часто пренебрежимо малым, однако если даже он существенен, но радиус провода мал по сравнению с остальными размерами контура, то можно допустить, что поле снаружи равно полю

тока, сконцентрированного на оси провода, а поле внутри идентично с полем длинного прямого провода данного поперечного сечения, по которому течет тот же самый ток. Силовые линии вблизи поверхности являются приблизительно окружностями, концентричными оси провода, так что весь поток снаружи провода связывает осевую нить с любой линией, проведенной параллельно ей на поверхности провода. Чтобы получить эту часть самоиндукции, нужно, следовательно, найти коэффициент взаимной индукции между двумя параллельными криволинейными контурами, расположенными друг от друга на расстоянии, равном радиусу провода.

Внутри провода м. д. с. вдоль окружности радиуса r (с центром на оси) зависит, согласно определению (7.150), только от тока, протекающего внутри этой окружности. Так как вследствие симметрии B зависит только от r, из § 15 гл. VII следует, что

$$B = \frac{\mu I_i}{2\pi r} = \frac{\mu r I}{2\pi a^2}, \tag{8.40}$$

где I — полный ток, a — радиус провода. Энергия внутри провода, как видно из выражения (8.35), равна

$$W_i = \frac{1}{2\mu}\int_V B^2\, dv = \frac{\mu I^2 L}{8\pi^2 a^4}\int r^2 2\pi r\, dr = \frac{\mu I^2 L}{16\pi} = \frac{1}{2} L'_{11} I^2,$$

где через L обозначена длина провода. Отсюда внутренняя самоиндукция на единицу длины равна

$$L'_{11} = \frac{\mu'}{8\pi}, \tag{8.41}$$

где μ' — магнитная проницаемость провода.

§ 11. Самоиндукция круглой петли. Пользуясь методом, развитым в предыдущем параграфе, и результатом рассмотренного примера, вычислим самоиндукцию проволочной петли радиуса b, проницаемости μ' (радиус провода a). Длина провода составляет $2\pi b$, поэтому внутренняя самоиндукция, согласно выражению (8.41), равна

$$L'_{11} = \frac{1}{4}\mu' b. \tag{8.42}$$

Как было показано в § 10, мы можем получить остальную часть самоиндукции, применив соотношение (8.25) к двум замкнутым контурам, один из которых совпадает с осью провода, а другой — с его внутренним краем. В этом случае, согласно соотношению (8.26), полагая $c = 0$ и $a \ll b$, получим

$$1 - k^2 = 1 - \frac{4b(b-a)}{(b+b-a)^2} = \frac{a^2}{(2b-a)^2} \approx \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = k'^2.$$

При $k \approx 1$ значение E, согласно соотношению (8.25), равно

$$E = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^{1/2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 1.$$

Для получения K положим $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ и разобьем интервал интегрирования на две части:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2\sin^2\theta)^{1/2}} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(1 - k^2\cos^2\varphi)^{1/2}} + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2\cos^2\varphi)^{1/2}},$$

где $(1-k^2) \ll \varphi_0 \ll 1$. Поэтому положим в обоих интегралах $k=1$, а в первом интеграле, кроме того, заменим $\sin\varphi$ на φ, тогда

$$K = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(k'^2+\varphi^2)^{1/2}} + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Далее производим интегрирование (Двайт, 200.01 и 432.10), полагаем $\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$ и, пренебрегая k'^2 по сравнению с φ_0^2, находим

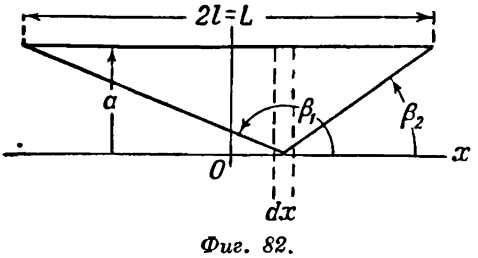
$$K = \ln\left\{\frac{[\varphi_0+(\varphi_0^2+k'^2)^{1/2}]}{k'}\right\} - \ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_0 = \ln\frac{2\varphi_0}{k'}\frac{2}{\varphi_0} = \ln\frac{4}{k'} = \ln\frac{8b}{a}.$$

Подставляя значение K в соотношение (8.25) и прибавляя найденное выражение для внутренней индуктивности (8.42), получаем окончательно

$$L_{11} = b\left[\mu\left(\ln\frac{8b}{a}-2\right)+\frac{1}{4}\mu'\right], \tag{8.43}$$

где μ' — проницаемость внутри провода, μ — снаружи.

§ 12. Самоиндукция соленоида. Рассмотрим соленоид в виде цилиндра, в бесконечно тонком поверхностном слое которого течет ток в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра (см. фиг. 82). Для строгого вычисления самоиндукции такого цилиндра следует воспользоваться соотношением (8.25), позволяющим найти взаимную индукцию отдельных элементов оболочки, а затем проинтегрировать найденное выражение по всей оболочке. Однако результат получается довольно сложным. Но если длина соленоида велика по сравнению с его диаметром, то поле внутри него в любом сечении, перпендикулярном к оси, можно приближенно считать однородным. Для вычисления самоиндукции при помощи соотношения (8.38) нам нужно знать поток, пронизывающий любой элемент оболочки, после чего проинтегрировать по поверхности. Согласно выражению (7.83), поток (отнесенный к единице тока) через $n\,dx$ витков в интервале dx равен



Фиг. 82.

$$dN_1 = \frac{1}{2}\pi\mu a^2 n^2\left\{\frac{l-x}{[(l-x)^2+a^2]^{1/2}}+\frac{l+x}{[(l+x)^2+a^2]^{1/2}}\right\}dx.$$

Проводя интегрирование (Двайт, 201.01) от $-l$ до $+l$, имеем

$$L_{11} = \pi\mu a^2 n^2\left[(4l^2+a^2)^{1/2}-a\right] = \pi\mu a^2 n^2\left[(L^2+a^2)^{1/2}-a\right]. \tag{8.44}$$

§ 13. Самоиндукция двухпроводной линии. Используя соотношение (8.36), вычислим строго самоиндукцию на единицу длины двухпроводной линии. Будем полагать (см. фиг. 83), что ток одного направления равномерно распределен в проводе радиуса a, а обратного направления — в проводе радиуса c; оси проводов параллельны и расположены одна от другой на расстоянии b. Магнитную проницаемость окружающей среды и проводов примем равной единице. Вектор-потенциал и плотность тока имеют, очевидно, лишь z-компоненту. Если I — полный ток, то плотности токов будут равны

$$i_1 = \frac{I}{\pi a^2}, \qquad i_2 = \frac{-I}{\pi c^2}. \tag{8.45}$$

Для нахождения вектор-потенциала A' поля внутри провода, обусловленного током, текущим по этому проводу, напишем уравнение (7.6) в цилиндрических координатах [см. уравнение (3.18)] и получим, помня, что A' является функцией лишь ρ,

$$\frac{\partial}{\rho\,\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A'}{\partial\rho}\right)=-\mu i=\quad\frac{\mu I}{\pi a^2}\quad\text{или}\quad+\frac{\mu I}{\pi c^2}. \tag{8.46}$$

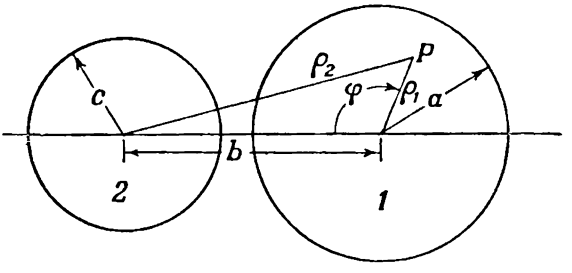
Интегрируя дважды от 0 до ρ, имеем

$$\rho_1\frac{\partial A_1'}{\partial\rho_1}=-\frac{\mu I\rho_1^2}{2\pi a^2},\qquad A_1'=C_1-\frac{\mu I\rho_1^2}{4\pi a^2}. \tag{8.47}$$

Вне провода, полагая $i=0$ в соотношении (8.46), интегрируя дважды от внешней границы провода до ρ_1 и замечая, что нижний предел при каждом интегрировании получается подстановкой $\rho_1=a$ в выражение (8.47), имеем

$$\rho_1\frac{\partial A_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\mu I}{2\pi}=0,$$

$$A_1''=C_1-\frac{\mu I}{4\pi}-\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{a}. \tag{8.48}$$



Фиг. 83.

Аналогично

$$A_2'=C_2+\frac{\mu I\rho_2^2}{4\pi c^2},$$

$$A_2''=C_2+\frac{\mu I}{4\pi}+\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{c}. \tag{8.49}$$

Для того чтобы соотношения (8.48) и (8.49) согласовались с соотношением (7.44), мы должны положить

$$C_1=-C_2. \tag{8.50}$$

Согласно соотношению (8.36), имеем

$$L_{11}I^2=\int\limits_{S_1}i_1(A_1'+A_2'')\,dS_1+\int\limits_{S_2}i_2(A_2'+A_1'')\,dS_2. \tag{8.51}$$

Сперва вычислим лишь первый интеграл, а затем, используя симметрию, сразу напишем значение второго интеграла. Пользуясь формулой (868.4) из справочника Двайта и опуская C_1, находим

$$(L_{11}I^2)_1=\frac{\mu I^2}{4\pi^2a^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{\rho_1^2}{a^2}+1+\ln\left(\frac{b^2+\rho_1^2-2b\rho_1\cos\varphi}{c^2}\right)\right]\rho_1\,d\rho_1\,d\varphi=$$

$$=\frac{\mu I^2}{2\pi a^2}\left(-\int\limits_0^a\frac{\rho_1^3}{a^2}d\rho_1+\int\limits_0^a\rho_1\,d\rho_1+\ln\frac{b^2}{c^2}\int\limits_0^a\rho_1\,d\rho_1\right)=\frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{2}+2\ln\frac{b}{c}\right). \tag{8.52}$$

Аналогично для второго провода имеем

$$(L_{11}I^2)_2=\frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{2}+2\ln\frac{b}{a}\right). \tag{8.53}$$

Складывая соотношения (8.52) и (8.53), получаем

$$L_{11}=\frac{\mu}{4\pi}\left(1+2\ln\frac{b^2}{ac}\right) \tag{8.54}$$

Если провода одинаковы, т. е. $a=c$, то

$$L_{11}=\frac{\mu}{4\pi}\left(1+4\ln\frac{b}{a}\right). \tag{8.55}$$

§ 14. Энергия n контуров. Пусть имеется n контуров, по которым текут токи $I_1, I_2, \ldots, I_n$, и магнитная индукция, обусловленная этими токами, равна $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ соответственно. Поскольку результирующая индукция является их векторной суммой, общая энергия поля, согласно формуле (8.12), будет равна

$$W=\frac{1}{2\mu}\int_V B^2\,dv=\frac{1}{2\mu}\int_V\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_j\Big)\,dv=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_V\Big(\sum_{i=1}^{n}B_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{B}_j\Big)_{i\neq j}dv. \quad (8.56)$$

В двойную сумму произведения $\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{B}_j$ и $\mathbf{B}_j\cdot\mathbf{B}_i$ входят так, что, пользуясь соотношениями (8.35) и (8.19), выражение (8.56) можно представить в виде

$$W=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}L_iI^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}I_iI_j\Big)_{i\neq j}=\frac{1}{2}\left(L_1I_1^2+2M_{12}I_1I_2+L_2I_2^2+\ldots\right). \quad (8.57)$$

Как мы видели в § 2, сила или момент, стремящиеся увеличить координату θ i-го контура, равны производной от энергии поля по этой координате; таким образом,

$$F_i=\frac{1}{2}I_i\Big(I_i\frac{\partial L_i}{\partial\theta}+2\sum_{j=1}^{n}I_j\frac{\partial M_{ij}}{\partial\theta}\Big)_{j\neq i}. \quad (8.58)$$

§ 15. Натяжения в магнитном поле. Мы видели в соотношениях (8.12) и (2.18), что плотности энергии $\partial W/\partial v$ магнитного и электрического полей даются выражениями

$$\Big(\frac{dW}{dv}\Big)_m=\frac{B^2}{2\mu}\quad\text{и}\quad\Big(\frac{dW}{dv}\Big)_e=\frac{D^2}{2\varepsilon}. \quad (8.59)$$

Из соотношения (7.1) известно, что всюду $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, а из соотношения (3.4) следует, что в отсутствие электрических зарядов $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$. Поэтому состоянию равновесия в магнитном поле соответствует та же система натяжений, что и в электрическом поле, если в последнем заменить $\mathbf{D}$ на $\mathbf{B}$ и ε на μ. Таким образом, на основании результатов § 15 гл. I магнитные силы можно представить в виде натяжения T, направленного вдоль силовых линий, и давления P, направленного перпендикулярно к ним, причем

$$|T|=|P|=\frac{B^2}{2\mu}. \quad (8.60)$$

В случае, когда магнитная проницаемость является функцией плотности τ, можно привести те же рассуждения, как и в § 10 гл. II, учитывая только, что вместо конденсатора, заполненного диэлектриком, мы имеем дело с магнитной цепью, содержащей магнетик. В результате мы придем к выводу, аналогичному (2.24), что в магнетике, наряду с вышеуказанными натяжениями, должно существовать гидростатическое давление

$$P_h=-\frac{B^2}{2\mu^2}\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}. \quad (8.61)$$

Для нахождения силы, действующей в магнитном поле на плоскую границу между двумя средами с различными проницаемостями μ' и μ'', сложим нормальные компоненты натяжений, определяемых выражениями (8.60) и (8.61); таким же путем, каким были получены соотношения (1.50)

и (2.25), придем к формуле

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu'-\mu''}{\mu'}\left(\frac{B_t'^2}{\mu'}+\frac{B_n'^2}{\mu''}\right)-\frac{B'^2\tau'}{\mu'^2}\frac{\partial\mu'}{\partial\tau'}+\frac{B''^2\tau''}{\mu''^2}\frac{\partial\mu''}{\partial\tau''}\right] \tag{8.62}$$

Эта сила действует по нормали к поверхности и направлена от μ' к μ''. Нормальная и касательная составляющие индукций $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$ в двух средах имеют соответственно индексы n и t. Для границы среды с проницаемостью μ и вакуума, вводя $\mu''=\mu_v$, $\mu'=\mu_v K_m$ и полагая $\partial\mu''/\partial\tau''=0$, получаем

$$F_n = \frac{B'^2}{2\mu_v K_m^2}\left[(K_m-1)-\tau\frac{\partial K_m}{\partial\tau}\right]+\frac{(K_m-1)^2 B_n'^2}{2\mu_v K_m^2}, \tag{8.63}$$

где

$$B'^2 = B_n'^2 + B_t'^2. \tag{8.64}$$

Формулы, выведенные в этом параграфе, вполне пригодны для обычных сред, но непригодны для ферромагнитных материалов, которые будут рассмотрены в гл. XII. В ферромагнетиках наблюдается много сложных явлений (например, изменение формы без изменения объема), которые нельзя учесть никакой простой формулой.

§ 16. Энергия магнетика в статическом магнитном поле. В предыдущем параграфе было показано, что сила, действующая на тело с проницаемостью μ, помещенное в среду с проницаемостью μ_v, при наличии магнитостатического поля $\mathbf{B}$, создаваемого постоянными токами, численно равна силе, которая вычислялась в § 14 гл. III [см. выражение (3.42)] для диэлектрика $\varepsilon_v=\mu_v$, помещенного в электрическое поле с индукцией $\mathbf{D}=\mathbf{B}$, обусловленное неподвижными электрическими зарядами. Из формулы (8.9) явствует, что в случае магнитного поля сила или момент, действующие в направлении θ, равны производной по θ от энергии магнитного поля, т. е.

$$F = +\frac{\partial W_B}{\partial\theta}. \tag{8.65}$$

Сравнение с выражением (3.41) показывает, что если в области с магнитной проницаемостью μ_v создать при помощи системы постоянных токов магнитную индукцию $\mathbf{B}$ внутри некоторого объема v и потом заполнить этот объем средой с проницаемостью μ (после чего установится индукция $\mathbf{B}_i$), то энергия, затрачиваемая на намагничивание этой среды, равна следующему интегралу по объему:

$$W_B = \frac{1}{2}\int_V\left(\frac{1}{\mu_v}-\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_i\,dv. \tag{8.66}$$

Здесь среда предполагается изотропной, а проницаемость μ — не зависящей от напряженности поля; при этом в систему не вносится дополнительных источников магнетизма. При помощи вектора намагниченности (7.111) это выражение можно написать в виде

$$W_B = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\,dv. \tag{8.67}$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что коэффициент взаимной индукции между длинным прямым проводом и копланарным с ним проволочным равносторонним треугольником равен

$$\frac{\mu_v}{3^{1/2}\pi}\left[(a+b)\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)-a\right],$$

где a — высота треугольника, b — расстояние от провода до ближайшей параллельной ему стороны треугольника.

2. Круглая проволочная петля радиуса a расположена параллельно плоской границе полубесконечной среды с относительной магнитной проницаемостью K_m и находится от нее на расстоянии d. Показать, что увеличение самоиндукции петли из-за наличия среды равно

$$\mu_v a \frac{K_m-1}{K_m+1}\left[\left(\frac{2}{c}-c\right)K(c)-\frac{2}{c}E(c)\right],$$

где введено обозначение $c=a\,(a^2+d^2)^{-1/2}$.

3. Шар радиуса b, обладающий очень большой магнитной проницаемостью, помещается концентрично с проволочной петлей радиуса a. Показать, что добавочная самоиндукция, обусловленная присутствием шара, равна

$$\mu_v \pi b \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n+2)}\right]^2\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^{4n+2}$$

4. Показать, что коэффициент взаимной индукции между двумя концентрическими проволочными окружностями радиусов a и b, лежащими в одной плоскости, равен

$$\mu_v \pi b \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n+2)}\right]^2\frac{2n+2}{2n+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2(n+1)}$$

5[1]. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса a находится коаксиальный с ней провод радиуса b. Показать, что самоиндукция такой линии на единицу длины равна

$$\frac{1}{8}\frac{\mu_v}{\pi}\left[1+4\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

6. Плоский контур произвольной формы лежит на плоской поверхности полубесконечной среды с проницаемостью μ. Пренебрегая полем внутри провода, показать, что присутствие среды увеличивает самоиндукцию контура в $2\mu/(\mu+\mu_v)$ раз.

7*. Длинная прямолинейная нить тока пересекает под прямым углом диаметр (или его продолжение) тонкой круглой петли, по которой течет ток, и образует с ее плоскостью острый угол α. Показать, что коэффициент взаимной индукции равен

$$\mu_v\left[c\sec\alpha-(c^2\sec^2\alpha-a^2)^{1/2}\right]$$

или

$$\mu_v c\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\alpha\right),$$

в зависимости от того, проходит ли прямолинейный ток вне или внутри кругового тока; здесь a — радиус окружности, c — расстояние прямолинейного тока от центра петли.

8. Цилиндрический провод с проницаемостью μ, окруженный концентрично толстым слоем изоляции с проницаемостью μ_1, помещен в жидкость с проницаемостью μ_2 перпендикулярно к полю с индукцией B. Показать, что поперечная сила на единицу длины, действующая на поверхность изоляции, равна

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}IB,$$

а поперечная сила, действующая на поверхность проводника, равна

$$\frac{2\mu_1 IB}{\mu_1+\mu_2},$$

причем результирующая сила равна IB.

9. В некоторой точке вблизи контура, по которому течет единичный ток, создается магнитная индукция B. Показать, что если поместить небольшую сферу радиуса a и проницаемости μ так, чтобы центр сферы был в этой точке, то самоиндукция контура увеличивается приблизительно на величину

$$\frac{4\pi a^3 B^2(K_m-1)}{\mu_v(K_m+2)}.$$

---

[1]) Ввиду ошибки у автора задача приведена в измененном виде.—*Прим. перев.*

10. Цилиндрический слой проницаемости μ с внутренним и внешним радиусами a и b окружает два параллельных провода, по которым текут токи в противоположных направлениях. Эти провода расположены параллельно оси (в одной плоскости с нею) и находятся от нее на одинаковом расстоянии c. Показать, что наличие слоя увеличивает самоиндукцию на единицу длины двухпроводной линии на величину

$$\frac{2\mu_v (K_m^2 - 1) J}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^{4n+2} - b^{4n+2}) (c/a)^{4n+2}}{(2n+1)[(K_m-1)^2 a^{4n+2} - (K_m+1)^2 b^{4n+2}]},$$

где $\mu_v = \mu/K_m$.

11*. Круглая петля радиуса a концентрична со сферическим слоем проницаемости μ, имеющим внутренний и внешний радиусы соответственно b и c. Показать, что наличие слоя увеличивает самоиндукцию петли приблизительно на величину

$$\frac{\mu_v \pi a^4 (K_m - 1)(K_m + 2)(c^3 - b^3)}{2b^3 [(K_m+2)(2K_m+1) c^3 - (K_m-1)^2 2b^3]},$$

где $\mu_v = \mu/K_m$, а радиус a очень мал по сравнению с b и c.

12. Координаты проволочного кольца радиуса a в вытянутой сфероидальной системе координат равны $\xi = \xi_1$ и $\eta = \eta_1$. В кольцо помещается вытянутый сфероид проницаемости μ, поверхность которого определяется уравнением $\eta = \eta_0$. Показать, что вследствие этого самоиндукция кольца возрастает на величину

$$\frac{\pi\mu_v a^2 (K_m - 1)}{c_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \frac{[P_n^1(\xi_1)]^2 [Q_n^1(\eta_1)]^2 P_n^1(\eta_0) P_n(\eta_0)}{Q_n^1(\eta_0) P_n(\eta_0) - K_m Q_n(\eta_0) P_n^1(\eta_0)},$$

где $\mu_v = \mu/K_m$.

13. Координаты двух проволочных колец радиусов a_1 и a_2 в вытянутой сфероидальной системе координат равны η_1, ξ_1 и η_2, ξ_2. В кольца помещается вытянутый сфероид проницаемости μ, поверхность которого определяется уравнением $\eta = \eta_0$. Показать, что наличие сфероида приводит к увеличению взаимной индукции колец на величину

$$\frac{\pi\mu_v a_1 a_2 (K_m - 1)}{c_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \frac{P_n^1(\xi_1) Q_n^1(\eta_1) P_n^1(\xi_2) Q_n^1(\eta_2) P_n^1(\eta_0) P_n(\eta_0)}{Q_n^1(\eta_0) P_n(\eta_0) - K_m Q_n(\eta_0) P_n^1(\eta_0)},$$

где $\mu_v = \mu/K_m$.

14. Центры двух параллельных коаксиальных проволочных петель радиусов a и c находятся на расстоянии s друг от друга. Показать, что взаимная индукция между петлями при внесении коаксиально им бесконечного цилиндра радиуса b и проницаемости μ возрастает на величину

$$2\mu_v ac \int_0^{\infty} \Phi(k) K_1(ka) K_1(kc) \cos ks \, dk,$$

где $\mu_v = \mu/K_m$, а выражение для $\Phi(k)$ дано в задаче 28 гл. VII.

15. Показать, что самоиндукция проволочной петли радиуса a при внесении коаксиально ей бесконечного цилиндра радиуса b и проницаемости μ увеличивается на величину

$$2\mu_v a^2 \int_0^{\infty} \Phi(k) [K_1(ka)]^2 \, dk,$$

где $\mu_v = \mu/K_m$, а выражение для $\Phi(k)$ дано в задаче 28 гл. VII.

16. Имеется два контура, один из которых образован участком поверхности цилиндра $\rho = a_1$, заключенным между $z = +c_1$ и $z = -c_1$, а другой — участком поверхности цилиндра $\rho = a_2$ ($a_2 > a_1$), заключенным между $z = +c_2$ и $z = -c_2$. Показать, что если токи в контурах (кольцах) распределяются равномерно, то взаимная индукция между ними равна

$$\frac{2\upsilon a_1 a_2}{c_1 c_2} \int_0^{\infty} k^{-2} I_1(ka_1) K_1(ka_2) \sin kc_1 \sin kc_2 \, dk.$$

17. Используя результат задачи 30 гл. VII, показать, что если плоскость круглой проволочной петли радиуса a параллельна бесконечной пластине толщиной t и

проницаемости μ и находится от нее на расстоянии b, то самоиндукция петли возрастает на величину

$$\Delta L_{11} = \beta\left[M_0 - (1-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{2(n-1)}M_n\right],$$

где

$$M_n = \frac{2\mu_v a}{k_n}\left[\left(1-\frac{k_n^2}{2}\right)K_n - E_n\right], \quad \beta = \frac{\mu-\mu_v}{\mu+\mu_v}, \quad k_n^2 = \frac{a^2}{a^2+(nt+b)^2},$$

а K_n и E_n — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля k_n.

18. Бесконечная пластина толщиной t и проницаемостью μ помещается параллельно между петлями, изображенными на фиг. 80, *а*. Показать, что взаимная индукция между петлями теперь становится равной

$$M = 2\mu_v (ab)^{1/2}(1-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{2n}}{k_n}\left[\left(1-\frac{k_n^2}{2}\right)K_n - E_n\right],$$

где

$$\beta = \frac{\mu-\mu_v}{\mu+\mu_v}, \qquad k_n^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2+(c+2nt)^2},$$

а K_n и E_n — полные эллиптические интегралы модуля k_n.

19. Показать, что самоиндукция соленоида с малым шагом намотки, имеющего N витков, длину c и диаметр d, равна

$$\frac{1}{3}\mu N^2 d\{\operatorname{cosec}\alpha[(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)E + K] - \operatorname{tg}^2\alpha\},$$

где $d/c = \operatorname{tg}\alpha$, а K и E — полные эллиптические интегралы модуля $\sin\alpha$.

20. Проволочное кольцо радиуса a коаксиально с соленоидом радиуса b, имеющим n витков на единицу длины. Пусть наибольшее расстояние от точки на кольце до ближнего конца соленоида равно c, а до дальнего конца равно d. Показать, пользуясь формулой (7.51) (без дальнейшего интегрирования), что сила взаимодействия между кольцом и соленоидом, когда по ним текут токи I и I', определяется выражением

$$2\mu n II'(ab)^{1/2}\left\{k_1^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}k_1^2\right)K_1 - E_1\right] - k_2^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}k_2^2\right)K_2 - E_2\right]\right\},$$

где модули полных эллиптических интегралов равны $k_1 = 2(ab)^{1/2}/c$ и $k_2 = 2(ab)^{1/2}/d$.

21. Два коаксиальных соленоида с малым шагом намотки, имеющие соответственно n и m витков на единицу длины и диаметр d, расположены так, что расстояние между ближними концами равно b, а между дальними концами равно c. Длина одного из соленоидов равна a. Показать, что их взаимная индукция выражается формулой

$$\frac{1}{6}\mu nmd^3\sum_{n=1}^{4}(-1)^n \sec\alpha_n[(1-\operatorname{tg}^2\alpha_n)E(k_n) + \operatorname{tg}^2\alpha_n K(k_n)],$$

где $\operatorname{tg}\alpha_1 = c/d$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = (c-a)/d$, $\operatorname{tg}\alpha_3 = b/d$, $\operatorname{tg}\alpha_4 = (a+b)/d$, $k_n = \cos\alpha_n$.

22. Показать, что если по соленоидам, рассмотренным в задаче 21, текут токи I и I', то сила взаимодействия между соленоидами равна

$$\frac{1}{2}\mu d^2 nmII'\sum_{n=1}^{4}(-1)^n \sin\alpha_n \sec^2\alpha_n[E(k_n) - K(k_n)].$$

23. Оси двух колец радиусов a и b параллельны и расположены на расстоянии c друг от друга. Расстояние между плоскостями колец равно d. Показать при помощи соотношения (5.451), что взаимная индукция между кольцами определяется выражением

$$\frac{\mu ab}{\pi}\int_0^{\infty} I_1(ka)\, I_1(kb)\, K_0(kc)\cos kd\, dk,$$

если $c > a+b$.

24. Показать, что в случае $b > a+c$ взаимная индукция, определяемая в предыдущей задаче, равна

$$\frac{\mu ab}{\pi}\int_0^\infty K_1(ka)\,I_1(kb)\,I_0(kc)\cos kd\,dk.$$

25. Пользуясь выражением (5.364), показать, что результаты задач 23 и 24 можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\mu ab\int_0^\infty J_1(ka)\,J_1(kb)\,J_0(kc)\,e^{-kd}\,dk.$$

26. Два соленоида, радиусы которых равны a и b, а длины A и B, имеют соответственно m и n витков на единицу длины. Оси соленоидов параллельны и находятся на расстоянии c друг от друга; расстояние между плоскостями центральных витков равно d. Показать (см. задачу 23), что при $c > a+b$ взаимная индукция соленоидов равна

$$\frac{4\mu abmn}{\pi}\int_0^\infty k^{-2}I_1(ka)\,I_1(kb)\,K_0(kc)\sin kA\sin kB\cos kd\,dk.$$

27. Пусть соленоид радиуса a (см. задачу 26) расположен внутри соленоида радиуса b. Исходя из решения задачи 24, показать, что

$$M=\frac{4\mu abmn}{\pi}\int_0^\infty k^{-2}K_1(ka)\,I_1(kb)\,I_0(kc)\sin kA\sin kB\cos kd\,dk.$$

28. Исходя из решения задачи 26, написать выражения для взаимной индукции в задачах 26 и 27 в виде

$$2\mu ab\int_0^\infty k^{-2}J_1(ka)\,J_1(kb)\,J_0(kc)\,\mathrm{sh}\,kA\,\mathrm{sh}\,kB\,e^{-kd}\,dk.$$

29. Взаимное положение колец, радиусы которых равны a и b, определено, если заданы величины: c — кратчайшее расстояние между осями колец, A и B — расстояния центров колец от линии c и β — угол между осями. Показать, что взаимная индукция определяется в виде

$$\frac{\mu ab}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\cos\varphi\cos\varphi'\cos\beta+\sin\varphi\sin\varphi')\,d\varphi\,d\varphi'}{[D^2+a^2+b^2+2ab(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\cos\beta)-2f(\varphi,\varphi')]^{1/2}},$$

где $D=(c^2+A^2+B^2-2AB\cos\beta)^{1/2}$ — расстояние между центрами колец и

$$f(\varphi,\varphi')=a(c\cos\varphi+B\sin\varphi\sin\beta)+b(c\cos\varphi'+A\sin\varphi'\sin\beta).$$

30. Двухпроводная линия помещается симметрично между двумя параллельными листами бесконечной проницаемости, находящимися один от другого на расстоянии a, так что плоскость, проведенная через два провода, перпендикулярна к плоскостям листов. Расстояние между проводами равно c. Показать, что присутствие листов увеличивает самоиндукцию (на единицу длины) двухпроводной линии на величину

$$\frac{\mu}{\pi}\ln\left\{\frac{2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\pi c/a\right)}{\pi c}\right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)
Curtis H. L., Electrical Measurements, McGraw-Hill, 1937.
Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XV, Berlin, 1927.
Gray A., Absolute Measurements in Electricity and Magnetism, v. II, Macmillan, 1888.
Heaviside O., Electrical Papers, Boston, 1925.
Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.
Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. II, Oxford, 1881.
Moullin E. B., Principles of Electromagnetism, Oxford, 1932.
Planck M. K. E. L., Theorie der Elektrizitit und Magnetismus, Berlin, 1932.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, Leipzig, 1932.

Глава IX

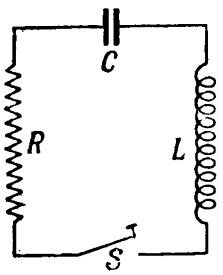
ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 1. Неустановившиеся электрические процессы. Термин «неустановившийся» (переходный) процесс употребляется для обозначения явлений, наступающих после внезапного изменения в электрическом контуре, по которому течет ток. Строго говоря, эти явления оказываются переходными лишь в том случае, когда в контуре содержится сопротивление, рассеивающее энергию. Практически сопротивление всегда имеется, поэтому переходные явления редко продолжаются более нескольких секунд, даже в самом крайнем случае. В качестве примеров возникновения переходных явлений отметим разряд или зарядку конденсатора, внезапное изменение магнитного потока, охватывающего контур, или внезапное выключение или включение источника э. д. с. В этой главе мы рассмотрим неустановившиеся процессы в контурах, содержащих индуктивность и сопротивление, емкость и сопротивление или все три элемента сразу, считая источник э. д. с., если он, конечно, имеется, постоянным.

В общем случае, когда электрическая цепь предоставлена самой себе, т. е. она не получает и не отдает энергию, все процессы в ней можно описать при помощи линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, в котором в качестве независимой переменной взято время, а зависимыми переменными являются заряды и токи. Решение этого уравнения, содержащее произвольные постоянные, число которых равно порядку уравнения, называется дополнительной функцией. Значение произвольных постоянных находится из начальных условий. При наличии источника постоянной э. д. с. дифференциальное уравнение будет содержать постоянный член. В этом случае по прошествии достаточно длительного времени останутся постоянные токи или заряды на конденсаторах, так как все члены дополнительной функции обратятся практически в нуль. Эти токи или заряды, не включающиеся в дополнительную функцию, соответствуют стационарному состоянию системы. Они выражаются частным интегралом дифференциального уравнения. Сумма дополнительной функции и частного интеграла или, пользуясь терминологией, принятой в электротехнике, сумма нестационарного и стационарного решений является полным решением задачи.

§ 2. Энергетические соотношения в электрической цепи. В электрическом контуре, содержащем емкость, сопротивление и индуктивность, энергия может накапливаться в электростатическом поле, создаваемом постоянными зарядами на конденсаторах, а также в виде кинетической энергии магнитного поля, возбуждаемого движущимися зарядами в индуктивностях; кроме того, в сопротивлениях происходит рассеивание энергии в виде тепла. Без внешних воздействий электрическая энергия, в конечном счете, излучится или превратится в тепловую энергию. Потери вследствие излучения будут нами рассмотрены ниже в связи с электромагнитными

волнами. Там мы увидим, что эти потери сильно зависят от скорости изменения тока в контуре. Однако для колебаний с частотой до 100 *кгц* и даже несколько выше этими потерями по сравнению с потерями в сопротивлении обычно можно пренебречь, что и будет принято в этой главе. Потенциальная энергия контура [см. формулу (2.15)] равна $W_c=\frac{1}{2}\sum q_s^2/c_s$ джоулей, где заряд q_s выражен в кулонах, емкость c_s — в фарадах. Кинетическая энергия контура [см. формулу (8.35)] равна $W_L=\frac{1}{2}\sum L_r i_r^2$ джоулей, где самоиндукция L_r выражена в генри, ток i_r — в амперах. Мощность рассеяния [см. формулу (6.11)] равна $P=\frac{1}{2}\sum i_q^2 R_q$ ватт, где сопротивление R_q выражено в омах, ток i_q — в амперах. Таким образом, общий запас энергии магнитного и электрического полей равен



Фиг. 84.

$$W=\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{q_s^2}{c_s}+\sum_{r=1}^{m}L_r i_r^2\right). \tag{9.1}$$

Скорость уменьшения этой энергии должна быть равна скорости теплового рассеяния, т. е.

$$\sum_{q=1}^{p}R_q i_q^2=-\frac{dW}{dt}, \text{ или } \sum_{s=1}^{n}\frac{q_s\dot{q}_s}{c_s}+\sum_{r=1}^{m}i_r\dot{i}_r L_r+\sum_{q=1}^{p}R_q i_q^2=0, \tag{9.2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

§ 3. Контур, состоящий из емкости, индуктивности и сопротивления. В контуре, показанном на фиг. 84, L, C и R включены последовательно, так что $\dot{q}=i$, $\ddot{q}=\dot{i}$. В этом случае, после деления на общий множитель i, уравнение (9.2) принимает вид

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=0. \tag{9.3}$$

Согласно выражению (8.39), $L\dot{i}=L\ddot{q}$ представляет собой падение напряжения в катушке самоиндукции. Из закона Ома (6.6) следует, что $Ri=R\dot{q}$ является падением напряжения на сопротивлении. Точно так же, согласно формуле (2.1), величина q/c является падением напряжения на конденсаторе, так что уравнение (9.3) выражает просто закон Кирхгофа (см. § 5, гл. VI), а именно: сумма падений напряжения вдоль замкнутого контура равна нулю.

Общим решением уравнения (9.3) будет

$$q=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}, \tag{9.4}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые начальными значениями величин q и i, а через k_1 и k_2 обозначены величины

$$-\frac{R}{2L}+\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\right)^{1/2}, \quad -\frac{R}{2L}-\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$

Если $(R/2L)>(LC)^{-1/2}$, то k_1 и k_2 — величины действительные, и изменение тока имеет апериодический характер. Введем в решение (9.4) величину

$$\omega=\left|\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\right)^{1/2}\right|. \tag{9.5}$$

Тогда

$$q = e^{-(R/2L)\,t}\,(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) = e^{-(R/2L)\,t}\,(A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t) =$$
$$= e^{-(R/2L)\,t}\,D\,\mathrm{ch}\,(\omega t + \psi), \qquad (9.6)$$

где $A = C_1 + C_2$, $B = C_1 - C_2$, $D = (A^2 - B^2)^{1/2}$ и $\mathrm{th}\,\psi = B/A$.

В случае $(R/2L) < (LC)^{-1/2}$ k_1 и k_2 — величины комплексные, и изменение тока носит колебательный характер. Заменяя в решении (9.6) ω на $j\omega$, получим решение в виде

$$q = e^{-(R/2L)t}\,(C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}) = e^{-(R/2L)t}\,(A\cos\omega t + B'\sin\omega t) =$$
$$= e^{-(R/2L)t} D' \cos(\omega t + \varphi), \qquad (9.7)$$

где

$$A = C_1 + C_2, \quad B' = j(C_1 - C_2), \quad D' = (A^2 + B'^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = -B'/A.$$

Период колебаний T равен $2\pi/\omega$, а собственная частота контура равна $\omega/2\pi$. Логарифмический декремент затухания α, определяемый как логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, равен

$$\alpha = \ln\left[e^{-(R/2L)t} e^{+[R(t+T)/2L]}\right] = \frac{RT}{2L} = \frac{\pi R}{\omega L}. \qquad (9.8)$$

Если $\omega = 0$, то говорят, что контур имеет критическое затухание. Разложим в решении (9.7) cos и sin в ряд (Двайт, 415.01, 415.02), отбросим все члены, кроме первого, и вводя B'' вместо $\omega B'$, получим решение (9.7) в виде

$$q = e^{-Rt/2L}(A + B''t). \qquad (9.9)$$

§ 4. Зарядка и разряд конденсатора. Если контур (см. фиг. 84) замкнуть при помощи ключа S в момент времени $t = 0$, когда на конденсаторе имеется заряд q_0, то, полагая в решениях (9.6), (9.7) или (9.9) $q = q_0$ и $t = 0$, получим

$$A = q_0. \qquad (9.10)$$

Падение напряжения в катушке самоиндукции $L(di/dt) = L(d^2q/dt^2)$ должно быть конечным все время, включая и начальный момент. Таким образом, при $t = 0$ $i = \dot{q} = 0$. Дифференцируя выражения (9.6), (9.7) или (9.9) по времени и подставляя в них эти значения, получим

$$B = B' = \frac{B''}{\omega} = \frac{R}{2\omega L} A. \qquad (9.11)$$

Тогда в любой момент времени t заряд на конденсаторе равен

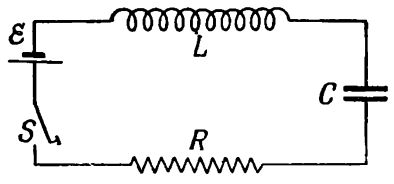
при $\frac{R}{2L} > (LC)^{-1/2}$ $\quad q = q_0 e^{-Rt/2L}\left(\mathrm{ch}\,\omega t + \frac{R}{2\omega L}\mathrm{sh}\,\omega t\right)$, (9.12)

при $\frac{R}{2L} = (LC)^{-1/2}$ $\quad q = q_0 e^{-Rt/2L}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)$, (9.13)

при $\frac{R}{2L} < (LC)^{-1/2}$ $\quad q = q_0 e^{-Rt/2L}\left(\cos\omega t + \frac{R}{2\omega L}\sin\omega t\right)$. (9.14)

Ток i в каждом случае равен $\dot{q}$. На фиг. 86, *а* показаны кривые зависимости q от t, где буквами A, B, C обозначены соответственно случаи (9.12)—(9.14).

Цепь для зарядки конденсатора показана на фиг. 85. Уравнение Кирхгофа для этого контура имеет точно такой же вид, как и уравнение (9.3), только в правую часть теперь будет входить $\mathscr{E}$ — э.д.с. батареи. Мы можем решить это уравнение двумя способами: 1) ввести новую переменную $y = q - C\mathscr{E}$, сведя тем самым новое уравнение к форме (9.3); 2) добавить к общему решению (9.6), (9.7) и (9.9) однородного уравнения частное решение, соответствующее стационарному состоянию, которое, как нетрудно убедиться, равно $q = C\mathscr{E}$. При любом способе, полагая $q = 0$ при $t = 0$, получим



Фиг. 85.

$$A = -C\mathscr{E}. \tag{9.15}$$

Дифференцирование дает для i прежнее выражение, поэтому, полагая $i = 0$ при $t = 0$, имеем, как и раньше,

$$B = B' = \frac{B''}{\omega} = \frac{R}{2\omega L} A. \tag{9.16}$$

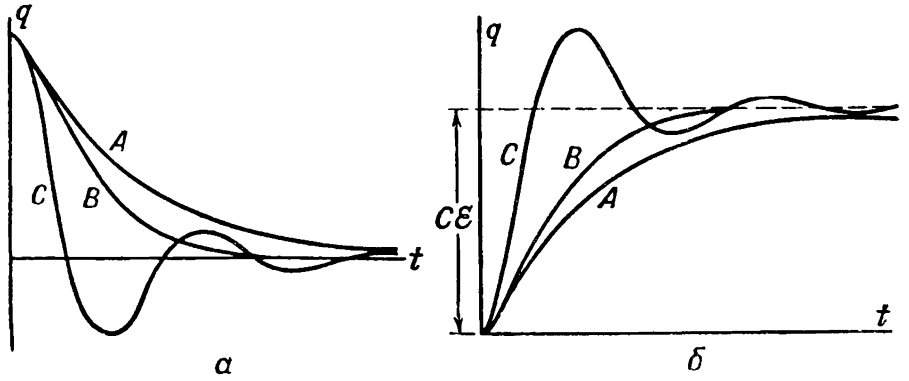
Полное решение для случаев (9.12) — (9.14) имеет соответственно вид

$$q = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-Rt/2L}\left(\operatorname{ch}\omega t + \frac{R}{2\omega L}\operatorname{sh}\omega t\right)\right] \tag{9.17}$$

$$q = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-Rt/2L}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)\right], \tag{9.18}$$

$$q = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-Rt/2L}\left(\cos\omega t + \frac{R}{2\omega L}\sin\omega t\right)\right] \tag{9.19}$$

Значение тока в каждом случае равно $i = \dot{q}$. Кривые зависимости q от времени t показаны на фиг. 86, *б*, где буквами A, B, C обозначены



Фиг. 86. а—разряд конденсатора, включенного последовательно с активным сопротивлением и индуктивностью, *б*—зарядка этого же конденсатора; *A*—в случае большого затухания в контуре, *B*—в случае критического затухания, *C*—в случае малого затухания.

соответственно случаи (9.17) — (9.19). В случае $R = 0$ выражение (9.14) для разряда конденсатора принимает вид

$$q = q_0 \cos\left[t\,(LC)^{-1/2}\right], \tag{9.20}$$

а выражение (9.19) для зарядки конденсатора будет

$$q = C\mathscr{E}\left\{1 - \cos\left[t\,(LC)^{-1/2}\right]\right\}, \tag{9.21}$$

т. е. в обоих случаях имеем незатухающие колебания, продолжающиеся бесконечно долго, с частотой $[2\pi (LC)^{1/2}]^{-1}$.

В случае $L=0$ $\omega \to \infty$, так что $2\,\mathrm{sh}\,\omega t \approx e^{\omega t}$ и $2\,\mathrm{ch}\,\omega t \approx e^{\omega t}$. Разлагая выражение (9.5) в ряд (Двайт, 5.3) и отбрасывая члены, содержащие L в числителе, получаем

$$\omega = \frac{R}{2L}\left(1 - \frac{4L}{R^2C}\right)^{1/2} \approx \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC},$$

так что выражения (9.12) и (9.17) принимают соответственно вид

$$q = q_0 e^{-t/RC}, \tag{9.22}$$

$$q = C\mathscr{E}\,(1 - e^{-t/RC}). \tag{9.23}$$

Таким образом, конденсатор разряжается через сопротивление по экспоненциальному закону.

§ 5а. Нарастание и спадание тока в катушке индуктивности. Если в контурах, изображенных на фиг. 84 и 85, конденсатор отсутствует, то уравнения, выражающие закон Кирхгофа, будут иметь вид

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0, \tag{9.24}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\mathscr{E}}{L}. \tag{9.25}$$

Введем в уравнение (9.25) новую переменную $x = i - (\mathscr{E}/R)$, тогда оба уравнения (9.24) и (9.25) можно записать в форме

$$\frac{dx}{dt} + \frac{R}{L} x = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

После интегрирования имеем

$$\ln x = -\frac{R}{L} t + C_1, \quad \text{или} \quad x = Ae^{-(R/L)t}. \tag{9.26}$$

Таким образом, если в момент времени $t=0$ $i=i_0$, то в последующие моменты времени ток будет уменьшаться по закону

$$i = i_0 e^{-(R/L)t}. \tag{9.27}$$

Если же контур, содержащий последовательно включенные сопротивление, индуктивность и батарею, замкнуть в момент времени $t=0$ $(i=0)$, тогда, согласно уравнению (9.25) и решению (9.26), получим нарастание тока по закону

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}\,(1 - e^{-(R/L)t}). \tag{9.28}$$

Постоянная времени контура равна, по определению,

$$\lambda = \frac{L}{R}. \tag{9.29}$$

Для спадающего тока это есть время, в течение которого величина тока уменьшается относительно своего первоначального значения в e раз.

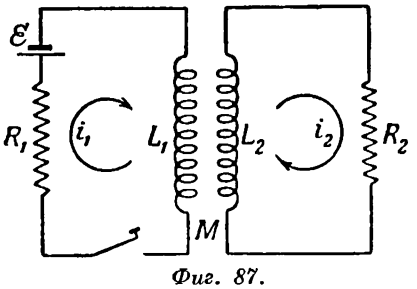
§ 5б. Индуктивно связанные контуры. Как было показано в § 4 гл. VIII [см. выражение (8.17)], если магнитное поле одного контура охватывает второй контур, то изменение тока в одном из контуров наводит в другом контуре э. д. с. индукции. Таким образом, написав уравнение

Кирхгофа для цепи, изображенной на фиг. 87, мы должны включить в него член (8.17), после чего получим

$$L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = \mathscr{E}, \tag{9.30}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0. \tag{9.31}$$

Если магнитные потоки, создаваемые токами i_1 и i_2, складываются, то перед M принято писать знак плюс; если же потоки направлены противоположно, то пишут знак минус. Исключим из уравнения (9.30) величину i_2. Разрешив уравнение (9.30) относительно di_2/dt, подставим полученный результат в уравнение (9.31), разрешив которое относительно $R_2 i_2$ и умножив затем на M, найдем



Фиг. 87.

$$\mp MR_2 i_2 = (L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} + L_2R_1 i_1 - L_2\mathscr{E}. \tag{9.32}$$

Для получения di_2/dt продифференцируем это выражение и подставим в уравнение (9.30), которое после умножения на R_2 примет вид

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + (R_1L_2 + R_2L_1)\frac{di_1}{dt} + R_1R_2 i_1 = R_2\mathscr{E}. \tag{9.33}$$

Точно так же, как и в § 4, мы можем сделать правую часть этого уравнения равной нулю, введя новую переменную $i_1' = i_1 - (\mathscr{E}/R_1)$, или можем прибавить частное решение, соответствующее стационарному режиму, $i_1 = \mathscr{E}/R_1$, к общему решению однородного уравнения, получающегося из уравнения (9.33), если правую часть положить равной нулю. Полное решение имеет вид, аналогичный решению (9.4),

$$i_1 = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} + \frac{\mathscr{E}}{R_1} = e^{-\alpha t}(A\operatorname{ch}\beta t + B\operatorname{sh}\beta t) + \frac{\mathscr{E}}{R_1}. \tag{9.34}$$

Здесь k_1 и k_2 — действительные величины, равные $-\alpha \pm \beta$, а

$$\alpha = \frac{R_1L_2 + R_2L_1}{2(L_1L_2 - M^2)}, \tag{9.35}$$

$$\beta = \frac{[(R_1L_2 - R_2L_1)^2 + 4M^2R_1R_2]^{1/2}}{2(L_1L_2 - M^2)} \tag{9.36}$$

Когда $t = 0$, $i_1 = 0$, отсюда $A = -\mathscr{E}/R_1$.

Очевидно, общее решение уравнений (9.30) и (9.31) будет одинаковым, но стационарное значение для i_2 равно нулю, так что решением для i_2 будет

$$i_2 = e^{-\alpha t}(C\operatorname{ch}\beta t + D\operatorname{sh}\beta t). \tag{9.37}$$

В начальный момент времени ($t = 0$) $i_2 = 0$, отсюда $C = 0$.

Подставляя решения (9.34) и (9.37) в уравнение (9.31) и учитывая, что $A = \mathscr{E}/R_1$ и $C = 0$, после сокращения на $e^{-\alpha t}$ получим

$$P\operatorname{sh}\beta t + Q\operatorname{ch}\beta t = 0,$$

где

$$P = \mp M(\alpha R_1B + \beta\mathscr{E}) + DR_1(R_2 - \alpha L_2) \tag{9.38}$$

и

$$Q = \pm M(\beta R_1B + \alpha\mathscr{E}) + DR_1\beta L_2. \tag{9.39}$$

Поскольку уравнение (9.31) удовлетворяется для всех значений t, величины P и Q должны быть приравнены нулю по отдельности. Разрешая полученные уравнения относительно B и D и подставляя затем выражения для A, B, C и D в решения (9.34) и (9.37), получаем

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t + \frac{(\alpha^2-\beta^2)L_2 - \alpha R_2}{\beta R_2} e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t\right), \tag{9.40}$$

$$i_2 = \mp\frac{(\alpha^2-\beta^2)M\mathscr{E}}{\beta R_1 R_2} e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t. \tag{9.41}$$

Из выражения (9.40) видно, что ток i_1 асимптотически приближается к своему конечному значению $\mathscr{E}/R_1$. Полагая $di_2/dt = 0$ и разрешая полученное уравнение относительно t, находим, что i_2 достигает максимума при

$$t = \frac{1}{\beta}\operatorname{ar\,th}\frac{\beta}{\alpha} \tag{9.42}$$

и затем асимптотически стремится к нулю.

В момент, когда $i_2 = 0$ и $i_1 = \mathscr{E}/R_1$, разомкнем цепь (см. фиг. 87) посредством выключателя и исследуем полученный эффект. Если бы мы разомкнули цепь мгновенно, прекратив ток i_1 в нулевой промежуток времени, то производная di_1/dt в этот момент оказалась бы бесконечной, и, согласно формуле (8.39), на выключателе возникло бы бесконечно большое напряжение. Поскольку ни одна физическая система не выдержит такого напряжения, то это значение никогда не может быть достигнуто. В действительности, в момент разрыва цепи небольшая емкость, всегда существующая между контактами и проводами цепи, заряжается до тех пор, пока потенциал не упадет. По этой причине очень трудно найти точные начальные условия для i_1.

В обычных условиях мгновенное прекращение тока i_1 должно индуцировать в индуктивности второго контура бесконечную э. д. с., порождающую искрение, если распределенная емкость контура не будет достаточно большой. Впрочем, существует важный практический случай, где это утверждение неверно. Предположим, что вся самоиндукция L_2 второго контура равна взаимной индукции M и что можно найти такое отношение токов i_1' и i_2', что при протекании тока i_1' или i_2' каждый виток самоиндукции L_2 будет охватывать одинаковый поток. Тогда во втором контуре можно мгновенно установить такой ток i_2, что поток $L_2 i_2$ через этот контур будет одинаков с потоком $M\mathscr{E}/R_1$, существовавшим до того, как прекратился ток i_1. В этом случае э. д. с. во втором контуре конечна, а начальное значение тока i_2, получаемое приравниванием потоков, равно

$$(i_2)_0 = \frac{M\mathscr{E}}{L_2 R_1}. \tag{9.43}$$

Этот случай можно приближенно осуществить на практике, если L_1 и L_2 представляют собой однослойные соленоиды одинаковой длины, плотно намотанные на одном каркасе.

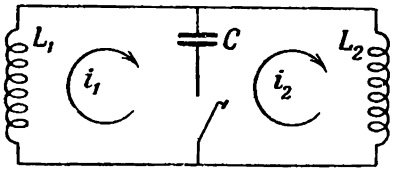
Закон Кирхгофа для тока i_2 выразится уравнением

$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0. \tag{9.44}$$

Решением этого уравнения, дающим правильное начальное значение i_2, будет, как легко проверить, следующее выражение:

$$i_2 = \frac{M\mathscr{E}}{L_2 R_1} e^{-(R_2/L_2)t}. \tag{9.45}$$

§ 6. Кинетическая энергия и электрокинетический импульс. Из формулы (8.39) следует, что мгновенное изменение потока $L_{11}i_1$ должно было бы привести к возникновению бесконечной э. д. с. в катушке индуктивности. Как было показано в предыдущем параграфе, это физически невозможно, поэтому $L_{11}i_1$ должно иметь одинаковое значение до и после внезапного изменения в электрической цепи. Величина $L_{11}i_1$ называется электрокинетическим импульсом, потому что она находится в такой же связи с кинетической энергией $L_{11}i_1^2/2$, в каком находится механический импульс mv с механической кинетической энергией $\frac{1}{2}mv^2$. Только что установленный принцип неизменности потока известен так же, как принцип сохранения электрокинетического импульса. Поскольку для рассеяния в сопротивлении конечного количества энергии требуется при наличии конечного тока конечное время (как и для зарядки конденсатора на конечную величину), то кинетическая энергия $\frac{1}{2}L_{11}i_1^2$ в контуре должна также оставаться постоянной при мгновенном изменении в цепи. Эти законы сохранения часто дают возможность сразу написать начальные значения переходных токов. В цепях, где нет рассеяния энергии, обе величины — полный электрокинетический импульс и полная энергия — остаются постоянными. Пользуясь этим, можно ответить на многие вопросы без решения дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, систему, изображенную на фиг. 88. Пусть вначале конденсатор имеет заряд Q_0 и выключатель замыкает цепь; требуется найти максимальные значения токов i_1 и i_2. Электрокинетический импульс остается равным нулю, поэтому



Фиг. 88.

$$L_1 i_1 + L_2 i_2 = 0. \tag{9.46}$$

Общая энергия остается равной $Q_0^2/(2C)$, поэтому, когда конденсатор разрядится, кинетическая энергия будет равна

$$L_1 (i_1^2)_m + L_2 (i_2^2)_m = \frac{Q_0^2}{C}. \tag{9.47}$$

Решив эти уравнения для максимальных значений i_1 и i_2, получим

$$(i_1)_m = Q_0 \left[\frac{L_2}{L_1 C (L_1 + L_2)} \right]^{1/2}, \quad (i_2)_m = Q_0 \left[\frac{L_1}{L_2 C (L_1 + L_2)} \right]^{1/2} \tag{9.48}$$

§ 7. Общий вид уравнений переходных процессов в цепях. Воспользуемся методом, аналогичным методу, примененному в § 9 и 10 гл. VI при рассмотрении электрических цепей, состоящих из активных сопротивлений. Введем n независимых токов, как и в § 9 гл. VI, так, чтобы в каждой ветви цепи могли протекать различные токи. В этой связи следует заметить, что взаимная индукция между двумя контурами рассматривается как самоиндукция некоторого проводника, общего для обоих контуров. При этом условии, если цепь содержит q узлов и p ветвей, величина n определяется формулой

$$n = p - q + 1. \tag{9.49}$$

Активные сопротивления будут обозначены так же, как и в § 9 гл. VI, т. е. R_{rs} — общее сопротивление для контуров, по которым текут токи i_r и i_s; R_r — сопротивление, по которому течет один ток i_r; R_{rr} — полное сопротивление контура, по которому течет ток i_r. Обозначение индукций

осложняется из-за наличия взаимных индукций. Если L'_{rs} – общая самоиндукция контуров, по которым текут токи i_r и i_s, а M_{rs} – взаимная индукция между ними, то, по определению, самоиндукция L_{rs} будет равна

$$L_{rs} = L'_{rs} \pm M_{rs}. \tag{9.50}$$

Знак минус соответствует случаю, когда взаимная индукция M_{rs} и самоиндукция L'_{rs} направлены в противоположные стороны. Обозначим через L'_r самоиндукцию катушки, в которой протекает один ток i_r, и через L_{rr} полную самоиндукцию контура, по которому протекает ток i_r, так что если ни по одному из контуров не проходит более чем два тока, то

$$L_{rr} = L'_r + L'_{1r} + L'_{2r} + \quad + L'_{nr} = L_r + L_{1r} + L_{2r} + \ldots + L_{nr}. \tag{9.51}$$

Заметим, что, согласно этому определению, L_r включает в себя и взаимную индукцию.

В контурах, которые мы будем рассматривать, каждый конденсатор может заряжаться и разряжаться одним или более чем одним током, причем будем считать, что данному току соответствуют только конденсаторы, соединенные последовательно, а не параллельно. Как известно [см. формулу (2.4)], при последовательном соединении нескольких конденсаторов обратная величина результирующей емкости равна сумме обратных величин составляющих емкостей. С целью упрощения обозначений, введем новую величину, обратную емкости, так называемый потенциальный коэффициент S. Обозначим через S_{rs} общий потенциальный коэффициент контуров, по которым протекают токи i_r и i_s, через S_r потенциальный коэффициент, связанный с единственным током i_r, и через S_{rr} сумму потенциальных коэффициентов в контуре, по которому течет ток i_r, так что

$$S_{rr} = S_r + S_{1r} + S_{2r} + \quad + S_{nr}. \tag{9.52}$$

Если ни в одном из контуров не протекает более двух токов, то

$$R_{rs} = R_{sr}, \quad L_{rs} = L_{sr} \quad \text{и} \quad S_{rs} = S_{sr}. \tag{9.53}$$

Эти величины называются взаимными параметрами цепи, а R_{rr}, L_{rr} и S_{rr} называются параметрами контура.

Согласно формуле (9.1), сумма падений напряжений в контуре r, зависящая от тока i_r, равна

$$\left(L_{rr}\frac{d^2}{dt^2} + R_{rr}\frac{d}{dt} + S_{rr}\right) q_r = a_{rr} q_r, \tag{9.54}$$

где $dq_r/dt = i_r$, a_{rr} – дифференциальный оператор, действующий на q_r только в том случае, если он написан впереди q_r. Электродвижущая сила, наведенная в r-ом контуре током i_s, протекающим в общей с ним ветви, равна

$$\pm\left(L_{rs}\frac{d^2}{dt^2} + R_{rs}\frac{d}{at} + S_{rs}\right) q_s = a_{rs} q_s. \tag{9.55}$$

Перед скобкой следует взять знак плюс, если токи i_r и i_s имеют в общей ветви одинаковое направление, или минус, если их направление противоположно.

В случае, когда э.д.с. в цепи отсутствует, уравнение Кирхгофа можно записать, пользуясь операторным обозначением, в следующей форме:

$$\begin{aligned} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \quad & + a_{1n}q_n = 0, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \quad & + a_{2n}q_n = 0, \\ \cdot\ \cdot \quad & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \quad & + a_{nn}q_n = 0. \end{aligned} \tag{9.56}$$

§ 8. Решение для цепей общего вида. Мы видели [см. решения (9.4) и (9.6)], что для одной ячейки с оператором a_{11} решение имеет вид

$$q_1 = Q_1^{(1)} e^{p_1 t} + Q_1^{(2)} e^{p_2 t},$$

где p_1 и p_2 — два значения p, получаемые после подстановки Qe^{pt} в дифференциальное уравнение (9.3) и решения соответствующего алгебраического уравнения. Амплитуды $Q_1^{(1)}$ и $Q_1^{(2)}$ — это постоянные интеграции, определяемые заданными начальными условиями, а именно: во-первых, начальной энергией магнитного поля, создаваемого токами в катушках индуктивности, и, во-вторых, энергией электрического поля, создаваемого зарядами на конденсаторах. Вполне естественно попытаться сделать подобную же подстановку в систему дифференциальных уравнений (9.56). Решение будет найдено, если в результате этой подстановки мы сумеем определить величины p так, чтобы уловлетворить системе дифференциальных уравнений и, кроме того, получить число произвольных постоянных, равное максимальному числу начальных условий, которые мы можем задать. Число начальных условий, очевидно, равно числу независимых электрических и магнитных полей, определяющих энергию системы. Не следует задавать лишь ток, протекающий по сопротивлению, поскольку он не определяет энергию и мгновенно прекращается, как только выключается э. д. с. Если имеется n независимых контурных токов, то может существовать самое большее $2n$ постоянных интеграции. Таким образом, искомая подстановка имеет вид

$$q_r = Q_r e^{pt}. \tag{9.57}$$

Введем для удобства новую алгебраическую величину c_{rs}, определяемую соотношением

$$a_{rs} q_s = \pm (L_{rs} p^2 + R_{rs} p + S_{rs}) Q_s e^{pt} = c_{rs} Q_s e^{pt}. \tag{9.58}$$

Тогда, после сокращения на e^{pt}, система уравнений (9.56) примет вид

$$\begin{aligned} c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2 + \quad & + c_{1n}Q_n = 0, \\ c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2 + \quad & + c_{2n}Q_n = 0, \\ \cdot \qquad\qquad & \cdot \\ c_{n1}Q_1 + c_{n2}Q_2 + \quad & + c_{nn}Q_n = 0. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Как и в § 9 гл. VI, выпишем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11}c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21}c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdot \qquad \cdot \\ c_{n1}c_{n2} \cdots c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9.60}$$

Поскольку начальные условия, определяющие величины Q, не были использованы в уравнениях (9.59), то эти уравнения нельзя разрешить относительно Q_1, Q_2, ..., Q_n. Вследствие того, что все правые части — нули, мы получим, употребляя обычный метод детерминантов, следующий результат:

$$Q_r = \frac{0}{\Delta}. \tag{9.61}$$

Тривиальное решение $Q_r = 0$, очевидно, удовлетворяет системе уравнений (9.59), но не удовлетворяет начальным условиям. Ясно, что начальные условия могут быть удовлетворены совместно с соотношениями (9.61) только в том случае, если

$$\Delta = 0. \tag{9.62}$$

Этот детерминант называется характеристическим. Раскрывая его, получим для p алгебраическое уравнение степени не выше $2n$, так как p входит в выражение для c_{rs} не более, чем во второй степени. Решение этого уравнения дает возможные значения p, выраженные через параметры электрической цепи. Каждое значение p, полученное таким способом, определяет собственную частоту и затухание некоторого процесса в системе. Подставляя его в выражение (9.57), получим для ν-й частоты

$$q_r = Q_r^{(\nu)} e^{p_\nu t} \tag{9.63}$$

Для этой частоты система уравнений (9.59) принимает вид

$$\begin{aligned} c_{11}^{(\nu)}Q_1^{(\nu)} + c_{12}^{(\nu)}Q_2^{(\nu)} + \quad & + c_{1n}^{(\nu)}Q_n^{(\nu)} = 0, \\ c_{21}^{(\nu)}Q_1^{(\nu)} + c_{22}^{(\nu)}Q_2^{(\nu)} + \quad & + c_{2n}^{(\nu)}Q_n^{(\nu)} = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \\ c_{n1}^{(\nu)}Q_1^{(\nu)} + c_{n2}^{(\nu)}Q_2^{(\nu)} + \quad & + c_{nn}^{(\nu)}Q_n^{(\nu)} = 0. \end{aligned} \tag{9.64}$$

Эти уравнения совпадают по форме (за исключением того, что их правые части равны нулю) с уравнениями (6.32), поэтому соотношения, аналогичные соотношениям (6.37), не зависящим от правой части, выполняются и для этих уравнений. Таким образом, если $\Delta_{ks}^{(\nu)}$ — алгебраическое дополнение $c_{ks}^{(\nu)}$ в определителе (9.60), то

$$\frac{Q_r^{(\nu)}}{Q_s^{(\nu)}} = \frac{\Delta_{kr}^{(\nu)}}{\Delta_{ks}^{(\nu)}}.$$

Очевидно, этому уравнению удовлетворяют величины

$$Q_r^{(\nu)} = \Delta_{kr}^{(\nu)} G^{(\nu)} \quad \text{и} \quad Q_s^{(\nu)} = \Delta_{ks}^{(\nu)} G^{(\nu)}, \tag{9.65}$$

где $G^{(\nu)}$ — постоянная, соответствующая частоте ν. Можно положить k равным любому числу от 1 до n.

Полное выражение для q_r представляет собой самое большее сумму $2n$ членов вида (9.63), т. е.

$$q_r = Q_r^{(1)} e^{p_1 t} + Q_r^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + Q_r^{(2n)} e^{p_{2n} t} \tag{9.66}$$

Подставляя выражения (9.65) в (9.66), получим не более n уравнений, содержащих $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Дифференцируя, получим еще n уравнений, содержащих $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 &= \Delta_{k1}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + \Delta_{k1}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + \Delta_{k1}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t} \\ q_2 &= \Delta_{k2}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + \Delta_{k2}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + \Delta_{k2}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t} \\ & \cdots \\ q_n &= \Delta_{kn}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + \Delta_{kn}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + \Delta_{kn}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t} \\ i_1 &= p_1 \Delta_{k1}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2 \Delta_{k1}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + p_{2n} \Delta_{k1}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t}, \\ i_2 &= p_1 \Delta_{k2}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2 \Delta_{k2}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + p_{2n} \Delta_{k2}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t} \\ & \cdots \\ i_n &= p_1 \Delta_{kn}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2 \Delta_{kn}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + \quad + p_{2n} \Delta_{kn}^{(2n)} G^{(2n)} e^{p_{2n} t} \end{aligned} \tag{9.67}$$

Полагая в этих уравнениях $t = 0$ и используя начальные значения для $q_1, q_2, \ldots, q_n, i_1, i_2, \ldots, i_n$, можно найти $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(2n)}$,

выраженные через $\Delta_{k1}^{(1)}$, $\Delta_{k2}^{(1)}$, ..., $\Delta_{kn}^{(1)}$, $\Delta_{k1}^{(2)}$, $\Delta_{k2}^{(2)}$, ..., $\Delta_{kn}^{(2)}$ и т. д. Последние определяются через $c_{rs}^{(\nu)}$, в выражение для которых, согласно соотношению (9.58), входят величины p_ν, полученные из уравнения (9.62) и определяемые, в конечном счете, параметрами цепи. Таким образом, задача полностью решена.

§ 9. Типы собственных колебаний. В случае простого контура, рассмотренного в § 4, мы нашли, что в зависимости от параметров контура возможны три типа собственных колебаний. Первый тип, называемый колебательным, получается при комплексных p_ν, когда активное сопротивление цепи мало по сравнению с емкостным и индуктивным или вовсе отсутствует. Поскольку заряд q_r, входящий в выражение (9.66), должен быть действительной величиной, хотя Q_r и комплексны, необходимо, чтобы величины p были комплексно-сопряженными, т. е. величины $Q_r^{(i)}e^{p_i t} + Q_r^{(k)}e^{p_k t}$ — действительные. Подобные два члена можно объединить и записать в форме

$$Ae^{bt}\cos at + Be^{bt}\sin at = Ce^{bt}\cos(at + \varphi).$$

Другой тип собственного колебания соответствует критическому затуханию (см. § 4); в этом случае несколько корней уравнения (9.62) одинаковы. Если, например,

$$p_s = p_{s+1} = \quad = p_{2n-1} = p_{2n},$$

то члены в уравнениях (9.67), содержащие p_s, p_{2n}, должны быть заменены следующим выражением:

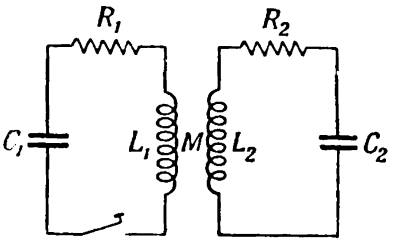
$$[\Delta_{kr}^{(s)}G^{(s)} + \Delta_{kr}^{(s+1)}G^{(s+1)}t + \quad + \Delta_{kr}^{(2n)}G^{(2n)}t^{2n-s}]\,e^{p_s t},$$

где r пробегает все значения от 1 до n. Соответствующие изменения должны быть сделаны и в выражениях для i_r.

Третий тип собственных колебаний можно получить, если p — действительные величины. Это соответствует случаю очень большого затухания (см. § 4). В этом случае колебания отсутствуют и ток, или заряд, уменьшается, не меняя знак. Это — единственный тип, который имеет место, когда контур состоит только из индуктивности и сопротивления или из емкости и сопротивления.

§ 10. Цепь, содержащая постоянную э.д.с. Если электрическая цепь, которую мы рассматривали, содержит источники постоянной э. д. с., то в правых частях некоторых из уравнений (9.56) будут стоять не нули, а постоянные $\mathscr{E}_p$, $\mathscr{E}_q$ и т. д. Полное решение этих уравнений представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (неустановившийся режим) и частного решения (стационарный режим). Общее решение дается выражениями (9.67). Для получения частного решения заметим, что в стационарном состоянии все конденсаторы становятся разрывом цепи, а все индуктивности — коротким замыканием. Таким образом, если вновь изобразить цепь, опустив все ветви, содержащие конденсаторы, и заменив индуктивности идеальными проводниками, то полученную эквивалентную схему можно исследовать методом, описанным в § 9 и 10 гл. VI, дающим стационарное значение токов. Зная значения тока и сопротивления в каждой ветви, можно найти напряжение, а отсюда и заряд на конденсаторах в стационарном режиме. Добавляя теперь к общему решению (9.67) стационарное значение соответствующего тока или заряда, мы получим полное решение задачи. Постоянные $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, ..., $G^{(n)}$ определяются попрежнему из уравнения, которое получается из общего решения, если положить $t = 0$, а токи и заряды считать равными своим начальным значениям.

§ 11. Собственные частоты двух индуктивно связанных контуров. Применим полученные результаты к системе, показанной на фиг. 89. Два контура, по которым текут токи i_1 и i_2, называются индуктивно связанными.



Фиг. 89.

Здесь

$$L_{11}=L_1, \quad L_{12}=L_{21}=M, \quad L_{22}=L_2,$$
$$R_{11}=R_1, \quad R_{22}=R_2,$$
$$S_{11}=\frac{1}{C_1} \quad \text{и} \quad S_{22}=\frac{1}{C_2}.$$

Из соотношения (9.58) имеем

$$c_{11}=L_1p^2+R_1p+\frac{1}{C_1}, \quad c_{12}=c_{21}=Mp^2, \quad c_{22}=L_2p^2+R_2p+\frac{1}{C_2}. \tag{9.68}$$

Характеристическое уравнение (9.60) будет иметь вид

$$c_{11}c_{22}-c_{12}^2=0.$$

Подставляя в него значения c_{11}, c_{22} и c_{12} из соотношений (9.68), получим

$$p^4+Ap^3+Bp^2+Cp+D=0, \tag{9.69}$$

где

$$A=\frac{R_1L_2+R_2L_1}{L_1L_2-M^2}; \qquad B=\frac{\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2}{L_1L_2-M^2};$$
$$C=\frac{\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}}{L_1L_2-M^2}; \qquad D=\frac{1}{C_1C_2(L_1L_2-M^2)}. \tag{9.70}$$

Собственные частоты системы являются корнями уравнения (9.69); эти корни мы обозначим через p_1, p_2, p_3, p_4. (Подробности решения уравнения четвертой степени см. в книгах по теории уравнений и в учебниках по алгебре.) Значения корней равны

$$p_{1,2}=-\frac{1}{4}A+P_1\pm P_2\pm P_3,$$
$$p_{3,4}=-\frac{1}{4}A-P_1\pm P_2\mp P_3, \tag{9.71}$$

где

$$P_{1,2,3}=\left[\left(\frac{A}{4}\right)^2-\frac{B}{6}+t_{1,2,3}\right]^{1/2} \tag{9.72}$$

Знак квадратного корня следует брать таким, чтобы

$$p_1p_2p_3p_4=D \tag{9.73}$$

и

$$(p_1+p_2)p_3p_4+(p_3+p_4)p_1p_2=-C. \tag{9.74}$$

Если обозначить

$$K=\frac{1}{12}\left(D-\frac{AC}{4}+\frac{B^2}{12}\right), \tag{9.75}$$

$$N=-\frac{1}{16}\left(\frac{BD}{3}+\frac{ABC}{24}-\frac{C^2}{8}-\frac{A^2D}{8}-\frac{B^3}{108}\right), \tag{9.76}$$

то значения t_1, t_2 и t_3, которые используются в соотношении (9.72), даются следующими выражениями:

Если $K > 0$, $N \{\gtrless\} 0$, $N^2 > K^3$, то, полагая $\operatorname{ch}\varphi = \{\pm\} NK^{-3/2}$, имеем

$$t_1 = \{\pm\} 2(K)^{1/2} \operatorname{ch}\tfrac{1}{3}\varphi, \quad t_{2,3} = -\tfrac{1}{2}t_1 \pm j(3K)^{1/2} \operatorname{sh}\tfrac{1}{3}\varphi. \tag{9.77}$$

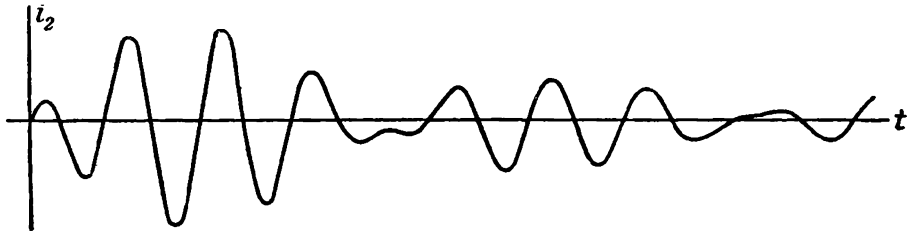
Если $K < 0$, то, считая $\operatorname{sh}\varphi = N(-K)^{-3/2}$, получим

$$t_1 = 2(-K)^{1/2} \operatorname{sh}\tfrac{1}{3}\varphi, \quad t_{2,3} = -\tfrac{1}{2}t_1 \pm j(-3K)^{1/2} \operatorname{ch}\tfrac{1}{3}\varphi. \tag{9.78}$$

Если $K > 0$, $N^2 < K^3$, то, полагая $\cos\varphi = NK^{-3/2}$, имеем

$$t_1 = 2(K)^{1/2} \cos\tfrac{1}{3}\varphi, \quad t_{2,3} = -\tfrac{1}{2}t_1 \pm (3K)^{1/2} \sin\tfrac{1}{3}\varphi. \tag{9.79}$$

Тип собственных колебаний можно определить без непосредственного вычисления корней p_1, p_2, p_3 и p_4. При $K^3 > N^2$, $48(K)^{1/2} > (8B - 3A^2)$ и

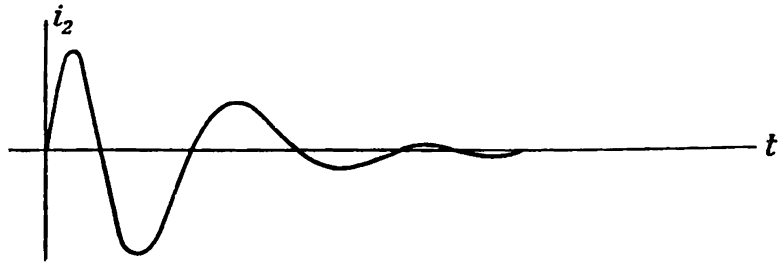


Фиг. 90.

$8B > 3A^2$ корни образуют две комплексно-сопряженные пары, которые можно записать в форме

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\omega_1 \quad \text{и} \quad p_{3,4} = -\alpha_2 \pm j\omega_2.$$

Так как в этом случае в каждом контуре имеются два затухающих гармонических колебания, то возникают биения, подобные наблюдаемым на воде



Фиг. 91.

или в звуковых волнах. Если эти колебания окажутся в фазе, то амплитуда результирующего колебания будет максимальной. Частота биений равна $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)/\pi$. Энергия переходит с этой частотой от одного контура к другому и обратно до тех пор, пока полностью не рассеется в сопротивлениях. На фиг. 90 изображен ток во втором контуре системы, показанной на фиг. 89, когда после замыкания выключателем цепи первого контура конденсатор C_1 разряжается.

При $K^3 > N^2$, а $8B < 3A^2$ и $48(K)^{1/2} < 8B - 3A^2$ все корни действительны и отрицательны и токи уменьшаются, не совершая никаких колебаний.

При $K < 0$ имеются два действительных корня и пара комплексно-сопряженных [см. соотношения (9.78)]. В этом случае в системе совершается одно затухающее колебание, не сопровождаемое явлением биений. Такой тип колебаний изображен на фиг. 91. Когда $K = N$, то два или несколько корней одинаковы.

§ 12. Амплитуды колебаний в двух связанных контурах. Мы определили частоты колебаний и коэффициенты затухания. Остается теперь из начальных условий найти амплитуды колебаний. Из определителя (9.60) имеем

$$\Delta_{11} = c_{22}, \quad \Delta_{12} = -c_{12} = -Mp^2 \quad \text{и} \quad \Delta_{22} = c_{11}.$$

Таким образом, при $k = 1$ полное решение для рассматриваемой системы, записанное в форме (9.67), будет

$$\begin{aligned}
q_1 &= c_{22}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + c_{22}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + c_{22}^{(3)} G^{(3)} e^{p_3 t} + c_{22}^{(4)} G^{(4)} e^{p_4 t}, \\
q_2 &= -M\,(p_1^2 G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2^2 G^{(2)} e^{p_2 t} + p_3^2 G^{(3)} e^{p_3 t} + p_4^2 G^{(4)} e^{p_4 t}), \\
i_1 &= p_1 c_{22}^{(1)} G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2 c_{22}^{(2)} G^{(2)} e^{p_2 t} + p_3 c_{22}^{(3)} G^{(3)} e^{p_3 t} + p_4 c_{22}^{(4)} G^{(4)} e^{p_4 t}, \\
i_2 &= -M\,(p_1^3 G^{(1)} e^{p_1 t} + p_2^3 G^{(2)} e^{p_2 t} + p_3^3 G^{(3)} e^{p_3 t} + p_4^3 G^{(4)} e^{p_4 t}).
\end{aligned} \tag{9.80}$$

Пусть при $t = 0$ $q_1 = Q$, $q_2 = 0$, $i_1 = 0$ и $i_2 = 0$. Подставляя эти значения в уравнения (9.80) и сокращая на $-M$, нетрудно разрешить их относительно $G^{(1)}$ и получить

$$G^{(1)} = p_2 p_3 p_4 Q \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \\ c_{22}^{(2)} & c_{22}^{(3)} & c_{22}^{(4)} \\ p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \end{vmatrix} \Bigg| \begin{vmatrix} c_{22}^{(1)} & c_{22}^{(2)} & c_{22}^{(3)} & c_{22}^{(4)} \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \\ p_1 c_{22}^{(1)} & p_2 c_{22}^{(2)} & p_3 c_{22}^{(3)} & p_4 c_{22}^{(4)} \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & p_4^3 \end{vmatrix}.$$

В числителе умножим верхнюю и нижнюю строки детерминанта соответственно на R_2 и на L_2 и вычтем их из средней строки, тогда все члены ее станут равными $1/C_2$. После вычитания третьего столбца из первого и второго столбцов первые два члена средней строки обращаются в нуль, понижая тем самым порядок детерминанта, так что его теперь можно представить в виде произведения сомножителей. Таким образом, числитель принимает вид

$$-p_2 p_3 p_4 (p_2 - p_1)(p_3 - p_4)(p_3 - p_2)\frac{Q}{C_2}. \tag{9.81}$$

В знаменателе умножим вторую строку детерминанта на L_2 и вычтем из первой, потом умножим вторую и четвертую строки соответственно на R_2 и L_2 и вычтем из третьей, после чего из этой строки можно будет вынести общий множитель $1/C_2$. Умножим теперь третью строку на R_2 и вычтем из первой, тогда все члены этой строки станут равными $1/C_2$; эту величину можно также вынести в качестве общего множителя. После вычитания четвертого столбца из первого, второго и третьего столбцов первые три члена первой строки обращаются в нуль, понижая тем самым порядок детерминанта. Теперь за знак детерминанта можно вынести множитель $(p_1 - p_4)(p_2 - p_4)(p_3 - p_4)$, после чего во второй строке останутся только единицы. Вычитая в полученном детерминанте третий столбец из первого и второго, опять понижаем порядок детерминанта и выносим затем множитель $(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)$. Оставшийся детерминант второго порядка сводится

к p_2-p_1, так что знаменатель принимает вид

$$\frac{(p_1-p_4)(p_2-p_4)(p_3-p_4)(p_1-p_3)(p_2-p_3)(p_2-p_1)}{C_2^2} \tag{9.82}$$

Таким образом, для $G^{(1)}$ получаем следующий результат:

$$G^{(1)}=\frac{p_2p_3p_4C_2Q}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_4-p_1)}. \tag{9.83}$$

Для получения $G^{(2)}$ нужно лишь заменить индекс 2 на 1 в выражении (9.81) и изменить знак в выражении (9.82), тогда

$$G^{(2)}=\frac{p_3p_4p_1C_2Q}{(p_3-p_2)(p_4-p_2)(p_1-p_2)}. \tag{9.84}$$

Аналогично

$$G^{(3)}=\frac{p_4p_1p_2C_2Q}{(p_4-p_3)(p_1-p_3)(p_2-p_3)}, \tag{9.85}$$

$$G^{(4)}=\frac{p_1p_2p_3C_2Q}{(p_1-p_4)(p_2-p_4)(p_3-p_4)}. \tag{9.86}$$

При начальных условиях, заданных в наиболее общей форме, т. е. когда величины q_1, q_2, i_1 и i_2 в начальный момент $t=0$ не равны нулю, мы получим для каждого G выражения, очень похожие по форме на вышенаписанные. Способ их получения тот же самый.

§ 13. Колебательный режим. В этом случае корни уравнения (9.69) имеют вид

$$p_{1,2}=-\alpha_1\pm j\omega_1, \qquad p_{3,4}=-\alpha_2\pm j\omega_2. \tag{9.87}$$

Положим

$$2p_1c_{22}^{(1)}G^{(1)}=a'+jb', \qquad 2p_3c_{22}^{(3)}G^{(3)}=a''+jb''. \tag{9.88}$$

Тогда, поскольку $p_1c_{22}^{(1)}G^{(1)}$ и $p_3c_{22}^{(3)}G^{(3)}$ являются комплексно-сопряженными $p_2c_{22}^{(2)}G^{(2)}$ и $p_4c_{22}^{(4)}G^{(4)}$ соответственно, мы можем представить ток i_1 (см. Двайт, 408.01 и 408.02) в форме, определяемой соотношением (9.80),

$$\begin{aligned} i_1&=e^{-\alpha_1t}(a'\cos\omega_1t-b'\sin\omega_1t)+e^{-\alpha_2t}(a''\cos\omega_2t-b''\sin\omega_2t)=\\ &=a_1e^{-\alpha_1t}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+a_2e^{-\alpha_2t}\sin(\omega_2t+\varphi_2), \end{aligned} \tag{9.89}$$

где

$$a_1=(a'^2+b'^2)^{1/2}, \qquad a_2=(a''^2+b''^2)^{1/2} \tag{9.90}$$

и

$$\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b'}{a'}, \qquad \varphi_2=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b''}{a''}. \tag{9.91}$$

Аналогично, полагая

$$-2Mp_1^3G^{(1)}=c'+jd' \quad \text{и} \quad -2Mp_3^3G^{(3)}=c''+jd'', \tag{9.92}$$

имеем

$$\begin{aligned} i_2&=e^{-\alpha_1t}(c'\cos\omega_1t-d'\sin\omega_1t)+e^{-\alpha_2t}(c''\cos\omega_2t-d''\sin\omega_2t)=\\ &=c_1e^{-\alpha_1t}\sin(\omega_1t+\psi_1)+c_2e^{-\alpha_2t}\sin(\omega_2t+\psi_2), \end{aligned} \tag{9.93}$$

где

$$c_1=-(c'^2+d'^2)^{1/2}, \qquad c_2=-(c''^2+d''^2)^{1/2} \tag{9.94}$$

и

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{d'}{c'}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{d''}{c''}. \tag{9.95}$$

Подставляя в соотношение (9.83) вместо p_1, p_2, p_3, p_4 соответствующие им выражения (9.87), получим

$$G^{(1)} = \frac{-(\alpha_1 + j\omega_1)(\alpha_2^2 + \omega_2^2) G_2 Q}{-2j\omega_1 [\alpha_2 - \alpha_1 + j(\omega_1 - \omega_2)][\alpha_2 - \alpha_1 + j(\omega_1 + \omega_2)]}. \tag{9.96}$$

Последние множители в знаменателе можно написать в виде

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2j\omega_1(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Согласно выражению (9.68), имеем

$$c_{22}^{(1)} = [L_2(\alpha_1^2 - \omega_1^2) - R_2\alpha_1 + C_2^{-1}] + j\omega_1(R_2 - 2\alpha_1 L_2). \tag{9.97}$$

Так как

$$c_{22}^{(3,4)} G^{(3,4)} = c_{22}^{(1,2)*} G^{(1,2)*}$$

мы получаем

$$a_{1.2} = (a'^{,''2} + b'^{,''2})^{1/2} =$$

$$= 2(p_{1,3} p_{1,3}^* c_{22}^{(1,3)} c_{22}^{(1,3)*} G^{(1,3)} G^{(1,3)*})^{1/2} = \frac{(\alpha_1^2 + \omega_1^2)(\alpha_2^2 + \omega_2^2)}{\omega_{1,2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[L_2 C_2 (\alpha_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2) - R_2 C_2 \alpha_{1,2} + 1]^2 + \omega_{1,2}^2 C_2^2 (R_2 - 2\alpha_{1,2} L_2)^2}{[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2][(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2]} \right\}^{1/2} Q, \tag{9.98}$$

где индексы перед запятой относятся к a_1, а индексы после запятой — к a_2.

Согласно соотношению (4.51), выражение для $\operatorname{arc\,tg}(b'/a')$, являющегося аргументом $a' + jb'$, можно получить, если из суммы аргументов $c_{22}^{(1)}$ и числителя $p_1 G^{(1)}$ вычесть аргументы множителей знаменателя $G^{(1)}$. Вычисляя эту разность и пользуясь формулой (9.91), находим

$$\varphi_{1,2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_{1,2} C_2 (R_2 - 2\alpha_{1,2} L_2)}{1 - \alpha_{1,2} R_2 C_2 + L_2 C_2 (\alpha_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2)} -$$

$$- \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_1 - \omega_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \mp \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_1 + \omega_2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{9.99}$$

Подобным же образом получаем

$$c_{1,2} = -(c'^{,''2} + d'^{,''2})^{1/2} = -2M(p_{1,3}^3 p_{1,3}^{*3} G^{(1,3)} G^{(1,3)*})^{1/2} =$$

$$= -\frac{M C_{2,1} (\alpha_{1,2}^2 + \omega_{1,2}^2)^2 (\alpha_{2,1}^2 + \omega_{2,1}^2) Q}{\omega_{1,2} \{[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2][(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\omega_2 + \omega_1)^2]\}^{1/2}}. \tag{9.100}$$

Согласно соотношению (4.51), выражение для аргумента $c' + jd'$ можно получить, если из суммы аргументов p_1^2 и числителя $p_1 G^{(1)}$ вычесть аргументы множителей знаменателя $G^{(1)}$. В результате после использования формулы (9.55) имеем

$$\psi_{1,2} = -2\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_{1,2}}{\alpha_{1,2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_1 - \omega_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \mp \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_1 + \omega_2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{9.101}$$

§ 14. Индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением. Если активное сопротивление мало, т. е. токи являются в обоих контурах сильно осциллирующими, то собственные

частоты определяются выражениями $p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\omega_1$, $p_{3,4} = -\alpha_2 \pm j\omega_2$. Подставим эти значения в уравнение

$$(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4) = 0,$$

перемножим скобки и сравним полученные коэффициенты с коэффициентами уравнения (9.69). В результате будем иметь соотношения

$$A = 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \tag{9.102}$$

$$B = (\alpha_1^2 + \omega_1^2) + (\alpha_2^2 + \omega_2^2) + 4\alpha_1\alpha_2, \tag{9.103}$$

$$C = 2\alpha_1(\alpha_2^2 + \omega_2^2) + 2\alpha_2(\alpha_1^2 + \omega_1^2), \tag{9.104}$$

$$D = (\alpha_1^2 + \omega_1^2)(\alpha_2^2 + \omega_2^2). \tag{9.105}$$

Сравнивая выражения (9.102) и (9.104) с выражениями (9.70), мы видим, что α_1 и α_2 — такого же порядка малости, как R_1 и R_2, поэтому величинами α_1^2, α_2^2 и $\alpha_1\alpha_2$ можно пренебречь по сравнению с ω_1^2 и ω_2^2. Таким образом, имеем

$$A = 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \tag{9.106}$$

$$B \approx \omega_1^2 + \omega_2^2, \tag{9.107}$$

$$C \approx 2\alpha_1\omega_2^2 + 2\alpha_2\omega_1^2, \tag{9.108}$$

$$D \approx \omega_1^2\omega_2^2. \tag{9.109}$$

Из соотношений (9.107) и (9.109) получим

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}[B \pm (B^2 - 4D)^{1/2}].$$

Пользуясь выражениями (9.70) и пренебрегая величиной R_1R_2, эту формулу можно привести к виду

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1C_1 + L_2C_2 \pm [(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2M^2]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2 - M^2)}. \tag{9.110}$$

Из соотношений (9.106) и (9.108) получим выражения для α_1 и α_2 и, заменив C и A их значениями (9.70), будем иметь

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R_1C_1 + R_2C_2 - C_1C_2(R_1L_2 + R_2L_1)\omega_{1,2}^2}{2C_1C_2(L_1L_2 - M^2)(\omega_{1,2}^2 - \omega_{2,1}^2)}, \tag{9.111}$$

где первый индекс относится к α_1, а второй — к α_2.

Пренебрегая в выражении (9.98) величинами α^2, R^2 и αR, находим

$$a_{1,2} = \frac{\omega_1^2\omega_2^2(1 - \omega_{1,2}^2L_2C_2)}{\omega_{1,2}|\omega_2^2 - \omega_1^2|}Q = \frac{(1 - \omega_{1,2}^2L_2C_2)Q}{\omega_{1,2}[(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2M^2]^{1/2}}. \tag{9.112}$$

Если затухание мало и $\alpha_2 - \alpha_1 \ll \omega_1 - \omega_2$, то последние члены в выражении (9.99) очень велики, поэтому сумма углов близка к π, а разность — к нулю. Чтобы устранить неопределенность, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg} A = \operatorname{arc\,tg}(A^{-1}).$$

Поскольку все арктангенсы малы, заменим $\operatorname{arc\,tg} A$ на A и пренебрежем величиной A^3, в результате чего получим

$$\varphi_{1,2} = -\frac{\pi(1 \pm 1)}{2} + \frac{\omega_{1,2}C_2(R_2 - 2\alpha_{1,2}L_2)}{1 - \omega_{1,2}^2L_2C_2} + \frac{2\omega_{1,2}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} =$$

$$= -\frac{\pi(1 \pm 1)}{2} + \frac{2\omega_{1,2}C_1C_2M^2(C_2R_2 - C_1R_1)}{(1 - \omega_{1,2}^2L_2C_2)[(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2M^2]}. \tag{9.113}$$

Из выражения (9.100) находим

$$c_{1,2} = -\frac{MC_{2,1}\omega_{1,2}(\omega_1\omega_2)^2}{|\omega_2^2-\omega_1^2|}Q = -\frac{\omega_{1,2}MC_{2,1}Q}{[(L_1C_1-L_2C_2)^2+4C_1C_2M^2]^{1/2}}. \quad (9.114)$$

Учитывая, что все углы в выражении (9.101) велики, воспользуемся опять соотношением

$$\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg} A = \operatorname{arc\,tg}(A^{-1})$$

и напишем всюду A вместо $\operatorname{arc\,tg} A$. Можно несколько упростить результат, добавив 2π, и получить

$$\psi_{1,2} = \frac{\pi(1\mp 1)}{2} + \frac{2(\alpha_2\omega_1^2-\alpha_1\omega_2^2)}{\omega_{1,2}(\omega_1^2-\omega_2^2)} =$$

$$= \frac{\pi(1\mp 1)}{2} + \frac{(L_1C_1-L_2C_2)(R_1C_1-R_2C_2)}{\omega_{1,2}[(L_1C_1-L_2C_2)^2+4C_1C_2M^2]}. \quad (9.115)$$

Подставляя эти значения в (9.89) и (9 93), получим окончательное выражение для токов i_1 и i_2.

§ 15. Настроенные индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением. Пусть два контура, рассмотренные в предыдущем параграфе, настроены, каждый в отдельности, на одну и ту же частоту. Тогда, если пренебречь членами с R^2, $L_1C_1 = L_2C_2$ и выражение (9.110) можно записать в виде

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{(C_2C_1)^{1/2}[(L_2L_1)^{1/2}\mp M]}. \quad (9.116)$$

В этом случае выражение (9.111) также можно упростить

$$\alpha_{1,2} = \frac{R_1C_1+R_2C_2}{4(C_2C_1)^{1/2}[(L_2L_1)^{1/2}\mp M]} \quad (9.117)$$

После подстановки в выражения (9.112) — (9.115) получим

$$a_{1,2} = \frac{Q}{2(C_1C_2)^{1/4}[(L_1L_2)^{1/2}\mp M]^{1/2}}, \quad (9.118)$$

$$\varphi_{1,2} = -\frac{\pi(1\pm 1)}{2} \mp \frac{(C_2R_2-C_1R_1)[(L_1L_2)^{1/2}\mp M]^{1/2}}{2M(C_1C_2)^{1/4}}. \quad (9.119)$$

$$c_{1,2} = -\frac{(C_1C_2)^{1/4}Q}{2C_{1,2}[(L_1L_2)^{1/2}\mp M]^{1/2}}, \quad (9.120)$$

$$\psi_{1,2} = \frac{\pi(1\mp 1)}{2}. \quad (9.121)$$

§ 16. Цепи из одинаковых звеньев. Иногда приходится иметь дело с цепями, которые состоят из одинаковых повторяющихся звеньев (см. фиг. 92). Все индуктивности равны L, и все емкости, за исключением первой, равны C. Для r-го звена уравнение (9.59) имеет вид

$$c_{r,r-1}Q_{r-1} + c_{r,r}Q_r + c_{r,r+1}Q_{r+1} = 0, \quad (9.122)$$

где

$$c_{r,r-1} = c_{r,r+1} = -\frac{1}{C}, \qquad c_{r,r} = Lp^2 + \frac{2}{C}.$$

Это уравнение можно написать в форме

$$Q_{r-1} + Q_{r+1} = (2 - LC\omega^2)\, Q_r = 2\cos 2\varphi\, Q_r, \tag{9.123}$$

где

$$p = j\omega = j\,(LC)^{-1/2}\, 2\sin\varphi. \tag{9.124}$$

Так как краевые условия наиболее просто выражаются через напряжения в узловых точках (первого и последнего контуров), представим уравнение (9.123) также через напряжение. Заменим в уравнении (9.123) r на $r+1$ и полученное выражение вычтем из уравнения (9.123), тогда, поскольку

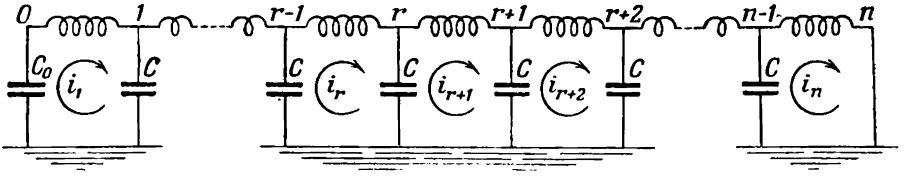
$$CV_{r-1} = Q_{r-1} - Q_r,$$

$$CV_r = Q_r - Q_{r+1} \quad \text{и} \quad CV_{r+1} = Q_{r+1} - Q_{r+2},$$

мы получим

$$V_{r-1} + V_{r+1} = 2\cos 2\varphi V_r. \tag{9.125}$$

Уравнения (9.123) и (9.125) аналогичны уравнению (6.20) и имеют своим



Фиг. 92.

решением (см. Двайт, 401.05 и 401.06) следующее выражение:

$$V_r = A\cos 2r\varphi + B\sin 2r\varphi. \tag{9.126}$$

Поскольку конец линии заземлен, то

$$0 = A\cos 2n\varphi + B\sin 2n\varphi. \tag{9.127}$$

В первом контуре

$$V_1 - V_0 = L\frac{di_1}{dt} = Lpi_1 \quad \text{и} \quad pV_0 = \frac{pQ_1}{C_0} = \frac{i_1}{C_0}$$

Исключая i_1 и заменяя p^2 выражением (9.124), а V_0 и V_1 выражением (9.126), получим

$$\left(1 - \frac{4C_0}{C}\sin^2\varphi\right) A = A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi. \tag{9.128}$$

Заменим $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ выражениями (403.02) и (403.22), взятыми из справочника Двайта, тогда получим

$$\frac{B}{A} = \left(1 - \frac{2C_0}{C}\right)\operatorname{tg}\varphi.$$

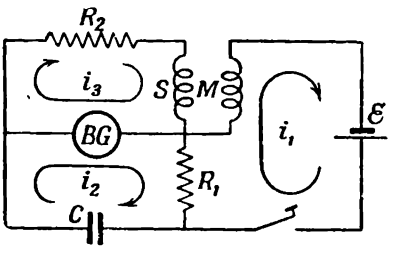
Приравнивая найденное выражение к значению B/A, получаемому из соотношения (9.127), приходим к следующему уравнению:

$$C\operatorname{ctg} 2n\varphi = (2C_0 - C)\operatorname{tg}\varphi. \tag{9.129}$$

Подстановка корней этого трансцендентного уравнения в выражение (9.124) дает собственные частоты рассматриваемой системы. Корни уравнения (9.129) наиболее легко найти путем графического построения функции, получаемой после перенесения всех членов из правой части в левую. Тогда

пересечение построенной кривой с осью φ и даст искомые значения φ. Вычисление амплитуд, удовлетворяющих заданным начальным условиям, до некоторой степени упрощается вследствие большого числа нулей в уравнениях (9.67).

§ 17. Интегральный эффект переходного процесса. В некоторых измерительных электрических схемах, где употребляются баллистические гальванометры, измеряется интегральный эффект переходного процесса. В таких случаях для получения нужного результата можно проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение. Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь, изображенную на фиг. 93. Это устройство иногда применяется для сравнения величин взаимной индукции и емкости. Цепь считается сбалансированной, если замыкание или размыкание ключа не вызывает отклонения стрелки баллистического гальванометра. Перед тем как ключ замыкается в первый раз, $i_1 = i_2 = i_3 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$. После того как установится стационарный режим, $i_2 = i_3 = 0$, $q_2 = i_1 R_1 C$ и, если цепь сбалансирована, $q_2 - q_3 = 0$, откуда $q_3 = i_1 R_1 C$. Пусть L_G и R_G — самоиндукция и сопротивление гальванометра, тогда уравнение Кирхгофа для контура, по которому проходит ток i_3, будет иметь вид



Фиг. 93.

$$M\frac{di_1}{dt} + R_G(i_3 - i_2) + L_G\left(\frac{di_3}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) + S\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 = 0. \qquad (9.130)$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ ключ замыкает цепь, а к моменту $t = T$ достигается стационарное состояние. Умножая уравнение (9.130) на dt, интегрируя по t между этими пределами и пользуясь упомянутыми начальными и конечными значениями для токов и зарядов, получим

$$Mi_1 + 0 + 0 + 0 + R_2 i_1 R_1 C = 0.$$

Сокращая на i_1, приходим к результату

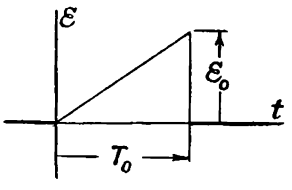
$$M = -R_1 R_2 C. \qquad (9.131)$$

Это — искомое условие баланса схемы. Если значения S и M не подобраны специальным образом, то ток через гальванометр не будет равен нулю в продолжение переходного процесса, а будет протекать сначала в одном направлении, а затем в противоположном.

§ 18. Переходные явления при импульсах конечной продолжительности. До сих пор в этой главе рассматривались переходные явления, наступающие после мгновенных изменений в цепи. Обратимся теперь к случаю, когда прилагаемая э. д. с. требует для достижения своего стационарного значения конечного времени T_0. Пусть в интервале $0 < t < T_0$ ее значение равно $f(t)$. Подставляя эту функцию вместо $\mathcal{E}$, решаем полученные уравнения, как и прежде, и находим общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы. Определяем далее произвольные постоянные из начальных условий (при $t = 0$). Полученное решение будет справедливо для интервала $0 < t < T_0$. Затем будем искать решение уравнений, имеющих место после мгновенного изменения в цепи в момент времени $t = T_0$. При отсутствии дополнительных изменений общее решение будет прежним, а частное решение—другим. Мы определим постоянные интеграции, полагая $t = T_0$ в этом втором решении и подставляя в него

значения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $i_1, i_2, \ldots, i_n$, получаемые из первого решения при $t = T_0$. Второе решение имеет место в интервале $T_0 < t < \infty$.

В случае, когда $f(t)$ — сложная функция, нахождение частного интеграла для первого решения может оказаться очень трудным или даже невозможным, особенно для сложных цепей. Если, однако, импульс э. д. с. имеет прямоугольную форму, то в интервале $0 < t < T_0$ э. д. с. постоянна и частный интеграл для первого решения можно найти методом, рассмотренным в § 10. Если в интервале $T_0 < t < \infty$ э. д. с. равна нулю, то для этого интервала сохранится лишь общее решение однородного уравнения.



Фиг. 94.

Для контура, изображенного на фиг. 84, состоящего из индуктивности, емкости и сопротивления, включенных последовательно, в интервале $0 < t < T_0$ вместо уравнения (9.3) будем иметь

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = f(t). \tag{9.132}$$

Если ввести

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right)^{1/2}, \tag{9.133}$$

то общее решение в случае, когда $R^2/(4L^2) \neq 1/(LC)$, принимает вид

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{e^{\lambda_1 t}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t f(t)\, e^{-\lambda_1 t}\, dt - \frac{e^{\lambda_2 t}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t f(t)\, e^{-\lambda_2 t}\, dt. \tag{9.134}$$

Если $R^2/(4L^2) = 1/(LC)$, то $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -R/(2L) = -1/(LC)^{1/2}$ и

$$q = (C_1' + C_2' t)\, e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t}}{L}\left[t \int_0^t f(t)\, e^{-\lambda t}\, dt - \int_0^t t f(t)\, e^{-\lambda t}\, dt\right] \tag{9.135}$$

Пусть в начальный момент ($t = 0$) $q = q_0$ и $i = i_0$, тогда, подставляя $t = 0$ в решение (9.134) и в его производную, получим

$$q_0 = C_1 + C_2, \quad i_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad C_1 = \frac{\lambda_2 q_0 - i_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 q_0 - i_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{9.136}$$

В случае критического затухания, согласно соотношению (9.135), имеем

$$C_1' = q_0 \quad \text{и} \quad C_2' = i_0 - \lambda q_0. \tag{9.137}$$

В качестве специального примера рассмотрим импульс, показанный на фиг. 94 и описываемый функцией

$$f(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{T_0} t, \tag{9.138}$$

причем $q_0 = i_0 = 0$ при $t = 0$. Пусть этот импульс посылается в контур с критическим сопротивлением. Для такого контура справедливы соотношения (9.135) и (9.137), так что $C_1' = C_2' = 0$. Тогда из соотношения (9.135) получаем

$$q = \frac{\mathscr{E}_0}{LT_0} e^{\lambda t}\left(t \int_0^t t e^{-\lambda t}\, dt - \int_0^t t^2 e^{-\lambda t}\, dt\right). \tag{9.139}$$

После интегрирования (см. Двайт, 567.1 и 567.2) получим

$$q=\frac{4L\mathscr{E}_0}{R^2T_0}\left[t-\frac{4L}{R}+\left(t+\frac{4L}{R}\right)e^{-Rt/2L}\right], \tag{9.140}$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{4L\mathscr{E}_0}{R^2T_0}\left[1-\left(1+\frac{R}{2L}t\right)e^{-Rt/2L}\right] \tag{9.141}$$

Эти выражения определяют i и q в интервале $0<t<T_0$. Решение в интервале $T_0<t<\infty$, определяемое выражением (9.9), имеет вид

$$q=e^{-Rt/2L}(A+Bt), \qquad i=e^{-Rt/2L}\left(-\frac{AR}{2L}\right)+B\left(1-\frac{Rt}{2L}\right)$$

Подставляя сюда значения $i=i_1$, $q=q_1$ при $t=T_0$, находим

$$q=e^{-R(t-T_0)/2L}\left[q_1+\left(\frac{Rq_1}{2L}+i_1\right)(t-T_0)\right], \tag{9.142}$$

$$i=e^{-R(t-T_0)/2L}\left[i_1-\frac{R}{2L}\left(\frac{Rq_1}{2L}+i_1\right)(t-T_0)\right] \tag{9.143}$$

Значения i_1 и q_1 в формулах (9.142) и (9.143) определяются из выражений (9.140) и (9.141), в которых нужно положить $t=T_0$. Тогда формулы (9.142) и (9.143) определяют заряд и ток в интервале $T_0<t<\infty$.

ЗАДАЧИ

1. Звено, состоящее из параллельно включенных конденсатора C_2 и индуктивности L_2, соединено последовательно с конденсатором C_1, индуктивностью L_1 и выключателем. Вначале C_1 имеет заряд Q. Показать, что в любой момент времени после замыкания цепи выключателем величина заряда на конденсаторе C_1 определяется формулой

$$Q(p_1^2-p_2^2)^{-1}[(L_1^{-1}C_1^{-1}-p_2^2)\cos p_1t-(L_1^{-1}C_1^{-1}-p_1^2)\cos p_2t],$$

где

$$p_1=(A+B)^{1/2}, \qquad p_2=(A-B)^{1/2}$$

$$A=\frac{L_1C_1+L_2C_1+L_2C_2}{2L_1L_2C_1C_2} \quad \text{и} \quad B=\frac{[(L_1C_1+L_2C_1+L_2C_2)^2-4L_1L_2C_1C_2]^{1/2}}{2L_1L_2C_1C_2}.$$

2. В обмотке электромагнита, индуктивность которого равна 1 *гн*, циркулирует постоянный ток 10 *а*. Пренебрегая сопротивлением, найти величину емкости конденсатора, который следует подключить к концам обмотки электромагнита для того, чтобы при внезапном разрыве цепи не произошел пробой изоляции, выдерживающей напряжение в 10 000 *в*. Используя этот конденсатор, показать, что при сопротивлении обмотки электромагнита в 1 *ом* действующая э. д. с. в ней будет приблизительно равна 9 992 *в*.

3. Катушка самоиндукции L, конденсатор C и батарея, обладающая э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением R, соединены параллельно. Показать, что через t сек. после присоединения батареи ток через нее равен

$$\frac{\mathscr{E}}{R}[1-(\omega RC)^{-1}e^{-t/2RC}\sin\omega t],$$

а ток через катушку самоиндукции равен

$$\frac{\mathscr{E}}{R}\{1-e^{-t/2RC}[(2\omega RC)^{-1}\sin\omega t+\cos\omega t]\},$$

где

$$\omega=[(LC)^{-1}-(4R^2C^2)^{-1}]^{1/2}.$$

Написать решение для случая, когда величина ω мнимая или когда она равна нулю.

4. После того как в контуре, рассмотренном в предыдущей задаче, установилось стационарное состояние, батарея отключается. Показать, что через t сек. после отсоединения батареи заряд на конденсаторе равен

$$(LC)^{1/2}R^{-1}\mathscr{E}\sin[(LC)^{-1/2}t].$$

5. Коэффициент взаимной индукции двух связанных контуров равен M. Первый контур состоит из $\mathscr{E}$, R, L_1 и выключателя, соединенных последовательно, а второй контур содержит L_2 и C, также соединенные последовательно. Показать, что дифференциальное уравнение для тока в первом контуре будет

$$C(L_1L_2 - M^2)\dddot{i} + CL_2R\ddot{i} + L_1\dot{i} + Ri = \dot{\mathscr{E}},$$

а для тока во втором контуре — такое же, только с правой частью, равной нулю. При каких значениях параметров контура в системе возможны колебания?

6. Показать, что если после установления стационарного состояния в системе, рассмотренной в предыдущей задаче, цепь первого контура внезапно разрывается, то через t сек. после разрыва ток во втором контуре будет равен

$$\left(\frac{M\mathscr{E}}{L_2R}\right)\cos\left[(L_2C)^{-1/2}t\right].$$

7. Основной контур состоит из двух одинаковых индуктивностей L и L и конденсатора C, соединенных последовательно. Параллельно конденсатору подключается батарея $\mathscr{E}$ с внутренним сопротивлением R. Каждая из индуктивностей L связана с контуром, состоящим из последовательно соединенных индуктивности L и конденсатора C, причем коэффициент взаимной индукции равен M. После достижения стационарного состояния цепь батареи разрывается. Показать, что ток в основном контуре равен

$$\frac{1}{2}\mathscr{E}R^{-1}\left[(\cos p_1t + \cos p_2t) + (L^2+8M^2)^{-1/2}L(\cos p_1t - \cos p_2t)\right],$$

в то же время ток в каждом из связанных контуров равен

$$\mathscr{E}MR^{-1}(L^2+8M^2)^{-1/2}(\cos p_1t - \cos p_2t),$$

где

$$p^2_{1,2} = [3L \mp (L^2+8M^2)^{1/2}]\,[4(L^2-M^2)]^{-1}.$$

8. Сопротивление R и конденсатор C_1, соединенные параллельно, включаются последовательно с батареей $\mathscr{E}$, конденсатором C_2 и выключателем. Вначале конденсаторы зарядов не имеют. Показать, что через t сек. после замыкания цепи заряд на конденсаторе C_2 равен (внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь)

$$C_2\mathscr{E}\left[1 - C_2(C_1+C_2)^{-1}e^{-mt}\right],$$

где $m = [R(C_1+C_2)]^{-1}$. Найти также заряд на конденсаторе C_1.

9. В обмотке большого электромагнита, индуктивность которого L, циркулирует постоянный ток I. Цепь разрывается при помощи ключа, устроенного так, что разомкнутые концы расходятся с постоянной скоростью и через $^1/_{10}$ сек. образуют зазор в 1 *см*. Пробивное напряжение на ключе равно 1 500 *в/мм*. Показать, что для предотвращения искрения в ключе его следует блокировать конденсатором, емкость которого равна

$$C \geqslant \frac{I^2L}{(15000)^2}, \quad \text{или} \quad C \geqslant \frac{I}{150\,000},$$

в зависимости от того, которая из величин больше.

10. Три ветви соединяются в двух узлах. Первая ветвь содержит L_1 и R_1, вторая содержит L_2 и R_2, а третья содержит $\mathscr{E}$, R и выключатель. Показать, что через t сек. после замыкания цепи ток через батарею равен

$$\mathscr{E}\left(A + e^{-\alpha t}\left\{-A\operatorname{ch}\omega t + \left[\frac{L_1+L_2}{\omega L_1L_2} - \frac{\alpha A}{\omega}\right]\operatorname{sh}\omega t\right\}\right),$$

где

$$A = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2 + R(R_1+R_2)}, \quad \alpha,\ \beta = \frac{R+R_1}{2L_1} + \frac{R+R_2}{2L_2}, \quad \omega = \left[\beta^2 + \frac{R^2}{L_1L_2}\right]^{1/2}$$

11. Три ветви соединяются в двух узлах: первая ветвь содержит конденсатор C_1 и выключатель, вторая — конденсатор C_2 и выпрямитель K, третья — индуктивность L. Вначале конденсатор C_1 имеет заряд Q_0, а полярность выпрямителя такова, что сразу после замыкания цепи (при $t=0$) конденсатор C_1 не может разрядиться через вторую ветвь. Показать, что ток через индуктивность L в указанные ниже промежутки времени равен при $0 < t < \frac{1}{2}\pi(LC_1)^{1/2}$

$$i = Q_0(LC_1)^{-1/2}\sin\left[(LC_1)^{-1/2}t\right],$$

при $\frac{1}{2}\pi (LC_1)^{1/2} < t < \frac{1}{2}\pi \{(LC_1)^{1/2} + [L(C_1 + C_2)]^{1/2}\}$

$$i = Q_0 (LC_1)^{-1/2} \sin\left([L(C_1 + C_2)]^{-1/2} t + \frac{1}{2}\pi \left\{ 1 - \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right]^{1/2} \right\} \right),$$

при $t > \frac{1}{2}\pi \{(LC_1)^{1/2} + [L(C_1 + C_2)]^{1/2}\}$

$$i = Q_0 [L(C_1 + C_2)]^{-1/2} \sin\left((LC_1)^{-1/2} t + \frac{1}{2}\pi \left\{ 1 - \left[\frac{C_1 + C_2}{C_1} \right]^{1/2} \right\} \right).$$

12*. Коэффициент взаимной индукции двух связанных контуров с параметрами L, R_1 и N (индуктивность), R_2 равен M. В один из контуров включается э. д. с. $\mathscr{E}$. Показать, что полное количество электричества, протекающее через второй контур, равно $\mathscr{E}M/R_1R_2$.

13*. Коэффициент взаимной индукции двух связанных контуров с параметрами C, R, L и N, S (сопротивление) равен M. В начальный момент на конденсаторе находился заряд Q. Показать, что если $LN = M^2$, то начальные токи равны

$$-\frac{NQ}{C(RN + SL)} \quad \text{и} \quad \frac{MQ}{C(RN + SL)}.$$

Найти токи в любой последующий момент времени.

14*. Два изолированных провода A и B с одинаковыми активными сопротивлениями и с самоиндукциями L имеют коэффициент взаимной индукции, мало отличающийся от L. К концам провода B присоединяется проволока малого активного сопротивления, а к концам провода A — батарея с малым внутренним сопротивлением. Через t сек. после присоединения в проводе A наблюдается ток i. Доказать, что для не очень малых t ток приблизительно равен

$$i = \frac{1}{2}(i_0 + i'),$$

где i_0 — постоянный ток в A, i' — ток, который протекал бы через t сек. в A и B при их последовательном соединении с батареей.

15*. Два заряженных проводника, емкостные коэффициенты которых равны γ_1, γ_2, Γ, соединяются посредством катушки, имеющей большую самоиндукцию L и сопротивление R. Показать, что частота собственных колебаний системы равна

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1\gamma_2 - \Gamma^2} \frac{1}{L} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{1/2}$$

16*. Две параллельно соединенные катушки (R, S — сопротивления, L, M, N — коэффициенты индукции) расположены так, что постоянный ток, разветвляющийся между ними, создает такие магнитные поля, что результирующая сила, отклоняющая стрелку гальванометра, равна нулю. Доказать, что при внезапном возникновении тока в цепи, содержащей катушки, начальная сила, действующая на стрелку, не будет, вообще говоря, равна нулю и что в результате получится такое отклонение стрелки гальванометра, которое возникает при постоянном (установившемся) токе, проходящем в одной первой катушке в течение времени

$$\frac{M - L}{R} - \frac{M - N}{S}.$$

17*. Конденсатор C разряжается через две цепи: первая состоит из сопротивления R и самоиндукции L, другая — из сопротивления R' и конденсатора C'. Показать, что заряд Q на конденсаторе в любой момент времени удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LR' \frac{d^3Q}{dt^3} + \left(\frac{L}{C} + \frac{L}{C'} + RR' \right) \frac{d^2Q}{dt^2} + \left(\frac{R}{C} + \frac{R}{C'} + \frac{R'}{C} \right) \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CC'} = 0.$$

18*. Мост Уитстона используют для сравнения коэффициента взаимной индукции M двух катушек с коэффициентом самоиндукции L третьей катушки. Одна из парных катушек помещается в диагональ AC, содержащую батарею, другая катушка присоединяется к концам диагонали BD в качестве шунта к гальванометру (баллистическому) и третья катушка помещается в плечо AD. Мост вначале балансируется на постоянном токе (сопротивления плеч AB, BC, CD, DA равны R_1, R_2, R_3, R_4); сопротивление шунта изменяется до тех пор, пока при размыкании и замыкании цепи батареи стрелка гальванометра перестает отклоняться. Пусть в сбалансированном мосте сопротивление шунта равно R. Доказать, что

$$LRR_1 = M(R_1 + R_4)^2.$$

19. Два конденсатора C_1 и C_2 включены последовательно с индуктивностью L. В начальный момент заряд на C_1 равен Q, а на C_2 — нулю. Показать, что через t сек. после замыкания цепи ток через катушку индуктивности равен

$$I = Q\left[\frac{C_2}{LC_1(C_1+C_2)}\right]^{1/2}\sin\left[\left(\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\right)^{1/2}t\right]$$

Показать, что если $C_1 > C_2$, то заряд на первом конденсаторе никогда не изменит свой знак.

20. Три ветви соединяются в двух узлах. Каждая из двух ветвей содержит конденсатор C и индуктивность L, а третья ветвь — только конденсатор C. Показать, что круговые частоты собственных колебаний системы равны $(LC)^{-1/2}$ и $3^{1/2}\ (LC)^{-1/2}$.

21. Между двумя пластинами желательно создать поле, которое за время T_0 линейно возрастает до значения F_0, а потом за такое же время линейно уменьшается до нуля. Емкость такого конденсатора равна C, и при наличии поля F_0 заряд на нем равен Q_0. В цепи конденсатора находится сопротивление R. Найти форму импульса, который должен быть приложен для создания вышеописанного поля.

22. Электрическая цепь представляет собой равносторонний треугольник, каждая сторона которого содержит емкость C, а вершины соединены с общей центральной точкой индуктивностями L. Показать, что в системе возможны колебания с периодом $T = 2\pi\ (3LC)^{1/2}$.

23. Два одинаковых конденсатора C соединены последовательно с соленоидом индуктивности L. Показать, что соединение средней точки соленоида с точкой между конденсаторами приводит к появлению новой круговой частоты ω_2, определяемой выражением

$$(1-2\omega_1^2MC)^{-1/2}\,\omega_1,$$

где ω_1 — первоначальная круговая частота, а M — взаимная индукция между двумя половинами соленоида.

ЛИТЕРАТУРА

Berg E. J., Heaviside's Operational Calculus, McGraw-Hill, 1929.
Bush V., Operational Circuit Analysis, Wiley, 1929.
Carson J. R., Electric Circuit Theory and the Operational Calculus, McGraw-Hill, 1920.
Cohen L., Heaviside's Electrical Circuit Theory, McGraw-Hill, 1928.
Gardner M. F., Barnes J. L., Transients in Linear Systems, Wiley, 1942. (См. перевод: Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах, М., 1949.)
Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XV, Berlin, 1927.
Guillemin E. A., Communication Networks, Wiley, 1931, 1935.
Heaviside O., Electrical Papers, Boston, 1925.
Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.
Kurtz E. B., Corcoran G. F., Introduction to Electrical Transients, Wiley, 1935.
Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, v. II, Oxford, 1881.
Mcllwain K., Brainard J. G., High Frequency Oscillating Circuits, Wiley, 1931.
Ollendorf F., Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Berlin, 1926.
Pierce G. W., Electric Oscillations and Electric Waves, McGraw-Hill, 1920.
Poor V. C., Electricity and Magnetism, Wiley, 1931.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Shea T. E., Transmission Networks and Wave Filters, Van Nostrand, 1929.
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, Leipzig, 1932.

Глава X

ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

§ 1. Гармонические электродвижущие силы. Частное решение. Если в системе все э. д. с. являются периодическими функциями времени, то они создают ток, называемый переменным. Наиболее распространенной и важной из этих функций является гармоническая или синусоидальная функция. Электродвижущая сила такого типа индуцируется в плоской проволочной петле, имеющей форму окружности радиуса a, при ее вращении с постоянной угловой скоростью ω вокруг диаметра, который расположен под прямым углом к однородному магнитному полю **B**. Когда плоскость петли образует с направлением поля угол $\alpha = \omega t$, поток через нее равен $N = \pi a^2 B \sin \omega t$. Согласно формуле (8.1), индуцированная э. д. с. будет равна

$$\mathscr{E} = -\frac{dN}{dt} = -\pi a^2 B\omega \cos \omega t = \mathscr{E}_0 \cos \omega t. \tag{10.1}$$

В случае неоднородного магнитного поля или неравномерной угловой скорости $\mathscr{E}$ нельзя, вообще говоря, выразить в такой простой форме; но если эти отклонения периодические, то э. д. с. можно представить в виде суперпозиции подобных простых колебаний с разными частотами. Такие случаи будут рассмотрены в конце настоящей главы.

Дифференциальное уравнение, в котором t является независимой переменной, будет содержать теперь в правой части вместо постоянного члена выражение вида

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \\ &= \operatorname{Re}\{\mathscr{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{\mathscr{E} e^{j\omega t}\},\end{aligned} \tag{10.2}$$

где $A = \mathscr{E}_0 \cos \varphi$, $B = -\mathscr{E}_0 \sin \varphi$. Полное решение такого уравнения состоит из общего решения однородного уравнения, получаемого путем приравнивания правой части нулю, плюс частное решение неоднородного уравнения, или стационарное решение. Первое решение неустановившегося режима подробно исследовалось в предыдущей главе, где было установлено, что при наличии в схеме сопротивления каждый член решения содержит множитель, в который время входит в отрицательный показатель экспоненциальной функции. С течением времени эта часть общего решения стремится к нулю и остается только частное решение, которое и будет рассматриваться в настоящей главе.

§ 2. Контур, содержащий сопротивление, емкость и индуктивность. На фиг. 84 был показан наиболее общий вид электрической цепи, которая не содержит взаимной индуктивности и в которой R, L и C включены последовательно. Для простоты выберем $t = 0$ в тот момент времени, когда синусоидальная э. д. с. достигла максимума. Тогда в выражении (10.2) $\varphi = 0$. Уравнение

Кирхгофа для рассматриваемой цепи имеет вид

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=\mathrm{Re}\{\mathscr{E}_0 e^{j\omega t}\}. \tag{10.3}$$

После того как переходные процессы, о которых шла речь в § 3 гл. IX, прекратятся, естественно ожидать, что ток в контуре будет иметь ту же периодичность, что и э. д. с. Попытаемся отыскать частное решение в форме

$$i=\mathrm{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{I_0 e^{j(\omega t+\psi)}\}. \tag{10.4}$$

Вектор $\mathbf{I}$ является, вообще говоря, комплексной величиной и называется комплексной амплитудой, содержащей как амплитуду I_0, так и фазу ψ искомого тока. Напишем $\mathbf{I}=I'+jI''$, где I' и I'' — действительные величины, тогда

$$(I'^2+I''^2)^{1/2}=I_0, \qquad \mathrm{tg}\,\psi=\frac{I''}{I'}$$

Имея в виду, что $i=\dot{q}$, подставим в уравнение (10.3) вместо q его значение и, опустив общий множитель $e^{j\omega t}$, получим

$$\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]\mathbf{I}=\mathscr{E}_0, \tag{10.5}$$

или

$$\mathbf{I}=I_0e^{j\psi}=\frac{\mathscr{E}_0}{L+j\,[\omega L-1/(\omega C)]}=\frac{\mathscr{E}_0}{\mathbf{Z}}. \tag{10.6}$$

Это выражение по форме полностью совпадает с выражением (6.6), однако вместо сопротивления здесь стоит величина $\mathbf{Z}$, известная под названием комплексного импеданса контура, комплексная амплитуда[1] тока $\mathbf{I}$ вместо тока I и амплитуда $\mathscr{E}_0$ синусоидальной э. д. с. вместо $\mathscr{E}$. При использовании этих символов всю теорию электрических цепей, развитую в гл. VI на базе законов Ома и Кирхгофа, можно полностью применить к цепям переменного тока в стационарном режиме. Амплитуду тока можно всегда найти, взяв квадратный корень из произведения $\mathbf{I}$ и сопряженной ей величины $\mathbf{I}^*$, так как $\mathbf{II}^*=I'^2+I''^2$. В гл. IV мы уже рассматривали подобные операции с комплексными величинами. В нашем случае, в частности, имеем

$$I_0=I_0(e^{j\psi}e^{-j\psi})^{1/2}=(\mathbf{II}^*)^{1/2}=\mathscr{E}_0\left\{\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]\left[R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]\right\}^{-1/2}=$$

$$=\mathscr{E}_0\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{-1/2}=\mathscr{E}_0(R^2+X^2)^{-1/2}=\frac{\mathscr{E}_0}{Z}. \tag{10.7}$$

Вектор $\mathbf{Z}$ называется полным сопротивлением контура (импедансом), а $X=\omega L-1/(\omega C)$ — реактивным сопротивлением, причем первый член ωL (индуктивное реактивное сопротивление) и второй член $1/(\omega C)$ (емкостное реактивное сопротивление) измеряются в тех же единицах, что и сопротивление. Умножим числитель и знаменатель выражения (10.6) на $\mathbf{Z}^*$; тогда знаменатель будет действительной величиной, а I''/I' будет равно отношению мнимой части $\mathbf{Z}^*$ к действительной. Следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\psi=-\frac{X}{R}=-\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R}=\frac{1-\omega^2LC}{\omega RC}. \tag{10.8}$$

Согласно выражению (10.4), ток равен:

$$i=\frac{\mathscr{E}_0}{Z}\cos(\omega t+\psi). \tag{10.9}$$

[1] См. примечание к § 9 гл. IV.

Если конденсатор отсутствует, то

$$i = \frac{\mathscr{E}_0}{(R^2+\omega^2L^2)^{1/2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{10.10}$$

В этом случае говорят, что ток по фазе отстает от э. д. с. Если контур состоит только из конденсатора и сопротивления, то, полагая $L=0$, получим

$$i = \frac{\omega C\mathscr{E}_0}{(1+\omega^2R^2C^2)^{1/2}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\omega RC}\right). \tag{10.11}$$

В этом случае ток опережает э. д. с. При наличии одной лишь самоиндукции, полагая в выражении (10.10) $R=0$, находим $\left(\text{поскольку } \frac{1}{2}\pi = \operatorname{arc\,tg}\infty\right)$

$$i = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{10.12}$$

В этом случае ток отстает на 90°. При наличии одной лишь емкости, полагая в выражении (10.11) $R=0$, имеем

$$i = \omega C\mathscr{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right), \tag{10.13}$$

т. е. ток опережает э. д. с. на 90°.

§ 3. Мощность, эффективные значения, резонанс. Мощность, затрачиваемая в контуре в каждый момент времени, определяется выражением, аналогичным выражению (6.10),

$$\begin{aligned} P = i\mathscr{E} &= \frac{\mathscr{E}_0^2}{Z}\cos\omega t\cos(\omega t+\psi) = \\ &= \frac{\mathscr{E}_0^2}{Z}(\cos^2\omega t\cos\psi - \cos\omega t\sin\omega t\sin\psi) = \\ &= \frac{\mathscr{E}_0^2}{2Z}(\cos\psi + \cos 2\omega t\cos\psi - \sin 2\omega t\sin\psi), \end{aligned} \tag{10.14}$$

где i и $\mathscr{E}$ — мгновенные значения тока и э. д. с., входящие в выражение (10.3), (10.4) и определяемые соотношением (10.6). Изменение мощности на протяжении одного периода показано на фиг. 95. Бóльшую часть времени мощность поступает в контур, но в течение некоторого промежутка времени она передается из контура обратно в генератор. Если мы усредним мощность, определяемую выражением (10.14), по целому числу периодов, то члены с $\cos 2\omega t$ и $\sin 2\omega t$ выпадут и останется только постоянный член, так что

$$\overline{P} = \frac{\mathscr{E}_0^2\cos\psi}{2\{R^2+[\omega L - 1/(\omega C)]^2\}^{1/2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*}{\mathbf{Z}^*}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathfrak{E}\mathfrak{i}^*\}, \tag{10.15}$$

где $\mathfrak{E}^*$ и $\mathbf{Z}^*$ — комплексно-сопряженные величины $\mathfrak{E}$ и $\mathbf{Z}$ соответственно.

Введем величину x_e, получаемую после извлечения квадратного корня из квадрата переменной величины x, усредненного по периоду. Как известно (см. Двайт, 858.4), среднее значение квадрата синуса или косинуса равно $^1/_2$. Следовательно, квадратный корень из среднеквадратичного значения тока и э. д. с. равен соответственно

$$i_e = (2)^{-1/2} I_0 \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_e = (2)^{-1/2}\mathscr{E}_0. \tag{10.16}$$

Соотношение (10.7) можно записать теперь в виде

$$i_e = \frac{\mathscr{E}_e}{Z}. \tag{10.17}$$

Целесообразность введения этих величин станет очевидной, если, используя формулы (10.16) и (10.17), записать в такой же форме выражение (10.15):

$$\overline{P} = i_e \mathscr{E}_e \cos\psi = i_e^2 Z \cos\psi = \frac{\mathscr{E}_e^2}{Z} \cos\psi = i_e^2 R = \operatorname{Re}\{\mathfrak{E}_e \mathbf{i}_e^*\}. \qquad (10.18)$$

Мы видим, что в случае $\psi = 0$ эти формулы совпадают с соответствующими формулами для постоянного тока § 4 гл. VI. Поэтому величина i_e называется эффективным током, а $\mathscr{E}_e$ — эффективной электродвижущей силой. Величина $\cos\psi$, называемая коэффициентом мощности, выражается через параметры контура; используя формулу (400.12) из справочника Двайта и выражение (10.8), имеем

$$\cos\psi = \frac{\omega RC}{[\omega^2 R^2 C^2 + (1-\omega^2 LC)^2]^{1/2}}. \qquad (10.19)$$

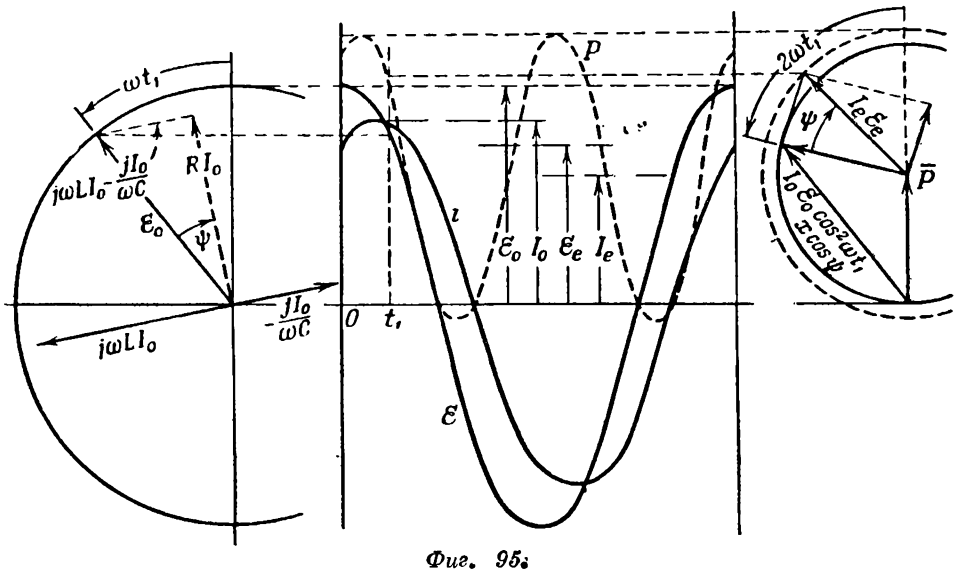
Величина $i_e \sin\psi$ называется реактивной или безваттной составляющей тока, поскольку она ничего не вносит в среднее значение мощности.

Из соотношения (10.7) следует, что при $\omega^2 = (LC)^{-1}$ Z достигает минимума, а ток принимает максимальное значение. Частота, при которой ток максимален, называется резонансной. Согласно формуле (9.5), при малом сопротивлении в цепи контура резонансная частота близка к частоте собственных колебаний контура. Резонанс, конечно, возможен и в том случае, когда сопротивление настолько велико, что контур не может находиться в колебательном режиме. Если контур настроен в резонанс, то, как вытекает из соотношений (10.15) и (10.19), коэффициент мощности равен единице и цепь потребляет максимальную мощность. В случае контура с очень малым сопротивлением и емкостью, но с большой индуктивностью ток в нем будет, согласно выражению (10.12), очень малым и в то же время $\psi \to -\frac{1}{2}\pi$, т. е. $\cos\psi \to 0$. Такая цепь, не потребляя мощности, препятствует прохождению переменного тока и в то же время пропускает постоянный; это устройство называется дросселем. С другой стороны, при включении очень большой емкости постоянный ток будет проходить плохо, но зато переменный ток, согласно выражению (10.13), пройдет без всякой потери мощности, потому что и в этом случае $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

§ 4. Графическое представление. Векторная диаграмма[1]. Как было показано в § 9 гл. IV, значение комплексного числа $z = x + jy$ можно представить точкой на комплексной плоскости. В полярной системе координат это можно записать в виде $re^{j\theta}$, где θ — угол между осью абсцисс и радиус-вектором r, проведенным в эту точку. Выражения для э. д. с. и установившегося тока (10.3) и (10.4) имеют ту же форму, поэтому их также можно представить в полярной системе координат. Эти два вектора длиной I_0 и $\mathscr{E}_0$, отложенные из начала координат и составляющие между собой постоянный угол ψ, вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг начала координат. Мгновенные значения i и $\mathscr{E}$ в момент времени t равны проекциям радиус-векторов на действительную ось Ox. Вектор $\mathscr{E}$ представляет собой результирующую э. д. с. в контуре, являясь суммой трех компонент: 1) э. д. с. $j\omega LI_0$ в катушке индуктивности, опережающей ток, согласно выражению (10.12), на 90°, 2) компоненты $I_0 R$, находящейся в фазе с током, и 3) э. д. с. $-jI_0/(\omega C)$ на конденсаторе, отстающей от тока, согласно выражению (10.13), на 90°. Векторная диаграмма э. д. с. и ее

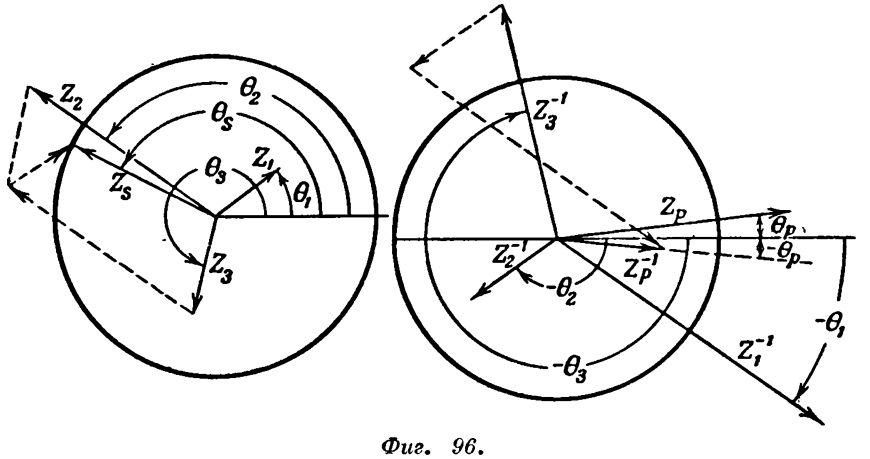
[1] Автор не делает различия между векторной и круговой диаграммами. При переводе принят термин «векторная диаграмма». — *Прим. перев.*

компонент изображены на фиг. 95, слева. В центре фиг. 95 показаны осциллограммы тока, э. д. с. и мощности. Справа изображена векторная диаграмма компонент мощности.



Фиг. 95.

§ 5. Последовательное и параллельное соединение импедансов. Как уже упоминалось выше (см. § 2), комплексные обозначения позволяют написать для переменных токов закон, аналогичный закону Ома для постоянных токов. Это обстоятельство, совместно с законами Кирхгофа, дает возможность установить для импедансов, соединенных последовательно и



Фиг. 96.

параллельно, теже самые правила, которые были получены в § 5 гл. VI для сопротивлений. Так, общий импеданс $\mathbf{Z}$ цепи, состоящей из нескольких импедансов $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_n$, соединенных последовательно, выражается следующим образом:

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\ldots+\mathbf{Z}_n. \qquad (10.20)$$

Поскольку мы имеем дело с векторами, следует брать векторную сумму

вместо алгебраической. Для параллельного соединения импедансов имеем

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathbf{Z}_n}. \tag{10.21}$$

Так как обратная величина комплексного числа $re^{j\theta}$ равна $e^{-j\theta}/r$, то при параллельном соединении импедансов нужно откладывать на диаграмме векторы, длины которых — обратные величины длин $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, ..., $\mathbf{Z}_n$, а аргументы имеют противоположный знак. Для получения результирующего вектора $\mathbf{Z}$ следует взять обратную величину модуля суммы этих величин и сменить знак аргумента суммы на обратный. На фиг. 96 показаны векторные диаграммы: слева — для случая последовательного соединения трех импедансов $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$ и справа — для случая параллельного соединения тех же импедансов, когда складываются обратные величины импедансов. Обратная величина импеданса часто называется полной проводимостью. Масштаб длин векторов на фиг. 95 задается окружностями единичного радиуса. Следует заметить, что при параллельном соединении сумма обратных величин конечных импедансов $\mathbf{Z}_p^{-1}$ может оказаться равной нулю. В этом случае результирующий импеданс $\mathbf{Z}_p$ равен бесконечности, т. е. ток такой частоты через цепь проходить не может.

§ 6. Передача мощности. Предположим, что источник, имеющий импеданс $\mathbf{Z}_s$, генерирует э. д. с. $\mathscr{E}_0 e^{j\omega t}$, а импеданс нагрузки равен $\mathbf{Z}_L$. Тогда, согласно выражениям (10.7) и (10.20), ток в цепи равен

$$\mathbf{i} = \frac{\mathscr{E}}{\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathscr{E}}{(R_s + jX_s) + (R_L + jX_L)} \tag{10.22}$$

и, в соответствии с выражением (10.19),

$$i_e = \frac{\mathscr{E}_e}{[(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2]^{1/2}}. \tag{10.23}$$

Пользуясь выражением (10.19), находим среднюю мощность, потребляемую нагрузкой,

$$\overline{P}_L = i_e^2 Z_L \cos\psi = \frac{R_L \mathscr{E}_e^2}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}. \tag{10.24}$$

Для определения значения $\mathbf{Z}_L$, при котором в нагрузке поглощается максимальная мощность, приравниваем частные производные $\partial P/\partial R_L$ и $\partial P/\partial X_L$ нулю, в результате чего найдем

$$R_L^2 = R_s^2 + (X_s + X_L)^2 \tag{10.25}$$

и

$$X_s = -X_L. \tag{10.26}$$

После подстановки выражения (10.26) в (10.25) получаем

$$R_L = R_s. \tag{10.27}$$

Таким образом, максимальная мощность передается в том случае, когда $\mathbf{Z}_L$ и $\mathbf{Z}_s$ являются комплексно-сопряженными величинами. При выполнении этого условия

$$\overline{P}_L = \frac{\mathscr{E}_e^2}{4R_L} \tag{10.28}$$

§ 7. Мостик импедансов. Точно так же как мост Уитстона (см. фиг. 60) служит для сравнения сопротивлений, мост, изображенный на фиг. 97,

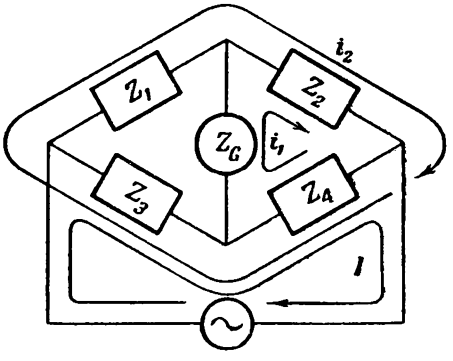
употребляется для сравнения импедансов. Пусть $I_0 \cos \omega t$ — ток, питающий мост, тогда ток через индикатор $\mathbf{Z}_G$ является [в выражении (6.18) следует заменить R на $\mathbf{Z}$] действительной частью выражения

$$i_1 = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_G(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_4)+(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_3)(\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_4)} I_0 e^{j\omega t}. \tag{10.29}$$

Если ток равен нулю, то должно выполняться соотношение

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3. \tag{10.30}$$

Отсюда получаются два условия баланса вместо одного, ибо это соотношение должно выполняться независимо как для действительной, так и для мнимой части.



Фиг. 97.

Наиболее распространенными мостами такого типа являются: емкостный мост

$$\mathbf{Z}_1 = -\frac{j}{\omega C_1}, \quad \mathbf{Z}_3 = -\frac{j}{\omega C_3}, \quad \mathbf{Z}_2 = R_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{Z}_4 = R_4,$$

в котором при балансе выполняется условие

$$C_1 R_2 = C_3 R_4, \tag{10.31}$$

а также мост, содержащий индуктивности,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \mathbf{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3, \quad \mathbf{Z}_2 = R_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{Z}_4 = R_4,$$

в котором при балансе

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad \text{и} \quad L_1 R_4 = L_3 R_2. \tag{10.32}$$

§ 8. Цепь переменного тока в общем случае. Задачу о нахождении токов в произвольной цепи можно решить точно так же, как и в § 9 и 10 гл. VI, если удастся ввести величины $\mathbf{Z}_{pq}$, связь которых с комплексными э. д. с. и контурными токами будет аналогична связи R_{pq} с постоянными токами и э. д. с. Выражения (9.50)—(9.53) определяют взаимные параметры L_{rs}, R_{rs} и S_{rs}, а также собственные параметры L_{rr}, R_{rr} и S_{rr} таким образом, что в стационарном состоянии, когда все токи и э. д. с. изменяются с одной и той же частотой, уравнение (9.54) можно записать в виде

$$\left(j\omega L_{rr} + R_{rr} - \frac{jS_{rr}}{\omega}\right)\mathbf{i}_r = \mathbf{Z}_{rr}\,\mathbf{i}_r = \mathfrak{E}_{rr}, \tag{10.33}$$

а уравнение (9.55) — в виде

$$\pm\left(j\omega L_{rs} + R_{rs} - \frac{jS_{rs}}{\omega}\right)\mathbf{i}_s = \pm\,\mathbf{Z}_{rs}\,\mathbf{i}_{rs} = \mathfrak{E}_{rs}. \tag{10.34}$$

Импеданс $\mathbf{Z}_r$ определяется соотношением

$$\mathbf{Z}_{rr} = \mathbf{Z}_r + \mathbf{Z}_{1r} + \mathbf{Z}_{2r} + \ldots + \mathbf{Z}_{nr} \tag{10.35}$$

и, таким образом, содержит коэффициенты взаимной индукции, включенные в L_{rs}. Сумма э. д. с. $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, ..., $\mathfrak{E}_n$ в контурах, несущих токи $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, ..., $\mathbf{i}_n$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{i}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{i}_2 \pm \quad & \pm \mathbf{Z}_{1n}\mathbf{i}_n = \mathfrak{E}_1, \\ \pm\,\mathbf{Z}_{21}\mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{i}_2 \pm \quad & \pm \mathbf{Z}_{2n}\mathbf{i}_n = \mathfrak{E}_2 \\ \pm\,\mathbf{Z}_{n1}\mathbf{i}_1 \pm \mathbf{Z}_{n2}\mathbf{i}_2 \pm \ldots + \mathbf{Z}_{nn}\mathbf{i}_n &= \mathfrak{E}_n. \end{aligned} \tag{10.36}$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями (6.32); знаки определяются в соответствии с выбранным направлением токов. Решение будет иметь также прежнюю форму, поэтому, согласно выражениям (6.36), мы приходим к выводу, что если единственный источник э. д. с. $\mathcal{E}_p$ находится в ветви, где протекает единственный ток $\mathbf{i}_p$, то амплитуда и фаза тока $\mathbf{i}_q$ в q-й ветви выражаются соотношением

$$\mathbf{i}_q = \frac{\mathcal{E}_p \Delta_{pq}}{\Delta}, \tag{10.37}$$

где Δ_{pq} — алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{Z}_{pq}$ в детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \pm \mathbf{Z}_{1n} \\ \\ \pm \mathbf{Z}_{n1} & \mathbf{Z}_{nn} \end{vmatrix} \tag{10.38}$$

Отсюда также следует, что стационарный ток в некоторой ветви, появляющийся при помещении переменной э.д.с. во вторую ветвь той же цепи, равен, по амплитуде и фазе, току, который появится во второй цепи, если тот же самый источник э. д. с. поместить в первую ветвь. Если источник э. д. с. находится в i-й ветви, то, согласно выражению (6.37), отношение любых двух стационарных токов в электрической цепи равно

$$\frac{\mathbf{i}_q}{\mathbf{i}_p} = \frac{\Delta_{rq}}{\Delta_{rp}}.$$

Теорема Тевенина для переменных токов утверждает, что если при разомкнутом контуре потенциал на концах A и B в рассматриваемой цепи равен $\mathcal{E}_0$ и если (на той же частоте) при замене всех источников э. д. с. их внутренними импедансами цепь между концами A и B имеет импеданс $\mathbf{Z}$, то при соединении A и B проводом с нулевым импедансом ток через него будет равен

$$\mathbf{i} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathbf{Z}}. \tag{10.39}$$

Равенство (10.39) получается из (10.37) так же, как выражение (6.38) из (6.36). Это позволяет включать данную цепь с концами A и B в другие цепи как источник э. д. с. $\mathcal{E}_0$, имеющий внутренний импеданс $\mathbf{Z}$.

Как мы увидим, в большинстве случаев возможно ввести контурные токи таким образом, что будут выполняться следующие условия: 1) по меньшей мере в одной ветви протекает только один ток $\mathbf{i}_1$; 2) в ветвях, где протекают лишь два тока, эти токи направлены противоположно; 3) в любой ветви протекает не более двух токов. Тем самым определяются все знаки и можно использовать выражение (6.39), причем теперь в детерминанте Δ все собственные импедансы $\mathbf{Z}_{pp}$ берутся со знаком плюс, а взаимные импедансы $\mathbf{Z}_{pq}$ — со знаком минус. Пусть в ветви, в которой помещена э. д. с. протекают два тока $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$, тогда

$$\mathbf{i}_1 = \begin{vmatrix} -\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{Z}_{13} - \mathbf{Z}_{14} & -\mathbf{Z}_{1n} \\ +\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 & +\mathbf{Z}_n \\ -\mathbf{Z}_{42} - \mathbf{Z}_{43} + \mathbf{Z}_{44} & -\mathbf{Z}_{4n} \\ \\ -\mathbf{Z}_{n2} - \mathbf{Z}_{n3} - \mathbf{Z}_{n4} & +\mathbf{Z}_{nn} \end{vmatrix} \frac{\mathcal{E}_3}{\Delta} \tag{10.40}$$

Если имеется несколько э. д. с., то их следует рассматривать по отдельности и полученные результаты сложить, принимая во внимание фазу каждой из э. д. с.

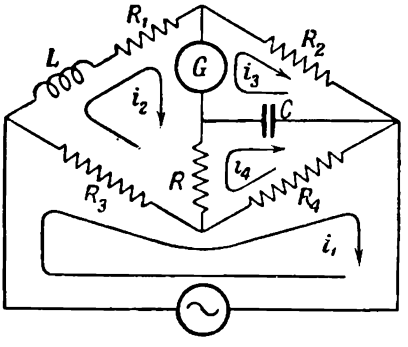
Для получения полного решения с учетом переходных явлений следует стационарные решения добавить к общему решению (9.67), после чего определить постоянные интегрирования из начальных условий.

§ 9. Сопряженные ветви в электрической цепи. Мостик Андерсона. Две ветви в цепи называются сопряженными, если источник э. д. с., помещенный в одну из ветвей, не вызывает тока в другой ветви. Пусть в каждой из рассматриваемых ветвей протекает по одному току $\mathbf{i}_p$ и $\mathbf{i}_q$; тогда условие сопряжения, согласно соотношению (10.37), имеет вид

$$\Delta_{pq}=0. \qquad (10.41)$$

Если токи введены так, что применимо соотношение (10.40), то, обозначая детерминант в этом уравнении через Δ_{123}, будем иметь следующее условие сопряжения:

$$\Delta_{123}=0. \qquad (10.42)$$



Фиг. 98.

Найдем при помощи этой формулы условие баланса в мостике Андерсона (фиг. 98), применяемом для сравнения величин емкости и самоиндукции. Импедансы, стоящие в соотношении (10.40), в данном случае равны: $\mathbf{Z}_{12}=R_3$, $\mathbf{Z}_{13}=0$, $\mathbf{Z}_{14}=R_4$, $\mathbf{Z}_2=R_1+j\omega L$, $\mathbf{Z}_3=R_2$, $\mathbf{Z}_4=0$, $\mathbf{Z}_{42}=R$, $\mathbf{Z}_{43}=-j/(\omega C)$ и $\mathbf{Z}_{44}=R+R_4-j/(\omega C)$. Написав соотношение (10.42)

$$-\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_{44}+\mathbf{Z}_{14}\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_{43}-\mathbf{Z}_{14}\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_{42}=0,$$

являющееся условием баланса мостика, и приравняв нулю действительную часть, находим

$$-R_3R_2(R+R_4)+\frac{LR_4}{C}-R_4R_2R=0, \text{ или } L=CR_2\left[\frac{(R+R_4)R_3}{R_4}+R\right]. \qquad (10.43)$$

Приравняв нулю мнимую часть, получаем

$$\frac{R_3R_2}{\omega C}-\frac{R_1R_4}{\omega C}=0, \text{ или } R_1R_4=R_3R_2. \qquad (10.44)$$

Выполнения условия баланса (10.44) можно добиться, используя постоянный ток, как в обычном мостике Уитстона; затем, включая источник переменной э. д. с. и регулируя величину сопротивления R, можно удовлетворить условию (10.43).

§ 10. Вынужденные колебания в индуктивно связанных контурах. Найдем токи i_1 и i_2 в контурах, изображенных на фиг. 99. В этом случае, согласно соотношениям (10.33) и (10.34), а также (9.50)—(9.53), имеем

$$\mathbf{Z}_{11}=R_1+j\left(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right)=R_1+jX_1;\ \mathbf{Z}_{12}=\mathbf{Z}_{21}=j\omega M;$$
$$\mathbf{Z}_{22}=R_2+j\left(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right)=R_2+jX_2. \qquad (10.45)$$

Пользуясь соотношением (10.37), получим выражения для токов

$$\mathbf{i}_1=\frac{\mathbf{Z}_{22}\mathcal{E}}{\mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22}-\mathbf{Z}_{12}^2}=\frac{(R_2+jX_2)\mathcal{E}_0}{\mathbf{D}};\qquad \mathbf{i}_2=-\frac{\mathbf{Z}_{12}\mathcal{E}}{\mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22}-\mathbf{Z}_{12}^2}=-\frac{j\omega M\mathcal{E}_0}{\mathbf{D}}, \qquad (10.46)$$

где

$$\mathbf{D}=R_1R_2-X_1X_2+\omega^2M^2+j(R_1X_2+R_2X_1). \qquad (10.47)$$

Взяв действительную часть произведения $\mathbf{i}_1 e^{j\omega t}$, как это делалось в выражении (10.4), находим

$$i_1 = \frac{(R_2^2 + X_2^2)^{1/2}\,\mathscr{E}_0}{|\mathbf{D}|}\cos(\omega t + \varphi), \tag{10.48}$$

где

$$|\mathbf{D}| = [(R_1R_2 - X_1X_2 + \omega^2M^2)^2 + (R_1X_2 + R_2X_1)^2]^{1/2} \tag{10.49}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{R_2^2X_1 + X_2(X_1X_2 - \omega^2M^2)}{R_1X_2^2 + R_2(R_1R_2 + \omega^2M^2)}. \tag{10.50}$$

Далее

$$i_2 = \frac{\omega M\mathscr{E}_0}{|\mathbf{D}|}\cos(\omega t + \psi), \tag{10.51}$$

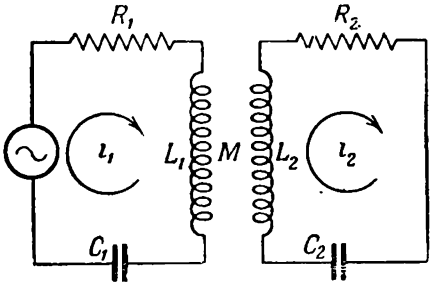
где

$$\operatorname{tg}\psi = +\frac{R_1R_2 - X_1X_2 + \omega^2M^2}{R_1X_2 + R_2X_1}. \tag{10.52}$$

Исходя из выражения (10.46) или (10.50) и (10.52), получаем

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{R_2}{X_2}. \tag{10.53}$$

Представляет особый интерес найти те значения ω, при которых величины i_1 и i_2 максимальны или минимальны. Прежде чем излагать обычные приближенные методы, наметим строгий путь вычисления этих значений. Приведем выражение $|\mathbf{D}|$ к форме, более удобной для дифференцирования; сравнив соотношение (10.45) с (9.68) и заменив p на $j\omega$, получим



Фиг. 99.

$$j\omega\mathbf{Z}_{11} = c_{11}, \qquad j\omega\mathbf{Z}_{12} = c_{12}, \qquad j\omega\mathbf{Z}_{22} = c_{22}.$$

Таким образом, при помощи уравнения (9.69) находим

$$\mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12}^2 = -\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{\omega^2} = \mathbf{D} =$$

$$= (\omega^4 - jA\omega^3 - B\omega^2 + jC\omega + D)\frac{L_1L_2 - M^2}{\omega^2}.$$

Умножая эту величину на комплексно-сопряженную и извлекая из полученного результата квадратный корень, будем иметь

$$|\mathbf{D}| = \frac{L_1L_2 - M^2}{\omega^2}[\omega^8 + (A^2 - 2B)\omega^6 +$$

$$+ (B^2 - 2AC + 2D)\omega^4 + (C^2 - 2BD)\omega^2 + D^2]^{1/2}. \tag{10.54}$$

Определить максимальное и минимальное значения амплитуды i_1 без построения кривой трудно, но для i_2 вычисления упрощаются; дифференцируя выражение амплитуды $\omega M\mathscr{E}_0/|\mathbf{D}|$ тока i_2 по ω и приравнивая результат нулю, получаем в дополнение к $\omega^2 = 0$ следующее соотношение:

$$\omega^8 - (B^2 - 2AC + 2D)\omega^4 - 2(C^2 - 2BD)\omega^2 - 3D^2 = 0. \tag{10.55}$$

Это — уравнение четвертой степени относительно ω^2, корни его находятся при помощи формул § 11 гл. IX. Каждому положительному действительному корню соответствует максимум или минимум тока I_2. Для выяснения вопроса о том, какому корню соответствует максимум, следует

подставить этот корень в уравнение (10.54). Тем самым определится также величина амплитуды.

Обычно частоту переменного тока в электрической цепи определяют, связывая эту цепь с контуром, имеющим откалиброванное реактивное сопротивление; изменяя реактивное сопротивление, можно получить максимальную амплитуду тока в контуре. Такой контур называется волномером. Пусть параметры электрической цепи R_1, L_1, C_1 и частота ω зафиксированы, тогда максимум тока i_2 возникнет, согласно выражению (10.51), при условии

$$\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}|}\right)=0.$$

Получаемое после дифференцирования соотношение разрешим относительно $X_2^{(M)}$, тогда

$$X_2^{(M)}=\frac{M^2\omega^2 X_1}{R_1^2+X_1^2}. \tag{10.56}$$

Отсюда, согласно выражениям (10.51) и (10.49), находим для тока i_2

$$i_2^{(M)}=\frac{\omega M\,(R_1^2+X_1^2)^{1/2}\,\mathscr{E}_0}{\omega^2M^2R_1+(R_1^2+X_1^2)\,R_2}\cos(\omega t+\psi). \tag{10.57}$$

При очень слабой связи $M\to 0$, $X_2^{(M)}=0$ и в соответствии с соотношением (10.56) получаем

$$\omega=(L_2C_2)^{-1/2}. \tag{10.58}$$

Эта частота совпадает с собственной частотой волномера, если R_2 мало. Сохраняя частоту постоянной, настроим теперь оба контура, тогда к соотношению (10.56) добавляется условие

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}|}\right)=0,\quad\text{или}\quad X_1^{(M)}=\frac{M^2\omega^2X_2}{R_2^2+X_2^2}. \tag{10.59}$$

Для удовлетворения соотношений (10.56) и (10.59) необходимо, чтобы

$$X_1=X_2=0 \tag{10.60}$$

или

$$X_1=\pm\left[(M^2\omega^2-R_1R_2)\frac{R_1}{R_2}\right]^{1/2},\qquad X_2=\pm\left[(M^2\omega^2-R_1R_2)\frac{R_2}{R_1}\right]^{1/2} \tag{10.61}$$

где X_1 и X_2 имеют одинаковый знак. Но, поскольку X_1 и X_2 — действительные величины, соотношение (10.61) не может иметь места, если $M^2\omega^2<R_1R_2$; поэтому при слабой связи (M мало) справедливо соотношение (10.60) и максимум оказывается при

$$(L_1C_1)^{1/2}=(L_2C_2)^{1/2}=\frac{1}{\omega}. \tag{10.62}$$

Формула (10.57) принимает вид

$$i_2^{(M)}=\frac{\omega M\,\mathscr{E}_0}{R_1R_2+\omega^2M^2}\sin\omega t. \tag{10.63}$$

При сильной связи $M^2\omega^2>R_1R_2$ имеет место соотношение (10.61) и

$$i_2^{(M)}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0(R_1R_2)^{-1/2}\cos(\omega t+\psi), \tag{10.64}$$

где

$$\operatorname{tg}\psi=\pm\left(\frac{R_1R_2}{M^2\omega^2-R_1R_2}\right)^{1/2}=\frac{R_1}{X_1}=\frac{R_2}{X_2}.$$

Выражение (10.64) показывает, что при достаточно сильной связи максимальный ток не зависит от M и ω. Следует помнить, что при больших значениях L и C выражения для X_1 и X_2 (10.61) являются положительными, а при малых значениях — отрицательными.

§ 11. Индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением. Тот факт, что R_1 и R_2 малы, не ведет к значительному упрощению полученных выше выражений для тока, потому что членами, содержащими R^2, можно с уверенностью пренебречь лишь при частотах, довольно далеких от резонансных, когда другие члены не так малы. Однако вычисление резонансных частот упрощается, ибо, обращаясь к выражениям (9.70), легко видеть, что теперь в уравнении (10.55) членами AC и C^2 можно пренебречь и разложить его левую часть на два множителя

$$(\omega^4 - B\omega^2 + D)(\omega^4 + B\omega^2 - 3D) = 0. \tag{10.65}$$

Первый множитель дает два положительных корня:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{B \mp (B^2 - 4D)^{1/2}}{2} = \frac{L_1C_1 + L_2C_2 \mp [(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2M^2]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2 - M^2)}. \tag{10.66}$$

Максимальные значения тока i_2 в этом случае получаются точно при нормальных частотах собственных колебаний связанных контуров [см. выражение (9.110)]. Второй множитель имеет один положительный корень ω_3^2, лежащий между ω_1^2 и ω_2^2,

$$\omega_3^2 = \frac{(B^2 + 12D)^{1/2} - B}{2} = \frac{[(L_1C_1 + L_2C_2)^2 + 12C_1C_2(L_1L_2 - M^2)]^{1/2} - L_1C_1 - L_2C_2}{2C_1C_2(L_1L_2 - M^2)}, \tag{10.67}$$

при этой частоте получается минимум тока. Заметим, что если $M \to 0$, то

$$\omega_1^2 \to (L_2C_2)^{-1} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 \to (L_1C_1)^{-1},$$

т. е. частоты, при которых i_2 максимален, стремятся к парциальным частотам (к резонансным частотам двух отдельных контуров).

Уравнение, соответствующее (10.55), но относящееся к максимуму и минимуму тока i_1, можно теперь также разложить на множители

$$(\omega^4 - B\omega^2 + D)\left[L_2\omega^6 + \left(BL_2 + \frac{3}{C_2}\right)\omega^4 - \left(3DL_2 + \frac{B}{C_2}\right)\omega^2 - \frac{D}{C_2}\right] = 0. \tag{10.68}$$

Первый множитель совпадает с множителем в выражении (10.65), поэтому i_1 имеет максимумы при тех же частотах ω_1 и ω_2, как и i_2. Второй множитель представляет относительно ω^2 кубическое уравнение, которое решается стандартным методом и дает один положительный корень, лежащий между ω_1 и ω_2, но отличный от ω_3. Этому корню соответствует минимум тока.

§ 12. Настроенные индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением. Если два только что рассмотренные контура настроены независимо на одну и ту же частоту, то $L_1C_1 = L_2C_2$, и результаты предыдущего параграфа несколько упрощаются. Максимальный ток в обоих контурах имеет теперь место при частотах ω_1 и ω_2, которые [см. соотношение (10.66)] определяются выражением

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{(C_1C_2)^{1/2}[(L_1L_2)^{1/2} \mp M]}. \tag{10.69}$$

Минимум тока i_2 получается [см. соотношение (10.67)] при частоте

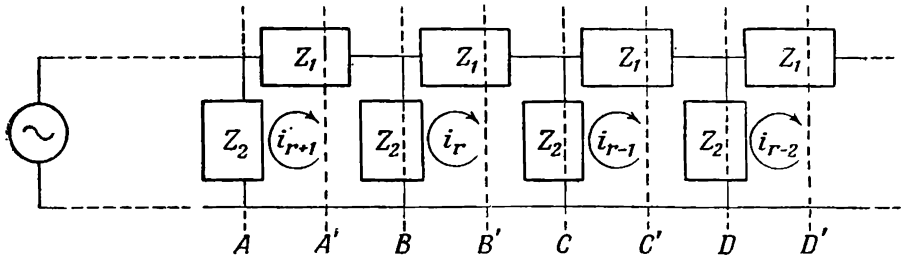
$$\omega_3^2 = \frac{(4L_1L_2 - 3M^2)^{1/2} - (L_1L_2)^{1/2}}{(C_1C_2)^{1/2}(L_1L_2 - M^2)}. \tag{10.70}$$

Замечаем, что если $M \to 0$, то

$$\omega_1^2 \to \omega_2^2 \to \omega_3^2 \to (L_1C_1)^{-1} = (L_2C_2)^{-1},$$

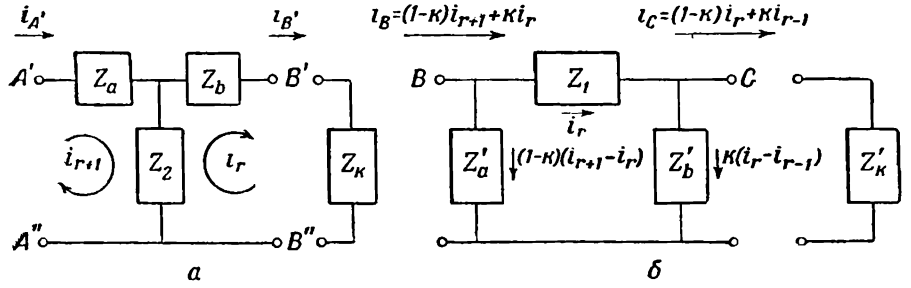
поэтому при слабой связи получаем единственный резонансный пик при собственной частоте обоих независимых контуров.

§ 13. Фильтры. На фиг. 100 изображен специальный тип электрической цепи, которая представляет собой бесконечную цепочку одинаковых



Фиг. 100.

звеньев. Цепи такого типа весьма важны, так как они обладают способностью пропускать лишь определенные частоты, задерживая все остальные; их называют обычно частотными фильтрами. Цепь, изображенную на фиг. 100,



Фиг. 101.

можно, очевидно, разбить на простые одинаковые ячейки двумя способами. Сечения A', B', C' и D' расщепляют каждый импеданс $\mathbf{Z}_1$ на две части: $\mathbf{Z}_a = k\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_b = (1-k)\mathbf{Z}_1$, соединенные последовательно ($0 < k < 1$). Каждая ячейка в этом случае образует так называемое Т-образное звено, показанное на фиг. 101, *а*. При $k = {}^1/_2$ говорят, что звено имеет серединно-последовательные концы. Если в качестве границ звеньев взять сечения A, B, C и D, то каждый импеданс $\mathbf{Z}_2$ можно представить в виде двух импедансов $\mathbf{Z}'_b = \mathbf{Z}_2/k$ и $\mathbf{Z}'_a = \mathbf{Z}_2/(1-k)$, соединенных параллельно. Такая ячейка, изображенная на фиг. 101, *б*, называется П-образным звеном. В случае $k = {}^1/_2$ говорят, что звено имеет серединно-параллельные концы.

Используя выражения для импедансов (9.50)—(9.53), (10.33) и (10.34), получим уравнение Кирхгофа для r-го контура (см. фиг. 100) в виде

$$-\mathbf{Z}_2\mathbf{i}_{r-1} + (\mathbf{Z}_1 + 2\mathbf{Z}_2)\,\mathbf{i}_r - \mathbf{Z}_2\mathbf{i}_{r+1} = 0. \qquad (10.71)$$

Это дифференциальное уравнение совпадает по форме с уравнением (6.20) и поэтому, согласно выражению (6.21), имеет решение

$$\mathbf{i}_r = \mathbf{A}\,\mathrm{ch}\,r\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{B}\,\mathrm{sh}\,r\boldsymbol{\Gamma}, \qquad (10.72)$$

где

$$\operatorname{ch}\Gamma = \frac{2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}. \tag{10.73}$$

Комплексная величина Γ называется коэффициентом пропускания или постоянной передачи звена. На фиг. 100 отсчет числа звеньев производится от конца, где расположен приемник. Пусть этот конец находится бесконечно далеко, тогда r стремится к бесконечности, и, поскольку при $x \to \infty$ $2\operatorname{ch} x \to 2\operatorname{sh} x \to e^x$, в соответствии с фиг. 101, *а* имеем

$$\frac{\mathbf{i}_{A'}}{\mathbf{i}_{B'}} = \frac{\mathbf{i}_{r+1}}{\mathbf{i}_r} = \frac{\mathbf{A}\operatorname{ch}(r+1)\Gamma + \mathbf{B}\operatorname{sh}(r+1)\Gamma}{\mathbf{A}\operatorname{ch} r\Gamma + \mathbf{B}\operatorname{sh} r\Gamma} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{\Gamma}$$

Аналогично в соответствии с фиг. 101, *б*

$$\frac{\mathbf{i}_B}{\mathbf{i}_C} = \frac{(1-k)\,\mathbf{i}_{r+1} + k\mathbf{i}_r}{(1-k)\,\mathbf{i}_r + k\mathbf{i}_{r-1}} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{\Gamma}$$

или

$$\Gamma = \ln \frac{\mathbf{i}_{r+1}}{\mathbf{i}_r}. \tag{10.74}$$

Следовательно, постоянную передачи звена в бесконечной цепи П-образной или Т-образной структуры можно определить как натуральный логарифм векторного отношения стационарного тока в звене к соответствующему току в соседнем звене, более удаленном от источника э. д. с. При таком определении действительная часть Γ оказывается положительной и называется постоянной затухания α, а мнимая часть φ называется фазовой постоянной или постоянной фазового сдвига.

Поскольку, согласно выражению (10.74), в бесконечной цепочке отношение $\mathbf{i}_{p+1}/\mathbf{i}_p$ не зависит от p, постоянная передачи звена, составленного из n простых одинаковых звеньев, равна

$$\Gamma_n = \ln\left(\frac{\mathbf{i}_p}{\mathbf{i}_{p-1}} \cdot \frac{\mathbf{i}_{p-1}}{\mathbf{i}_{p-2}} \cdots \frac{\mathbf{i}_{p-n+1}}{\mathbf{i}_{p-n}}\right) = \ln\left(\frac{\mathbf{i}_p}{\mathbf{i}_{p-1}}\right)^n = n\Gamma, \tag{10.75}$$

где Γ — постоянная передачи одного простого звена. Представляет интерес определить, какой импеданс следует присоединить к концу линии для того, чтобы получить такой же эффект, как при бесконечном продолжении линии. Такой импеданс называется итеративным, характеристическим или волновым импедансом и обозначается $\mathbf{Z}_k$ для Т-звена или $\mathbf{Z}_{k'}$ для П-звена. Очевидно, если добавить или убрать одно звено из такой бесконечной цепочки, то ее импеданс не изменится, например (см. фиг. 101, *а*) импеданс между $A'A''$ с импедансом $\mathbf{Z}_k$, присоединенным к $B'B''$, будет таким же, как между концами одного $\mathbf{Z}_k$. Отсюда получается соотношение

$$\mathbf{Z}_{k1} = \mathbf{Z}_a + \frac{\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_{k1}}{\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{k1}}\mathbf{Z}_2,$$

разрешая которое относительно $\mathbf{Z}_{k1}$ и помня, что $\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_1$, будем иметь

$$\mathbf{Z}_{k1} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_a - \mathbf{Z}_b) + \left[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{1/2} \tag{10.76}$$

Из соотношения (10.74) следует

$$\left[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{1/2} = \mathbf{Z}_2 \operatorname{sh}\Gamma. \tag{10.77}$$

Изменив направление токов в линии на обратное (что сведется к тому, что Z_a и Z_b поменяются местами), получим другой волновой импеданс

$$Z_{k2}=\frac{1}{2}(Z_b-Z_a)+\left[Z_1Z_2\left(1+\frac{1}{4}\frac{Z_1}{Z_2}\right)\right]^{1/2} \tag{10.78}$$

Аналогично для П-звена (фиг. 101, *б*) имеем

$$Z_{k'1}=\left[\frac{Z'_b-Z'_a}{2Z'_aZ'_b}+\left(\frac{1+\frac{1}{4}\frac{Z_1}{Z_2}}{Z_1Z_2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{10.79}$$

$$Z_{k'2}=\left[\frac{Z'_a-Z'_b}{2Z'_aZ'_b}+\left(\frac{1+\frac{1}{4}\frac{Z_1}{Z_2}}{Z_1Z_2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{10.80}$$

§ 14. Условия на концах в частотных фильтрах. Постоянные A и B в выражении (10.72) определяются из условий в первом и последнем звеньях цепи. Рассмотрим цепь Т-образных звеньев. Если мы присоединим к правому концу линии (фиг. 101, *а*) импеданс Z_R, то, составляя уравнение Кирхгофа для получившегося контура, пользуясь выражениями (10.72), (10.73), (10.76) и (10.77) и считая $r=0$, получим

$$\begin{aligned}0&=\mathbf{i}_0(Z_R+Z_b+Z_2)-\mathbf{i}_1Z_2=\\&=A\left(Z_R+\frac{1}{2}Z_b-\frac{1}{2}Z_a+Z_2\operatorname{ch}\Gamma\right)-Z_2(A\operatorname{ch}\Gamma+B\operatorname{sh}\Gamma)=\\&=A\left(Z_R+\frac{1}{2}Z_b-\frac{1}{2}Z_a\right)-B\left(Z_{k1}+\frac{1}{2}Z_b-\frac{1}{2}Z_a\right).\end{aligned} \tag{10.81}$$

Пусть $Z_R=Z_{k1}$. В этом случае $A=B$ и выражение (10.72) принимает вид

$$\mathbf{i}_r=Ae^{r\Gamma}. \tag{10.82}$$

Если Z_t — импеданс генератора и $\mathcal{E}$ — его э. д. с., то для первого звена цепи имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}&=\mathbf{i}_n(Z_t+Z_a+Z_2)-\mathbf{i}_{n-1}Z_2=\\&=A\left[\left(Z_t+\frac{1}{2}Z_a-\frac{1}{2}Z_b+Z_2\operatorname{ch}\Gamma\right)e^{n\Gamma}-Z_2e^{(n-1)\Gamma}\right]=\\&=A\left(Z_t+\frac{1}{2}Z_a-\frac{1}{2}Z_b+Z_2\operatorname{sh}\Gamma\right)e^{n\Gamma}=A(Z_t+Z_{k1})e^{n\Gamma}.\end{aligned} \tag{10.83}$$

Ток в последнем звене цепи, согласно выражению (10.82), равен

$$\mathbf{i}_0=A=\frac{\mathcal{E}e^{-n\Gamma}}{Z_t+Z_{k1}}, \tag{10.84}$$

а ток в генераторе —

$$\mathbf{i}_n=Ae^{n\Gamma}=\frac{\mathcal{E}}{Z_t+Z_{k1}}. \tag{10.85}$$

Поскольку, как мы покажем позднее, можно сконструировать цепь так, что Γ будет чисто мнимой величиной для какой-либо заданной частоты, то для этой частоты ток в последнем звене будет иметь такую же амплитуду, как и в генераторе. Это свойство является наиболее желательным, поэтому всегда стремятся конструировать фильтры так, чтобы Z_R (выходной импеданс) был равен волновому импедансу фильтра (измеренному в направлении к выходу). Из выражений (10.26) и (10.27) следует, что для того, чтобы в линию поступала наибольшая мощность, Z_t должно равняться Z^*_{k1}. Как будет показано в следующем параграфе, для пропускаемых частот $Z_{k2}=Z^*_{k1}$.

Следовательно, необходимо, чтобы импеданс генератора, питающего линию, или входной импеданс $\mathbf{Z}_t$ был бы равен волновому сопротивлению фильтра (измеренному в направлении к входу). Точно к такому же выводу можно было бы прийти в результате анализа цепи из П-звеньев, поэтому ответ на вопрос, какой тип звеньев использовать, зависит от того, какие из волновых импедансов $\mathbf{Z}_{k_1}$ и $\mathbf{Z}_{k_2}$ или $\mathbf{Z}_{k'_1}$ и $\mathbf{Z}_{k'_2}$ можно наиболее простым способом сделать равными заданным входному и выходному импедансам при исследуемых частотах.

§ 15. Частотные характеристики фильтров. Условие, при котором ток данной частоты проходит через фильтр без потерь, нетрудно получить из выражения (10.72). Действительно, если амплитуда тока $\mathbf{i}_r$ одинакова при всех значениях r, то члены, содержащие r, должны быть тригонометрическими функциями; но, поскольку $\operatorname{ch} j\theta = \cos\theta$ и $\operatorname{sh} j\theta = j\sin\theta$, это приводит к тому, что постоянная передачи звена $\boldsymbol{\Gamma}$ должна быть чисто мнимой величиной. Следовательно, правая часть выражения (10.73) должна быть действительным числом, заключенным между $+1$ и -1, т. е. $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ должны быть чисто реактивными сопротивлениями. Эти идеальные условия приближенно осуществляются на практике. Таким образом, условие идеальной передачи выражается неравенствами

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{Z}_1 + 2\mathbf{Z}_2}{2\mathbf{Z}_2} \leqslant 1, \quad \text{или} \quad -4 \leqslant \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \leqslant 0. \tag{10.86}$$

Поскольку $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ — чисто мнимые величины, из выражений (10.86), (10.76), (10.78) — (10.80) следует, что для пропускаемой частоты $\mathbf{Z}_{k1} = \mathbf{Z}^*_{k2}$ и $\mathbf{Z}_{k'1} = \mathbf{Z}^*_{k'2}$. Поэтому при симметричных звеньях $\mathbf{Z}_k$ и $\mathbf{Z}_{k'}$ для пропускаемых частот являются активными сопротивлениями.

Рассмотрим теперь передачу тока через бесконечный фильтр при частотах, не удовлетворяющих неравенству (10.86). Выражая ток $\mathbf{i}'_s$ в s-м звене через ток $\mathbf{i}'_0$, поступающий в линию, согласно выражению (10.74), имеем

$$\mathbf{i}'_s = \mathbf{i}'_0 e^{-s\boldsymbol{\Gamma}}. \tag{10.87}$$

Если отношение $\mathbf{Z}_1 / \mathbf{Z}_2$ положительно, то $\operatorname{ch}\boldsymbol{\Gamma}$ — действительное число, большее единицы, откуда $\boldsymbol{\Gamma}$ — действительное число, также [согласно выражению (10.74)] положительное. Если

$$-\infty < \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} < -4,$$

то $\operatorname{ch}\boldsymbol{\Gamma} < -1$ и (см. Двайт, 655.2) $\boldsymbol{\Gamma} = |\boldsymbol{\Gamma}| \pm j\pi$. Поэтому вместо (10.87) будем иметь

$$\mathbf{i}'_s = -\mathbf{i}'_0 e^{-s|\boldsymbol{\Gamma}|}. \tag{10.88}$$

Таким образом, амплитуда тока при частотах, не удовлетворяющих неравенствам (10.86), при прохождении тока от генератора вдоль линии затухает экспоненциально.

§ 16. Полосовой фильтр. Фильтры обычно разделяются на четыре класса, а именно:

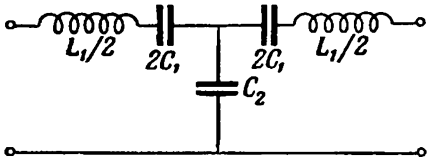
1) Низкочастотные фильтры, пропускающие все частоты, лежащие ниже определенной частоты f_2, и задерживающие все остальные.

2) Высокочастотные фильтры, пропускающие все частоты, лежащие выше некоторой частоты f_1, и задерживающие все остальные.

3) Полосовые фильтры, пропускающие частоты, заключенные между значениями f_1 и f_2, и задерживающие все остальные частоты.

4) Полосовые заграждающие фильтры, задерживающие частоты, лежащие между значениями f_1 и f_2, и свободно пропускающие все остальные частоты.

Рассмотрим в качестве примера только третий класс, поскольку он включает первые два класса как частные случаи и является, повидимому, наиболее важным. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь симметричного Т-звена, у которого (см. § 13) $k = 1/2$. Простейшее устройство такого типа показано на фиг. 102, где $\mathbf{Z}_1 = j[\omega L_1 - 1/(\omega C_1)]$ и $\mathbf{Z}_2 = -j/(\omega C_2)$, так что



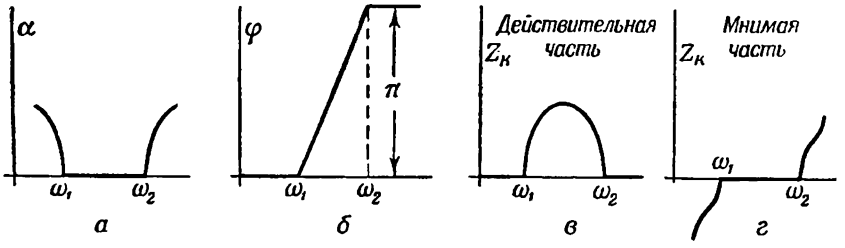
Фиг. 102.

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = -\omega^2 L_1 C_2 + \frac{C_2}{C_1}. \qquad (10.89)$$

Это отношение равно нулю, когда

$$\omega_1 = (L_1 C_1)^{-1/2}, \qquad (10.90)$$

и положительно при значениях $\omega < \omega_1$, так что ω_1 является самой низкой



Фиг. 103.

частотой, которую пропускает цепочка из таких звеньев. Если $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2 = -4$, то

$$\omega_2 = (C_2 + 4C_1)^{1/2}(L_1 C_1 C_2)^{-1/2}. \qquad (10.91)$$

Частота ω_2 является наиболее высокой частотой, проходящей через фильтр. На фиг. 103 *а*, *б*, *в*, и *г* показана зависимость от частоты ω соответственно постоянной затухания α, постоянной фазового сдвига φ, а также действительной и мнимой частей волнового импеданса $\mathbf{Z}_{k1} = \mathbf{Z}_{k2} = \mathbf{Z}_k$.

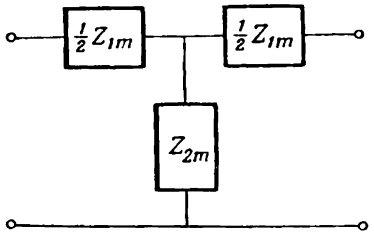
Эти кривые показывают, что фильтр обладает двумя серьезными недостатками. Первый из этих недостатков, отмеченный на фиг. 103, *а*, заключается в том, что частоты вне полосы пропускания (но вблизи ее краев) задерживаются недостаточно сильно. Другими словами, имеется нерезкое обрезание частот. Второй, и часто более серьезный недостаток (см. фиг. 103, *в*), заключается в том, что величина волнового импеданса, который в данном случае является активным сопротивлением, для разных частот внутри полосы пропускания оказывается весьма различной. Благодаря этому невозможно найти такой выходной импеданс, который удовлетворял бы всем требованиям, указанным в § 14 настоящей главы, для всего диапазона пропускаемых частот.

Чтобы избавиться от первого недостатка, найдем тип звена, обладающего следующими двумя свойствами: 1) все звенья данного типа в цепочке имеют один и тот же характеристический импеданс, хотя последний может, вообще говоря, изменяться с частотой внутри полосы пропускания; 2) различные звенья данного типа имеют различные характеристики пропускания для задерживаемых частот, особенно вблизи границы полосы. Вследствие

первого свойства цепочка из таких последовательно соединенных звеньев образует для пропускаемых частот фильтр, приближающийся по своим свойствам к бесконечному однородному фильтру. Пользуясь вторым свойством, можно скомбинировать различные звенья так, что одни будут сильно задерживать те частоты, которые другие звенья задерживают слабо, и тем самым можно добиться наиболее полного задерживания всех частот вне полосы пропускания. Оказывается, что такой фильтр можно выполнить из звеньев Т-образного и П-образного типа; это будет показано в следующем параграфе.

Хотя второй недостаток — изменение величины волнового импеданса внутри полосы пропускания — нельзя ликвидировать полностью, однако, как будет показано в § 18, он в значительной степени исправляется подбором соответствующего конечного звена фильтра.

§ 17. Производные звенья типа *M*. Под таким названием известны наиболее важные звенья, применяемые в фильтрах. Рассмотрим лишь симметричное Т-образное звено, изображенное на фиг. 104. Соотношения между $\mathbf{Z}_{1m}$ и $\mathbf{Z}_{2m}$ в звене такого типа будут



Фиг. 104.

$$\mathbf{Z}_{1m} = m\mathbf{Z}_1, \tag{10.92}$$

$$\mathbf{Z}_{2m} = \frac{\mathbf{Z}_2}{m} + \frac{1}{4}\frac{\mathbf{Z}_1(1-m^2)}{m}, \tag{10.93}$$

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = k^2. \tag{10.94}$$

Постоянная величина k называется номинальным характеристическим импедансом звена и не зависит от частоты. Согласно выражению (10.76), где теперь $\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b$, характеристический импеданс выражается соотношением

$$\mathbf{Z}_k = \left[\mathbf{Z}_{1m}\mathbf{Z}_{2m}\left(1+\frac{\mathbf{Z}_{1m}}{4\mathbf{Z}_{2m}}\right)\right]^{1/2} = \left[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\left(1+\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{1/2} \tag{10.95}$$

Этот импеданс не зависит от выбора m. Согласно выражению (10.73), постоянная передачи $\boldsymbol{\Gamma}$ равна

$$\operatorname{ch}\boldsymbol{\Gamma} = 1 + \frac{\mathbf{Z}_{1m}}{2\mathbf{Z}_{2m}}. \tag{10.96}$$

Из выражений (10.92) и (10.93) следует, что

$$\frac{\mathbf{Z}_{1m}}{\mathbf{Z}_{2m}} = \frac{4m^2\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right)}{(1-m^2)\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right)+4}. \tag{10.97}$$

Это отношение обращается в нуль, когда $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2$ равно нулю, и равно -4, когда $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2$ равно -4, поэтому на основании условия (10.86) можно заключить, что пограничные частоты полосы определяются отношением $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2$ и также не зависят от величины m. Знаменатель выражения (10.97) обращается в нуль, если

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{-4}{1-m^2}, \quad \text{или} \quad m = \left(1+\frac{4\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1}\right)^{1/2} \tag{10.98}$$

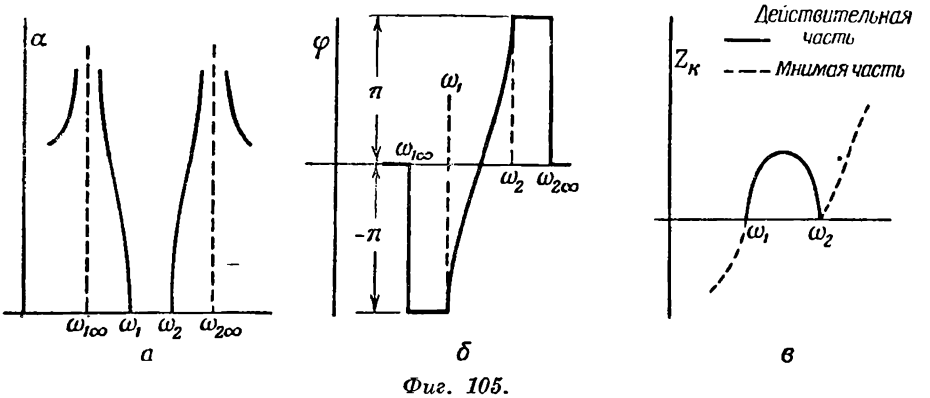
Отсюда, выбрав полосу пропускания и зная величину отношения $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2$ для пограничных частот, можно найти его величину на любой частоте вне полосы и затем, пользуясь выражением (10.98), подобрать m так, чтобы

получить на этой частоте почти полное запирание. Так решается задача исключения нежелательных частот.

Для однозвенного полосового Т-образного фильтра $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ могут иметь вид

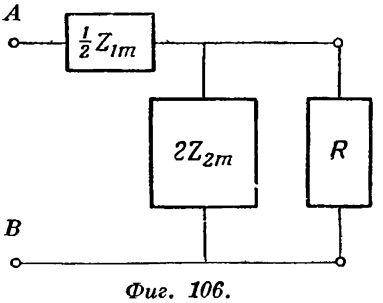
$$\mathbf{Z}_1 = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C_2},$$

при этом для удовлетворения условия (10.94) необходимо, чтобы $L_1C_1 = L_2C_2$. Величины $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ представляют собою индуктивность и емкость, включенные соответственно последовательно и параллельно. При изменении



Фиг. 105.

частоты от нуля до бесконечности $\operatorname{ch}\Gamma$ изменяется от $-\infty$ до $+1$ и опять до $-\infty$, так что на пограничных частотах $\operatorname{ch}\Gamma = -1$, причем на одной частоте $\varphi_1 = -\pi$, а на другой $\varphi_1 = +\pi$. Таким образом, существует две частоты, при которых выражение (10.98) дает одно и то же значение m и, следовательно, происходит полное запирание. На фиг. 105, *а*, *б* и *в* показаны кривые, выражающие зависимость от частоты соответственно постоянной затухания α, постоянной фазового сдвига φ и действительной и мнимой частей характеристического импеданса.



Фиг. 106.

§ 18. Выходное устройство фильтра. К последнему Т-звену фильтра, имеющего характеристический импеданс $\mathbf{Z}_k$, подключим нагрузку так, как показано на фиг. 106. Постараемся найти, если это возможно, такое R, при котором импеданс между точками A и B окажется равным $\mathbf{Z}_k$ для всех значений m, так что ток будет проходить без отражения от конца, как в бесконечной линии. Полагая импеданс между A и B равным $\mathbf{Z}_k$ и используя уравнение Кирхгофа, получим соотношение

$$\mathbf{Z}_k = \frac{\mathbf{Z}_{1m}}{2} + \frac{2\mathbf{Z}_{2m}R}{2\mathbf{Z}_{2m}+R},$$

разрешая которое относительно R, найдем

$$R = \frac{4\mathbf{Z}_{2m}\mathbf{Z}_k - 2\mathbf{Z}_{1m}\mathbf{Z}_{2m}}{4\mathbf{Z}_{2m} + \mathbf{Z}_{1m} - 2\mathbf{Z}_k}. \tag{10.99}$$

Согласно выражению (10.76), для симметричного Т-звена имеем

$$\mathbf{Z}_k = \left[\mathbf{Z}_{1m}\mathbf{Z}_{2m}\left(1 + \frac{\mathbf{Z}_{1m}}{4\mathbf{Z}_{2m}}\right)\right]^{1/2}, \tag{10.100}$$

а для симметричного П-звена [см. выражение (10.79)] имеем

$$Z_{k'} = (Z_{1m}Z_{2m})^{1/2}\left(1+\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}\right)^{-1/2} \tag{10.101}$$

Исходя из выражений (10.100) и (10.101), получаем

$$Z_kZ_{k'} = Z_{1m}Z_{2m} \tag{10.102}$$

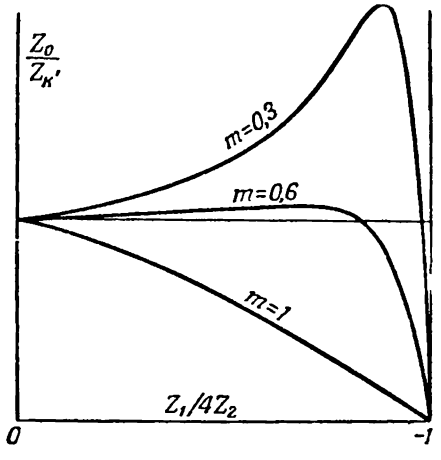
и

$$4Z_{2m}Z_k = (4Z_{2m}+Z_{1m})Z_{k'}. \tag{10.103}$$

Подставляя эти выражения в знаменатель (10.99), имеем

$$R = \frac{(4Z_{2m}+Z_{1m})Z_{k'}-2Z_kZ_{k'}}{4Z_{2m}+Z_{1m}-2Z_k} = Z_{k'}. \tag{10.104}$$

Те же самые соображения применимы и ко входу цепи; поэтому в отношении характеристического импеданса цепь подобна П-образному звену и имеет постоянную передачи, равную постоянной передачи симметричного производного Т-звена типа m. Согласно выражениям (10.102), (10.92) и (10.93),



Фиг. 107.

$$Z_{k'} = \frac{4Z\,Z_2+(1-m^2)Z_1^2}{4Z_k}. \tag{10.105}$$

Если принять R_L^2 равным Z_1Z_2-номинальному характеристическому импедансу системы, то в полосе пропускания отношение $Z_0/Z_{k'}$ для различных m будет зависеть от $\frac{1}{4}Z_1/Z_2$ так, как это показано на фиг. 107. Согласно изображенным здесь кривым, выбор $m=0{,}6$ для конечного звена обеспечивает характеристический импеданс, постоянный почти во всей полосе пропускания; тем самым ликвидируется второй недостаток простого фильтра. В линиях связи употребляются и другие, более сложные фильтры, но основные принципы, на которых они построены, аналогичны рассмотренным выше. Влияние рассеивания энергии в сопротивлениях, которым мы всюду пренебрегли, сказывается в том, что все углы и острые пики на кривых фиг. 103, *а*, *б*, *в* и *г* и фиг. 105, *а*, *б* и *в* сглаживаются.

§ 19. Линии передачи. В гл. VI мы легко перешли от линии с периодически повторяющимися последовательно включенными активными сопротивлениями и сопротивлениями утечки к линии с распределенными параметрами. Подобно тому, как было проделано в § 2 для перехода от линии передачи на постоянном токе к линии передачи на переменном токе, заменим в (6.4) последовательно включенное сопротивление T последовательным импедансом $\mathbf{Z}_L$ на единицу длины, а сопротивление утечки S — параллельным импедансом $\mathbf{Z}_c$ (также на единицу длины). Таким образом, комплексная амплитуда тока $\mathbf{i}$ в линии удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\mathbf{i}}{dx^2} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_c}\mathbf{i} = \mathbf{Z}_L\mathbf{Y}_c\mathbf{i} = \Gamma'^2\mathbf{i}, \tag{10.106}$$

интеграл которого можно записать в виде суммы экспоненциальных функций

$$\mathbf{i} = \mathbf{A}e^{-\Gamma' x}+\mathbf{B}e^{+\Gamma' x}. \tag{10.107}$$

Действительная часть комплексной постоянной передачи Γ' называется постоянной затухания α', а мнимая часть $j\beta'$ определяет фазовый сдвиг β'. На отрезке dx ток между двумя элементами линии равен $-(d\mathbf{i}/dx)dx$ и протекает по импедансу $\mathbf{Z}_c/dx$, поэтому, согласно закону Ома, на этом участке создается падение напряжения

$$\mathcal{E} = -\mathbf{Z}_c \frac{d\mathbf{i}}{dx} = -\frac{1}{\mathbf{Y}_c}\frac{d\mathbf{i}}{dx}. \tag{10.108}$$

При малых значениях α' вдали от генератора, где x велико, $\mathbf{i}=0$, так что в выражении (10.107) $\mathbf{B}=0$. В этом случае характеристический импеданс равен

$$\mathbf{Z}_k = \left|\frac{\mathcal{E}}{\mathbf{i}}\right|_{\mathbf{B}=0} = \mathbf{Z}_c\Gamma' = (\mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_L)^{1/2} = \left(\frac{\mathbf{Z}_l}{\mathbf{Y}_c}\right)^{1/2} \tag{10.109}$$

Если $\mathbf{B}$ не равно нулю, то отношение $\mathcal{E}$ к $\mathbf{i}$ при $x=0$, получаемое из выражений (10.107)—(10.109) и называемое обычно входным импедансом, равно

$$\mathbf{Z}_i = \frac{(\mathbf{A}-\mathbf{B})\Gamma'}{(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{Y}_c} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\mathbf{Z}_k. \tag{10.110}$$

Пусть линия длиною l имеет при $x=l$ нагрузку $\mathbf{Z}_L$, тогда из выражений (10.107) и (10.108) следует, что

$$\mathbf{Z}_L = \left|\frac{\mathcal{E}}{\mathbf{i}}\right|_{x=l} = \mathbf{Z}_k \frac{\mathbf{A}e^{-\Gamma' l} - \mathbf{B}e^{\Gamma' l}}{\mathbf{A}e^{-\Gamma' l} + \mathbf{B}e^{\Gamma' l}}. \tag{10.111}$$

Исключая из соотношений (10.110) и (10.111) величины $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, получим для входного импеданса следующее выражение:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_k \frac{\mathbf{Z}_L \operatorname{ch}\Gamma' l + \mathbf{Z}_k \operatorname{sh}\Gamma' l}{\mathbf{Z}_k \operatorname{ch}\Gamma' l + \mathbf{Z}_L \operatorname{sh}\Gamma' l}. \tag{10.112}$$

Если линия на концах разомкнута или, наоборот, закорочена, то входные импедансы будут равны соответственно $\mathbf{Z}_k \operatorname{cth}\Gamma' l$ и $\mathbf{Z}_k \operatorname{th}\Gamma' l$. Заметим, что $\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_k^2$. Ток в линии, поступающий от генератора с внутренним импедансом $\mathbf{Z}_t$ и э. д. с. $\mathcal{E}$, равен

$$\mathbf{i}_{x=0} = \frac{\mathcal{E}}{\mathbf{Z}_t + \mathbf{Z}_k}. \tag{10.113}$$

Выражение (10.27) показывает, что для передачи в линиях максимальной мощности нужно, чтобы $\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_k^*$. Таким образом, наилучшие условия передачи получаются в том случае, когда импедансы нагрузки и генератора являются величинами, комплексно-сопряженными характеристическому импедансу линии. В § 9 и 13 гл. XIII этот вопрос будет рассмотрен еще с другой точки зрения, исходя из уравнений Максвелла.

§ 20. Электродвижущие силы несинусоидальной формы. Метод рядов Фурье. Существует несколько методов исследования периодических э. д. с. частоты ω_1, имеющих форму колебаний, отличную от синусоидальной. В одном из этих методов э. д. с. рассматривается как суперпозиция нескольких э. д. с. с частотами ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$ и т. д., называемых гармониками. Пользуясь разложением функции $f(t)$ в ряд Фурье, нетрудно определить амплитуды и фазы составляющих э. д. с., которые в сумме образуют заданную функцию $f(t)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_m (A_m \cos m\omega_1 t + B_m \sin m\omega_1 t) = \\ &= A_0 + \sum_m \left[(A_m^2 + B_m^2)^{1/2} \cos\left(m\omega_1 t - \operatorname{arc\,tg}\frac{B_m}{A_m}\right)\right] = \\ &= A_0 + \sum_m \operatorname{Re}\{C_m e^{jm\omega_1 t}\}, \end{aligned} \tag{10.114}$$

где

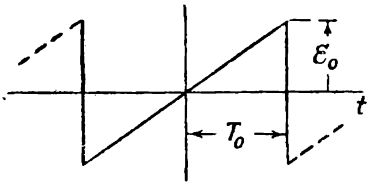
$$A_m = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{+\pi/\omega_1} f(a) \cos m\omega_1 a \, da, \tag{10.115}$$

$$B_m = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{+\pi/\omega_1} f(a) \sin m\omega_1 a \, da \tag{10.116}$$

и

$$C_m = A_m - jB_m. \tag{10.117}$$

Последнее выражение (10.114) имеет как раз такую форму, которая употреблялась в этой главе с самого начала. Таким образом, если действующая э. д. с. задана в виде функции $f(t)$, мы решаем задачу отдельно для э. д. с. вида



Фиг. 108.

$$\mathcal{E}_1 = \mathrm{Re}\{\mathbf{C}_1 e^{j\omega_1 t}\}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathrm{Re}\{\mathbf{C}_2 e^{j\omega_2 t}\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathrm{Re}\{\mathbf{C}_3 e^{j\omega_3 t}\} \text{ и т. д.} \tag{10.118}$$

Складывая действительные части полученных решений, получаем искомое решение нашей задачи.

В качестве типичного примера рассмотрим э. д. с. пилообразной формы (фиг. 108), приложенную к контуру, импеданс которого при частоте $m\omega_1$ равен $\mathbf{Z}_m$. Согласно выражению (10.115), $A = 0$, а из выражения (10.116) получим (см. Двайт, 430.11)

$$B_m = \frac{\omega_1 \mathcal{E}_0}{\pi T_0} \int_{-\pi/\omega_1}^{+\pi/\omega_1} a \sin m\omega_1 a \, da =$$
$$= \frac{\omega_1 \mathcal{E}_0}{\pi T_0} \frac{1}{m^2\omega_1^2} \left| \sin m\omega_1 a - m\omega_1 a \cos m\omega_1 a \right|_{-\pi/\omega_1}^{+\pi/\omega_1} = \frac{2\mathcal{E}_0}{m\omega_1 T_0} (-1)^{m+1}.$$

Таким образом, приложенная э. д. с. представляет собой суперпозицию э. д. с. вида

$$\mathcal{E}_m = \mathrm{Re}\left\{ \frac{(-1)^m 2j\mathcal{E}_0}{m\omega_1 T_0} e^{jm\omega_1 t} \right\} \tag{10.119}$$

Если в рассматриваемом контуре сопротивление, емкость и индуктивность соединены последовательно, то для тока, согласно соотношениям (10.7)—(10.9), будем иметь выражение

$$i = \frac{2\mathcal{E}_0}{\omega_1 T_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin(m\omega_1 t + \psi)}{m \left\{ R^2 + \left[m\omega_1 L - \frac{1}{(m\omega_1 C)} \right]^2 \right\}^{1/2}}, \tag{10.120}$$

где

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{1 - m^2\omega_1^2 LC}{m\omega_1 RC}. \tag{10.121}$$

Наличие j в выражении (10.119) приводит к тому, что в соотношении (10.9) косинус заменяется на синус.

§ 21. Электродвижущие силы несинусоидальной формы. Метод повторяющегося переходного режима. Другой метод исследования стационарного режима, когда э. д. с. повторяется с периодом T и ее можно представить на интервалах $(0, t_1)$, (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, T) функциями $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, основан на использовании общих решений дифференциальных уравнений с правыми частями $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ (см. § 18 гл. IX). Постоянные интегрирования для стационарного процесса определяются (при наличии

в контуре самоиндукции и емкости) из условия непрерывности тока и заряда на границах временны́х интервалов, а также из условия равенства значений тока и заряда в моменты $t=0$ и $t=T$.

В качестве примера решим этим методом задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе. В зависимости от величины постоянной затухания в контуре (большое, малое или критическое затухание) возможны три формы решения. Рассмотрим случай, когда в контуре возможны колебания, т. е. угловая частота $\omega=\left[(LC)^{-1}-\frac{1}{4}R^2L^{-2}\right]^{1/2}$ — действительная величина. Уравнения контура записываются в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{\mathscr{E}_0}{LT}t, \tag{10.122}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=\frac{\mathscr{E}_0}{LT}. \tag{10.123}$$

Вместо того чтобы использовать общий, но громоздкий метод (9.134), решим уравнение (10.123) при помощи подстановки $x=i-\mathscr{E}_0(C/T)$. Уравнение для x имеет вид (9.3), поэтому [см. выражение (9.7)] имеем следующее решение, описывающее колебательный процесс:

$$i=\frac{\mathscr{E}_0C}{T}+e^{-Rt/2L}(A\cos\omega t+B\sin\omega t). \tag{10.124}$$

Первое граничное условие $i_{t=-T}=i_{t=T}$ дает

$$A\,\mathrm{sh}\,\frac{RT}{2L}\cos\omega T=B\,\mathrm{ch}\,\frac{RT}{2L}\sin\omega T. \tag{10.125}$$

Согласно второму граничному условию $q_{t=-T}=q_{t=T}$, получим

$$\int_{-T}^{+T} i\,dt=0. \tag{10.126}$$

Интегрируя (см. Двайт, 577.1 и 577.2) и подставляя пределы, находим

$$\frac{\mathscr{E}_0}{L}=A\left(\frac{R}{2L}\,\mathrm{sh}\,\frac{RT}{2L}\cos\omega T+\omega\,\mathrm{ch}\,\frac{RT}{2L}\sin\omega T\right)+$$

$$+B\left(\frac{-R}{2L}\,\mathrm{ch}\,\frac{RT}{2L}\sin\omega T+\omega\,\mathrm{sh}\,\frac{RT}{2L}\cos\omega T\right).$$

Объединяя это с соотношением (10.125), получим

$$\frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}=A\,\mathrm{ch}\,\frac{RT}{2L}\sin\omega T+B\,\mathrm{sh}\,\frac{RT}{2L}\cos\omega T. \tag{10.127}$$

Разрешая теперь соотношения (10.125) и (10.127) относительно A и B, будем иметь

$$A=\frac{\mathscr{E}_0\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}RT/L\right)\sin\omega T}{\omega L\left[\mathrm{sh}^2\left(\frac{1}{2}RT/L\right)+\sin^2\omega T\right]}, \tag{10.128}$$

$$B=\frac{\mathscr{E}_0\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}RT/L\right)\cos\omega T}{\omega L\left[\mathrm{sh}^2\left(\frac{1}{2}RT/L\right)+\sin^2\omega T\right]}. \tag{10.129}$$

Выражения (10.124), (10.128) и (10.129) определяют стационарный ток в интервале $-T<t<T$. Эти значения тока периодически повторяются. Полученное выражение можно рассматривать как сумму ряда (10.120).

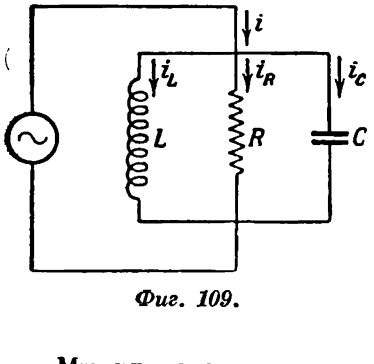
§ 22. Контур с отрицательным активным сопротивлением. Переходный характер явлений, рассмотренных в гл. IX, обусловлен тем, что в контуре содержится активное сопротивление, рассеивающее энергию. При обычных температурах невозможно сделать контур без сопротивления. Однако можно поместить в контур устройство, которое содержит источник энергии и в определенных пределах изменения тока будет проявлять себя как отрицательное активное сопротивление $-\underline{R}$. Если его поместить последовательно с активным сопротивлением контура R, то результирующее сопротивление будет

$$r = R - \underline{R}, \tag{10.130}$$

а при параллельном соединении получим

$$r = \frac{R\underline{R}}{R - \underline{R}}. \tag{10.131}$$

В первом случае $r = 0$, если $R = \underline{R}$, а во втором случае — если $\underline{R} = 0$, так что любые заданные колебания будут продолжаться бесконечно долго с постоянной амплитудой. Если, в первом случае, $R < \underline{R}$ или, во втором случае, $\underline{R} < R$, то r отрицательно и показатель степени у экспоненты (см. гл. IX) становится положительным. В этом случае колебания, однажды возникнув, будут возрастать (по амплитуде) экспоненциально до тех пор, пока ток не превысит тех пределов, в которых это устройство действует как отрицательное сопротивление. При помощи такого устройства обычно осуществляется генерация переменного тока при частотах, слишком высоких для вращающихся электрических машин.



Фиг. 109.

Мы приведем только один пример такого контура. Возьмем простой случай, рассмотренный в задаче 3 гл. XIII, когда L, C, R соединены параллельно (см. фиг. 109). Если $4R^2C > L$, то в контуре возможны колебания с частотой ω, равной

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}, \tag{10.132}$$

и амплитудой, затухающей со временем экспоненциально. Поместим теперь параллельно с R электронную лампу, которая в ограниченных пределах ведет себя как отрицательное сопротивление. В цепи, изображенной на фиг. 109, будем рассматривать только переменные токи. Выходной ток i источника управляется пренебрежимо малой энергией, поступающей из колебательного контура по специальному элементу связи. Например, в случае электронной лампы контур в цепи сетки можно индуктивно связать с L. Тогда анодный ток i будет некоторой функцией напряжения на сопротивлении R, которую для малых значений V можно считать линейной. Таким образом,

$$i = \psi(V). \tag{10.133}$$

Согласно обозначениям, указанным на фигуре, имеем

$$L\frac{di_L}{dt} = Ri_R = \frac{1}{C}\int i_C\,dt = V \tag{10.134}$$

и

$$i = i_L + i_R + i_C. \tag{10.135}$$

Дифференцируя соотношение (10.135) и подставляя значения производных тока из (10.133) и (10.134), после преобразований получим

$$\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{d}{dt}[V-R\psi(V)]+\frac{V}{LC}=0. \qquad (10.136)$$

Допустим, что величина $\psi(V)$ достаточно велика и, следовательно, второй член при малых V отрицательный. Будем искать периодическое стационарное решение в виде

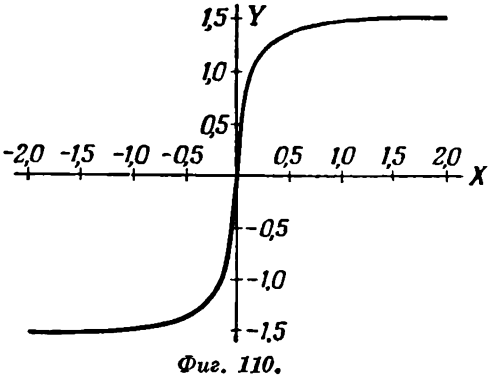
$$V=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t+\varphi_n). \qquad (10.137)$$

Для нахождения связи между основной частотой и амплитудами гармоник умножим уравнение (10.136) на V и проинтегрируем по всему периоду. Второй член обращается в нуль, и после интегрирования по частям первого члена получаем

$$\overline{\frac{dV^2}{dt}}=\frac{1}{LC}\overline{V^2}.$$

Подставляя значение V из выражения (10.137) и разрешая полученное соотношение относительно ω, будем иметь

$$\omega^2=(LC\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2. \qquad (10.138)$$



Фиг. 110.

Рассмотрим случай, когда система только что перешла за порог самовозбуждения. В этом случае второй член в уравнении (10.136) оказывается с малой отрицательной величиной и в первом приближении им можно пренебречь; в результате получаем частоту $\omega=(LC)^{-1/2}$, совпадающую с собственной частотой контура в отсутствие активного сопротивления. Исследуя выражение (10.138), мы видим, что амплитуды гармоник в этом случае также пренебрежимо малы.

Чтобы определить амплитуду основного колебания в стационарном состоянии, необходимо принять определенное выражение для функции $\psi(V)$ в формуле (10.133). Разумно определить i следующим аналитическим выражением:

$$i=\psi(V)=\beta R^{-1}\operatorname{arc\,tg}\alpha V, \qquad (10.139)$$

согласно которому при малых V второй член в уравнении (10.136) отрицательный, если $\alpha\beta>1$. На фиг. 110, представляющей функцию $y=\operatorname{arc\,tg}10x$, видно, что полученная кривая сильно напоминает сеточную характеристику триода, когда рабочая точка находится в середине характеристики (в точке перегиба). При помощи выражения (10.139) можно определить постоянные α и β через параметры характеристики лампы и величину обратной связи. После этого уравнение (10.136) принимает вид

$$\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{d}{dt}(V-\beta\operatorname{arc\,tg}\alpha V)+\frac{V}{LC}=0. \qquad (10.140)$$

Умножим это уравнение на $\int V\,dt$ и проинтегрируем по t каждый член по частям (см. Двайт, 79), принимая в каждом случае $u=\int V\,dt$, так что $du=V\,dt$. После выбора пределов интегрирования $t=-\pi/\omega$ и $t=\pi/\omega$

первый и третий члены исчезают, а произведение uv от второго члена дает

$$\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} (V^2 - \beta V \operatorname{arc\,tg} \alpha V)\, dt = 0. \qquad (10.141)$$

Подставляя сюда вместо V его выражение (10.137), полагая $a_n = 0$ для всех $n \neq 1$ и выбирая начальный момент времени, когда $\varphi_1 = 0$, можно проинтегрировать по частям второй член, принимая $u = \operatorname{arc\,tg} \alpha V$ и $dv = V\,dt$. Произведение uv при подстановке пределов исчезает и, пользуясь формулой (858.3) из справочника Двайта, находим

$$\frac{\pi a^2}{\omega} - \frac{\beta}{\alpha} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \frac{\alpha^2 a^2 \sin^2 \omega t}{1 + \alpha^2 a^2 \cos^2 \omega t}\, dt = 0,$$

или

$$\frac{\pi a^2}{\omega} - \frac{2\pi\beta}{\alpha\omega} - \frac{\beta(1 + \alpha^2 a^2)}{\alpha\omega} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d(\omega t)}{1 + \alpha^2 a^2 \cos^2 \omega t} = 0.$$

Выполняя интегрирование (см. Двайт, 460.1, где следует вместо b^2 взять 1, а вместо a^2 взять $1 + \alpha^2 a^2$) и умножая на $\alpha\omega/\pi$, получим

$$\alpha a^2 - 2\beta - 2\beta(1 + \alpha^2 a^2)^{1/2} = 0.$$

Избавляясь от дробного показателя степени, будем иметь

$$\alpha a^2 [\alpha a^2 - 4\beta(1 + \alpha\beta)] = 0. \qquad (10.142)$$

Из этого выражения следует, что возможна нулевая амплитуда. Это означает, что для получения колебаний с амплитудой, отличной от нуля, необходим начальный толчок, например разряд конденсатора. Из выражения в квадратных скобках получаем амплитуду стационарных колебаний

$$a^2 = \frac{4\beta(1 + \alpha\beta)}{\alpha}. \qquad (10.143)$$

Заметим, что в стационарном состоянии, когда второй член в уравнении (10.136) мал, частота зависит только от L и C, в то время как амплитуда определяется только величиной R и свойствами генератора. Более сложные системы рассматриваются у Ван дер Поля и в других работах, список которых указан в конце главы.

ЗАДАЧИ

1*. Катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω (вокруг оси, лежащей в плоскости катушки) в однородном магнитном поле, силовые линии которого перпендикулярны к оси вращения. Найти ток в катушке и показать, что его величина будет наибольшей, когда плоскость катушки образует с направлением магнитных силовых линий угол, равный

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{L\omega}{R}\right).$$

2*. Катушка обладает сопротивлением R и самоиндукцией L; ее концы A и B при помощи провода, сопротивлением которого можно пренебречь, присоединяются к конденсатору емкостью C. В цепи, соединяющей точки A и B, наблюдается ток $I \cos pt$, причем заряд конденсатора изменяется в фазе с током. Показать, что заряд равен

$$\frac{LI}{R} \cdot \cos pt$$

и что

$$C(R^2 + p^2 L^2) = L.$$

Найти ток в катушке.

3*. Концы B и D провода, обладающего сопротивлением R и самоиндукцией L, присоединены к пластинам конденсатора C. Провод вращается вокруг вертикальной прямой BD с угловой скоростью ω и расположен так, что в плоскости, в которой лежит провод и прямая BD, между ним и BD заключается площадь величиною A. Пусть H — горизонтальная составляющая магнитного поля земли. Показать, что для поддержания вращения требуется затрачивать в среднем мощность, равную

$$\frac{\frac{1}{2}\mu_v^2 H^2 A^2 C^2 R\omega^4}{R^2C^2\omega^2+(1-CL\omega^2)^2}.$$

4*. Замкнутый соленоид образован из большого числа N катушек, у каждой из которых провод равномерно намотан на круглый цилиндр радиуса a и высотой $2h$. В центре цилиндра помещается маленькая катушка, ось которой совпадает с осью цилиндра, а магнитный момент изменяется по закону $M\sin pt$. Показать, что сила тока, протекающего через соленоид, равна

$$\frac{1}{2}p\mu_v MN\left[(a^2+h^2)\,(R^2+L^2p^2)\right]^{-1/2}\sin(pt+\alpha),$$

где R, L — сопротивление и самоиндукция соленоида и $\operatorname{tg}\alpha = R/pL$.

5*. Круглая катушка радиуса a, имеющая N витков и сопротивление R, вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра в горизонтальном магнитном поле земли H. Показать, что при этом катушка испытывает противодействие величиной

$$\frac{\frac{1}{2}\mu_0^2 H^2 N^2\pi^2 a^4\omega R}{R^2+\omega^2L^2}$$

6*. Ток $I\sin pt$, протекающий в катушке A, индуцирует ток в катушке B. Показать, что средняя сила, стремящаяся увеличить любую координату катушки θ, равна

$$\frac{-\frac{1}{2}I^2p^2LM\,(\partial M/\partial\theta)}{L^2p^2+R^2},$$

где L, M, N — коэффициенты индукции катушек, а R — сопротивление катушки B.

7*. Плоский контур площадью S вращается с постоянной скоростью ω вокруг оси z, лежащей в его плоскости на расстоянии h от центра тяжести площади. На оси x, на большом расстоянии a от начала координат, укреплена проволочная петля с магнитным моментом m, направленным вдоль оси $0x$. Доказать, что в момент времени t ток приближенно равен

$$\frac{S\omega\mu_v\mathrm{m}}{2\pi a^3\,(R^2+L^2\omega^2)^{1/2}}\cos(\omega t-\varepsilon)+\frac{9S\omega\mu_v\mathrm{m}h}{4\pi a^4\,(R^2+4L^2\omega^2)^{1/2}}\cos(2\omega t-\eta),$$

где η, ε — постоянные.

8. Генератор с заданной э. д. с. и импедансом $\mathbf{Z}_t$ соединен с нагрузкой $\mathbf{Z}_L$ передающей линией с характеристическим импедансом $\mathbf{Z}_k$. Показать, что при максимальном токе в нагрузке $\mathbf{Z}_k^2 = \mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_L$.

9*. Две точки A и B соединены проводом с активным сопротивлением R (без самоиндукции); точка B соединяется с третьей точкой C двумя проводами, каждый из которых имеет сопротивление R, а один, кроме того, обладает самоиндукцией L. Пусть между концами A, C поддерживается напряжение $E\cos pt$. Показать, что напряжение между точками B и C будет

$$E'\cos(pt+\gamma),$$

где

$$E' = E\left(\frac{R^2+p^2L^2}{9R^2+4p^2L^2}\right)^{1/2}, \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{pLR}{2p^2L^2+3R^2}.$$

10*. Конденсатор C присоединен параллельно катушке с сопротивлением R и самоиндукцией L при помощи проводников, обладающих сопротивлением r. Полученный таким образом контур включается в цепь с э. д. с., имеющей период $2\pi/p$. Показать, что этот контур эквивалентен проводу без самоиндукции, если

$$\left(R^2-\frac{L}{C}\right) = p^2LC\left(r^2-\frac{L}{C}\right),$$

и что сопротивление этого провода должно быть равным

$$\left(Rr+\frac{L}{C}\right)(R+r).$$

11*. Точки A и B соединены двумя ветвями с сопротивлениями соответственно R и S, самоиндукциями L и N и коэффициентом взаимной индукции M. Доказать, что для внешней цепи, которая подключена к точкам A и B и по которой течет ток частоты p, эти две ветви эквивалентны одной ветви с самоиндукцией

$$\frac{NR^2+LS^2+2MRS+p^2(LN-M^2)(L+N-2M)}{(L+N-2M)^2p^2+(R+S)^2}$$

и сопротивлением

$$\frac{RS(S+R)+p^2[R(N-M)^2+S(L-M)^2]}{(L+N-2M)^2p^2+(R+S)^2}.$$

12. Три точки a, b и c соединены следующим образом: между a и c находятся две ветви — одна содержит сопротивление R, а другая — генератор переменного тока и индуктивность; между b и c находятся также две ветви — одна содержит гальванометр переменного тока, а вторая — сопротивление P и индуктивность L; между a и b помещаются емкость C и сопротивление S. Между двумя индуктивностями имеется связь (коэффициент взаимной индукции равен M). Показать, что для того, чтобы стрелка гальванометра не отклонялась, должно выполняться условие

$$M=CPR=LR(R+S)^{-1}.$$

13. Генератор с э. д. с. $\mathscr{E}_0\cos\omega t$, выключатель, индуктивность L и сопротивление R соединены последовательно. Показать, что после замыкания цепи в ней не будет наблюдаться переходных явлений, если в момент замыкания цепи значение э. д. с. было равно

$$\mathscr{E}=\pm\,\mathscr{E}_0\omega L(R^2+\omega^2L^2)^{-1/2}.$$

14. Общая индуктивность и сопротивление цепи (включая и вторую обмотку трансформатора) равны соответственно L и R. В первичной обмотке течет ток $I_0\cos\omega t$. В каждом полупериоде существует момент времени, когда разрыв вторичной цепи может произойти без искры. Показать, что в этот момент ток в первичной цепи равен

$$RI_0(\omega^2L^2+R^2)^{-1/2}.$$

15. В контур, состоящий из емкости C и индуктивности L, включена последовательно периодическая э. д. с. прямоугольной формы, такая, что $V=V_0$, если $2n\pi/\omega<t<(2n+1)\pi/\omega$, и $V=0$, если $(2n+1)\pi/\omega<t<(2n+2)\pi/\omega$, где n — целое положительное число. Показать, что после установления стационарного состояния токи i_1 или i_2 определяются выражениями
при $2n\pi/\omega\leqslant t<(2n+1)\pi/\omega$

$$i_1=\frac{V_0}{2}\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2}\sec\left[\frac{\pi}{2\omega(LC)^{1/2}}\right]\sin\left\{(LC)^{-1/2}\left[t-\frac{(4n+1)\pi}{2\omega}\right]\right\},$$

при $(2n+1)\pi/\omega<t<(2n+2)\pi/\omega$

$$i_2=i_1-\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2}V_0\sin\left\{(LC)^{-1/2}\left[t-\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\right]\right\}$$

Исследовать случаи, когда $\omega=(LC)^{-1/2}$ и $\omega={}^1/_2(LC)^{-1/2}$.

16. Решить предыдущую задачу методом рядов Фурье и показать, что ток определяется выражением

$$i=V_0\frac{2\omega C}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}{}'[(2m+1)^2\omega^2LC-1]^{-1}\cos[(2m+1)\omega t].$$

17. Электродвижущая сила, описанная в задаче 15, но с пределами $+\frac{1}{2}V_0$ и $-\frac{1}{2}V_0$, вместо V_0 и 0 прикладывается к катушке L_1, связанной с контуром, имеющим индуктивность L_2 и емкость C, соединенные последовательно (коэффициент взаимной индукции равен M). Показать, что в стационарном режиме заряды Q_1 и Q_2

на конденсаторе в интервалах времени, указанных в задаче 15, равны

$$Q_{1,2} = \pm \frac{MV_0C}{L_1} \sec\frac{\pi\omega_1}{2\omega} \sin\frac{1}{2}\left(\theta \mp \frac{\pi\omega_1}{\omega}\right) \sin\frac{1}{2}\theta,$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{L_1}{C(L_1L_2 - M^2)}, \qquad 0 = \omega_1\left(t - \frac{2n+1}{\omega}\pi\right).$$

18. Решая предыдущую задачу методом рядов Фурье, показать, что заряд на конденсаторе равен

$$Q = \frac{2MV_0C}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\omega t}{(2m+1)\left[(2m+1)^2\omega^2(L_1L_2 - M^2)C - L_1\right]}.$$

19. Э. д. с. включается в первичную обмотку трансформатора, имеющую индуктивность L_1 и сопротивление R_1. Вторичная обмотка трансформатора, имеющая сопротивление R_2 и индуктивность L_2, нагружена импедансом Z_L. Коэффициент взаимной индукции между обмотками трансформатора равен M. Показать, что если ωL_2 много больше чем $R_2 + R_L - j/(\omega C_L)$, то отношение токов в первичной и вторичной обмотках может не зависеть от частоты.

20. Показать, что в предыдущей задаче отношение э. д. с. в первичной и во вторичной обмотках трансформатора не зависит от частоты в случае, если $\omega L_1 Z_L$ много больше чем $(M^2 - L_1L_2)\omega^2$ и $R_1(R_2 + Z_L)$ и $\omega(L_2R_1 + L_1R_2)$.

21. Пусть круговая частота синусоидальной э. д. с., используемой в контуре, описанном в § 2 настоящей главы, равна ω_1. Показать, что отношение y среднего квадрата тока при $LC = \omega_1^2$ к среднему квадрату тока при любой величине L и C равно

$$y = \left[1 + \frac{L^2\omega_1^2}{R^2}\left(1 - \frac{1}{LC\omega_1^2}\right)^2\right]$$

22. Пусть L, C и R в предыдущей задаче заменены на L_2, C_2 и R_2, а M достаточно мало. Показать, что результат предыдущей задачи годится и для тока в контуре 2, изображенном на фиг. 99 (ω_1 — круговая частота э. д. с., включенной в контур 1).

23. Доказать, что электрическую цепь, составленную из импедансов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, соединяющих точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с одной общей точкой, можно заменить цепью из импедансов $Z_{12}, Z_{13}, Z_{23}, \ldots$, соединяющих попарно точки P (индексы указывают номера соединяемых точек), где

$$Z_{rs} = Z_rZ_s \sum_{p=1}^{n} Z_p^{-1}.$$

24. Можно доказать, что импеданс любого двухполюсника, содержащего только чисто реактивные сопротивления, записывается в форме

$$Z = A\frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)\ldots(\omega_{2n+1}^2 - \omega^2)}{j\omega(\omega_2^2 - \omega^2)\ldots(\omega_{2n}^2 - \omega^2)},$$

где A — положительная постоянная и $0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \ldots \leqslant \omega_{2n+1} \leqslant \infty$. Пользуясь этим, показать, что Z можно образовать последовательными контурами и последовательной комбинацией параллельных настроенных контуров с антирезонансными круговыми частотами $\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2n}$ или при помощи параллельной комбинации настроенных контуров с резонансными круговыми частотами $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2n+1}$.

25. Показать, что если два реактивных импеданса имеют одинаковую резонансную и одинаковую антирезонансную частоту, то их отношение постоянно для всех частот.

26. Показать, что реактивность импеданса, не содержащего активного сопротивления, на участке между резонансной и антирезонансной частотами всегда возрастает с увеличением частоты.

27. Один контур состоит из сопротивления R_1, емкости C_1 и индуктивности L_1. Второй контур содержит сопротивление R_2, емкость C_2 и индуктивность L_2. Часть индуктивности является общей обоим контурам. Показать, что если M определено как поток, пронизывающий один контур, когда во втором контуре протекает единичный ток, то уравнения для i_1 и i_2 будут совпадать с уравнениями § 10 настоящей главы при условии, что элемент, общий обоим контурам, обладает нулевым активным сопротивлением. Такая связь между контурами называется прямой или автотрансформаторной.

28. Пять контуров соединены цепочкой так, что все взаимные импедансы равны нулю, за исключением тех, которые соединяют смежные контуры. В центральный

(т. е. третий) контур помещается синусоидальная э. д. с. Показать, что комплексные амплитуды токов определяются выражениями

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{i}_2, \qquad \mathbf{i}_2 = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{23}(\mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12}^2)^{-1}\mathbf{i}_3,$$
$$\mathbf{i}_3 = [\mathbf{Z}_{33} - \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{23}^2(\mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12}^2)^{-1} - \mathbf{Z}_{55}\mathbf{Z}_{34}^2(\mathbf{Z}_{44}\mathbf{Z}_{55} - \mathbf{Z}_{45}^2)^{-1}]^{-1}\mathscr{E},$$
$$\mathbf{i}_4 = \mathbf{Z}_{55}\mathbf{Z}_{34}(\mathbf{Z}_{44}\mathbf{Z}_{55} - \mathbf{Z}_{45}^2)^{-1}\mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{i}_5 = \mathbf{Z}_{45}\mathbf{Z}_{55}^{-1}\mathbf{i}_4.$$

29. Два контура состоят соответственно из индуктивностей L_1 и L_2, емкостей C_1 и C_2 и сопротивлений R_1 и R_2. Часть r сопротивлений R_1 и R_2 является общей обоим контурам. В первый контур включена периодическая э. д. с., изменяющаяся с круговой частотой ω_1. Показать, что ток во втором контуре будет максимальным при условии, что реактивность каждого контура в отдельности для этой частоты равна нулю и что максимальный ток равен $r\mathscr{E}(R_1R_2 - r^2)^{-1}$. Такая связь между контурами называется связью через активное сопротивление.

30. Три контура соединяются цепочкой так, что $\mathbf{Z}_{13} = 0$, а $\mathbf{Z}_{12}$ и $\mathbf{Z}_{23}$ являются мнимыми величинами. В первый контур включается э. д. с. частоты ω_1. Сопротивления контуров равны соответственно R_1, R_2 и R_3. Показать, что если $R_1R_2R_3 \geqslant |R_3\mathbf{Z}_{12}^2 - R_1\mathbf{Z}_{23}^2|$, то в третьем контуре ток будет максимальным при частоте ω_1, когда реактивность каждого контура в отдельности обращается в нуль. Это максимальное значение равно

$$\mathscr{E}_0 |\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{23}| (R_1R_2R_3 - \mathbf{Z}_{12}^2R_2 - \mathbf{Z}_{23}^2R_1)^{-1}.$$

31. Показать, что если в предыдущей задаче $R_1R_2R_3 \leqslant R_3\mathbf{Z}_{12}^2 - R_1\mathbf{Z}_{23}^2$, то максимальный ток в третьем контуре может быть получен при $X_{11} = 0$, $X_{22}X_{33}^{-1} = -\mathbf{Z}_{23}^2|\mathbf{Z}_{33}^{-2}|$, и что амплитуда тока будет равна

$$\frac{1}{2}|\mathbf{Z}_{12}|\mathscr{E}_0(R_1R_3)^{-1/2}(R_1R_2 - \mathbf{Z}_{12}^2)^{-1/2};$$

X_{11}, X_{22} и X_{33} — реактивные сопротивления.

32. Показать, что если в той же задаче $R_1R_2R_3 \leqslant R_1\mathbf{Z}_{23}^2 - R_3\mathbf{Z}_{12}^2$, то максимальный ток в третьем контуре может быть получен при $X_{33} = 0$, $X_{22}X_{11}^{-1} = -\mathbf{Z}_{12}^2|\mathbf{Z}_{11}^{-2}|$, и что амплитуда тока будет равна

$$\frac{1}{2}|\mathbf{Z}_{23}|\mathscr{E}_0(R_1R_3)^{-1/2}(R_2R_3 - \mathbf{Z}_{23}^2)^{-1/2}.$$

33. Два импеданса называются взаимно инвертированными, если $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = k^2$, где k — действительное число, не зависящее от частоты. Показать, что если импеданс $\mathbf{Z}_1$ эквивалентен L_1 и C_1, соединенным последовательно, то $\mathbf{Z}_2$ должен быть эквивалентен L_2 и C_2, соединенным параллельно, т. е. $L_1C_2^{-1} = L_2C_1^{-1} = k^2$.

34. Два импеданса, удовлетворяющие условию (10.94), называются взаимно инвертированными. Пусть $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_1' = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2' = k^2$. Показать, что импеданс, полученный параллельным соединением $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, и импеданс, полученный последовательным соединением $\mathbf{Z}_1'$ и $\mathbf{Z}_2'$, будут взаимно инвертированными и величина k^2 останется прежней.

35. Линия передачи (или фильтр) имеет нагрузку, совпадающую с выходным импедансом $\mathbf{Z}_{k1}$. К началу линии подключен генератор с импедансом, совпадающим с входным импедансом $\mathbf{Z}_{k2}$ линии. Показать, что при любой заданной частоте ничего не изменяется, если заменить линию (или фильтр) одним Т-звеном, подобным изображенному на фиг. 101, *а*, при условии, что

$$2\mathbf{Z}_{k1} = (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b)^{1/2}(\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + 4\mathbf{Z}_2)^{1/2} + \mathbf{Z}_a - \mathbf{Z}_b$$

и

$$2\mathbf{Z}_{k2} = (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b)^{1/2}(\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + 4\mathbf{Z}_2)^{1/2} - \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b.$$

36. Показать, что Т-звено (см. фиг. 101, *а*) и П-звено (см. фиг. 101, *б*) ведут себя одинаково при всех частотах при условии, что для любой частоты

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_a'\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_a' + \mathbf{Z}_b' + \mathbf{Z}_1)^{-1}, \qquad \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_b'\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_a' + \mathbf{Z}_b' + \mathbf{Z}_1)^{-1},$$
$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_a'\mathbf{Z}_b'(\mathbf{Z}_a' + \mathbf{Z}_b' + \mathbf{Z}_1)^{-1}.$$

37. Пусть $\mathbf{Z}_{01}$ и $\mathbf{Z}_{s1}$ — входные импедансы фильтра при разомкнутом и соответственно закороченном выходе, а $\mathbf{Z}_{02}$ и $\mathbf{Z}_{s2}$ — соответствующие импедансы, если вход и выход поменять местами. Показать, что

$$2\mathbf{Z}_{k1} = \mathbf{Z}_{01} - \mathbf{Z}_{02} + [(\mathbf{Z}_{01} - \mathbf{Z}_{02})^2 + 4\mathbf{Z}_{02}\mathbf{Z}_{s1}]^{1/2},$$

$$2Z_{k2}=Z_{02}-Z_{01}+[(Z_{01}-Z_{02})^2+4Z_{02}Z_{s1}]^{1/2},$$
$$2\operatorname{ch}\Gamma=(Z_{01}+Z_{02})\,[Z_{01}(Z_{02}-Z_{s2})]^{-1/2}.$$

38. Пусть ω_m—резонансная частота контура с импедансом Z_1, рассматривавшимся в § 17 настоящей главы, и пусть L_1—его эффективная индуктивность. При помощи результатов задачи 32 показать, что выражение (10.95) примет вид

$$Z_k=k\left[1-\frac{L_1^2\omega_m^2}{4k^2}\left(\frac{\omega}{\omega_m}-\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

39. Используя предыдущую задачу и рассматривая фильтр, о котором шла речь в конце § 17 настоящей главы, где обе границы обрезаемых частот получались при $\operatorname{ch}\Gamma=-1$, показать, что величину Z_k можно выразить через граничную частоту ω_2 в виде

$$Z_k=k\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_m}-\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_m}-\frac{\omega_m}{\omega_2}\right)^{-2}\right]^{1/2}$$

40. Пользуясь предыдущим результатом, показать, что если ω_1 и ω_2—граничные частоты полосы пропускания, а ω_m—резонансная частота контура с импедансом Z_1, то $\omega_m^2=\omega_1\omega_2$.

41. Сравнивая выражение (10.95) и выражение для Z_k, полученное в задаче 39, показать, что для заданных значений m, ω_2 и ω_m частоту ω_∞, при которой происходит полное запирание, можно найти из уравнения

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_m}-\frac{\omega_m}{\omega_\infty}=\left(\frac{\omega_2}{\omega_m}-\frac{\omega_m}{\omega_2}\right)(1-m^2)^{-1/2}.$$

42. Передающая линия, характеристический импеданс которой равен R_k, нагружена импедансом R_L+jX_L. Показать, что линия и нагрузка могут быть согласованы, если последовательно с нагрузкой поместить четверть-волновую линию, имеющую характеристический импеданс $(R_kR_L)^{1/2}$, а в месте соединения нагрузки с главной линией подключить короткозамкнутый отрезок линии длиной l с характеристическим импедансом R_k, при этом $\operatorname{tg}\beta l=R_L/X_L$.

43. Показать, что линия и нагрузка в предыдущей задаче могут быть также согласованы посредством четверть-волновой линии, имеющей характеристический импеданс $[(R_L^2+X_L^2)R_k/R_L]^{1/2}$, путем подключения в месте их соединения с нагрузкой короткозамкнутого отрезка линии длиной l с характеристическим импедансом R_L, при этом

$$\operatorname{tg}\beta l=-\frac{R_L^2+X_L^2}{R_kX_L}$$

ЛИТЕРАТУРА

Bartlett A. C., The Theory of Electric Artifical Lines and Filters, Wiley, 1930.
Bateman H., Electrical and Optical Wave Motion, Cambridge, 1915.
Bode H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, 1945.
Carson J. R., Electric Circuit Theory Operational Calculus, McGraw-Hill, 1920.
Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. 15, Berlin, 1927.
Guilleman E. A., Communication Networks, Wiley, 1931, 1935.
Heaviside O., Electrical Papers, Boston, 1925.
Johnson K. S., Transmission Circuits for Telephonic Communication, Van Nostrand, 1925.
Kennelly A. E., Electric Lines and Nets, McGraw-Hill, 1928.
Ollendorf F., Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Berlin, 1926.
Pierce G. W., Electric Oscillations and Electric Waves, McGraw-Hill, 1920.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Shea T. E., Transmission Networks and Wave Filters, Van Nostrand, 1929.
Staff M. I. T., Electric Circuits, Wiley, 1940.
Starr A. T., Electric Circuits and Wave Filters, Pitman, 1934.
Van der Pol B., Non-linear Theory of Electric Oscillations, Proc. Inst. Rad. Eng., 20, 1051 (1934).
Ware L. A., Reed H. R., Communication Circuits, Wiley, 1942.
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, Leipzig, 1932.

Глава XI

ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

§ 1. Индуцированные токи в объемных проводниках. Две последние главы были посвящены применению законов магнитного взаимодействия токов, а также закона Фарадея к системам, состоящим из линейных проводников. В настоящей главе мы получим, опираясь на эти законы, результаты, относящиеся к системам с объемными проводниками. Прежде всего следует заметить, что приводимое здесь рассмотрение, как и все, предшествующее ему, является приближенным, а именно — всюду предполагается мгновенность распространения электрических и магнитных полей, или, другими словами, предполагается, что можно пренебречь максвелловским «током смещения». Совершаемая при этом ошибка совершенно ничтожна, если частота процесса такова, что длина волны колебаний в системе значительно превышает размеры самой системы. В противном случае, т. е. если это условие оказывается невыполненным, необходимо решить полную систему уравнений Максвелла, о которой будет идти речь в гл. XIII.

Закон индукции Фарадея устанавливает, что при изменении магнитной индукции **B** в проводнике появляется электрическое поле **E**, величина и направление которого определяются соотношением

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \tag{11.1}$$

или, пользуясь магнитным вектор-потенциалом **A** (8.4), это можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}. \tag{11.2}$$

Как только в проводнике появляется электрическое поле, в нем по закону Ома возникает электрический ток. Пусть τ — удельное сопротивление, а $\mathbf{i}$ — плотность тока; тогда при помощи соотношения (6.8) уравнения (11.1) и (11.2) можно переписать в виде

$$\tau(\nabla \times \mathbf{i}) = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \tag{11.3}$$

$$\tau\mathbf{i} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}. \tag{11.4}$$

Эти токи, протекая по проводнику, имеющему магнитную проницаемость μ, создадут в нем магнитное поле, определяемое уравнениями

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{i}, \tag{11.5}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{i}. \tag{11.6}$$

Из уравнений (11.3) — (11.6) легко получить уравнения, которым должны удовлетворять меняющиеся во времени величины **i**, **B** и **A** внутри проводника. Исключая при помощи уравнения (11.3) величину **B**, дифференцируя

уравнение (11.5) по времени, а также учитывая соотношение (6.3), получим

$$\frac{\mu}{\tau}\frac{d\mathbf{i}}{dt} = -[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{i})] = \nabla^2\mathbf{i} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{i}) = \nabla^2\mathbf{i}. \tag{11.7}$$

Исключив **i** из уравнений (11.4) и (11.6), имеем

$$\frac{\mu}{\tau}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \nabla^2\mathbf{A}. \tag{11.8}$$

Аналогично можно исключить **i** из уравнений (11.3) и (11.5), после чего, пользуясь выражением (7.1), находим

$$\frac{\mu}{\tau}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \nabla^2\mathbf{B} \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla^2\mathbf{B}. \tag{11.9}$$

Уравнения (11.7) — (11.9) имеют форму хорошо известного уравнения теплопроводности, с той лишь разницей, что зависимая переменная величина является вектором, а не скаляром. В прямоугольных координатах каждая компонента, рассматриваемая как скаляр, удовлетворяет тому же самому уравнению. Однако это не имеет места для компонент в любой системе координат, за исключением некоторых специальных случаев.

Задачи о вихревых токах, как и задачи о токах в линейных проводниках, естественно, распадаются на два класса: к первому относятся задачи о неустановившихся, а ко второму — об установившихся процессах. Последние проще всего рассматривать, исходя из понятия комплексной амплитуды, как это делалось в предыдущей главе. Начиная с этой главы, нам придется иметь дело с комплексными векторами. Поэтому условимся в дальнейшем комплексные и комплексно-сопряженные амплитуды обозначать знаком «$\vee$» и «$\wedge$» соответственно, поставленными сверху над символом. Те величины, у которых указанные знаки сверху отсутствуют, подразумеваются действительными, хотя в общем случае и зависящими от времени.

Внутри достаточно малого элемента объема ток пропорционален приложенной э. д. с. и импеданс этого объема равен просто его активному сопротивлению $\tau\, dx/(dy\, dz)$. В стационарном состоянии ток в элементе равен $\check{i}\, dy\, dz$. Таким образом, в соответствии с соотношением (10.15) средняя мощность, рассеиваемая внутри такого элемента, определится по формуле

$$d\overline{P} = \frac{1}{2}\check{\mathscr{E}}\hat{i}\, dv = \frac{1}{2}\tau\check{i}\,\hat{i}\, dv. \tag{11.10}$$

§ 2. Решение уравнения для вектор-потенциала вихревых токов. Решение уравнения (11.8), где $\tau \neq \infty$, можно получить точно таким же путем, как для случая $\tau = \infty$ в § 5 гл. VII. Представим **A** в виде [см. выражения (7.17) и (7.18)]

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{u}W_1 + \mathbf{u} \times \nabla W_2), \tag{11.11}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ или $\mathbf{r}$. Согласно соотношениям (7.19) и (7.20), имеем

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla \times [\mathbf{u}\nabla^2 W_1 + \mathbf{u} \times \nabla(\nabla^2 W_2)].$$

Подставив эти два выражения в уравнение (11.8), получим

$$\nabla \times \left[\mathbf{u}\left(\nabla^2 W_1 - \frac{\mu}{\tau}\frac{dW_1}{dt}\right) + \mathbf{u} \times \nabla\left(\nabla^2 W_2 - \frac{\mu}{\tau}\frac{dW_2}{dt}\right)\right] = 0.$$

Если W_1 и W_2 являются решениями уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 W = \frac{\mu}{\tau}\frac{dW}{dt}, \tag{11.12}$$

то при помощи соотношения (11.11) можно выразить через них решение уравнения для вектор-потенциала вихревых токов.

Пользуясь соотношениями (7.21) и (7.22), найдем, каким образом выражается поле **B** через функции W_1 и W_2:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}W_1) + \nabla \times (\mathbf{u}\nabla^2 W_2), \tag{11.13}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu}{\tau} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}W_2) - \mathbf{u} \times \nabla W_1 \right] \tag{11.14}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ или $\mathbf{r}$. Поскольку **B** и **A** удовлетворяют одинаковым уравнениям (11.8) и (11.9), то можно было ожидать, что и решения (11.11) и (11.14) будут иметь сходный между собою вид. Мы видим, что теперь значение **B** определяется обеими функциям: W_1 и W_2. Принимая во внимание соотношение (7.22), можно произвести дальнейшее упрощение написанных выше выражений

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu}{\tau} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \nabla W_2 + \mathbf{u}W_1) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla W_1), \tag{11.15}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu}{\tau} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \nabla W_2 + \mathbf{r}W_1) + \mathbf{r} \cdot \nabla (\nabla W_1) + 2\nabla W_1. \tag{11.16}$$

Если направить **u** вдоль u_1 и искать решение уравнения (11.12) в виде $U(u_1) F(u_2, u_3, t)$, то, как и в § 5 гл. VII, полученное в результате поле **B** будет перпендикулярно к **A**.

§ 3. Скин-эффект в стационарном случае. Уравнение (11.7) имеет простое решение в том случае, когда среда, обладающая проницаемостью μ и удельным сопротивлением τ, заполняет полупространство $z > 0$. Пусть плотность тока, частота изменения которого равна ω, имеет в плоскости $z = 0$ только компоненту $\check{i}_x$, не зависящую ни от x, ни от y. Тогда уравнение (11.7) дает

$$\frac{j\omega\mu}{\tau} \check{i}_x = j\omega\mu\gamma \check{i}_x = \frac{\partial^2 \check{i}_x}{\partial z^2} = \frac{d^2 \check{i}_x}{dz^2}, \tag{11.17}$$

так как i_x является функцией только z. Решением этого уравнения будет

$$\check{i}_x = \check{C} e^{-(j\omega\mu\gamma)^{1/2} z} + \check{D} e^{(j\omega\mu\gamma)^{1/2} z}. \tag{11.18}$$

Если плотность тока i_x конечна при $z = \infty$, то $\check{D} = 0$. Заменяя $(2j)^{1/2}$ на $1 + j$ и добавляя временной множитель, получим

$$\check{i}_x e^{j\omega t} = i_0 e^{-(1/2\omega\mu\gamma)^{1/2} z} e^{j[\omega t - (1/2\omega\mu\gamma)^{1/2} z]}, \tag{11.19}$$

где i_0 — значение $\check{i}_x$ на поверхности $z = 0$. Взяв теперь действительную часть, будем иметь

$$i_x = i_0 e^{-(1/2\omega\mu\gamma)^{1/2} z} \cos \left[\omega t - \left(\frac{1}{2} \omega\mu\gamma \right)^{1/2} z \right] \tag{11.20}$$

Таким образом, амплитуда плотности тока i_x экспоненциально уменьшается, а фаза изменяется линейно.

Применяя формулу разложения косинуса и используя формулы (863.1) и (863.2) из справочника Двайта, для полного тока $I \cos(\omega t + \psi)$, текущего в полосе шириной 1 *м*, найдем

$$\int_0^\infty i_x \, dz = i_0 (2\omega\mu\gamma)^{-1/2} (\cos \omega t + \sin \omega t) = i_0 (\omega\mu\gamma)^{-1/2} \cos \left(\omega t - \frac{1}{4} \pi \right). \tag{11.21}$$

Заметим, что существуют такие значения z, при которых ток меняет свое направление на обратное, и поэтому удаление части проводящей среды, лежащей ниже некоторой определенной глубины, приведет к увеличению

полного тока[1]). Мощность, поглощаемую в виде тепла и приходящуюся на 1 $м^2$ поверхности, можно вычислить по формуле (11.10) с учетом формул (440.20) и (565.1) из справочника Двайта:

$$\overline{P}_1 = \frac{\omega\tau}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi/\omega} i_x^2\,dt\,dz = \frac{\tau i_0^2}{2}\int_0^{\infty} e^{-2(1/2\omega\mu\gamma)^{1/2}z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\tau i_0^2\left(\frac{1}{2}\omega\mu\gamma\right)^{-1/2} = \tau I_e^2\left(\frac{1}{2}\omega\mu\gamma\right)^{1/2} = I_e^2(\gamma\delta)^{-1} = \frac{1}{2}\omega\mu\delta I_e^2, \quad (11.22)$$

где $I_e = 2^{-1/2}I$ — эффективное значение тока I. Таким образом, активное сопротивление равно такому сопротивлению, которым при постоянном токе обладает поверхностный слой (скин-слой) толщиной

$$\delta = \left(\frac{1}{2}\omega\mu\gamma\right)^{-1/2}$$

Рассмотренные здесь вихревые токи могли бы появиться в проводнике лишь при наличии вблизи его поверхности однородного магнитного поля $B_0\cos\omega t$, направленного вдоль оси y. Поведение **i** и **B** в проводнике описывается одними и теми же дифференциальными уравнениями [см. (11.7) и (11.8)], поэтому обе эти величины затухают экспоненциально по мере удаления в глубь проводника. Чтобы вычислить рассеиваемую энергию, возьмем контурный интеграл от **B** вдоль сторон прямоугольника, расположенного перпендикулярно к оси x и вытянутого вдоль оси z настолько, что одна из его сторон длиной 1 $м$ лежит вне поверхности проводника (но в непосредственной близости от него), где индукция равна B_0, а другая сторона — далеко в глубине проводника, где индукция практически уже равна нулю. В интеграл войдет лишь значение B_0, поэтому, согласно соотношению (7.2) (или из первого уравнения Максвелла), получим

$$B_0 = \mu I = 2^{1/2}\mu I_e. \quad (11.23)$$

Из выражения (11.22) следует, что рассеиваемая вихревыми токами мощность, приходящаяся на поверхность с площадью S и определяемая через амплитуду B_0 магнитной индукции вне поверхности проводника (в непосредственной близости от него), равна

$$\overline{P} = \int_S \overline{P}_1\,dS = (2\mu^2\gamma\delta)^{-1}\int_S B_0^2\,dS. \quad (11.24)$$

Самоиндукция L_i', приходящаяся на 1 $м^2$ поверхности и обусловленная наличием магнитного поля внутри проводника, находится из соотношений (11.20), (11.22), (8.36) и (11.3):

$$\frac{L_i' I_e^2}{2} = \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{i}\cdot\mathbf{A}\,dt\,dz = \frac{\tau}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi/\omega} i_x^2\,dt\,dz = \frac{\overline{P}}{2\omega} = \frac{\tau I_e^2}{2\omega\delta}. \quad (11.25)$$

Сопоставление выражения (11.25) с выражением для сопротивления R' (на 1 $м^2$ поверхности) приводит к соотношению

$$L_i' = \frac{\tau}{\omega\delta} = \frac{1}{\omega\delta\gamma} = \frac{R'}{\omega}. \quad (11.26)$$

[1]) Аргументация автора неубедительна, поскольку в бегущей волне (11.20) нет, очевидно, неподвижных в пространстве узловых поверхностей, на которых вектор плотности тока меняет свое направление на обратное.—*Прим. перев.*

Отсюда следует, что величиной L_i' при высоких частотах можно полностью пренебречь.

§ 4. Скин-эффект в случае полого цилиндрического проводника. Если частота настолько велика, что глубина проникновения мала по сравнению с радиусом кривизны поверхности проводника, то результаты предыдущего параграфа вполне можно применить к обычному цилиндрическому проводу или к круглой цилиндрической трубе. Если же это условие не выполняется, то следует решать задачу заново, пользуясь цилиндрическими координатами. В этом случае в силу полной симметрии относительно оси цилиндра ток $\check{i}_z$ является функцией лишь ρ, и уравнение (11.7) принимает вид

$$\frac{j\omega\mu}{\tau}\check{i}_z = j\omega\mu\gamma\check{i}_z = jp\check{i}_z = \frac{\partial^2\check{i}_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\check{i}_z}{\partial\rho}. \tag{11.27}$$

Введя обозначение $v = (jp)^{1/2}\rho$, получим

$$\frac{\partial^2\check{i}_z}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial\check{i}_z}{\partial v} - \check{i}_z = 0. \tag{11.28}$$

Это уравнение является модифицированным уравнением Бесселя (5.309) нулевого порядка. Его решение имеет вид [см. (5.411)]

$$\check{i}_z = \check{C}I_0(v) + \check{D}K_0(v) = \check{C}I_0[(jp)^{1/2}\rho] + \check{D}K_0[(jp)^{1/2}\rho]. \tag{11.29}$$

Из выражения (7.89) следует, что вследствие симметрии магнитное поле во внутренней полости трубки существовать не может. Если через a и b обозначить соответственно внешний и внутренний радиусы трубки, то граничным условием при $\rho = b$ будет $\mathbf{B} = 0$, что в соответствии с уравнением (11.3) дает

$$(\nabla \times \check{\mathbf{i}})_{\rho=b} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial\check{i}_z}{\partial\rho}\right)_{\rho=b} = 0. \tag{11.30}$$

При $\rho = a$ имеем следующее граничное условие:

$$(\check{i}_z)_{\rho=a} = i_0. \tag{11.31}$$

Используя соотношение (5.440), из выражений (11.29) и (11.30) получим

$$0 = \check{C}I_1[(jp)^{1/2}b] - \check{D}K_1[(jp)^{1/2}b],$$

а из выражений (11.29) и (11.31) будем иметь

$$i_0 = \check{C}I_0[(jp)^{1/2}a] + \check{D}K_0[(jp)^{1/2}a].$$

Отсюда

$$\check{C} = \frac{K_1[(jp)^{1/2}b]\,i_0}{I_0[(jp)^{1/2}a]K_1[(jp)^{1/2}b] + I_1[(jp)^{1/2}b]K_0[(jp)^{1/2}a]}, \tag{11.32}$$

$$\check{D} = \frac{I_1[(jp)^{1/2}b]\,i_0}{I_0[(jp)^{1/2}a]K_1[(jp)^{1/2}b] + I_1[(jp)^{1/2}b]K_0[(jp)^{1/2}a]} \tag{11.33}$$

§ 5. Скин-эффект в сплошном цилиндрическом проводнике. В случае сплошного металлического стержня нужно в уравнении (11.3) положить $\check{D} = 0$, потому что, согласно § 34а гл. V, при $x = 0$ функция $K_0(x)$ обращается в бесконечность. Тогда вместо выражений (11.29), (11.32) и (11.33) для $\check{i}_z$ будем иметь следующее:

$$\check{i}_z \quad \frac{I_0[(jp)^{1/2}\rho]}{I_0[(jp)^{1/2}a]}\,i_0. \tag{11.34}$$

Для получения численных значений необходимо величины $I_0[(j)^{1/2}x]$ и $K_0[(j)^{1/2}x]$ разбить на действительную и мнимую части. Это производится при помощи функций *ber*, *bei*, *ker* и *kei*, введенных Кельвином; для этих функций существуют таблицы (см., например, Двайт, 1050). Таким образом, имеем

$$I_0[(j)^{1/2}x] \equiv ber_0 x + j\, bei_0 x, \tag{11.35}$$

$$K_0[(j)^{1/2}x] \equiv ker_0 x + j\, kei_0 x. \tag{11.36}$$

Подставляя (11.35) и (11.36) в (5.437) и (5.440), можно найти разложение этих функций в ряд. Используя функции *ber* и *bei* в выражении (11.34), умноженном на $e^{j\omega t}$, и взяв от него действительную часть, получим выражение для плотности тока в цилиндрическом проводнике радиуса a в виде

$$i_z = \left\{\frac{ber_0^2[(p)^{1/2}\rho] + bei_0^2[(p)^{1/2}\rho]}{ber_0^2[(p)^{1/2}a] + bei_0^2[(p)^{1/2}a]}\right\}^{1/2} i_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{11.37}$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{ber_0[(p)^{1/2}a]\, bei_0[(p)^{1/2}\rho] - ber_0[(p)^{1/2}\rho]\, bei_0[(p)^{1/2}a]}{ber_0[(p)^{1/2}a]\, ber_0[(p)^{1/2}\rho] + bei_0[(p)^{1/2}\rho]\, bei_0[(p)^{1/2}a]} \tag{11.38}$$

Полный ток в проводе в любой момент времени можно выразить через величину магнитного поля на поверхности проводника, поскольку они связаны между собой соотношением $B = \mu I/(2\pi a)$. Из соотношений (11.34) и (5.440) после сокращения на $e^{j\omega t}$ имеем

$$j\omega(\check{\mathbf{B}})_a = -\tau(\nabla \times \check{\mathbf{i}})_a = \varphi\tau\left(\frac{\partial \check{i}_z}{\partial \rho}\right)_a = \varphi\,\frac{(jp)^{1/2} I_0'[(jp)^{1/2}a]\,\tau i_0}{I_0[(jp)^{1/2}a]}$$

или

$$\check{I} = \frac{2\pi a \check{B}}{\mu} = \frac{2\pi\tau\,(jp)^{1/2} a I_0'[(jp)^{1/2}a]}{j\omega\mu I_0[(jp)^{1/2}a]}\, i_0. \tag{11.39}$$

Средняя рассеиваемая мощность, приходящаяся на единицу длины в кольце радиуса ρ и толщины $d\rho$, согласно выражению (11.10), равна

$$d\overline{P}_{av} = \frac{1}{2}\tau\,|\check{i}_z|^2\, 2\pi\rho\, d\rho = \pi\tau\check{i}_z\hat{i}_z\rho\, d\rho,$$

где $\hat{i}_z$ — величина комплексно-сопряженная $\check{i}_z$. Отметим здесь же, что величине $(+j)^{1/2} = 2^{-1/2}(1+j)$, часто встречающейся в рассматриваемых уравнениях, соответствует комплексно-сопряженная величина $(-j)^{1/2} = 2^{-1/2}(1-j) = -j(j)^{1/2}$. Поэтому

$$\hat{I}_0[(jp)^{1/2}\rho] = \check{I}_0[(-jp)^{1/2}\rho] = \check{I}_0[-j(jp)^{1/2}\rho].$$

Полная мощность, рассеиваемая в проводе (на единицу его длины), равна

$$\overline{P}_{av} = \int_0^a d\overline{P}_{av} = \frac{\pi\tau i_0^2}{I_0[(jp)^{1/2}a]\, I_0[-j(jp)^{1/2}a]} \int_0^a I_0[-j(jp)^{1/2}\rho]\, I_0[(jp)^{1/2}\rho]\,\rho\, d\rho.$$

Этот интеграл является частным случаем интеграла (5.426) и получается из последнего при $n = 0$, вследствие чего результат, записанный через функции $ber_0 x$ и $bei_0 x$, будет иметь вид

$$\overline{P}_{av} = \frac{\tau\pi a}{(p)^{1/2}}\,\frac{ber_0[(p)^{1/2}a]\, bei_0'[(p)^{1/2}a] - ber_0'[(p)^{1/2}a]\, bei_0[(p)^{1/2}a]}{ber_0^2[(p)^{1/2}a] + bei_0^2[(p)^{1/2}a]}\, i_0^2. \tag{11.40}$$

В соответствии с выражением (11.39) квадрат эффективного значения I_e равен

$$I_e^2 = \frac{2\pi^2\tau^2 pa^2}{\mu^2\omega^2} \frac{\check{I}_0'[(jp)^{1/2}a]\,\hat{I}_0'[(jp)^{1/2}a]}{\check{I}_0[(jp)^{1/2}a]\,\hat{I}_0[(jp)^{1/2}a]} i_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi^2 a^2}{p} \frac{\{ber_0'[(p)^{1/2}a]\}^2 + \{bei_0'[(p)^{1/2}a]\}^2}{\{ber_0[(p)^{1/2}a]\}^2 + \{bei_0[(p)^{1/2}a]\}^2} i_0^2. \qquad (11.41)$$

Если $R = \tau/(\pi a^2)$ — сопротивление на единицу длины при постоянном токе, то высокочастотное сопротивление R' равно

$$R' = \frac{\bar{P}_{av}\pi a^2}{\tau I_e^2} R = \frac{a(p)^{1/2}}{2} \frac{ber[(p)^{1/2}a]\,bei'[(p)^{1/2}a] - ber'[(p)^{1/2}a]\,bei[(p)^{1/2}a]}{\{ber'[(p)^{1/2}a]\}^2 + \{bei'[(p)^{1/2}a]\}^2} R, \qquad (11.42)$$

где, как и во многих таблицах, индекс «нуль» опущен и, согласно выражению (11.27),

$$p = \tau^{-1}\mu\omega = \gamma\mu\omega \qquad (11.43)$$

и a — радиус цилиндра.

Энергию магнитного поля внутри провода можно определить, воспользовавшись соотношением (11.39):

$$j\omega\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}\tau\left(\frac{\partial \check{i}_z}{\partial\rho}\right)_a = \frac{\varphi\tau i_0}{I_0[(jp)^{1/2}a]} \frac{\partial I_0[(jp)^{1/2}a]}{\partial a}.$$

Тогда для средней энергии внутри провода, согласно выражению (8.12), получим

$$\frac{\pi}{2\mu}\int_0^a \check{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{B}}\rho\,d\rho = \frac{\pi\tau^2 i_0^2 p}{2\mu\omega^2 I_0[(jp)^{1/2}a]\,I_0[(-jp)^{1/2}a]} \int_0^a \check{I}_0'\hat{I}_0'\rho\,d\rho,$$

где введены сокращенные обозначения I_0 вместо $I_0[(jp)^{1/2}\rho]$ и I_0' вместо $\partial I_0(x)/\partial x$. Поскольку, в силу соотношения (5.440), $I_0'(x) = I_1(x)$, этот интеграл совпадает с интегралом (5.426), если в последнем положить $n = 1$, поэтому его значение через функции $ber_1 x$ и $bei_1 x$ равно

$$ap^{-1/2}[ber_1(p^{1/2}a)\,bei_1'(p^{1/2}a) - ber_1'(p^{1/2}a)\,bei_1(p^{1/2}a)].$$

При помощи формул (828.1), (828.2), (829.3) и (829.4) из справочника Двайта эти функции сводятся к функциям нулевого порядка. Учитывая, что средняя энергия равна $\frac{1}{2}L_i I_e^2$ и что I_e^2 определяется выражением (11.41), для L_i — внутренней самоиндукции на единицу длины — получим

$$L_i = \frac{\tau(p)^{1/2}}{2\pi\omega a} \frac{ber[(p)^{1/2}a]\,ber'[(p)^{1/2}a] + bei[(p)^{1/2}a]\,bei'[(p)^{1/2}a]}{\{ber'[(p)^{1/2}a]\}^2 + \{bei'[(p)^{1/2}a]\}^2} \qquad (11.44)$$

§ 6. Решение в сферических координатах при аксиальной симметрии. Предположим, что магнитное поле, вызывающее вихревые токи, не зависит от φ и не имеет φ-составляющей. Тогда вектор-потенциал имеет только φ-составляющую, т. е.

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\varphi}A_\varphi(r, \theta, t), \qquad (11.45)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — единичный вектор в направлении φ, равный

$$\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi. \qquad (11.46)$$

Применим оператор Лапласа (3.17) к выражениям $A_x = -A_\varphi\sin\varphi$ и $A_y = A_\varphi\cos\varphi$ по отдельности. После некоторой перегруппировки членов

уравнение (11.8) примет вид

$$\frac{\mu}{\tau}\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}=\nabla^2\mathbf{A}=\varphi\left[\nabla^2 A_\varphi-\frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right]=\varphi\nabla^2 A_\varphi+A_\varphi\nabla^2\varphi. \tag{11.47}$$

Выписывая ∇^2 в сферических координатах (3.17) и опуская φ, получим

$$\frac{\mu}{\tau}\frac{dA_\varphi}{dt}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right)-\frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta}=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{(1-u^2)^{1/2}}{r^2}\frac{\partial^2[(1-u^2)^{1/2}A_\varphi]}{\partial u^2}, \tag{11.48}$$

где введено обозначение $u=\cos\theta$.

Рассмотрим теперь стационарные вихревые токи, предполагая, что магнитное поле осциллирует с круговой частотой ω. Как и в § 13 гл. V, будем искать решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от θ, а другая — только от r, т. е.

$$A_\varphi=\mathrm{Re}\{\Theta r^{-1/2}\check{R}e^{j\omega t}\}. \tag{11.49}$$

Подставим это в выражение (11.48), умножим все на r^2 и разделим на $\Theta r^{-1/2}\check{R}e^{j\omega t}$, тогда получим

$$\frac{r^2}{\check{R}}\frac{d^2\check{R}}{dr^2}+\frac{rd\check{R}}{\check{R}\,dr}-\frac{1}{4}-jpr^2+\frac{(1-u^2)^{1/2}}{\Theta}\frac{d^2}{du^2}[(1-u^2)^{1/2}\Theta]=0, \tag{11.50}$$

где

$$p=\tau^{-1}\mu\omega=\gamma\mu\omega. \tag{11.51}$$

Как и при решении уравнения (5.82), приравняем члены, зависящие от θ, величине $-n(n+1)$, а члены, зависящие от r, приравняем $n(n+1)$; тем самым уравнение (11.50) будет тождественно удовлетворено. После дифференцирования уравнения (11.50) получаем

$$(1-u^2)\frac{d^2\Theta_n}{du^2}-2u\frac{d\Theta_n}{du}-\frac{\Theta_n}{1-u^2}+n(n+1)\Theta_n=0, \tag{11.52}$$

$$\frac{d^2\check{R}_n}{dt^2}+\frac{1}{r}\frac{d\check{R}_n}{dr}-\left[jp+\frac{n(n+1)+\frac{1}{4}}{r^2}\right]\check{R}_n=0. \tag{11.53}$$

Первое из уравнений совпадает с дифференциальным уравнением (5.180) для присоединенных функций Лежандра, соответствующим значению $m=1$, а второе является модифицированным уравнением Бесселя (5.406), в котором $x=(jp)^{1/2}r$. Таким образом, в соответствии с соотношением (5.181) и § 33 гл. V. A_φ является действительной частью выражения

$$r^{-1/2}[A_nP_n^1(u)+B_nQ_n^1(u)]\{\check{C}_nI_{n+1/2}[(jp)^{1/2}r]+\check{D}_nK_{n+1/2}[(jp)^{1/2}r]\}e^{j\omega t}. \tag{11.54}$$

Если n — целое число, а это так и должно быть для $P_n^1(u)$ и $Q_n^1(u)$ при отсутствии конических границ, то можно для второго решения вместо $K_{n+1/2}$ использовать $I_{-(n+1/2)}$, как в § 38 гл. V.

В области, где проводимость равна нулю, левая часть выражения (11.48) обращается в нуль, и если положить $\check{A}_\varphi e^{j\omega t}=\check{R}'\Theta e^{j\omega t}$, то мы получим, как и раньше, уравнение (11.52), но вместо уравнения (11.53) будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\check{R}'}{dr}\right)-n(n+1)\check{R}'=0. \tag{11.55}$$

Решение этого уравнения [см. (5.84)] имеет вид

$$\check{R}' = \check{A}r^n + \check{B}r^{-n-1}. \tag{11.56}$$

В непроводящих областях члены в соотношении (11.54), зависящие от r, следует заменить этим выражением.

§ 7. Проводящий шар в переменном поле. Пусть шар, имеющий удельное сопротивление τ, магнитную проницаемость μ и радиус a, помещен в однородное переменное магнитное поле $\check{B}e^{j\omega t}$, направленное вдоль оси z. Опуская множитель $e^{j\omega t}$, получим следующее выражение для комплексного вектор-потенциала:

$$\check{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\varphi}\frac{1}{2}\check{B}r\sin\theta = \boldsymbol{\varphi}\frac{1}{2}\check{B}rP_1^1(\cos\theta). \tag{11.57}$$

Это выражение можно легко проверить, применяя к нему оператор ротора и учитывая соотношения (3.15) и (3.16). Таким образом, в выражениях (11.54) и (11.56) нужно положить $n=1$, и, поскольку вектор-потенциал вихревых токов должен в бесконечности обращаться в нуль, снаружи шара будем иметь

$$a < r < \infty, \qquad \check{\mathbf{A}}_0 = \boldsymbol{\varphi}\frac{1}{2}\check{B}(r + \check{D}r^{-2})\sin\theta. \tag{11.58}$$

При $r=0$ величина $\check{\mathbf{A}}_i$ конечна, поэтому, согласно выражениям (5.465) и (5.466), внутри шара остается только $I_{3/2}[(jp)^{1/2}r]$. Таким образом, полагая в выражении (11.54) $n=1$, находим

$$0 < r < a, \qquad \check{\mathbf{A}}_i = \boldsymbol{\varphi}\frac{1}{2}\check{B}\check{C}r^{-1/2}I_{3/2}[(jp)^{1/2}r]\sin\theta. \tag{11.59}$$

Из соотношений (7.118) и (7.119) следует, что при $r=a$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\check{A}_0 = \check{A}_i \quad \text{и} \quad \mu_v\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\check{A}_i) = \mu\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\check{A}_0). \tag{11.60}$$

Полагая в выражениях (11.58) и (11.59) $r=a$, используя соотношения (5.414)—(5.416) и обозначая для краткости $I_n[(jp)^{1/2}a]$ через I_n и $(jp)^{1/2}a$ через v, получим

$$a^3 + \check{D} = a^{3/2}\check{C}I_{3/2} = a^{3/2}\check{C}[I_{-1/2} - v^{-1}I_{1/2}],$$

$$(2a^3 - \check{D})\mu = \mu_v a^{3/2}\left[\frac{1}{2}I_{3/2} + vI'_{3/2}\right]\check{C} = \mu_v a^{3/2}[(v+v^{-1})I_{1/2} - I_{-1/2}]\check{C}.$$

Разрешив эти уравнения относительно $\check{C}$ и $\check{D}$, будем иметь

$$\check{C} = \frac{3\mu v a^{3/2}}{(\mu-\mu_v)vI_{-1/2} + [\mu_v(1+v^2)-\mu]I_{1/2}}, \tag{11.61}$$

$$\check{D} = \frac{(2\mu+\mu_v)vI_{-1/2} - [\mu_v(1+v^2)+2\mu]I_{1/2}}{(\mu-\mu_v)vI_{-1/2} + [\mu_v(1+v^2)-\mu]I_{1/2}}a^3. \tag{11.62}$$

Эти выражения можно представить также при помощи гиперболических функций [см. § 38 гл. V или Двайт, 808.1 и 808.3]. Согласно уравнению (11.4), плотность тока всюду внутри шара определяется следующим образом:

$$\check{\mathbf{i}} = -j\omega\gamma\check{\mathbf{A}}_i = -jp\mu^{-1}\check{\mathbf{A}}_i, \tag{11.63}$$

где $\check{\mathbf{A}}_i$ дается выражением (11.59). В соответствии с соотношениями (11.58), (3.15) и (3.16) магнитное поле снаружи сферы равно

$$\check{B}_{0\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\check{A}_0) = -\check{B}\left(1-\frac{\check{D}}{2r^3}\right)\sin\theta, \tag{11.64}$$

$$\check{B}_{0r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_0) = \check{B}\left(1+\frac{\check{D}}{r^3}\right)\cos\theta. \tag{11.65}$$

Подобным же образом из соотношения (11.59) находятся $\check{B}_{i\theta}$ и $\check{B}_{ir}$. Сравнение выражений (11.64) или (11.65) с (7.49) показывает, что поле вихревых токов подобно полю магнитного диполя, т. е. полю кольца радиуса a, несущего ток $\check{I}e^{j\omega t}$, где $\mu_0 a^2\check{I} = 2\check{B}\check{D}$. Если магнитное поле не является переменным, то $\omega = 0$ и в выражении (11.51) $p \to 0$. Поэтому [см. § 38 гл. V и Двайт, 657.1 или 657.2] имеем

$$I_{1/2}(x) \underset{x\to 0}{\to} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2}\left(x+\frac{x^3}{6}\right) \quad \text{и} \quad I_{-1/2}(x) \underset{x\to 0}{\to} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$$

Выражения (11.61) и (11.62) упрощаются, так что соотношения (11.58) и (11.59) принимают вид

$$\check{\mathbf{A}}_0 = \varphi\frac{\check{B}}{2}\left[r+\frac{2(K_m-1)a^3}{(K_m+2)r^2}\right]\sin\theta, \tag{11.66}$$

$$\check{\mathbf{A}}_i = \varphi\frac{3K_m\check{B}}{2(K_m+2)}r\sin\theta. \tag{11.67}$$

Это точные выражения для статических полей. Из соотношения (11.63) в качестве первого приближения для медленно меняющихся полей имеем

$$\check{i}_\varphi = -\frac{3j\omega K_m\gamma\check{B}}{2(K_m+2)}r\sin\theta. \tag{11.68}$$

К такому же результату мы придем и в том случае, когда удельное сопротивление становится бесконечно большим.

При очень высоких частотах

$$\check{\mathbf{A}}_i \to 0, \qquad \check{\mathbf{A}}_0 \to \varphi\frac{1}{2}\check{B}(r-a^3r^{-2})\sin\theta, \tag{11.69}$$

потому что, согласно результатам § 38 гл. V,

$$I_{1/2}(x) \underset{x\to\infty}{\to} I_{3/2}(x) \underset{x\to\infty}{\to} I_{-1/2}(x) \underset{x\to\infty}{\to} \underset{x\to\infty}{\to}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\frac{e^x}{2},$$

т. е. внутри шара магнитное поле отсутствует, а вихревые токи, как и следовало ожидать, становятся поверхностными.

Чтобы иметь представление о порядке встречающихся здесь величин, вычислим, пользуясь выражением (11.51), значение p для переменного поля, изменяющегося с частотой 60 *гц* (т. е. $\omega = 120\pi$). Пусть τ и μ даны в единицах MKS, тогда для меди $\tau \approx 1{,}7\cdot 10^{-8}$ *ом·м*, $\mu \approx \mu_v = 4\pi\cdot 10^{-7}$ *гн/м* и $p \approx 28\,000$. Для типичных железных образцов $\tau = 10^{-7}$, $\mu \approx 480\pi\cdot 10^{-7}$ (в магнитном поле напряженностью $1{,}5\cdot 10^5/(4\pi)$ ампервитков на метр) и $p = 570\,000$. Для графита $\tau \approx 8\cdot 10^{-6}$, $\mu \approx 4\pi\cdot 10^{-7}$ и $p = 600$. Таким образом, при этой частоте при расстояниях порядка нескольких сантиметров выражение (11.69) могло бы быть пригодным для железа или меди, но не для графита. Предположение о том, что $\mathbf{A}_i = 0$, а $\mathbf{B}_0$ тангенциальна к поверхности, сильно упрощает вычисление.

Так как мы оперировали в этом параграфе с комплексными амплитудами, то полученные результаты позволяют найти и амплитуду и фазу

искомых величин. Аналогичные граничные условия и такого же вида электродвижущие силы встречаются при решении задачи об экранирующем действии произвольного числа концентрических толстостенных сферических оболочек, но результаты в этом случае записываются в более сложной форме. В частности, оказывается, что если некоторое заданное количество материала распределить между несколькими отдельными концентрическими оболочками, то экранирующее действие усиливается. Более того, существуют оптимальные значения толщин оболочек и расстояний между ними

§ 8. Мощность, поглощаемая шаром в переменном магнитном поле. Вычислим теперь мощность, поглощаемую шаром в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе. Как следует из выражения (11.10), внутри элементарного объема dv поглощается мощность

$$d\bar{P} = \frac{1}{2}\tau \check{i}\,\hat{i}\,dv = \pi\tau \check{i}\,\hat{i}\,r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta.$$

Подставляя значения $\check{i}$ и $\hat{i}$ из соотношений (11.63) и (11.59) и интегрируя по θ в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, получим

$$\bar{P} = \frac{\pi\omega^2 B^2}{3\tau}\check{C}\hat{C}\int_0^a I_{3/2}[(jp)^{1/2}r]\, I_{3/2}[(-jp)^{1/2}r]\, r\, dr. \qquad (11.70)$$

Применим последнюю формулу (5.426) и учтем, что в соответствии с § 38 гл. V

$$I_{1/2}[(\pm jp)^{1/2}a] = \left[\frac{1}{2}\pi(\pm jp)^{1/2}a\right]^{-1/2}\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(2p)^{1/2}(1\pm j)a\right]$$

$$I_{-1/2}[(\pm jp)^{1/2}a] = \left[\frac{1}{2}\pi(\pm jp)^{1/2}a\right]^{-1/2}\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(2p)^{1/2}(1\pm j)a\right] \qquad (11.71)$$

В результате вычисления интеграла (см. Двайт, 651.06—651.09) находим

$$(\pi p^{3/2}a)^{-1}\left\{\frac{1}{2}(2pa^2)^{1/2}[\operatorname{sh}(2pa^2)^{1/2}+\sin(2pa^2)^{1/2}]-\operatorname{ch}(2pa^2)^{1/2}+\cos(2pa^2)^{1/2}\right\}$$

Исключив произведение $\check{C}\hat{C}$ из соотношения (11.70) при помощи выражений (11.71), (11.61) и (11.51), получим

$$\frac{3\pi a^5\omega^2 B^2\mu^2\tau^{-1}\left[\frac{1}{2}u(S+s)-C+c\right]}{(\mu-\mu_0)^2[(pa^2+1)C+(pa^2-1)c-u(S+s)]+(\mu-\mu_0)pa^2u(S-s)+p^2a^4(C-c)},$$

где $u = (2p)^{1/2}a$, $C = \operatorname{ch}u$, $c = \cos u$, $S = \operatorname{sh}u$, $s = \sin u$.

§ 9. Переходные явления в проводящем шаре. В двух последних параграфах рассматривалась задача о шаре с удельным сопротивлением τ и проницаемостью μ, находящемся в однородном переменном установившемся магнитном поле. Решим теперь задачу в случае переходного режима, когда та же самая сфера помещена в однородное магнитное поле **B**, которое в момент времени $t = 0$ внезапно становится равным нулю. Совершенно ясно, что в этом, как и в предыдущем, случае A также будет иметь только φ-составляющую. В момент времени $t = 0$ поверхностные вихревые токи воспрепятствуют мгновенному изменению внутреннего поля, и поскольку вектор-потенциал при переходе через границу должен быть непрерывным, то из выражения (11.67) в момент времени $t = 0$ мы будем иметь

$$A_i = \varphi\frac{3K_m B}{2(K_m+2)}rP_1^1(u), \qquad A_0 = \varphi\frac{3K_m B}{2(K_m+2)}\frac{a^3}{r^2}P_1^1(u). \qquad (11.72)$$

Ввиду того, что вне сферы $\tau = \infty$, последующее поведение вектор-потенциала A будет определяться решением уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{A}_i = \frac{\mu}{\tau} \frac{d\mathbf{A}_i}{dt}, \quad \nabla^2 \mathbf{A}_0 = 0. \tag{11.73}$$

Решение первого уравнения, экспоненциально зависящее от времени, было найдено нами в § 6. Попытаемся теперь удовлетворить граничным условиям, взяв сумму таких решений. Ясно, что в рассматриваемом случае колебания отсутствуют и, следовательно, нужно $j\omega t$ заменить на $-q_s t$. Введем величину

$$k_s^2 = \tau^{-1}\mu q_s = \gamma\mu q_s. \tag{11.74}$$

Тогда в формулах § 6 следует jp везде заменить на $-k_s^2$. В частности, в выражении (11.54) вместо $(jp)^{1/2}$ теперь появляется jk_s, и мы приходим к обычным функциям Бесселя. Поскольку вектор-потенциал $\mathbf{A}_i$ должен быть конечным при $r = 0$ и зависеть от θ так же, как и в выражении (11.72), то из выражения (11.54), подставляя $\sin\theta$ вместо $P_1^1(u)$, получим следующее соотношение:

$$\mathbf{A}_i = \varphi \sum_s A_s r^{-1/2} J_{3/2}(k_s r) \sin\theta\, e^{-q_s t} \tag{11.75}$$

Вектор-потенциал $\mathbf{A}_0$ конечен в бесконечности и равен $\mathbf{A}_i$ при $r = a$ для всех значений t. Отсюда, согласно выражению (11.56), имеем

$$\mathbf{A}_0 = \varphi \sum_s B_s r^{-2} \sin\theta e^{-q_s t}. \tag{11.76}$$

Кроме условия (11.72), при $t = 0$ нужно удовлетворить также условию (11.60), имеющему при $r = a$ (после сокращения на $\sin\theta$) вид

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_i, \qquad \mu_v \frac{\partial(r\mathbf{A}_i)}{\partial r} = \mu \frac{\partial(r\mathbf{A}_0)}{\partial r}.$$

Отсюда при $r = a$ для всех значений t должно выполняться уравнение

$$A_s a^{3/2} J_{3/2}(k_s a) = B_s, \qquad \mu_v A_s a^2 \frac{d}{da}[a^{1/2} J_{3/2}(k_s a)] = -\mu B_s. \tag{11.77}$$

Продифференцируем второе уравнение, а затем умножим первое уравнение на μ и сложим его со вторым, после чего, сокращая на A_s, получим

$$\mu_v a \frac{d}{da}[J_{3/2}(k_s a)] + \left(\mu + \frac{1}{2}\mu_v\right) J_{3/2}(k_s a) = 0. \tag{11.78}$$

Таким образом, для того чтобы удовлетворить граничным условиям, нужно найти корни k_s этого уравнения; знание этих корней позволит определить при помощи выражения (11.74) величины q_s, входящие в соотношения (11.75) и (11.76). Значения k_s можно найти при помощи выражения (5.395) и таблицы тригонометрических функций.

Умножая (11.72), (11.75) и (11.76) на $r^{1/2}$ и полагая $t = 0$, получим

$$\frac{3K_m B}{2(K_m + 2)} r^{3/2} = \sum_s A_s J_{3/2}(k_s r). \tag{11.79}$$

Это выражение совпадает с последним выражением (5.352), где $n = 3/2$, и из соотношения (11.78) величина B равна $(\mu/\mu_v) + \frac{1}{2}$. Из выражения (5.328) имеем

$$\int_0^a v f(v) J_{3/2}(k_s v)\, dv = \frac{3K_m B}{2(K_m + 2)} \int_0^a v^{5/2} J_{3/2}(k_s v)\, dv = \frac{3K_m B a^{5/2}}{2k_s(K_m + 2)} J_{5/2}(k_s a).$$

В соответствии с соотношениями (11.78) и (5.323) получаем

$$J_{5/2}(k_s a) = -J_{3/2}(k_s a) + \frac{3}{2k_s a} J_{3/2}(k_s a) = \frac{K_m + 2}{k_s a} J_{3/2}(k_s a).$$

Используя выражение (5.337), находим

$$A_s = \frac{3K_m B a^{3/2}}{[k_s^2 a^2 + (K_m - 1)(K_m + 2)] J_{3/2}(k_s a)} \tag{11.80}$$

Подставив это выражение в (11.75) и (11.76), определим $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{A}_0$. Плотность тока внутри шара в соответствии с уравнением (11.4) дается выражением

$$\mathbf{i} = \varphi \frac{3Ba^{3/2} \sin\theta}{\mu_v r^{1/2}} \sum_s \frac{k_s^2 J_{3/2}(k_s r)\, e^{-k_s^2 \varsigma \mu^{-1} t}}{[k_s^2 a^2 + (K_m - 1)(K_m + 2)] J_{3/2}(k_s a)} \tag{11.81}$$

§ 10. Вихревые токи в плоских пластинках. Пусть в плоскости $z = 0$ расположена очень тонкая пластинка, обладающая удельным сопротивлением ς (на единицу поверхности). Вычислим вектор-потенциал $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ поля вихревых токов, которые индуцируются в такой пластинке под действием переменного магнитного поля, описываемого вектор-потенциалом $\mathbf{A}'(x, y, z, t)$. Будем обозначать плотность этих токов через i. Появление электрического поля $-\partial(A'_z + A_z)/\partial t$ внутри пластинки приводит к появлению поверхностных электрических зарядов, электростатическое поле которых в точности компенсирует первоначальное. Токи, сопровождающие это перераспределение зарядов, настолько незначительны, что ими можно вполне пренебречь и рассматривать лишь тангенциальные составляющие $\mathbf{A}_s$ и $\mathbf{A}'_s$. Таким образом, используя уравнение (11.4), можно написать

$$-\frac{d(\mathbf{A}'_s + \mathbf{A}_s)}{dt} = \varsigma \mathbf{i}. \tag{11.82}$$

Пусть вихревые токи находятся в некоторой конечной области пластинки, последняя может быть как конечной, так и бесконечной. Введем функцию потока $\Phi(x, y)$, определенную в каждой точке P пластинки, как ток, протекающий через любое поперечное сечение, проведенное от точки P до края пластинки. Пользуясь соотношением (7.2), для замкнутого пути, взятого по контуру этого сечения и не включающего поверхность, и учитывая, что $\mathbf{B}$ симметрично относительно пластинки, будем иметь

$$\mu_v \Phi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int_x^\infty B_x\, dx = 2 \int_y^\infty B_y\, dy, \tag{11.83}$$

где путь интегрирования при положительных z проходит в направлении положительных значений x или y. Дифференцируя выражение (11.83), получим

$$i_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2B_y}{\mu_v} = -\frac{2}{\mu_v}\frac{\partial A_x}{\partial z}, \qquad i_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2B_x}{\mu_v} = -\frac{2}{\mu_v}\frac{\partial A_y}{\partial z},$$

или в векторной форме

$$\mathbf{i} = -\frac{2}{\mu_v}\frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial z}. \tag{11.84}$$

Подставим это выражение в уравнение (11.82), тогда для области внутри пластинки получим

$$\frac{d(\mathbf{A}'_s + \mathbf{A}_s)}{dt} = \frac{2\varsigma}{\mu_v}\frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial z}. \tag{11.85}$$

Вне пластинки вектор-потенциал $\mathbf{A}$ состоит из двух частей: магнитной части, порождаемой вихревыми токами, и электрической части, являющейся градиентом скаляра и порождаемой электрическим двойным слоем, возникшим под действием A'_z и A_z. Так как тангенциальная компонента $\mathbf{A}'_s$ вектор-потенциала возбуждающего поля известна и так как $\mathbf{A}_s$ меняется непрерывно при переходе через каждую границу двойного слоя, то соотношение (11.85) является для $\mathbf{A}_s$ граничным условием на внешней стороне поверхности пластинки. Это условие вместе с уравнением $\nabla^2\mathbf{A}=0$ определяет $\mathbf{A}$ всюду вне пластинки. Если пластинка обладает конечными размерами, то граничным условием на ее крае (в плоскости пластинки) будет $i=0$ или $\partial \mathbf{A}_s/\partial z=0$. Правая часть уравнения (11.85) конечна в любой момент времени; это означает, что если $\delta t\to 0$, то $\delta(\mathbf{A}'_s+\mathbf{A}_s)\to 0$. Поэтому скачкообразное изменение $\mathbf{A}'$ мгновенно индуцирует такие вихревые токи, которые сохраняют $\mathbf{A}+\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}+\mathbf{B}'$ неизменными внутри пластинки. Таким образом, при заданном изменении $\mathbf{A}'$ начальное значение $\mathbf{A}$ известно, и если дальше никаких изменений не происходит, то последующие значения $\mathbf{A}$ в процессе уменьшения вихревых токов можно найти, полагая в уравнении (11.85) $\partial \mathbf{A}'_s/\partial t=0$ и решая полученное уравнение. Второе внезапное изменение $\mathbf{A}'$ приведет к возникновению второй серии вихревых токов и т. д. В любой заданный момент времени поле вихревых токов будет являться суперпозицией найденных полей. Если скачки внешнего поля становятся меньше и интервалы между ними короче, то в пределе мы приходим к непрерывному изменению магнитного поля во времени.

§ 11. Решение задачи о вихревых токах в плоской бесконечной пластинке методом изображений. Представим себе, что тонкая бесконечная плоская проводящая пластинка ($z=0$) находится в магнитном поле, источники которого расположены в области $z>0$. Пусть в момент времени $t=0$ поле изменяется так, что если при $t<0$ его вектор-потенциал был равен $\mathbf{A}'_1=f_1(x, y, z)$, то при $t>0$ $\mathbf{A}'_2=f_2(x, y, z)$. Из результатов предыдущего параграфа следует, что вихревые токи, появляющиеся в момент времени $t=0$, сохраняют прежней величину вектор-потенциала на поверхности пластинки, поэтому вначале поле в отрицательной области z остается неизменным. Таким образом, на отрицательной стороне пластинки начальный вектор-потенциал, обусловленный только вихревыми токами, равен

$$(\mathbf{A})_{t=0}=\mathbf{A}'_1-\mathbf{A}'_2=f_1(x, y, z)-f_2(x, y, z). \tag{11.86}$$

Это поле могло быть создано старым источником совместно с новым источником, если у последнего изменить знак на обратный. Эти воображаемые источники, которые могут заменить действительно действующие вихревые токи, являются изображениями, подобными изображениям в электростатике.

Поскольку $\mathbf{A}'_2$ не зависит от t, то уравнение (11.85) сводится к уравнению

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{2\varsigma}{\mu_v}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}, \tag{11.87}$$

общим решением которого, удовлетворяющим при $t=0$ условию (11.86), является следующее:

$$\mathbf{A}=f_1(x, y, -|z|-2\varsigma\mu_v^{-1}t)-f_2(x, y, -|z|-2\varsigma\mu_v^{-1}t). \tag{11.88}$$

Знак z выбран таким, чтобы сделать $\mathbf{A}$ одинаковым при $\pm z$, как того требует симметрия задачи, и чтобы величина $\mathbf{A}$ затухала со временем. Таким образом, уравнение показывает, что к полю $\mathbf{A}'_2$, которое существовало бы в отсутствие пластинки, добавляется по обе стороны от пластинки

затухающее поле, порождаемое вихревыми токами, которое можно представить как поле источников, находящихся сверху и снизу пластинки и удаляющихся от нее с постоянной скоростью $2\varsigma/\mu_v$.

Максвелл предложил формулу для этого закона изображений, которую можно использовать при любом характере изменения поля. Пусть вектор-потенциал возбуждающего поля равен

$$\mathbf{A}' = f(t, x, y, z). \tag{11.89}$$

За бесконечно малый интервал времени $d\tau$ это поле изменится на величину

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y, z)\, d\tau.$$

Первоначальное поле вихревых токов, появляющееся в тот же интервал времени, должно быть равно этому изменению по величине и противоположно по направлению. Как мы видели, это поле уменьшается со временем так, как поле воображаемых источников, находящихся по обе стороны пластинки и удаляющихся от нее с постоянной скоростью $2\varsigma/\mu_v$. Таким образом, вектор-потенциал вихревых токов в момент времени t, описывающий поле источников-изображений, возникших до момента времени t, в течение интервала $(\tau, \tau + d\tau)$ будет определяться выражением

$$d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} f\left(t - \tau, x, y, -|z| - \frac{2\varsigma}{\mu_v}\tau\right) d\tau.$$

В момент времени t полный вектор-потенциал вихревых токов равен

$$\mathbf{A} = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f\left(t - \tau, x, y, -|z| - \frac{2\varsigma}{\mu_v}\tau\right) d\tau. \tag{11.90}$$

При $z < 0$ величину $-|z|$ надо заменить на z, и, поскольку (см. Пайерс, 863) $\partial f/\partial \tau = -\partial f/\partial t + (2\varsigma/\mu_v)\,\partial f/\partial z$, подстановка этого выражения вместо $\partial f/\partial t$ в соотношение (11.90) и интегрирование, при условии, что $f = 0$ при $\tau = \infty$ и $f = \mathbf{A}'$ при $\tau = 0$, дают полное результирующее поле

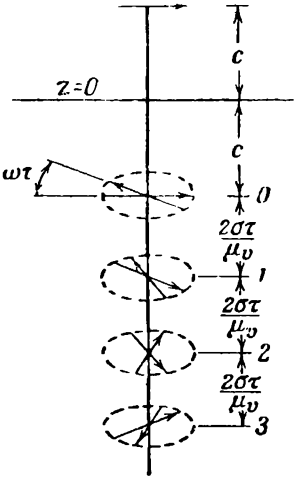
$$z < 0, \qquad \mathbf{A} + \mathbf{A}' = -\frac{2\varsigma}{\mu_v}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty f\left(t - \tau, x, y, z - \frac{2\varsigma}{\mu_v}\tau\right) d\tau. \tag{11.91}$$

Вычислить этот интеграл часто проще, чем (11.90).

§ 12. Момент, действующий на вращающуюся петлю с током или магнитный диполь. При вращении магнитной системы вокруг оси, расположенной перпендикулярно к плоскости проводящей пластинки, поле индуцированных вихревых токов создает, вообще говоря, тормозящий момент, пропорциональный, как мы увидим далее, угловой скорости вращения системы, если эта скорость не слишком велика. Измеряя этот момент, можно найти угловую скорость (на этом принципе работают некоторые типы автомобильных спидометров). Простейшей магнитной системой является диполь или небольшая петля с током, которая может вращаться вокруг центра, сохраняя направление магнитного момента параллельным пластинке. Для уяснения построения изображений мы, не пользуясь формулой (11.90), поступим следующим образом: представим себе, что через равные промежутки времени τ диполь мгновенно поворачивается на угол $\omega\tau$. Рассмотрев этот случай, мы сумеем затем, устремив длину интервалов к нулю, получить результат и для непрерывного

движения. На фиг. 111 показаны изображения (как они выглядят сверху), образованные при последних четырех скачках, в то мгновение, когда диполь с моментом m занимает указанное на фигуре положение. Вращающий момент, действующий на m, будет являться суммой моментов от всех изображений. Поскольку все диполи-изображения направлены перпендикулярно к оси вращения, в выражении (1.16) $\theta_1 = \theta_2' = \frac{1}{2}\pi$ и, согласно выражению (1.19) и § 1 гл. VII, момент, обусловленный одним изображением, составляющим с m угол ψ, равен

$$T = -\frac{\partial W}{\partial \psi} = \frac{\mu_v m^2}{4\pi r^3} \sin \psi. \qquad (11.92)$$



Фиг. 111.

Тогда, если $p = \omega\mu_v/\varsigma$, момент от всех изображений равен

$$T = \frac{\mu_v m^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\,\omega\tau - \sin(n+1)\,\omega\tau}{[2c + (2n\varsigma/\mu_v)\,\tau]^3} =$$

$$= \frac{\mu_v p^3 m^2}{32\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\,\omega\tau - \sin n\,\omega\tau \cos\omega\tau - \cos n\omega\tau \sin\omega\tau}{(pc + n\omega\tau)^3} \qquad (11.93)$$

При переходе к непрерывному движению $\tau \to dt$, $n\tau \to t$ и $\sin\omega\tau \to \omega\tau \to \omega dt$, так что сумма в выражении (11.93) превращается в интеграл

$$T = \frac{\mu_v \omega p^3 m^2}{32\pi} \int_0^{\infty} \frac{-\cos\omega t}{(pc + \omega t)^3}\, dt. \qquad (11.94)$$

Введем $x = pc + \omega t$, так что $\cos\omega t = \cos(x - pc)$ и, следовательно,

$$T = \frac{\mu_v p^3 m^2}{32\pi} \left(\cos pc \int_{pc}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3}\, dx + \sin pc \int_{pc}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}\, dx \right),$$

или (см. Двайт, 441.13 и 431.13)

$$T = \frac{\mu_v p^3 m^2}{64\pi} \left(\frac{1}{p^2c^2} - \cos pc \int_{pc}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx - \sin pc \int_{pc}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right) \qquad (11.95)$$

Эти интегралы можно выразить в виде рядов (см. Двайт, 431.11 и 441.11) или записать в форме известных функций интегрального косинуса Ci и интегрального синуса Si, определяемых следующим образом:

$$\int_{pc}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = -\mathrm{Ci}(pc) \quad \text{и} \quad \int_{pc}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(pc). \qquad (11.96)$$

Таблицы и графики интегралов Ci и Si даны в справочнике Янке и Эмде и других книгах по математике.

Если величина pc значительно больше единицы, то, проинтегрировав трижды соотношение (11.94) по частям, мы получим для T такое выражение:

$$\frac{\mu_v p^3 m^2}{32\pi} \left[\left| \frac{\sin\omega t}{(pc+\omega t)^3} - \frac{3\cos\omega t}{(pc+\omega t)^4} + \frac{12\sin\omega t}{(pc+\omega t)^5} \right|_0^{\infty} - 60 \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin\omega t}{(pc+\omega t)^6}\, dt \right]$$

Если пренебречь величиной $20\omega/(pc)^2$ по сравнению с единицей, то найдем

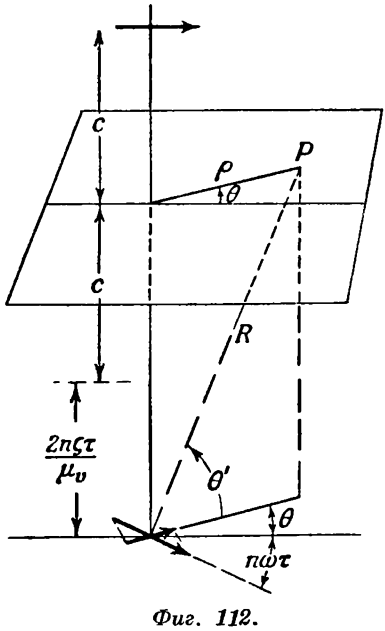
$$pc \gg 1, \quad T = \frac{3\mu_v m^2}{32\pi pc^4}. \tag{11.97}$$

Если же пренебречь величиной $\omega(pc)^2$ по сравнению с единицей, то получим

$$pc \ll 1, \quad T = \frac{\mu_v p m^2}{64\pi c^2}. \tag{11.98}$$

Для медной пластинки толщиною 0,1 *мм* $\varsigma = 0{,}00017$, так что при частотах 100, 10 000 и 10 000 000 *гц* величина p будет соответственно равна 4,67, 467 и 467 000. Таким образом, при этих частотах при $c \approx 0{,}01$ *м* нужно было бы пользоваться соответственно соотношениями (11.98), (11.95) и (11.97)

§ 13. Вихревые токи, возбуждаемые вращающимся диполем. Весьма поучительно вывести непосредственно выражение для вихревых токов, которые будут индуцироваться вращающимся диполем, описанным в предыдущем параграфе. На фиг. 112 воспроизведено одно из изображений, показанных на фиг. 111. Обозначим на фиг. 112 буквой P точку на пластинке, имеющую координаты ρ, θ, и найдем в этой точке значение функции потока Ф. Согласно выражению (11.83),



Фиг. 112.

$$\Phi = 2\mu_v^{-1} \int_\rho^\infty B_\rho \, d\rho, \tag{11.99}$$

где путь интегрирования выбран в радиальном направлении и принято во внимание, что интегралы вдоль нижнего и верхнего пути равны между собой. На фиг. 112 показано n-е положительное изображение. Очевидно, для B_ρ важна только ρ-компонента этого изображения. Используя при вычислении B_ρ соотношения (7.52) и (7.49), прибавляя затем величину, получаемую от n-го отрицательного изображения, и суммируя результат по всем изображениям, найдем

$$B_\rho = -\frac{\mu_v m}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{\cos(n\omega\tau + \theta) - \cos[(n+1)\omega\tau + \theta]\} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\theta'}{R^2}\right). \tag{11.100}$$

Подставляя теперь это выражение в (11.99), интегрируя и разлагая второй косинус (см. Двайт, 401.03), имеем

$$\Phi = \frac{m\rho}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\omega\tau+\theta) - \cos(n\omega\tau+\theta)\cos\omega\tau + \sin(n\omega\tau+\theta)\sin\omega\tau}{-\{\rho^2 + [c + (2n\varsigma/\mu_v)\tau]^2\}^{3/2}}. \tag{11.101}$$

Переходя к интегралу точно так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, получаем

$$\Phi = \frac{\omega m\rho}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-\sin(\omega t+\theta)\,dt}{\{\rho^2 + [c + (2\varsigma/\mu_v)\,t]^2\}^{3/2}} \tag{11.102}$$

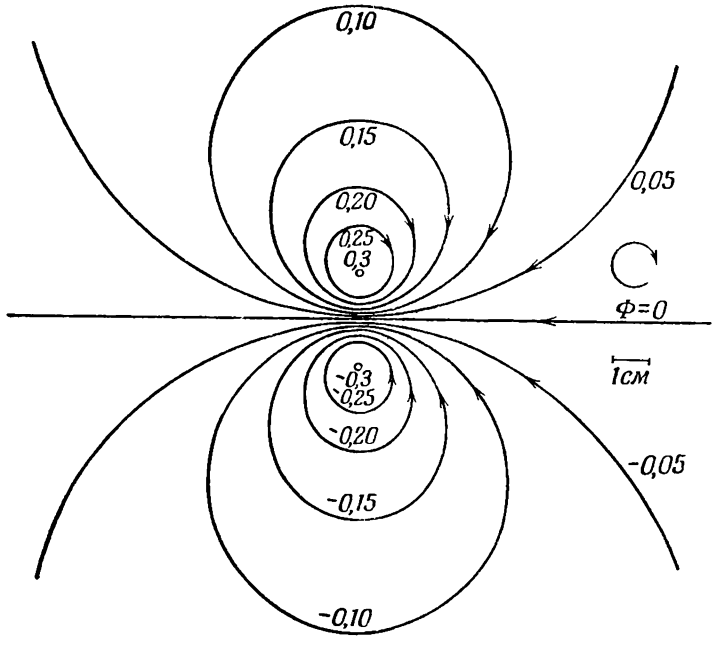
Если $\mu_v\omega \ll \varsigma$ [условие, получаемое для выражения (11.98)], то член $(2\varsigma t/\mu_v)^3$ в знаменателе оказывается уже очень большим, прежде чем величина ωt в числителе станет заметно отличной от нуля, поэтому

$$\mu_v\omega \ll \varsigma, \quad \Phi = \frac{\omega m\rho \sin\theta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-dt}{\{\rho^2 + [c + (2\varsigma/\mu_v)\, t]^2\}^{3/2}}$$

Полагая $x = c + (2\varsigma/\mu_v)\, t$ и пользуясь формулой (200.03) из справочника Двайта, имеем

$$\Phi = -\frac{\omega\mu_v m}{4\pi\varsigma\rho}\left[1 - \frac{c}{(\rho^2 + c^2)^{1/2}}\right]\sin\theta. \qquad (11.103)$$

На фиг. 113 изображена система вихревых токов, определяемых уравнением (11.103), для значений $4\pi\Phi/\mu_v$, указанных на фигуре. Эта



Фиг. 113. Линии тока вихревых токов, создаваемых в бесконечном тонком проводящем листе магнитным диполем, расположенным на расстоянии 1 *см* от него и вращающимся с угловой скоростью ω в плоскости, параллельной поверхности листа (направление вращения показано на фигуре).

Предполагается, что наблюдатель расположен в точке, где находится диполь. Линии тока соответствуют тому моменту, когда диполь ориентирован слева направо. Приведенные на фигуре значения функции потока Φ вычислены по формуле (11.103) при $\omega\mu_v m/(4\pi\varsigma) = 1$.

система линий тока вращается со скоростью вращения диполя, который расположен на единичном расстоянии (в указанном на фигуре масштабе) над плоскостью чертежа параллельно прямой $\Phi = 0$. Поле этих токов будет направлено под прямым углом к диполю. Это приводит к возникновению момента, величина которого вычислена в предыдущем параграфе.

§ 14. Экранирование круглой петли посредством тонкой проводящей пластинки. Пользуясь выражением (11.91), исследуем эффект экранирования при помещении бесконечно тонкой проводящей пластинки между двумя круглыми коаксиальными петлями радиусов a и b, находящимися

одна от другой на расстоянии c. При отсутствии пластинки вектор-потенциал первой петли в месте расположения второй петли, в соответствии с § 11 гл. VII, был бы равен

$$A'_z = \frac{\mu_v a I \cos \omega t}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(u^2 + c^2)^{1/2}}, \tag{11.104}$$

где $u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. В соответствии с выражением (11.91), в случае наличия экрана нужно взять действительную часть следующего выражения:

$$A_\varphi + A'_\varphi = -\frac{\varsigma a I}{\pi} \frac{\partial}{\partial c} \int_0^{\pi} \cos\varphi \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-\tau)} \, d\tau}{\{u^2 + [c + (2\varsigma/\mu_v)\tau]^2\}^{1/2}} \right) d\varphi. \tag{11.105}$$

С целью упрощения вычислений рассмотрим лишь случай, когда $2\varsigma/(\omega\mu_v) < 1$. Проинтегрируем по τ несколько раз по частям и после n-го интегрирования получим

$$u_n = \left(\frac{2\varsigma}{\mu_v}\right)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}} \left[u^2 + \left(c + \frac{2\varsigma}{\mu_v} \tau \right)^2 \right]^{-1/2} \qquad dv_n = \left(\frac{j}{\omega}\right)^{n-1} e^{j\omega(t-\tau)}.$$

Комплексная амплитуда вектор-потенциала в месте нахождения второй петли равна

$$\check{A}_\varphi + \check{A}'_\varphi = -\frac{\mu_v a I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2j\varsigma}{\omega\mu_v} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial c^n} \int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(u^2 + c^2)^{1/2}}. \tag{11.106}$$

В соответствии с § 7 гл. VIII, отношение нового потока сцепления к старому равно

$$R_0 = \frac{2\pi b (A_\varphi + A'_\varphi)_{\text{эфф.}}}{2\pi b (A'_\varphi)_{\text{эфф.}}}. \tag{11.107}$$

Если величина $2\varsigma/(\omega\mu_v)$ мала, то в рядах можно ограничиться одним первым членом, и тогда

$$R_0 = \frac{2\varsigma}{\omega\mu_v} \frac{1}{A'_\varphi} \frac{\partial A'_\varphi}{\partial c} = \frac{2\varsigma}{\omega\mu_v} \frac{B_\rho}{A_\varphi}, \tag{11.108}$$

где B_ρ и A_φ определяются соответственно выражениями (7.53) и (7.50) и вычисляются при $\rho = b$, $z = c$. Если, кроме того, a или b малы по сравнению с c, то из выражения (7.48) получаем

$$R_0 = \frac{6\varsigma c}{\omega\mu_v (a^2 + b^2 + c^2)}. \tag{11.109}$$

Как мы видели в § 13, для медной пластинки толщиной 0,1 *мм* при частоте 1 *мгц* отношение $\omega\mu_v/\varsigma$ равно 46 700, что вполне удовлетворяет предположению, сделанному при выводе соотношения (11.108). Отсюда при $a = 1$ *см*, $b = 10$ *см* и $c = 10$ *см*, согласно соотношению (11.109), $R_0 \approx 0{,}0006$, т. е. экранирующее действие пластинки весьма значительно.

§ 15. Зональные вихревые токи в сферической пленке. Рассмотрим вихревые токи в тонкой сферической проводящей пленке. При наличии аксиальной симметрии все вихревые токи текут по коаксиальным окружностям. Пусть полный вектор-потенциал равен $\mathbf{A}' + \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал вихревых токов. Э. д. с. $\mathscr{E}$, вызывающая появление токов в кольце шириною $a\,d\theta$, соответствующем углу θ, индуцируется, как известно, в результате изменения величины полного потока сквозь это кольцо. Пользуясь

соотношениями (8.1) и результатами § 8 гл. VII, можно выразить $\mathscr{E}$ через $\mathbf{A}'+\mathbf{A}$ и затем — при помощи закона Ома (6.6) — через ток

$$\mathscr{E}=-\frac{dN}{dt}=-\frac{d}{dt}\left[2\pi a\sin\theta\,(A'_\varphi+A_\varphi)\right]=\frac{2\pi a\varsigma\sin\theta}{a\,d\theta}\,i_\varphi a\,d\theta.$$

Откуда, если вектор-потенциалы равны нулю при $\theta=0$, имеем

$$-\frac{d}{dt}(A'_\varphi+A_\varphi)=\varsigma i_\varphi, \tag{11.110}$$

где i_φ — плотность тока, ς — удельное поверхностное сопротивление. Пусть выражение для вихревых токов в пленке представлено в виде ряда по зональным гармоникам, где i_n — n-я гармоника тока. Из выражений (7.61) и (7.64) можно найти простое соотношение между i_n и n-м членом разложения вектор-потенциала этих токов, а именно:

$$(A_{\varphi n})_{r=a}=\frac{\mu_0 a}{2n+1}\,i_n. \tag{11.111}$$

Если A'_φ также разложить в ряд по сферическим гармоникам, то, подставляя выражение (11.111) в (11.110), мы видим, что разложения A'_φ и A_φ связаны между собой на поверхности пленки ($r=a$) уравнением

$$-\sum_n\frac{d}{dt}(A'_n+A_n)=\sum_n\frac{2n+1}{\mu_0 a}\,A_n\varsigma. \tag{11.112}$$

Если при $t>0$ возбуждающее поле A'_φ постоянно, а в момент времени $t=0$ поле вихревых токов известно и равно

$$A_\varphi=\sum_n C_nA_n, \tag{11.113}$$

то, очевидно, решение уравнения (11.112), определяющее закон убывания вихревых токов, имеет вид

$$A_\varphi=\sum_n C_nA_n e^{-[(2n+1)/\mu_0 a]\varsigma t}. \tag{11.114}$$

Предположим, что значение вектор-потенциала возбуждающего поля на поверхности сферы можно записать в форме

$$A'_{\varphi s}=\sum_n C_nA_{ns}f_n(t). \tag{11.115}$$

Изменение этого поля, происшедшее за τ сек. до момента времени t за бесконечно малый интервал времени $d\tau$, равно

$$\frac{\partial A'_{\varphi s}}{\partial t}\,d\tau=\sum_n C_nA_{ns}\frac{\partial f_n(t-\tau)}{\partial t}\,d\tau.$$

Возникающие за тот же интервал времени $d\tau$ вихревые токи создают поле, полностью нейтрализующее это изменение в момент его возникновения; но с течением времени поле вихревых токов убывает по закону (11.114), и к моменту времени t мы имеем

$$dA_{\varphi s}=-\sum_n C_nA_{ns}\frac{\partial f_n(t-\tau)}{\partial t}\,e^{-[(2n+1)/\mu_0 a]\varsigma\tau}\,d\tau.$$

Полный вектор-потенциал вихревых токов на поверхности сферы в момент времени t равен

$$A_{\varphi s}=-\sum_n C_nA_{ns}\int_0^\infty\frac{\partial f_n(t-\tau)}{\partial t}\,e^{-[(2n+1)/\mu_0 a]\varsigma\tau}\,d\tau. \tag{11.116}$$

Заменим $\partial f/\partial t$ на $-\partial f/\partial\tau$ и проинтегрируем по частям; тогда, пользуясь соотношением (11.115), получим следующее выражение при $r=a$ для вектор-потенциала от всех источников:

$$A_{\varphi s}+A'_{\varphi s}=-\frac{\varsigma}{\mu_v a}\sum_n(2n+1)C_nA_{ns}\int_0^\infty f_n(t-\tau)\,e^{-[(2n+1)/\mu_v a]\varsigma\tau}\,d\tau. \quad (11.117)$$

В случае стационарного переменного поля величина A'_φ, которая может являться результирующим потенциалом поля как внешних, так и внутренних источников, определяется при $r=a$ выражением (11.115), где

$$A_{ns}=P_n^1(\cos\theta), \qquad f(t)=\cos\omega t. \quad (11.118)$$

Обозначая величину $(2n+1)\varsigma/(\mu_v a)$ через N и интегрируя выражение (11.116) (см. Двайт, 863.1 и 863.2), для вектор-потенциала поля только вихревых токов при $r=a$ получим следующее соотношение:

$$A_{\varphi s}=\sum_{n=0}^\infty C_nA_{ns}\,\omega\,(\omega^2+N^2)^{-1}(N\sin\omega t-\omega\cos\omega t)=$$

$$=-\sum_{n=0}^\infty C_nA_{ns}\cos\psi_n\cos(\omega t+\psi_n), \quad (11.119)$$

где $\operatorname{tg}\psi_n=N/\omega$. Таким образом, отставание по фазе ε_n равно $-\psi_n$. Величина A_φ, которая обращается в нуль при $r=\infty$ и определяется выражением (11.119) при $r=a$, будет являться вектор-потенциалом поля вне сферы, обусловленного только вихревыми токами. Следовательно,

$$\mathrm{A}_0=\varphi\sum_{n=0}^\infty -C_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n^1(\cos\theta)\cos\varepsilon_n\cos(\omega t-\varepsilon_n), \quad (11.120)$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_n=\frac{(2n+1)\varsigma}{\mu_v a\omega}. \quad (11.121)$$

Внутри пленки вектор-потенциал поля вихревых токов A_i должен быть всюду конечным, поэтому $(a/r)^{n+1}$ следует заменить на $(r/a)^n$. Для внешних источников r входит в выражение для A' в виде $(r/a)^n$. Согласно соотношениям (11.115), (11.118) и (11.119), результирующее внутреннее поле равно (см. Двайт, 401.03)

$$\mathrm{A}_i+\mathrm{A}'=\varphi\sum_{n=0}^\infty -C_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n^1(\cos\theta)\sin\varepsilon_n\sin(\omega t-\varepsilon_n). \quad (11.122)$$

Это выражение можно было бы получить непосредственно из соотношений (11.115), (11.117) и (11.119). Отношение n-го члена в разложении по гармоникам новой амплитуды к соответствующему члену в разложении по гармоникам старой амплитуды равно

$$R_{0n}=\frac{|A_i+A'|}{|A'|}=\sin\varepsilon_n. \quad (11.123)$$

Из выражения (11.120) следует, что если ς очень велико, то отношение (11.123) близко к единице и поле остается неизменным, но если пленка является хорошим проводником, т. е. если ς мало по сравнению с $\mu_v\omega$, то R_{0n} становится очень малым и происходит почти полное экранирование.

Плотность вихревых токов в пленке, определяемая выражениями (11.111) и (11.119), равна

$$\mathbf{i} = \varphi \sum_n -\frac{2n+1}{\mu_v a} C_n P_n^1(\cos\theta)\cos\varepsilon_n \cos(\omega t - \varepsilon_n). \qquad (11.124)$$

Согласно формуле (6.11), мгновенное значение мощности, рассеиваемой на элементарной площадке dS пленки, равно $i^2\varsigma\, dS$, а для всей пленки, учитывая, что $u = \cos\theta$, получим

$$\varsigma \int_S i^2\, dS = 2\varsigma\pi a^2 \int_0^{\pi} i^2 \sin\theta\, d\theta = -2\varsigma\pi a^2 \int_{-1}^{+1} i^2\, du.$$

Если возвести в квадрат выражение (11.123) и проинтегрировать от $u = -1$ до $u = +1$, то все члены, содержащие смешанные произведения, согласно соотношению (5.92), исчезнут и останется сумма интегралов от квадратов величин. Таким образом, каждая гармоническая составляющая $i_n \cos(\omega t - \varepsilon_n)$ тока i ведет себя как независимый ток, так что средняя мощность рассеяния в соответствии с выражением (10.18) равна

$$\frac{1}{2}\varsigma \int_S i^2\, dS = \varsigma\pi a^2 \int_{-1}^{+1} \Big[\sum i_n\Big]^2 du = \varsigma\pi a^2 \sum \int_{-1}^{+1} i_n^2\, du.$$

Интегрируя при помощи соотношения (5.194), найдем окончательно мощность, рассеиваемую в сферической пленке:

$$\overline{P} = 2\pi\varsigma\mu_v^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) C_n^2 \cos^2\varepsilon_n. \qquad (11.125)$$

§ 16. Вихревые токи в тонкой цилиндрической пленке. Когда все вихревые токи в тонкой бесконечной приводящей цилиндрической пленке радиуса a текут параллельно ее оси, вектор-потенциал поля, индуцирующего эти токи, должен также быть направлен параллельно оси, и магнитное поле в этом случае является двухмерным. При этом, как мы видели в § 26 гл. VII, вектор-потенциал обладает свойством электростатической функции потока: его значение в каждой точке представляет поток между этой точкой и некоторой другой фиксированной точкой. Пусть A_z — вектор-потенциал поля вихревых токов, а $A_z' + A_z$ — полный вектор-потенциал; тогда для э. д. с. на единицу длины, индуцируемой в полосе a, θ шириною $a\, d\theta$ при изменении полного потока N, приходящегося на единицу длины этой полосы, получим, используя закон Ома (6.6), следующее соотношение:

$$\mathscr{E} = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(A_z' + A_z) = \frac{\varsigma}{a\, d\theta} i_z a\, d\theta, \qquad (11.126)$$

где i_z — плотность тока, а ς — удельное сопротивление пленки. Если разложить ток i в ряд по круговым гармоникам, то, согласно выражениям (7.90) и (7.93), будет существовать простое соотношение между n-м членом этого разложения и n-м членом разложения в ряд вектор-потенциала A_z поля этого тока. На поверхности пленки это соотношение имеет вид

$$(A_n)_{\rho=a} = \frac{1}{2}\mu_v a n^{-1} i_n. \qquad (11.127)$$

Пусть A_z' и A_z разложены по круговым гармоникам; тогда, подставляя выражение (11.127) в (11.126), мы видим, что эти разложения удовлетворяют

следующему уравнению:

$$-\sum_n \frac{d}{dt}(A'_n + A_n) = \sum_n \frac{2n\varsigma}{\mu_v a} A_n. \qquad (11.128)$$

С точностью до постоянного множителя это уравнение совпадает с уравнением (11.112), так что, задав возбуждающее поле при $\rho = a$ в виде (11.115),

$$A'_{zs} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_{ns} f_n(t), \qquad (11.129)$$

можно определить вектор-потенциал вихревых токов [см. выражение (11.116)] следующим образом:

$$A_{zs} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n A_{ns} \int_0^{\infty} \frac{\partial f_n(t-\tau)}{\partial t} e^{-(2n\varsigma/\mu_v a)\tau}\, d\tau. \qquad (11.130)$$

Заменяя $\partial f/\partial t$ на $-(\partial f/\partial \tau)$ и интегрируя по частям, получим

$$A_{zs} + A'_{zs} = -\frac{2\varsigma}{\mu_v a} \sum_{n=1}^{\infty} nC_n A_{ns} \int_0^{\infty} f_n(t-\tau)\, e^{-(2n\varsigma/\mu_i a)\tau}\, d\tau. \qquad (11.131)$$

Для синусоидального возбуждающего поля [см. выражение (11.118)] имеем

$$A_{ns} = \cos(n\theta + \delta_n), \qquad f(t) = \cos \omega t. \qquad (11.132)$$

Аналогично выражениям (11.120) и (11.121), вектор-потенциал поля вихревых токов при $\rho > a$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}_0 = -\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n \rho^{-n} \cos(n\theta + \delta_n) \cos \varepsilon_n \cos(\omega t - \varepsilon_n), \qquad (11.133)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_n = 2n\varsigma (\omega \mu_v a)^{-1}. \qquad (11.134)$$

Для $\rho < a$ нужно заменить $(a/\rho)^n$ на $(\rho/a)^n$ и, если источники поля находятся вне цилиндра, то, так же как и в § 15, имеем

$$\mathbf{A}_i + \mathbf{A}' = -\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n a^{-n} \cos(n\theta + \delta_n) \sin \varepsilon_n \sin(\omega t - \varepsilon_n). \qquad (11.135)$$

Отношение n-х гармоник поля при наличии пленки и соответствующих гармоник поля при отсутствии пленки равно

$$R_{0n} = \frac{|A_i + A'|}{|A'|} = \sin \varepsilon_n. \qquad (11.136)$$

Те замечания, которые были сделаны относительно выражения (11.123), полностью относятся и к этому. При расположении источников внутри цилиндра отношение новой амплитуды к старой в области вне пленки определяется попрежнему соотношением (11.136). Согласно выражениям (11.127) и (11.133), плотность вихревых токов в пленке равна

$$\mathbf{i} = -\mathbf{k} 2 (\mu_v a)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \cos(n\theta + \delta_n) \cos \varepsilon_n \cos(\omega t - \varepsilon_n). \qquad (11.137)$$

Согласно соотношению (10.18), средняя рассеиваемая мощность на единицу длины цилиндра равна

$$\overline{P} = \frac{1}{2} a \int_0^{2\pi} \varsigma i^2 \, d\theta.$$

Если выражение (11.137) возвести в квадрат и проинтегрировать от 0 до 2π, то все члены, содержащие смешанные произведения, исчезнут и останется только сумма интегралов от функции $\cos^2(n\theta + \delta_n)$, каждый из которых (см. Двайт, 854.1) равен π. Таким образом, каждому члену разложения можно сопоставить независимый контур, поэтому средняя рассеиваемая энергия в единицу времени равна

$$\overline{P} = 2\pi\varsigma(\mu_v^2 a)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty}{}' n^2 C_n^2 \cos^2 \varepsilon_n. \tag{11.138}$$

§ 17. Переходные явления при экранировании с помощью толстой цилиндрической оболочки. В § 3 были рассмотрены продольные синусоидально меняющиеся вихревые токи внутри толстостенной цилиндрической оболочки, а в § 15 — произвольно изменяющиеся во времени продольные вихревые токи в тонкой оболочке. В качестве сравнительно простого примера, содержащего как продольные, так и поперечные компоненты токов, рассмотрим бесконечный цилиндр, имеющий магнитную проницаемость μ, проводимость γ, внутренний радиус a, внешний радиус b; ось цилиндра составляет угол α с однородным магнитным полем **B**. Найдем поле внутри цилиндра по прошествии времени t после исчезновения или появления внешнего поля. Из выражения (7.28) следует, что решения для статического вектор-потенциала при $\rho > b$, $b > \rho > a$ и $a > \rho$ должны соответственно иметь вид

$$(\mathrm{A}_1)_0 = B\left[\varphi \frac{1}{2} \sin\alpha\,(\rho - C_0\rho^{-1}) + \mathbf{k}\cos\alpha\,(\rho - C_0'\rho^{-1})\sin\varphi\right], \tag{11.139}$$

$$(\mathrm{A}_2)_0 = B\left[\varphi \frac{1}{2} \sin\alpha\,(D_0\rho - E_0\rho^{-1}) + \mathbf{k}\cos\alpha\,(D_0'\rho - E_0'\rho^{-1})\sin\varphi\right], \tag{11.140}$$

$$(\mathrm{A}_3)_0 = B\left[\varphi \frac{1}{2} \sin\alpha F_0\rho + \mathbf{k}\cos\alpha F_0'\rho\sin\varphi\right] \tag{11.141}$$

Эти выражения определяют заданное поле при $\rho = \infty$ и остаются конечными при $\rho = 0$. Значение постоянных определяется из условия непрерывности A_1 и $(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\rho})/\mu$ при $\rho = a$ и $\rho = b$; заменив $(\mu - \mu_v)/(\mu + \mu_v)$ на β, $b^2/(b^2 - \beta^2 a^2)$ на G, получим

$$C_0 = \mu_v^{-1}(\mu - \mu_v)(b^2 - a^2), \quad D_0 = \mu_v^{-1}\mu, \quad E_0 = \mu_v^{-1}(\mu - \mu_v)\,b^2, \quad F_0 = 1, \tag{11.142}$$

$$C_0' = \beta(a^2 - b^2)G, \quad D_0' = (1+\beta)G, \quad E_0' = \beta(1+\beta)a^2 G, \quad F_0' = (1-\beta^2)G. \tag{11.143}$$

После момента времени $t = 0$ имеют место те же решения уравнения (11.8), где $\gamma = 0$, за исключением того, что в A_1 пропадают ρ-члены, так как при $\rho = \infty$ $B = 0$. В решении для $a < \rho < b$ величина A_z должна иметь множитель $\sin\varphi$, а A_φ — не зависит от φ. Как и в § 9, попытаемся искать это решение в виде суммы экспоненциально затухающих функций, т. е.

$$\mathrm{A}_2 = B \sum_s [\varphi R(\rho)\, e^{-p_s t} + \mathbf{k} P(\rho)\sin\varphi e^{-q_s t}]. \tag{11.144}$$

Для A_z уравнение (11.8) является скалярным; из него множитель $\sin\varphi e^{-q_s t}$ выпадает и оно после подстановки $v^2 = \mu\gamma q_s\rho^2$ переходит в уравнение (5.302) с $n = 1$. Для A_φ уравнение (11.8) принимает вид (11.47).

Подставляя в последнее $-\varphi\rho^{-2}$ вместо $\nabla^2\varphi$, отбрасывая $e^{-p_s t}$ и обозначая $\mu\gamma p_s\rho^2$ через v^2, мы опять получаем уравнение типа (5.302) при $n=1$. Таким образом, для $t>0$ выражения (11.139)—(11.141) заменяются следующими:

$$\mathbf{A}_1 = B\sum_s [\varphi \sin\alpha C_s\rho^{-1}e^{-p_s t} + \mathbf{k}\cos\alpha\, C'_s\rho^{-1}\sin\varphi e^{-q_s t}], \tag{11.145}$$

$$\mathbf{A}_2 = B\sum_s \{\varphi\sin\alpha D_s R_1[(\mu\gamma p_s)^{1/2}\rho]\, e^{-p_s t} + \mathbf{k}\cos\alpha D'_s P_1[(\mu\gamma q_s)^{1/2}\rho]\sin\varphi e^{-q_s t}\}, \tag{11.146}$$

$$\mathbf{A}_3 = B\sum_s [\varphi\sin\alpha F_s\rho e^{-p_s t} + \mathbf{k}\cos\alpha F'_s\rho\sin\varphi e^{-q_s t}], \tag{11.147}$$

где R_1 и P_1 являются функциями Бесселя. Приравнивая $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ при $\rho=b$ обозначая $(\mu\gamma p_s)^{1/2}$ через k_s и $(\mu\gamma q_s)^{1/2}$ через l_s и опуская $\sin\varphi$ в A_z, будем иметь

$$\varphi C_s + \mathbf{k}C'_s = \varphi b D_s R_1(k_s b) + \mathbf{k}bD'_s P_1(l_s b). \tag{11.148}$$

Приравнивая при $\rho=b$ тангенциальные составляющие $\mu^{-1}\mathbf{B}=\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{A}$, пуская $\sin\varphi$ в φ-компоненте и умножая все на b^2, получим

$$-\varphi\mu C'_s = \mathbf{k}\mu_v b D_s[k_s b R'_1(k_s b) + R_1(k_s b)] - \varphi\mu_v l_s b^2 D'_s P'_1(l_s b). \tag{11.149}$$

Так как $\mathbf{k}$-член равен нулю, то, согласно § 30 г гл. V, $R_0(k_s b)=0$, и в соответствии с соотношением (5.320) имеем

$$R_1(k_s b) = \frac{1}{2}\pi(k_s b)^{-1}, \quad R_1(k_s\rho) = Y_0(k_s b)J_1(k_s\rho) - J_0(k_s b)Y_1(k_s\rho). \tag{11.150}$$

Аналогичным образом из граничных условий при $\rho=a$, выписывая выражение для $P_1(l_s a)$, получаем

$$\varphi F_s a + \mathbf{k}F'_s a = \varphi D_s R_1(k_s a) + \mathbf{k}D'_s[E'_s J_1(l_s a) + Y_1(l_s a)], \tag{11.151}$$

$$\mathbf{k}2\mu F_s - \varphi\mu F'_s = \mathbf{k}\mu_v k_s D_s R_0(k_s a) - \varphi\mu_v l_s D'_s P'_s(l_s a). \tag{11.152}$$

Исключение F_s, D_s, F'_s и D'_s из четырех уравнений дает

$$k_s a R_0(k_s a) - 2(\mu_v^{-1}\mu)R_1(k_s a) = k_s a R'_1(k_s a) + (1-2\mu_v^{-1}\mu)R_1(k_s a) = 0, \tag{11.153}$$

$$\mu_v l_s b P'_1(l_s b) + \mu P_1(l_s b) = 0 = \mu_v l_s a P'_1(l_s a) - \mu P_1(l_s a). \tag{11.154}$$

Можно использовать только значения $p_s = k_s^2/(\mu\gamma)$, удовлетворяющие соотношению (11.153). Подставляя $Y_0(k_s b)$ из соотношения (11.153) в $R_1(k_s a)$ и применяя соотношение (5.320), получим

$$R_1(k_s a) = 2\mu_v J_0(k_s b)\pi^{-1}[\mu_v k_s a J_0(k_s a) - 2\mu J_1(k_s a)]^{-1}. \tag{11.155}$$

Исходя из соотношений (5.323) и (5.324), выразим P'_1 и P_1 через P_0 и P_2 и обозначим $(\mu-\mu_v)/(\mu+\mu_v)$ через β; тогда выражение (11.154) можно преобразовать к следующему виду:

$$-E'_s = \frac{\beta Y_0(l_s a)+Y_2(l_s a)}{\beta J_0(l_s a)+J_2(l_s a)} = \frac{Y_0(l_s b)+\beta Y_2(l_s b)}{J_0(l_s b)+\beta J_2(l_s b)}. \tag{11.156}$$

Здесь можно использовать только значения $q_s = l_s^2/(\mu\gamma)$, удовлетворяющие второму равенству. Подставляя выражение для E'_s в $P_1(l_s a)$ и $P_1(l_s b)$ и используя рекуррентные формулы § 30 г гл. V и соотношение (5.320), получим

$$P_1(l_s a) = \frac{2(1-\beta)}{\pi l_s a[\beta J_0(l_s a)+J_2(l_s a)]}, \quad P_1(l_s b) = \frac{-2(1-\beta)}{\pi l_s b[J_0(l_s b)+\beta J_2(l_s b)]}. \tag{11.157}$$

Остается определить D_s и D'_s так, чтобы при $t=0$ выражение (11.146) совпадало с (11.140), когда $a<\rho<b$. Опуская общие для каждой компоненты множители, имеем

$$\varphi(D_0\rho - E_0\rho^{-1}) + \mathbf{k}(D'_0\rho - E'_0\rho^{-1}) = \sum_s [\varphi D_s R_1(k_s\rho) + \mathbf{k}D'_s P_1(l_s\rho)]. \quad (11.158)$$

Умножим обе части скалярно на $\rho[\varphi R_1(k_n\rho) + \mathbf{k}P_1(l_n\rho)]\,d\rho$ и проинтегрируем в пределах от a до b, представив этот интеграл в виде разности двух интегралов: от 0 до a и от 0 до b. В силу соотношений (11.146), (11.153), (11.154) и (5.342) в правой части остается только n-й член, а значение A_φ дается выражением (5.357), где $B=1-2\mu_v^{-1}\mu$. Интегрируя левую часть при помощи соотношений (5.328) и (5.329) и разрешая полученное равенство относительно D_n, для F_n из выражения (11.151) найдем

$$F_n = \frac{4\pi\mu\mu_v R_1(k_n a)}{k_n a\{4\mu_v^2 - (4\mu^2 - 4\mu\mu_v + k_n^2 a^2\mu_v^2)\pi^2[R_1(k_n a)]^2\}}. \quad (11.159)$$

Выражение (5.357) при $B=\mu_v^{-1}\mu$ определяет правую часть соответствующего выражения для A_z. Интегрируя левую часть при помощи соотношений (5.328) и (5.329) и разрешая полученное равенство относительно D'_n, для F'_n из выражения (11.143) получим

$$F'_n = \frac{4\mu\mu_v b(1-\beta)P_1(l_n b)}{(\mu_v^2 l_n^2 b^2 + \mu^2 - \mu_v^2)[P_1(l_n b)]^2 - (\mu_v^2 l_n^2 a^2 + \mu^2 - \mu_v^2)[P_1(l_n a)]^2}. \quad (11.160)$$

Полное поле внутри оболочки в любой момент времени определяется формулами (11.147), (11.159), (11.160), (11.155) и (11.157), где k_n и l_n вычисляются из соотношений (11.153) и (11.156). Если при $t<0$ поля не было, а в момент времени $t=0$ возникло поле $\mathbf{B}$, то из выражений (11.141) и (11.147) следует, что вектор-потенциал $\mathbf{A}'_3$ внутри оболочки окажется равным

$$\rho \leqslant a, \qquad \mathbf{A}'_3 = (\mathbf{A}_3)_0 - \mathbf{A}_3. \quad (11.161)$$

Эти решения были также получены другим методом [1]. При произвольном изменении $\mathbf{B}$ во времени на основании полученных результатов поле можно найти методами, аналогичными развитым в предыдущем параграфе.

ЗАДАЧИ

1. Бесконечная железная пластина ограничена параллельными плоскостями $x=h$, $x=-h$; на пластину равномерно намотан провод в направлении, параллельном оси y. При прохождении по проводу переменного тока снаружи пластины возбуждается магнитное поле $H_0\cos pt$, параллельное оси z. Доказать, что напряженность магнитного поля внутри пластины на расстоянии x от середины определяется выражениями

$$H = H_0\left(\frac{\operatorname{ch} 2mx + \cos 2mx}{\operatorname{ch} 2mh + \cos 2mh}\right)^{1/2}\cos(pt+\beta),$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\operatorname{sh} m(h+x)\sin m(h-x) - \operatorname{sh} m(h-x)\sin m(h+x)}{\operatorname{ch} m(h+x)\cos m(h-x) + \operatorname{ch} m(h-x)\cos m(h+x)},$$

где $m^2 = \frac{1}{2}\mu p/\tau$. Исследовать частные случаи, когда mh мало и когда mh велико.

2. Все точки круглой проволочной петли, несущей ток $I\cos\omega t$, находятся на расстоянии c от центра шара радиуса a, проницаемости μ и удельного сопротивления τ; радиус-вектор, проведенный из центра шара в любую точку петли, образует с прямой,

[1] См. Phil. Mag., 29, 18 (1940).

проходящей через центры шара и петли, угол α. Показать, что вектор-потенциал внутри шара равен действительной части следующего выражения:

$$\varphi \frac{\mu\mu_v a^{1/2} I \sin\alpha}{2r^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{a}{c_1}\right)^n A_n I_{n+1/2}[(jp)^{1/2} r] P_n^1(\cos\theta) e^{j\omega t},$$

где

$$A_n = \{(\mu-\mu_v) n I_{n+1/2}[(jp)^{1/2} a] + \mu_v (jp)^{1/2} a I_{n-1/2}[(jp)^{1/2} a]\}^{-1} P_n^1(\cos\alpha)$$

и $p = \mu\omega/\tau$.

3. Шар радиуса a с проницаемостью μ и удельным сопротивлением τ помещается в область, где в момент времени $t=0$ появляется поле, которое при отсутствии шара было бы однородным полем с индукцией B. Пользуясь обозначениями § 9, показать, что при $t \geqslant 0$ потенциалы определяются выражениями

$$A_0 = \varphi \left[\frac{1}{2} Br - \frac{(\mu-\mu_v) a^3}{2(\mu+2\mu_v) r^2} B - \sum_s B_s r^{-2} e^{-q_s t}\right] \sin\theta,$$

$$A_i = \varphi \left[\frac{3\mu Br}{2(\mu+2\mu_v)} - \sum_s A_s r^{-1/2} J_{3/2}(k_s r) e^{-q_s t}\right] \sin\theta.$$

4. Бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a, обладающий магнитной проницаемостью μ и удельным сопротивлением τ, обмотан проводом, по которому проходит переменный ток. Показать, что если на поверхности цилиндра поле H_z однородно и его величина равна $H_0 \cos\omega t$, то магнитное поле внутри цилиндра определится выражениями (11.37) и (11.38), где вместо i_z и i_0 нужно подставить величины B_z и B_0. Пользуясь соотношением (11.5), найти плотность и направление вихревых токов.

5. Круглая проволочная петля имеет координаты $r=a$, $\theta=\alpha$, а сферическая проводящая пленка с поверхностным удельным сопротивлением ς совпадает с поверхностью $r=b$. В петле создается ток, меняющийся по закону $i = I(1-e^{-Rt/L})$. Показать, что если за время, в течение которого вихревые токи затухают, перемещением сферы и петли можно пренебречь, то сообщаемый петле импульс определится выражением

$$\frac{\pi\mu_v^2 b I^2}{2\varsigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\alpha}{(n+1)(2n+1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} \frac{(2n+1)\varsigma L + 2\mu_v bR}{(2n+1)\varsigma L + \mu_v bR} P_n^1(\cos\alpha) P_{n+1}^1(\cos\alpha).$$

6. Над бесконечной тонкой пластиной, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς, помещается небольшая проволочная петля с магнитным моментом $M\cos\omega t$, направленным перпендикулярно к плоскости пластины. Показать, что если $1 \gg \omega\tau_0$, $\varsigma\tau_0 \gg \mu_v r$, то магнитная индукция на противоположной стороне пластины равна

$$B_r = \frac{\mu_v M}{2\pi r^3}\left[\cos\theta\cos\omega t + \frac{\mu_v \omega r}{4\varsigma}\sin\omega t\right], \qquad B_\theta = \frac{\mu_v M}{4\pi r^3}\sin\theta\cos\omega t.$$

7. Показать, что в предыдущей задаче плотность тока i_φ на расстоянии ρ от оси, а также средняя рассеиваемая энергия в единицу времени приближенно равны

$$\frac{\mu_v \omega \rho M \sin\omega t}{4\pi\varsigma(\rho^2+c^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{\mu_v^2 M^2 \omega^2}{64\pi\varsigma c^2}.$$

8. Магнитный момент небольшой петли с током уменьшается линейно от значения M при $t=0$ до нуля при $t=T$. Петля помещается на расстоянии c над бесконечной тонкой пластиной, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς. Магнитный момент петли перпендикулярен к плоскости пластины. Показать, что поле B на оси в точке, находящейся на расстоянии z от пластины, благодаря присутствию пластины возрастает на величину

$$\Delta B = \frac{\mu_v^2 M t[\mu_v(c+z)+\varsigma t]}{2\pi T(c+z)^2[\mu_v(c+z)+2\varsigma t]^2} \quad \text{при } 0 < t < T$$

и на величину

$$\Delta B = \frac{\mu_v^4 M[\mu_v(c+z)+\varsigma(2t-T)]}{2\pi[\mu_v(c+z)+2\varsigma(t-T)]^2[\mu_v(c+z)+2\varsigma t]^2} \quad \text{при } t > T.$$

9. Магнитный диполь с моментом M расположен параллельно бесконечной тонкой пластине, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς, и находится от нее на расстоянии c. Пусть диполь перемещается с постоянной скоростью v параллельно пластине в направлении, перпендикулярном оси диполя. Показать, что в стационарном режиме со стороны вихревых токов на диполь будет действовать тормозящая сила, равная

$$\frac{3}{2}\pi^{-1}\mu_v^2 M^2 v\varsigma\,(2c)^{-4}\,[(4\varsigma^2+\mu_v^2v^2)^{1/2}+2\varsigma]^{-2}.$$

10. Магнитный диполь с моментом M движется с постоянной скоростью v по прямой линии на расстоянии c от бесконечной пластины, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς. Показать, что если M и v образуют угол φ, то тормозящая сила, действующая на диполь, равна

$$F=\left\{1-\frac{6\mu_v^2v^2\cos^2\varphi}{5\,(\mu_v^2v^2+4\varsigma^2)^{1/2}\,[(\mu_v^2v^2+4\varsigma^2)^{1/2}+2\varsigma]}\right\}F_0,$$

где F_0 — значение тормозящей силы, полученное в предыдущей задаче.

11*. Через небольшую кольцевую катушку, обладающую при прохождении единичного тока магнитным моментом M, пропускают медленно изменяющийся ток $I\cos\omega t$. Катушка окружена тонкой сферической оболочкой с радиусом a и удельным сопротивлением ς; центр оболочки лежит на оси катушки, на расстоянии f от центра катушки. Показать, что индуцируемые в оболочке токи текут по окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси катушки, и что плотность тока на окружности, радиус которой виден из центра под углом α, определяется выражением

$$MI\,(4\pi f^2a)^{-1}\sum(2n+1)\,(f^{-1}a)^n\,P_n^1\,(\cos\alpha)\cos\varepsilon_n\cos\,(\omega t-\varepsilon_n),$$

где

$$\operatorname{tg}\varepsilon_n=\frac{(2n+1)\,\varsigma}{\mu_v\omega a}.$$

12. Тонкая сферическая пленка радиуса a, обладающая удельным поверхностным сопротивлением ς, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной однородному магнитному полю B. Показать, что при этом возникает тормозящий момент, равный

$$6\pi B^2\varsigma\omega a^4\,(9\varsigma^2+\mu_v^2a^2\omega^2)^{-1}.$$

13. Показать, что если в предыдущей задаче сферу поместить в поле $B\cos\omega t$, то средняя рассеиваемая мощность в ней будет равна

$$3\pi\varsigma B^2\omega^2a^4\,(9\varsigma^2+\mu_v^2a^2\omega^2)^{-1}.$$

14. Показать, что поле внутри пленки в предыдущей задаче определяется выражением

$$-3B\varsigma\,(9\varsigma^2+\mu_v^2a^2\omega^2)^{-1/2}\sin\,(\omega t-\varepsilon),$$

где $\operatorname{tg}\varepsilon=\dfrac{3\varsigma}{\mu_v\omega a}$.

15. Тонкостенный цилиндр радиуса a, обладающий удельным поверхностным сопротивлением ς, помещается в поле $B\cos\omega t$, нормальное оси цилиндра. Показать, что поле внутри цилиндра определяется выражением

$$-2\varsigma B\,(4\varsigma^2+\omega^2\mu_v^2a^2)^{-1/2}\sin\,(\omega t-\varepsilon),$$

где $\operatorname{tg}\varepsilon=2\varsigma/(\mu_v\omega a)$.

16. Показать, что если в предыдущей задаче цилиндр вращать вокруг оси с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле B, перпендикулярном к оси вращения, то при этом возникнет тормозящий момент, равный (на единицу длины)

$$4\pi\omega\varsigma a^3B^2\,(4\varsigma^2+\omega^2\mu_v^2a^2)^{-1}.$$

17. Два параллельных провода, по которым текут противоположно направленные токи, изменяющиеся по закону $I\cos\omega t$, имеют в цилиндрической системе координаты: b, 0 и b, π (ось z направлена вдоль проводов). Показать, что вектор-потенциал в точке r, θ вне тонкой трубы радиуса $\rho=a$, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς, определяется выражением

$$2\mu_v\varsigma I\pi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[4\,(2n+1)^2\varsigma^2+\mu_v^2\omega^2a^2]^{-1/2}\,(\rho^{-1}b)^{2n+1}\cos\,(2n+1)\theta\,\sin\,(\omega t-\varepsilon_n),$$

где

$$\operatorname{tg}\varepsilon_n = 2(2n+1)\,\varsigma\,(\mu_v\omega a)^{-1}, \qquad a > b.$$

18. Толщина тонкой сплюснутой сфероидальной пленки $\zeta = \zeta_0$ изменяется так, что удельное поверхностное сопротивление можно считать равным $\varsigma = h_2\varsigma_0$. В момент времени $t = 0$ мгновенно устанавливается однородное магнитное поле B, параллельное оси сфероида. Показать, что плотность возникающих при этом вихревых токов равна

$$i_\varphi = \frac{BN(1+\zeta_0^2)(1-\xi^2)^{1/2}\,e^{-N\varsigma_0 t}}{2(\xi^2+\zeta_0^2)^{1/2}},$$

где $N = 2[(1+\zeta_0^2)^{3/2} Q_1^1(j\zeta_0)]^{-1}$.

19. Длинный сплошной цилиндр радиуса $a = (x^2+y^2)^{1/2}$, обладающий магнитной проницаемостью μ и удельным сопротивлением τ, помещается в переменное магнитное поле $\operatorname{Re}\{Be^{j\omega t}\}$, направленное вдоль оси x. Показать, что вектор-потенциалы Ai и A_0, направленные вдоль оси z, внутри и снаружи цилиндра равны соответственно

$$A_i = \operatorname{Re}\{\check{C} I_1[(jp)^{1/2}\rho]\, e^{j\omega t}\sin\varphi\}, \qquad A_0 = \operatorname{Re}\{B(\rho + \check{D}\rho^{-1})\, e^{j\omega t}\sin\varphi\},$$

где $I_0[(jp)^{1/2}a]$ обозначено через I_0 и $I_2[(jp)^{1/2}a]$ — через I_2,

$$\check{C} = \frac{4\mu B}{(jp)^{1/2}[(\mu+\mu_v)I_0 - (\mu-\mu_v)I_2]} \quad \text{и} \quad D = \frac{(\mu-\mu_v)I_0 - (\mu+\mu_v)I_2}{(\mu+\mu_v)I_0 - (\mu-\mu_v)I_2}\,a^2.$$

20. Показать, что средняя рассеиваемая мощность в случае, рассмотренном в предыдущей задаче, определяется выражением

$$\bar{P} = \frac{4\pi\omega\mu a^2 B^2 [ber_0(p^{1/2}a)\,bei_2(p^{1/2}a) - bei_0(p^{1/2}a)\,ber_2(p^{1/2}a)]}{[(\mu+\mu_v)ber_0 + (\mu-\mu_v)ber_2]^2 + [(\mu+\mu_v)bei_0 + (\mu-\mu_v)bei_2]^2},$$

где $(ber_2 x + jbei_2 x)$ написаны вместо $I_2(j^{1/2}x)$, а аргументы функций в знаменателе такие же, как в числителе. Показать, что при малых p это выражение переходит в следующее:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\pi\mu^2\omega^2 a^4 B^2 \gamma(\mu+\mu_v)^{-2}.$$

21. Длинный сплошной цилиндр радиуса a, обладающий магнитной проницаемостью μ и проводимостью γ, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω в магнитном поле B, перпендикулярном к оси цилиндра. Показать, что вследствие вихревых токов появляется тормозящий момент (на единицу длины)

$$T = \frac{8\pi\mu\omega a^2 B^2 [ber_0(p^{1/2}a)\,bei_2(p^{1/2}a) - bei_0(p^{1/2}a)\,ber_2(p^{1/2}a)]}{[(\mu+\mu_v)ber_0 + (\mu-\mu_v)ber_2]^2 + [(\mu+\mu_v)bei_0 + (\mu-\mu_v)bei_2]^2},$$

где $p = \gamma\mu\omega$, а аргументы функций в знаменателе и числителе одинаковы.

22. Петля радиуса a коаксиальна с цилиндрической полостью радиуса b и высоты c и находится от ее дна на расстоянии d. Показать, что если скин-эффект настолько велик, что вектор B почти тангенциален к стенкам полости, то самоиндукция петли уменьшается на величину

$$\Delta L = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{1n} + 4\pi\mu a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[I_1\left(\frac{n\pi a}{c}\right)\right]^2 \left[cI_1\left(\frac{n\pi b}{c}\right)\right]^{-1} K_1\left(\frac{n\pi b}{c}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi d}{c}\right)\right\}$$

$$M_{1n} = 2\mu a\left\{k_1^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}k_1^2\right)K_1 - E_1\right] - (1-\delta_n^0)\,k^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)K - E\right]\right\},$$

где модуль $k_1 = a[a^2+(nc-d)^2]^{-1/2}$ и модуль $k = a(a^2+n^2c^2)^{-1/2}$.

23. Пусть глубина скин-слоя в случае, рассмотренном в задаче 21, равна δ, проводимость цилиндра γ и ток I. Пользуясь выражением (11.24), показать, что если k_m выбрано так, что $J_1(k_m b) = 0$, то рассеиваемая мощность равна

$$\bar{P} = \frac{2\pi I^2}{\gamma\delta}\left\{\frac{a^2}{bc}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{I_1(n\pi a/c)\sin(n\pi d/c)}{I_1(n\pi b/c)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[J_1(k_m a)]^2[\operatorname{sh}^2 k_m(c-d) + \operatorname{sh}^2(k_m d)]}{[J_0(k_m b)\operatorname{sh}(k_m c)]^2}\right.$$

24. Тонкий диск радиуса a, обладающий удельным поверхностным сопротивлением ς, находится в области, где до помещения диска существовало однородное поле $B_0 \cos \omega t$, перпендикулярное плоскости диска. Найти вторичные токи исходя из выражения для вектор-потенциала поля первичных вихревых токов, наведенных полем $B_0 \cos \omega t$. После этого показать, что суммарная плотность вихревых токов равна

$$\frac{\omega B_0}{2\varsigma}\left\{\rho \sin \omega t + \frac{\omega\mu}{6\pi\rho\varsigma}[(a-\rho)(2\rho^2+a^2)K+(a+\rho)(2\rho^2-a^2)E]\cos \omega t + \ldots\right\},$$

где модуль функций K и E равен $2(a\rho)^{1/2}(a+\rho)^{-1}$, а члены, содержащие $(\omega\mu a/\varsigma)^2$, отброшены. Показать, что на частоте 60 *гц* это выражение применимо для пластинки толщиною 0,1 *мм*.

25. Пусть в предыдущей задаче частота колебаний настолько велика, что толщина скин-слоя δ много меньше толщины диска и вектор B можно считать тангенциальным к поверхности диска. Показать, что плотность вихревых токов, включая обе поверхности, на расстоянии ρ от центра диска равна

$$i_\varphi = \frac{\pi B \rho^2}{\mu a (a^2-\rho^2)^{1/2}};$$

Это выражение для i_φ является совершенно строгим при идеальной проводимости диска.

26. Плотность вихревых токов в бесконечно длинной цилиндрической пленке радиуса a, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς и толщиной, много меньшей, чем толщина скин-слоя, равна $(i_\varphi)_0$ при $t=0$ и i_φ при $t=\tau$. Показать, что если ток $(i_\varphi)_0$ можно записать в виде интеграла Фурье, то

$$(i_\varphi)_0 = \int_0^\infty \Psi(k)\cos kz\,dk, \quad i_\varphi = \int_0^\infty \Psi(k)\cos kz e^{-[\mu a I_1(ka)K_1(ka)]^{-1}\varsigma\tau}\,dk.$$

27. Пусть в предыдущей задаче вектор-потенциал возбуждающего поля на поверхности пленки равен

$$(A'_\varphi)_{\rho=a} = -\int_0^\infty \Phi(k, a, t)\cos kz\,dk.$$

Пользуясь решением задачи 26 и результатами § 15, показать, что вектор-потенциал поля вихревых токов равен

$$(A_\varphi)_{\rho=a} = -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Phi(k, a, t-\tau)\, e^{-[\mu a I_1(ka)K_1(ka)]^{-1}\varsigma\tau}\cos kz\,dk\,d\tau.$$

28. Петля радиуса b, по которой циркулирует ток $I\cos \omega t$, коаксиальна с очень длинной цилиндрической пленкой $\rho=a$, обладающей удельным поверхностным сопротивлением ς и толщиной, много меньшей толщины скин-слоя. Показать, что наличие пленки приводит к возрастанию сопротивления и индуктивности петли на величину

$$\Delta R = 2\mu b^2\omega\int_0^\infty \sin^2\theta\,[R_1(kb)]^2 K_1(ka)\,[I_1(ka)]^{-1}\,dk,$$

$$\Delta L = -2\mu b^2\int_0^\infty \sin\theta\cos\theta\,[R_1(kb)]^2 K_1(ka)\,[I_1(ka)]^{-1}\,dk,$$

где $R_1(kb)=I_1(kb)$, если $b<a$, $R_1(kb)=K_1(kb)$, если $b>a$, и

$$\operatorname{tg}\theta = \varsigma^{-1}\omega\mu a I_1(ka)K_1(ka).$$

29. Исходя из задачи 40 гл. VII и используя результаты § 5 гл. VII, показать, что внешняя самоиндукция тора, образованного вращением окружности радиуса b вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с окружностью на расстоянии c метров от

ее центра, при высоких частотах, когда проявляется сильный скин-эффект, равна

$$L = 2\mu c \cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)K - E\right]\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Q^1_{2n-1/2}(\operatorname{ctg}\alpha)}{(16n^2-1)\,Q^1_{-1/2}(\operatorname{ctg}\alpha)}\right],$$

где $\operatorname{tg}\alpha = b/c$, а модуль k функций K и E определяется выражением

$$k^2 = \cos\alpha \sec^2\frac{\alpha}{2}.$$

30. Проволочная петля радиуса a коаксиальна с бесконечно длинным проводящим цилиндром радиуса b и находится вне этого цилиндра. По петле циркулирует переменный ток I такой высокой частоты, что возникающие в цилиндре вихревые токи можно считать поверхностными. Пользуясь результатом задач 26 и 28 гл. VII, показать, что плотность вихревых токов определяется выражением

$$i_\varphi = \frac{aI}{b\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(ka)}{K_1(kb)}\cos kz\, dk.$$

31. Пользуясь выражением (8.25), показать, что наличие цилиндра в предыдущей задаче уменьшает самоиндукцию петли на величину

$$|\Delta L| = 2\mu a^2\int_0^\infty I_1(kb)\,K_1(ka)\,dk = \mu(a+b)\left[\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)K - E\right]$$

где K и E являются полными эллиптическими интегралами модуля $k = 2(ab)^{1/2}(a+b)^{-1}$. Показать, что потери на вихревые токи приводят к возрастанию сопротивления петли на величину

$$R = \frac{4a^2}{\gamma\delta b}\int_0^\infty\left[\frac{K_1(ka)}{K_1(kb)}\right]^2 dk,$$

где γ — проводимость, а δ — толщина скин-слоя для цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

Bateman H., Electrical and Optical Wave Motion, Cambridge, 1905.
Frenkel J., Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. II, Berlin, 1928. (Френкель Я. И., Электродинамика, т. II, М.—Л., 1935.)
Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XV, Berlin, 1927.
Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.
MacDonald H. M., Electromagnetism, Bell, 1934.
Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, Oxford, 1881.
Moullin E. B., Principles of Electromagnetism, Oxford, 1932.
Ollendorf F., Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Berlin, 1926.
Russell A., Alternating Currents, Cambridge, 1914.
Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.
Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1947.)

Глава XII

МАГНЕТИЗМ

§ 1. Парамагнетизм и диамагнетизм. Для большинства веществ, не считая некоторых особых исключений, рассмотренных в § 5, магнитная проницаемость очень незначительно зависит от напряженности поля, и ее с достаточной степенью точности можно считать постоянной, как это и принималось до сих пор. В отличие от диэлектрической проницаемости относительная магнитная проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы.

Вещества с магнитной проницаемостью больше единицы называются парамагнитными, а с магнитной проницаемостью меньше единицы — диамагнитными. Рассмотрим силы, действующие на такие тела при помещении их в поле, создаваемое некоторым неподвижным контуром, по которому течет постоянный ток. Из соотношений (8.9) и (8.16) или (8.38) ясно, что если при бесконечно малом смещении или вращении контура происходит возрастание потока индукции через него, то, следовательно, существует сила или момент, стремящиеся вызвать это движение. Пусть в поле этого контура находятся какие-нибудь тела, смещение или вращение которых увеличивает поток индукции сквозь контур. Тогда, по третьему закону Ньютона, должны существовать соответствующие силы или моменты, действующие на эти тела.

Из § 30 гл. VII следует, что магнитная индукция (или плотность потока индукции) и проницаемость в магнитных цепях находятся между собой точно в такой же зависимости, как плотность тока и проводимость в электрических цепях. Поэтому теоремы 3 и 4 § 12 гл. VI можно сформулировать применительно и к магнитным цепям. Если проницаемость какого-нибудь элемента в магнитном поле тока возрастает (или уменьшается), то магнитное сопротивление цепи тоже возрастает (или уменьшается). Но, как мы видели, существуют силы, способствующие возрастанию потока и, следовательно, уменьшению магнитного сопротивления. Так, в неоднородном поле тела, более парамагнитные или менее диамагнитные, чем окружающая их среда, имеют тенденцию перемещаться в направлении к участкам с большей напряженностью поля. При помещении пара- или диамагнитного тела удлиненной формы в однородное поле возникает момент, стремящийся повернуть ось тела по полю. Это можно видеть в случае сфероида, рассмотренного в задаче 84 к гл. V, заменив там ε на μ, ε_0 на μ_0 и E на H или на B/μ. Формула для вращающего момента содержит разность $H_1 - H_2$, куда входит множитель $(\mu - \mu_0)^2$, и знак его оказывается одним и тем же как при $\mu > \mu_0$, так и при $\mu < \mu_0$.

В квантовой механике дается теоретическое обоснование установленного на опыте факта независимости магнитной проницаемости диамагнитных веществ от температуры. Для слабо парамагнитных веществ проницаемость в большинстве случаев также не зависит от температуры. У сильных парамагнетиков, но не ферромагнетиков, изменение проницаемости с темпера-

турой обычно происходит по закону

$$\mu = \mu_v + \frac{\mu_v C}{T+\theta}, \tag{12.1}$$

где C и θ — постоянные, а T — абсолютная температура. Это эмпирическое соотношение носит название закона Кюри. Его обоснование приводится в квантовой механике. Для газов величина θ обычно равна нулю.

§ 2. Магнитная восприимчивость. Часто бывает удобно пользоваться еще одной величиной, а именно магнитной восприимчивостью, определяемой для изотропной среды (через уже рассмотренные в § 21 и 29 гл. VII величины) по формуле

$$\varkappa \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{B}\left(\frac{1}{\mu_v} - \frac{1}{\mu}\right) \tag{12.2}$$

Восприимчивость и проницаемость связаны между собой соотношением

$$\varkappa = \mu_v^{-1}(\mu - \mu_v) = K_m - 1. \tag{12.3}$$

Парамагнитное тело при помещении в магнитное поле уменьшает энергию последнего, а диамагнитное — увеличивает. Согласно соотношениям (8.12) и (8.11), это изменение энергии определяется в виде

$$\Delta W = \frac{\mu_v H^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu} = \frac{(\mu_v - \mu) H^2}{2} = -\frac{\mu_v}{2} \varkappa H^2. \tag{12.4}$$

Заметим, что для парамагнитных тел величина $\varkappa$ положительна, а для диамагнитных — отрицательна. Для магнитной восприимчивости закон Кюри можно записать в более простой форме:

$$\varkappa = \frac{C}{T+\theta}. \tag{12.5}$$

§ 3. Магнитные свойства кристаллов. Многие вещества, особенно кристаллы, обладают неодинаковыми магнитными свойствами в различных направлениях. Используя некоторые материалы, такие, например, как графит, можно даже изготовить вещество, являющееся в одном направлении диамагнетиком, а в другом — парамагнетиком. Обнаружено, однако, что в таких случаях для любой заданной ориентации магнитная индукция $\mathbf{B}$ пропорциональна напряженности поля $\mathbf{H}$ и составляет с ней постоянный угол α. Подобное же соотношение существует в кристалле и между векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Поэтому для векторов магнитного поля, как и в § 20 гл. I, можно написать систему уравнений вида (1.52) и (1.53), а именно считать, что компоненты $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{11} H_x + \mu_{21} H_y + \mu_{31} H_z, \\ B_y &= \mu_{12} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{32} H_z, \\ B_z &= \mu_{13} H_x + \mu_{23} H_y + \mu_{33} H_z, \end{aligned} \tag{12.6}$$

где

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{13} = \mu_{31}, \quad \mu_{23} = \mu_{32}. \tag{12.7}$$

Итак, компоненты $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой тремя уравнениями, содержащими девять коэффициентов, шесть из которых различны. Проницаемость теперь является уже не числом, а симметричным тензором. При соответствующей ориентации осей уравнения (12.6) можно записать в форме, аналогичной (1.58),

$$B_x = \mu_1 H_x, \quad B_y = \mu_2 H_y, \quad B_z = \mu_3 H_z. \tag{12.8}$$

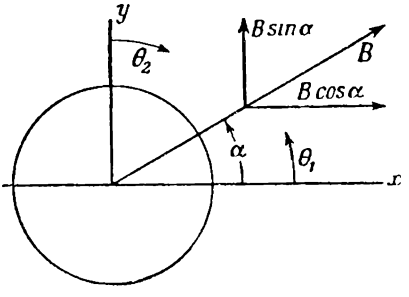
Если имеют место соотношения (12.8), то считают, что координатные оси направлены вдоль магнитных осей кристалла.

Используя формулу (12.2), можно написать соответствующие уравнения, связывающие **M** и **H**,

$$M_x = \varkappa_1 H_x, \quad M_y = \varkappa_2 H_y, \quad M_z = \varkappa_3 H_z, \tag{12.9}$$

где $\mu_0 \varkappa_1 = \mu_1 - \mu_0$ и т. д. При вращении координатных осей получается аналогичная (12.6) система уравнений для **M** и **H**, содержащая тензор магнитной восприимчивости.

§ 4. Кристаллический шар в однородном магнитном поле. В качестве примера использования формул последнего параграфа найдем момент, действующий на кристаллический шар, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией **B**. Пусть угол между **B** и осью x равен α и $\mu_2 = \mu_3$. Граничные условия, очевидно, будут удовлетворены суперпозицией двух полей: поля с индукцией $B\cos\alpha$, направленного по оси x и действующего на изотропный шар с проницаемостью μ_1, и поля с индукцией $B\sin\alpha$, направленного по оси y и действующего на изотропный шар с проницаемостью μ_2.



Фиг. 114.

Если взять поле **B** в сечении xy (см. фиг. 114), то из § 7 гл. XI и из соотношения (7.49) видно, что вне шара поле в точности равно суперпозиции первоначального поля, поля магнитного диполя с моментом m_x, направленным по оси x, и поля диполя с моментом m_y, направленным по оси y, где

$$\mathrm{m}_x = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \frac{4\pi a^3 B \cos\alpha}{\mu_0} \quad \text{и} \quad \mathrm{m}_y = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + 2\mu_0} \frac{4\pi a^3 B \sin\alpha}{\mu_0}$$

Суммарное поле этих диполей эквивалентно полю одного диполя, момент которого **m** образует угол β с осью x, т. е.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\mathrm{m}_y}{\mathrm{m}_x} = \frac{(\mu_2 - \mu_0)(\mu_1 + 2\mu_0)}{(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 + 2\mu_0)} \operatorname{tg}\alpha, \tag{12.10}$$

$$\mathrm{m} = (\mathrm{m}_x^2 + \mathrm{m}_y^2)^{1/2} = \frac{4\pi B a^3 [(\mu_1 - \mu_0)^2 (\mu_2 + 2\mu_0)^2 (1 - \sin\alpha) + (\mu_2 - \mu_0)^2 (\mu_1 + 2\mu_0)^2 \sin\alpha]^{1/2}}{\mu_0 (\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 + 2\mu_0)} \tag{12.11}$$

Угол между моментом **m** и полем можно найти из выражения (см. Двайт, 405.02)

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{3(\mu_2 - \mu_1)\operatorname{tg}\alpha}{(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 + 2\mu_0) + (\mu_2 - \mu_0)(\mu_1 + 2\mu_0)\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{12.12}$$

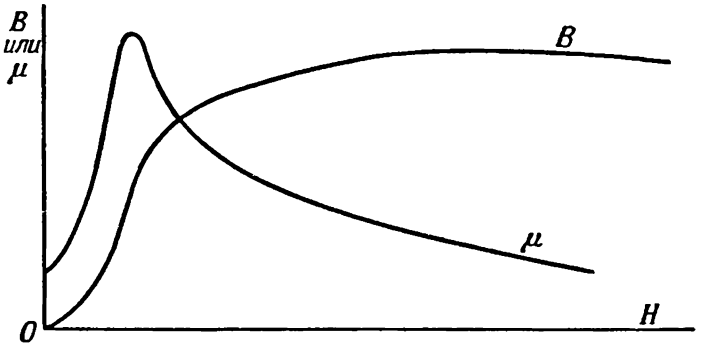
Тогда из § 19 гл. VII для момента имеем

$$T = \mathrm{m} B \sin(\beta - \alpha). \tag{12.13}$$

Этот момент стремится повернуть сферу так, чтобы ось μ_1 при $\mu_1 > \mu_2$ была направлена по полю, а при $\mu_1 < \mu_2$—перпендикулярно к нему.

§ 5. Ферромагнетизм. Существует очень важная группа материалов, у которых магнитная проницаемость изменяется при изменении намагничивающего поля, зависит от предыдущих состояний образца и намного

превышает проницаемость обычных веществ. Такие материалы называются ферромагнетиками. К ним относятся железо, кобальт, никель, сплав Гейслера и, при низких температурах, некоторые металлы редких земель. Построим из ферромагнетика простую магнитную цепь, подобную тору, рассмотренному в § 30 гл. VII, для которого намагничивающая сила (или магнитодвижущая сила на 1 *м*) легко вычисляется. Если исходить из нулевых значений **B** и **H**, то **B** при возрастании **H** также растет, но коэффициент пропорциональности между ними, являющийся магнитной проницаемостью, сначала растет, а потом уменьшается. На фиг. 115 приведены типичные для ферромагнитного материала кривые зависимости **B** и μ от **H**.



Фиг. 115.

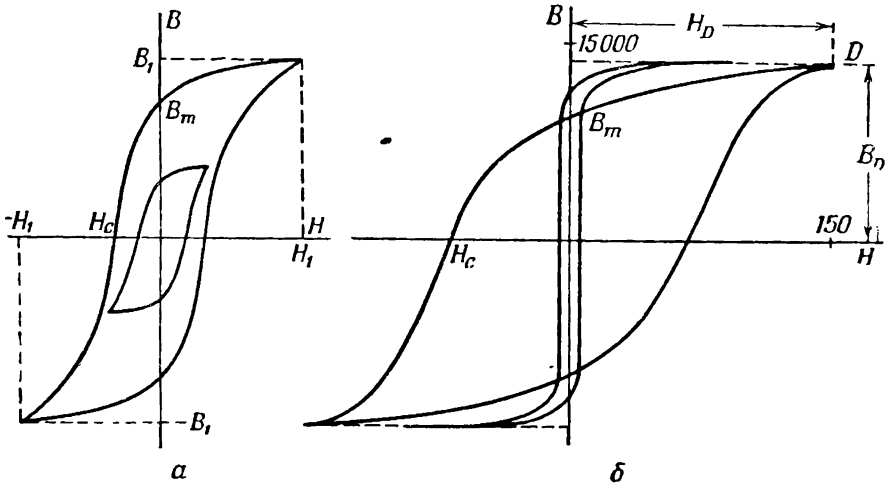
При измерении намагниченности достаточно чувствительным прибором можно обнаружить, что крутой участок кривой намагничивания для большинства ферромагнетиков имеет ступенчатую структуру. Это явление называется эффектом Баркгаузена. Оно свидетельствует о том, что большая область, включающая в себя множество одинаково ориентированных атомарных магнитов, изменяет свое направление как нечто целое. Опыты с ферромагнитными монокристаллами показали, что наиболее легко намагничивание происходит в некоторых определенных направлениях.

Поскольку большинство ферромагнетиков, с которыми приходится иметь дело, являются поликристаллами, то можно считать, что основная часть намагниченности обусловлена ориентацией магнитных областей в направлении, близко совпадающем с направлением намагничивающего поля. Когда все области окажутся ориентированными таким образом, эффект Баркгаузена прекращается и дальнейшее увеличение намагничивающего поля приводит лишь к постепенному повороту вектора намагниченности каждой из областей вплоть до полного совпадения с направлением поля. Об этом свидетельствует отсутствие скачков на пологой части кривой, где намагниченность близка к насыщению. Теоретическое объяснение этого процесса основано на свойствах электронной оболочки атома железа.

При расчетах магнитных полей, индуктивностей, магнитодвижущих сил, вихревых токов и тому подобных величин до сих пор предполагалось, что магнитная проницаемость вещества не зависит от напряженности поля. Из приводимых здесь кривых видно, что для ферромагнитных материалов при больших изменениях намагничивающего поля это предположение становится несправедливым. В таких случаях можно взять среднее значение μ в рассматриваемой области изменения **H**. Как правило, точность, с которой определены кривые намагничивания отдельных образцов, невелика. Однако если мы имеем дело с очень однородным и тщательно отожженным ферромагнитным материалом, то можно определить из его кривой намагничивания величину μ, годную для различных областей. Эти сведения

можно использовать для более строгого аналитического решения различных задач только в случае простой геометрии системы.

§ 6. Гистерезис. Постоянный магнетизм. Предположим, что после того, как поле **H** достигло значения $\mathbf{H}_1$, а индукция **B** при этом, как это описано в § 5, возросла до значения $\mathbf{B}_1$, мы уменьшим величину **H** до $-\mathbf{H}_1$. Тогда окажется, что индукция **B** не будет следовать по прежней кривой, показанной на фиг. 115, а будет изменяться менее быстро, вдоль верхней



Фиг. 116.

кривой фиг. 116, *а*, и достигнет, для нормального образца, при $\mathbf{H}=-\mathbf{H}_1$ значения $-\mathbf{B}_1$. Если снова увеличивать поле **H** до $+\mathbf{H}_1$, то индукция **B** начнет следовать по нижней ветви кривой фиг. 116, *а*, пока не пересечется с первоначальной кривой в исходной точке $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{H}_1$. Это отставание индукции называется гистерезисом, а замкнутая кривая на фиг. 116, *а*—петлей гистерезиса.

Ясно, что, исходя из различных точек кривой намагничивания, путем постепенного изменения **H** от $+\mathbf{H}_1$ до $-\mathbf{H}_1$ и обратно, для данного образца можно получить различные петли гистерезиса, но при многократном повторении одной и той же операции будет получаться одна и та же петля гистерезиса.

Кривые гистерезиса различных ферромагнитных материалов могут различаться очень сильно. Для «мягких» магнитных образцов площадь, охватываемая петлей, очень мала (внутренняя кривая на фиг. 116, *б*), в то время как для «твердых» магнитных материалов она очень велика (см. кривую *D*). В последнем случае при $\mathbf{H}=0$ имеется большая остаточная индукция $\mathbf{B}_m$, для уничтожения которой требуется приложить к образцу обратное поле $\mathbf{H}_c$, называемое коэрцитивной силой. Здесь мы в первый раз встречаемся с наличием магнитных полей при кажущемся отсутствии электрических токов. Магнитные явления были первоначально открыты на таких «постоянных» магнитах, и на основе опытов с ними развилась вся теория магнетизма.

§ 7. Природа постоянного магнетизма. До сих пор мы рассматривали энергию магнитного поля как чисто кинетическую, связывая ее с движением электрических зарядов. Поскольку магнитные поля, создаваемые постоянными магнитами, во всех отношениях сходны с полями, создаваемыми

токами, естественно предположить, что они имеют то же происхождение. Природу постоянного магнетизма можно раскрыть из анализа ряда явлений, известных под названием гиромагнитных эффектов. Поскольку электрические заряды не поступают извне внутрь постоянного магнита и не выходят из него наружу, движение электричества внутри магнита должно быть циркулярным, и это вращение должно происходить около осей, ориентированных в среднем около одного определенного направления, создавая определенное внешнее поле. Если, как это упоминалось в § 5 гл. I, носители электричества обладают механической инерцией, то при вращении по замкнутым траекториям они обладают вращательным моментом и, следовательно, подвержены действию гироскопических сил. Эти силы были предсказаны еще Максвеллом, но техника того времени была слишком несовершенна для их обнаружения. В связи с этим можно ожидать двух эффектов. Первый—намагничивание при вращении. В механике хорошо известен факт, что если подвес гироскопа вращать таким образом, что его ось a может поворачиваться только в плоскости, проходящей через эту ось и ось вращения системы b, то a стремится расположиться параллельно b.

Таким образом, если ненамагниченное тело обладает вращающимися электрическими зарядами с произвольно ориентированными осями, то вращение этого тела вызовет ориентировку этих осей по оси вращения и тело намагнитится. Эти явления в ферромагнитных материалах были обнаружены и измерены Барнетом. Второй эффект заключается в появлении вращения при намагничивании. Из закона сохранения момента вращения следует, что если первоначально произвольно ориентированные оси располагаются затем вдоль магнитного поля, то, чтобы результирующий момент был равен нулю, тело в целом должно повернуться в противоположном направлении. Этот эффект был впервые измерен Эйнштейном и Де-Гаазом, а потом уже, с большей точностью, другими экспериментаторами. Оба эффекта показывают, что в ферромагнитных телах происходит вращение отрицательных электрических зарядов, причем средний магнитный момент оказывается несколько большим по величине, чем чисто спиновой магнитный момент. Считают, что этот избыток обязан «орбитальному» вращению электрона. Таким образом, магнитные поля постоянных магнитов не отличаются от уже изученных нами полей.

§ 8. Равномерное намагничивание. Эквивалентный поверхностный ток. В постоянных магнитах намагниченность $\mathbf{M}$, по определению, не зависит от приложенного поля. Ее можно определить (см. § 21 гл. VII) как магнитный момент круговых постоянных токов (или спинов), отнесенный к единице объема. Согласно соотношениям (7.104) и (7.107), вектор-потенциал поля, создаваемого заданной намагниченностью $\mathbf{M}$, выражается в виде

$$\mathbf{A}_M = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dv = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\times\mathbf{M}}{r}\,dv + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{n}}{r}\,dS, \qquad (12.14)$$

где объемные интегралы берутся по всему объему магнита, а поверхностные—по его поверхности.

Мы будем называть область равномерно намагниченной, если всюду внутри нее намагниченность $\mathbf{M}$ постоянна по величине и направлению. Для такой области второй объемный интеграл в выражении (12.4) равен нулю. Рассмотрим остающийся интеграл по поверхности. Предположим, что $\mathbf{M}$ направлено по оси x, т. е. $\mathbf{M}=\mathbf{i}M$. Пусть θ—угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{n}$, а $\mathbf{ds}$ и $\mathbf{ds}_1$—ортогональные векторы, лежащие на поверхности магнита ($\mathbf{ds}$ нормально к $\mathbf{i}$ и $\mathbf{n}$). Тогда

$$\mathbf{M}\times\mathbf{n}\,dS = M\sin\theta\,ds_1\,\mathbf{ds} = M\,dx\,\mathbf{ds},$$

так что

$$A = \frac{\mu_v}{4\pi} \int\int \frac{M\,dx}{r}\,ds. \qquad (12.15)$$

По форме это выражение совпадает с выражением (7.10), поэтому магнит в целом можно заменить пленкой, которая совпадает с поверхностью магнита и токи по которой текут в плоскостях, нормальных направлению намагничивания x. Плотность тока не зависит от x и равна интенсивности намагниченности M. При рассмотрении систем, содержащих постоянные магниты, очень удобно вводить такую пленку, называемую эквивалентной пленкой тока.

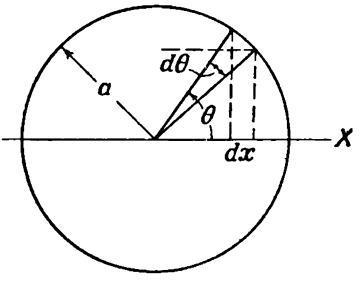
§ 9. Намагниченный шар и цилиндр. Магнитные полюсы. Для однородно намагниченного шара ток, текущий по эквивалентной пленке между θ и $\theta - d\theta$ (см. фиг. 117), равен

$$i\,d\theta = M\,dx = Ma\sin\theta\,d\theta,$$

где i — угловая плотность тока. Тогда функция потока выражается в виде

$$\Psi = \int_0^\theta i\,d\theta = Ma\,(\cos\theta - 1) =$$

$$= Ma\,[P_1(u) - P_0(u)], \qquad (12.16)$$



Фиг. 117.

где $u = \cos\theta$. По форме это выражение совпадает с выражением (7.60). Поэтому, полагая в соотношениях (7.64) и (7.62) $n = 0$ и $n = 1$, мы найдем вектор-потенциал во внешнем пространстве:

$$A_{0\varphi} = \frac{\mu_v M a^3}{3r^2}\sin\theta. \qquad (12.17)$$

Из сравнения с выражением (7.48) видно, что это поле совпадает с полем маленькой петли с током, магнитный момент которой равен

$$m = \frac{4\pi M a^3}{3}. \qquad (12.18)$$

В § 1 гл. VII было показано, что магнитное поле на некотором расстоянии от такой петли совпадает с электрическим полем электрического диполя, имеющего тот же самый момент.

Для правильного круглого цилиндра, намагниченного вдоль оси, эквивалентная пленка тока представляет собой соленоид с нулевым шагом намотки, у которого ток на единицу длины равен M. Магнитная индукция в любой точке P на оси такого соленоида, согласно § 16 гл. VII, выражается формулой

$$B_x = \frac{1}{2}\mu_v M_x\,(\cos\beta_2 - \cos\beta_1), \qquad (12.19)$$

где β_1 и β_2 — углы, образованные с осью линиями, соединяющими P с концами цилиндра. Если радиус цилиндра a мал по сравнению с его длиной l, то в точках, удаленных от концов,

$$\cos\beta_{1,2} = \left(x \pm \frac{1}{2}l\right)\left[\left(x \pm \frac{1}{2}l\right)^2 + a^2\right]^{-1/2}$$

Разделив числитель и знаменатель на $x \pm \frac{1}{2}l$ и разложив в ряд (Двайт, 9.03), пренебрежем членами a^4, a^6 и более высоких порядков. Тогда

после подстановки в формулу (12.19) получим выражение

$$B_x = \frac{\mu_v a^2 M}{4\left(x+\frac{1}{2}l\right)^2} - \frac{\mu_v a^2 M}{4\left(x-\frac{1}{2}l\right)^2}, \tag{12.20}$$

аналогичное выражению для вектора электрической индукции на оси x, если в точке $x=\frac{1}{2}l$ имеется заряд $q_1=\mu_v\pi a^2 M$ и в точке $x=-\frac{1}{2}l$ — заряд $q_2=-\mu_v\pi a^2 M$. Так, естественно, в опытах с магнитной иглой возникла гипотеза о магнитных зарядах или полюсах. Область, из которой выходят магнитные силовые линии, называется северным полюсом, а область, в которую они входят, — южным полюсом. Как мы уже видели, в действительности магнитные заряды существовать не могут, так как дивергенция магнитной индукции всюду равна нулю.

§ 10. Условия на границе с постоянным магнитом. Как видно из названия, предполагается, что поля, в которые помещается «постоянный» магнит, не влияют на интенсивность его намагничивания[1]. Это означает, что если заменить магнит эквивалентной ему пленкой тока, то область внутри нее будет иметь магнитную проницаемость μ_v. При помещении магнита в область с магнитной проницаемостью μ, где существует внешнее магнитное поле, последнее искажается на поверхности магнита так, чтобы удовлетворить граничным условиям на границе двух сред с различными магнитными проницаемостями μ_v и μ. Эти граничные условия были получены в § 22, 23, 29 гл. VII.

§ 11. Сферический постоянный магнит в однородном поле. Вычислим, для примера, вращающий момент, действующий на равномерно намагниченный шар, помещенный в среду с магнитной проницаемостью μ, магнитная индукция в которой до внесения шара была всюду однородна. Пусть α — угол между **M** и **B**. Очевидно, что момент, действующий на пленку тока в поле, создаваемом этим током, равен нулю, и поэтому достаточно вычислить индукцию, обусловленную наличием внешнего поля. Вектор-потенциал, описывающий поле **B**, в сферических координатах равен

$$A_\varphi = \frac{1}{2}Br\sin\theta. \tag{12.21}$$

Выражение (7.48) для вектор-потенциала содержит подобную зависимость от θ, но стремится к нулю на бесконечности. Поэтому логично выбрать добавочный член, обязанный присутствию шара с проницаемостью μ_v именно в такой форме. Итак, вне шара имеем

$$A_{0\varphi} = \frac{B}{2}\left(r+\frac{C}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{12.22}$$

---

[1]) Определение постоянного магнита, данное автором, не совпадает с общепринятым. Обычно (см., например, книгу И. Е. Тамма «Основы теории электричества») к постоянным магнитам относят более широкий класс сред, намагниченность которых складывается из постоянной, сторонней (не зависящей от внешнего поля) намагниченности M_0 и индуцированной намагниченности, линейно зависящей от напряженности внешнего поля $M_n=\frac{\mu-\mu_v}{\mu_v}H$. При замене постоянной намагниченности M_0 эквивалентной пленкой тока среду внутри нее следует считать отличной от вакуума. Если же ввести пленку тока, эквивалентную суммарной намагниченности, то сила и распределение тока в пленке окажутся зависящими от внешнего поля. Предлагаемый автором метод соответствует, следовательно, случаю, когда индуцированной намагниченностью можно пренебречь по сравнению с постоянной. — *Прим. перев.*

Поскольку A_i должно быть конечным в начале координат и иметь ту же самую зависимость от θ, то

$$A_{i\varphi} = Dr\sin\theta. \tag{12.23}$$

Чтобы определить C и D, используем граничные условия (7.118) и (7.119) при $r=a$. Это дает уравнения

$$\frac{B}{2}\left(1-\frac{C}{2a^3}\right)=\frac{\mu D}{\mu_v} \quad \text{и} \quad \frac{B}{2}\left(a+\frac{C}{a^2}\right)=Da. \tag{12.24}$$

Решая относительно C и подставляя в выражение (12.22), получим

$$A_{0\varphi}=\frac{1}{2}B\left(r-2\,\frac{\mu-\mu_v}{2\mu+\mu_v}\,\frac{a^3}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{12.25}$$

При $r=a$ это выражение по форме совпадает с выражением (12.21), и, согласно (12.23), оно представляет однородное поле в направлении **B**. Момент, действующий на кольцевой элемент тока, лежащий между θ_1 и $\theta_1+d\theta_1$ (где θ_1 — полярный угол, отсчитываемый от оси намагничивания), равен произведению силы тока в кольце, площади кольца, магнитной индукции и $\sin\alpha$:

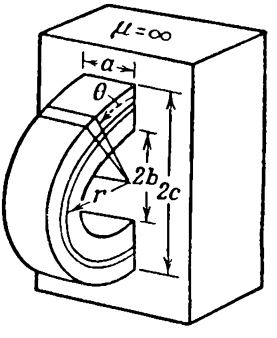
$$dT = \pi a^2\sin^2\theta_1 B\left[1-2\,\frac{\mu-\mu_v}{2\mu+\mu_v}\right] i\,d\theta_1\sin\alpha.$$

Подставляя из § 9 выражение для $i\,d\theta_1$ и интегрируя (Двайт, 854), найдем

$$T=\frac{3\pi\mu_v a^3 MB\sin\alpha}{2\mu+\mu_v}\int_0^{\pi}\sin^3\theta_1\,d\theta_1=\frac{4\pi\mu_v a^3 MB\sin\alpha}{2\mu+\mu_v}. \tag{12.26}$$

Можно было бы вычислить силу и момент, действующие на шар при помещении его в неоднородное поле. В этом случае выражение для силы состояло бы из двух членов: один относился бы к силе, действующей на шар с проницаемостью μ_v, а другой — к силе, действующей на поверхностный ток, проходящий по сфере. Эти силы можно вычислить, используя результаты § 19 гл. VII и соотношение (11.69).

§ 12а. Подъемная сила подковообразного магнита. Для подъема ферромагнитных предметов часто применяют постоянный магнит в форме подковы. При рассмотрении его для простоты предположим, что «ноги» удалены и осталось только полукольцо, показанное на фиг. 118. При наличии «ног» можно было бы использовать приближенный метод, как и в § 23 гл. VI. Предположим, что это полукольцо было намагничено путем соприкосновения с другим таким же полукольцом, дополняющим его до полного кольца; последнее было обмотано проволокой, по которой пропускался электрический ток. В первом приближении намагниченность M будет зависеть от r — расстояния до центра кольца, — так же, как зависела магнитодвижущая сила [см. выражение (7.163)]



Фиг. 118.

$$M=\frac{C}{r}. \tag{12.27}$$

Чтобы найти эквивалентный поверхностный ток, возьмем тонкий слой толщиной dr и радиусом r, в котором намагниченность M можно считать постоянной. Тогда если i — угловая плотность тока, то для тока, текущего между

0 и $\theta - d\theta$ (как и в §9), найдем

$$i\,d\theta = M\,dx = \left(\frac{C}{r}\right) r\,d\theta = C\,d\theta. \tag{12.28}$$

При сложении поверхностных токов смежные слои уничтожаются и получается постоянная угловая плотность тока C по любому сечению кольца. Теперь предположим, что наш магнит приложен к бруску с бесконечно большой проницаемостью, причем контакт между ними идеальный. Внутри поверхности эквивалентной пленки тока линии магнитной индукции будут полуокружностями, так как, согласно соотношению (7.114), они нормально входят в брусок и нормально выходят из него. Магнитодвижущая сила в цепи, в соответствии с соотношением (7.150), равна

$$\Omega = \int_0^{\pi} C\,d\theta = \pi C. \tag{12.29}$$

Магнитное сопротивление слоя dr, как и в § 30 гл. VII, будет определяться по формуле

$$dR = \frac{\text{Длина}}{\mu_v \times \text{Площадь}} = \frac{\pi r}{\mu_v a\,dr},$$

потому что проницаемость внутри эквивалентной пленки тока равна μ_v. Поток индукции в этом слое равен

$$Ba\,dr = \frac{\Omega}{dR} = \frac{\mu_v C}{r}\,a\,dr.$$

А для натяжения в поперечном сечении слоя, согласно выражению (8.60), получим

$$dT = \frac{aB^2}{2\mu_v}\,dr = \frac{\mu_v a C^2}{2r^2}\,dr.$$

Сила притяжения бруска каждым контактом равна

$$T = \frac{\mu_v a C^2}{2} \int_b^c \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu_v\, aC^2\,(c-b)}{2bc}. \tag{12.30}$$

Верхний предел для C можно грубо оценить по кривой намагниченности стали. Если общее число витков в катушке при первоначальном намагничивании было равно n, а ток в ней i_m, то магнитодвижущая сила на 1 *м* была равна, следовательно, $ni_m/(\pi r)$ ампервитков на метр (см. 7.150). Предположим, что исследуемому образцу соответствует широкая петля на фиг. 116, *б* и что $H_D = ni_m/(\pi b)$. Тогда для всех величин r, бо́льших b, намагничивающая сила окажется меньше, чем H_D, и петли гистерезиса будут лежать внутри указанной кривой. Пусть отношение B_m к B_D (обозначим его через P) одинаково для всех этих петель и отношение B_D к H_D (обозначим его через μ') также постоянно. Тогда из выражения (12.27) имеем

$$M = \frac{C}{r} = \frac{B_m}{\mu_v} = \frac{ni_m\mu' P}{\mu_v \pi r},$$

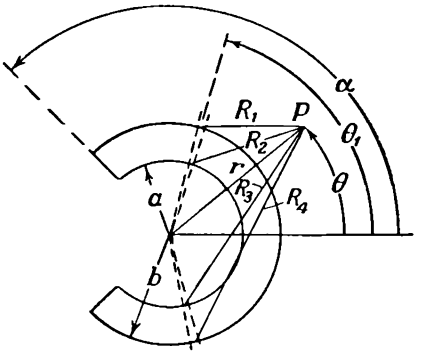
так что

$$C_{\max} = \frac{ni_m\mu' P}{\mu_v \pi}. \tag{12.31}$$

Это является верхней границей для C, если не принимать в расчет механические толчки, влияние тепловой обработки, «мягкость» стали, снижа-

ющие C, особенно после разделения кольца на два магнита. Ошибка, совершаемая при предположении, что $\mu = \infty$, не является серьезной, так как для большинства мягких образцов $\mu/\mu_0 > 500$.

§ 12б. Поле цилиндрического магнита. Для создания сильных магнитных полей на маленьких участках постоянные магниты часто выполняют в виде колец с малым зазором. Эти кольца намагничиваются, как описано в предыдущем параграфе, путем равномерной обмотки их проводом и пропусканием по нему тока. Чтобы упростить расчет поля в этом случае, предположим, что кольцо является столь широким вдоль оси, что его можно считать длинным цилиндром с внешним и внутренним радиусами a и b (см. фиг. 119). До создания зазора цилиндр намагничивается током, текущим параллельно оси цилиндра по обмотке, равномерно намотанной вдоль его стенок. Как было пояснено в предыдущем параграфе, результирующая намагниченность M оказывается обратно пропорциональной расстоянию r. После намагничивания вырезается зазор с радиальными стенками, не нарушающий намагниченность M, а именно — удаляется часть металла и остается только участок, лежащий между $\theta = +\alpha$ и $\theta = -\alpha$.



Фиг. 119.

Если b достаточно мало по сравнению с длиной цилиндра, задача вдали от краев становится двухмерной. В этом случае линии магнитной индукции совпадают, как доказано в § 26 гл. VII, с линиями постоянного вектор-потенциала, и их можно очень просто найти при помощи метода круговых гармоник, рассмотренного в § 2, 3, 4 гл. IV и § 18 гл. VII.

Как показано в предыдущем параграфе, эквивалентный поверхностный слой состоит из той части первоначальной намагничивающей обмотки, которая охватывает неудаленные части кольца и ток в которой между θ и $\theta + d\theta$ равен $I\,d\theta$. Поскольку все элементы обмотки параллельны оси и отдаленные торцы цилиндра не влияют на величину вектор-потенциала A, то последний также всюду параллелен оси и элементы тока можно считать бесконечно длинными. Считая вклад внешних элементов положительным, а внутренних — отрицательным, находим, что вектор-потенциал dA поля в точке $P(r, \theta)$, созданного элементами тока, расположенными между $+\theta_1$ и $-\theta_1$, выражается, согласно соотношению (7.44), следующим образом:

$$dA = \frac{1}{2}\pi\,{}^1\mu_0 I\,(\ln R_1 - \ln R_2 - \ln R_3 + \ln R_4)\,d\theta_1.$$

Подставляя вместо логарифмов их значения из выражения (4.17) и $C = \mu_0 I/\pi$, получаем

$$dA = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a^n - b^n}{r^n}\right)\cos n\theta_1 \cos n\theta\,d\theta_1.$$

Интегрируя от $\theta_1 = 0$ до $\theta_1 = \alpha$, имеем при $r > b$

$$A = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{a^n - b^n}{r^n}\right)\sin n\alpha \cos n\theta. \qquad (12.32)$$

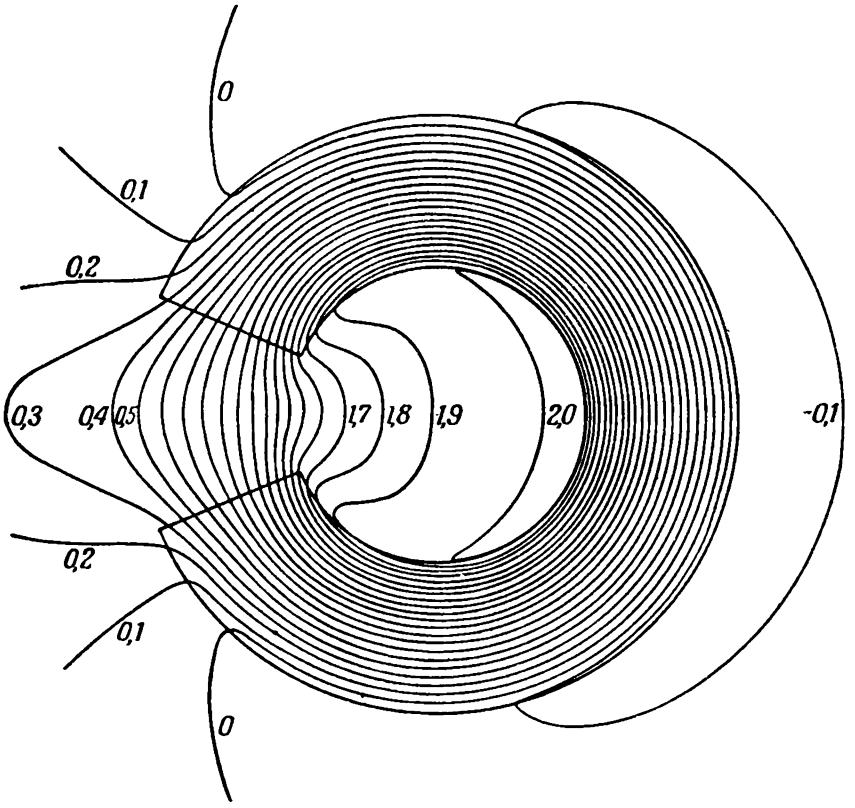
Точно так же
при $b > r > a$

$$A = C\left\{\alpha \ln\frac{b}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{b}\right)^n\right]\sin n\alpha\cos n\theta\right\}, \qquad (12.33)$$

и при $a > r$

$$A = C\left\{\alpha \ln\frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^n - \left(\frac{r}{b}\right)^n\right]\sin n\alpha\cos n\theta\right\} \qquad (12.34)$$

Линии индукции, найденные из соотношений (12.32) — (12.34) при $C = 1$, $\alpha = 7\pi/8$, $a = 1$ и $b = 2$, изображены на фиг. 120.



Фиг. 120. Линии магнитной индукции и постоянного вектор-потенциала в постоянным магните, представляющем из себя длинную толстую намагниченную цилиндрическую оболочку с секториальным воздушным зазором.

Вычисления выполнены по формулам (12.32)—(12.34) при $C=1$, $\alpha=\frac{7}{8}\pi$, $a=1$, $b=2$.

§ 13. Магнитные иглы. Самой известной формой постоянного магнита является, повидимому, магнитная игла. Она представляет собой тонкий стальной стержень, более или менее равномерно намагниченный вдоль оси. Как мы уже видели [см. выражение (12.20)], магнитная индукция такого магнита по форме апроксимируется электрической индукцией двух зарядов $\mu_0\pi a^2 M$ и $-\mu_0\pi a^2 M$, помещенных на расстояниях l друг от друга (a — радиус, l — длина и M — интенсивность намагниченности магнита). Эта аналогия не годится, если игла помещается в среду с $\mu \neq \mu_0$. Однако если отноше-

ние длины иглы к ее диаметру очень велико, то можно воспользоваться другим приближением. В случае иглы с магнитной проницаемостью μ_v, помещаемой в среду μ, поверхность эквивалентной пленки тока (как следует из § 25 гл. VII и § 19 гл. I) представляет собой поверхность длинной узкой полости. Аксиальный поток через нее от внешнего источника выражается произведением $\mu_v H$ или $\mu_v B/\mu$ на $\pi a^2 \cos\theta$, где θ — угол между **B** и осью полости. Как следует из § 8, ток в элементе dl эквивалентной пленки тока, охватывающий этот поток, равен $M\,dl$, где M — намагниченность. Согласно соотношениям (8.18) и (7.152), энергия эквивалентного поверхностного тока равна

$$W = \mu_v M \pi a^2 \int_{l_1}^{l_2} H \cos\theta\, dl = \mu_v M \pi a^2 (\Omega_2 - \Omega_1). \tag{12.35}$$

По форме это выражение сходно с выражением (1.13), так что тонкая, равномерно намагниченная игла ведет себя аналогично двум равным по величине, но противоположным по знаку, зарядам $\mu_v M \pi a^2$, помещенным в электрическое поле с потенциалом $V = \Omega$, где Ω — магнитодвижущая сила, или скалярный магнитный потенциал.

В отсутствие источников внешнего магнитного поля поток, пронизывающий эту узкую полость, практически не зависит от магнитной проницаемости окружающей среды, так как магнитное сопротивление цепи почти полностью сосредоточено внутри полости, куда не проникает внешняя среда и где проницаемость равна μ_v. Таким образом, поток магнитной индукции от достаточно тонкой магнитной иглы, как и поток электрической индукции от электрического диполя, не зависит от окружающей среды. Поэтому скалярный магнитный потенциал, или магнитодвижущая сила, такой иглы обратно пропорционален магнитной проницаемости окружающей среды. Эти величины можно вычислить по формулам § 7б гл. I, считая, что магниты обладают взаимной потенциальной энергией. Пусть **r** — радиус-вектор, проведенный от магнитного диполя с моментом $\mathbf{m}_1'$ к магнитному диполю с моментом $\mathbf{m}_2'$ и составляющий с ними углы θ_1 и θ_2, α — угол между $\mathbf{m}_1'$ и $\mathbf{m}_2'$, а ψ — угол между пересекающимися по **r** плоскостями, содержащими $\mathbf{m}_1'$ и $\mathbf{m}_2'$. Тогда из соотношений (12.35), (1.16) и (1.17) потенциальная энергия выражается в виде

$$W = \frac{m_1' m_2'}{4\pi\mu r^3} (\cos\alpha - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2), \tag{12.36}$$

$$W = \frac{m_1' m_2'}{4\pi\mu r^3} (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\psi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2). \tag{12.37}$$

Силы или моменты, действующие со стороны одного диполя на другой, можно найти из этих формул путем дифференцирования по соответствующей координате. В частности, сила отталкивания равна

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{3 m_1' m_2'}{4\pi\mu r^3} (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\psi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2). \tag{12.38}$$

Потенциальная энергия иглы с моментом $\mathbf{m}'$ в поле с индукцией **B** выражается следующей формулой [см. (7.14)]:

$$W = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{H} = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{B}\mu^{-1}, \tag{12.39}$$

откуда силы определяются путем дифференцирования. В сферических координатах вектор-потенциал поля магнитной иглы на расстоянии r от нее определяется по формулам § 11 гл. VII, которые при $r \gg l$ дают

$$A_\varphi = \frac{m' \sin\theta}{4\pi r^2}. \tag{12.40}$$

Вектор-потенциал, как и полный поток, не зависит от проницаемости среды. Следует отметить, что классический магнитный момент $\mathbf{m}'$, используемый в этом параграфе, отличается по размерности от магнитного момента рамки, определенного в § 1 гл. VII и в соотношении (7.49). Выведенные в этом параграфе формулы точны только для случая бесконечно тонких магнитов. Силы или энергию постоянных магнитов с большим поперечным сечением, помещенных в среду $\mu \neq \mu_0$, нельзя найти путем интегрирования этих формул.

ЗАДАЧИ [1]

1. Под землей в направлении с востока на запад протянута железная труба. Для обнаружения ее местонахождения производятся измерения магнитного склонения через каждые 5 футов (1,525 *м*) в северном направлении, начиная с некоторой фиксированной точки. При этом оказывается, что отклонения от нормального склонения 60° в зависимости от x равны

x	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235
$\Delta\varphi$	−4,5°	−5,0°	−5,5°	−7,5°	−6,0°	+0,0°	+14,5°	+0,0°	−1,5°	−1,2°	−1,0°

Найти координату x, соответствующую центру трубы, и расстояние от поверхности земли до трубы.

2. Стальная гиря маятника радиуса a равномерно намагничена в вертикальном направлении с интенсивностью I. Пусть в данной точке земного шара вертикальная компонента напряженности поля земли равна V, а ускорение силы тяжести равно g. Найти отношение периода колебаний этого маятника к периоду колебаний ненамагниченного маятника, если масса его равна m, расстояние от центра тяжести до точки подвеса равно l, а колебания происходят в плоскости восток—запад.

3. Сфера с пропицаемостью 1000 и радиусом 10 *см* помещена на 1 *м* северо-восточнее (относительно магнитного меридиана) магнитной иглы компаса. Показать, что, если пренебречь силами изображения, отклонение иглы от магнитного меридиана будет равно 5′, с точностью до 1%.

4. Найти магнитное поле внутри и снаружи полости, образованной толстой сферической оболочкой, равномерно намагниченной в направлении x с интенсивностью M.

5*. Два маленьких магнита плывут горизонтально по поверхности воды, один вдоль линии, соединяющей их центры, а другой—перпендикулярно к ней. Доказать, что взаимодействие магнитов сводится к единственной силе, действующей под прямым углом к прямой, соединяющей их центры и приложенной на расстоянии одной трети ее длины от магнита, перемещающегося вдоль линии, соединяющей центры магнитов.

6*. Маленький магнит ACB может свободно вращаться около своего центра C. Он взаимодействует с маленьким закрепленным магнитом PQ. Доказать, что в положении равновесия ось ACB лежит в плоскости PQC и что $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta'$, где θ и θ' — углы, которые оба магнита составляют с соединяющей их линией.

7*. Три маленьких магнита, расположенные в вершинах равностороннего треугольника ABC, могут свободно вращаться около своих центров. При равновесии магнит A параллелен BC, а магниты B и C перпендикулярны соответственно сторонам AB и AC. Доказать, что магнитные моменты относятся как $3^{1/2} : 4 : 4$.

8*. Ось маленького магнита составляет с нормалью к некоторой плоскости угол φ. Доказать, что линия, соединяющая магнит с точкой на плоскости, в которой плотность пересекающих ее силовых линий максимальна, составляет с осью магнита угол θ, такой, что

$$2\operatorname{tg}\theta = 3\operatorname{tg}2(\varphi - \theta).$$

9*. Два маленьких магнита лежат в одной плоскости и составляют углы θ и θ' с линией, соединяющей их центры. Показать, что прямая, направленная вдоль равнодействующей сил взаимодействия между ними, делит линию центров в отношении

$$\operatorname{tg}\theta' + 2\operatorname{tg}\theta : \operatorname{tg}\theta + 2\operatorname{tg}\theta'.$$

10*. Центры двух маленьких магнитов удалены на расстояние r друг от друга. Оси их составляют углы θ и θ' с линией, соединяющей их центры и угол ε между собой. Показать, что продольная составляющая силы, действующей на первый маг-

[1] Во всех задачах речь идет о классическом магнитном моменте.

нит, равна

$$3mm' (4\pi\mu r^4)^{-1} (5\cos^2\theta\cos\theta' - \cos\theta' - 2\cos\varepsilon\cos\theta).$$

Показать также, что момент пары сил, приложенных к плечу r и действующих со стороны одного магнита на другой, равен

$$mm' (4\pi\mu r^4)^{-1} d\sin\varepsilon,$$

где d — кратчайшее расстояние между их осями.

11*. Две магнитные иглы с моментами m и m' спаяны таким образом, что их оси составляют угол α. Показать, что если их подвесить в однородном горизонтальном магнитном поле таким образом, чтобы они свободно качались, то их оси составят углы θ и θ' с силовыми линиями, причем

$$\frac{\sin\theta}{m'} = \frac{\sin\theta'}{m} = (m^2 + m'^2 + 2mm'\cos\alpha)^{-1/2}\sin\alpha.$$

12*. Доказать, что если центры двух молекул, имеющих магнитные моменты m и m', неподвижно закреплены в точках A и B ($AB = r$) и одна из молекул может свободно вращаться вокруг своего центра под действием некоторого заданного момента сил, обусловленного полем второй молекулы, так что в состоянии равновесия ось этой молекулы наклоняется относительно AB на угол θ, то в отсутствие внешнего поля момент сил равен

$$\frac{3mm'\sin 2\theta}{8\pi\mu r^3 (3\cos^2\theta + 1)^{1/2}}$$

13*. Центры двух одинаковых маленьких магнитов фиксированы, а сами магниты могут вращаться вокруг них. Эта система находится в однородном магнитном поле H, направленном перпендикулярно к отрезку длиной r, соединяющему центры магнитов. Показать, что положение, в котором оба магнита ориентированы по силовым линиям однородного поля, является устойчивым только при

$$H > 3m (4\pi\mu r^3)^{-1}.$$

14*. Центры двух частиц с одинаковыми магнитными моментами фиксированы в точках $+a$, 0 и $-a$, 0. Моменты этих частиц параллельны оси z и направлены в одну сторону. Показать, что если некоторая другая молекула (обладающая магнитным моментом) может свободно вращаться вокруг своего центра, находящегося в точке $(0, y, z)$, то ось ее будет лежать в плоскости $x = 0$ и будет наклонена относительно оси z на угол

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3yz}{2z^2 - a^2 - y^2}.$$

Исследовать, какое из двух положений равновесия будет устойчивым.

15*. Доказать, что существует четыре положения, при помещении в которые данный магнитный стержень полностью нарушает возможность контроля магнитного поля земли посредством стрелки компаса, т. е. стрелка становится безразличной по отношению к любому направлению (не испытывает действия никаких сил). Показать, что если размеры стержня малы по сравнению с расстоянием до стрелки, то одна пара этих положений отстоит от стрелки в 1,25 раза дальше, чем два других положения.

16*. Три маленьких магнита, магнитный момент каждого из которых равен m, закреплены в вершинах равностороннего треугольника ABC, так что их северные полюсы ориентированы соответственно в направлениях AC, AB и BC. Другой маленький магнит с моментом m' находится в центре треугольника, вокруг которого он может свободно поворачиваться. Доказать, что при малых колебаниях период колебаний центрального магнита равен периоду колебаний маятника длиной

$$\frac{4\pi\mu I b^3 g}{(351)^{1/2} mm'},$$

где b — длина стороны треугольника, а I — момент инерции подвижного магнита относительно центра.

17*. Три частицы с одинаковыми магнитными моментами, расположенные в вершинах равностороннего треугольника, могут вращаться вокруг своих центров, оставаясь все время ориентированными в направлении, лежащем в плоскости треугольника. Доказать, что существует четыре, и только четыре, таких положения равновесия, в которых углы, отсчитываемые в одном направлении, между осями магнитов и биссектрисами соответствующих углов треугольника, равны. Доказать также, что два симметричных положения равновесия являются неустойчивыми.

18*. Четыре маленьких одинаковых магнита расположены по углам квадрата и совершают колебания под действием сил взаимодействия. Доказать, что периоды основных колебаний равны

$$2\pi\left[\frac{4\pi\mu mk^2d^3}{m^23\left(2+\frac{1}{2}2^{-1/2}\right)}\right]^{1/2},\quad 2\pi\left\{\frac{4\pi\mu mk^2d^3}{m^2\left[3-\frac{1}{2}2^{-1/2}\right]}\right\}^{1/2},\quad 2\pi\left[\frac{4\pi\mu mk^2d^3 2\,(2)^{1/2}}{3m^2}\right]^{1/2}$$

где m — магнитный момент магнита, mk^2 — момент инерции магнита, а d — длина стороны квадрата.

19*. Система магнитов расположена в одной плоскости. При перемещении оси маленькой стрелки по замкнутому контуру, лежащему в плоскости и не содержащему магнитных полюсов, стрелка совершает полный оборот. Доказать, что этот контур включает по крайней мере одно положение равновесия.

20*. Доказать, что скалярный потенциал поля, создаваемого телом, равномерно намагниченным с интенсивностью I, в любой внешней точке совпадает с потенциалом поля, создаваемого двойным слоем, совпадающим с поверхностью тела, если магнитный момент этого слоя равен Ix, где x — координата, измеряемая параллельно направлению намагничивания.

21*. Шар из твердой стали равномерно намагничен в определенном направлении. В некоторой внешней по отношению к шару точке находится магнитная частица, ось которой параллельна оси намагничивания шара. Найти моменты пар сил, действующих на шар и на частицу.

22*. Сферическая магнитная оболочка радиуса a радиально намагничена так, что магнитный момент некоторой произвольной точки ее поверхности равен S_i, где S_i — поверхностная сферическая гармоника положительного порядка i. Показать, что скалярный потенциал на расстоянии r от центра оболочки равен
при $r < a$

$$\left[-\frac{4\pi(i+1)}{2i+1}\right]S_i\left(\frac{r}{a}\right)^i,$$

при $r > a$

$$\left[\frac{4\pi i}{2i+1}\right]S_i\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1}$$

23*. Показать, что если земной шар был бы равномерно намагничен, то тангенс угла склонения оказался бы равным удвоенному тангенсу угла магнитной широты.

24*. Доказать, что по известной на всей поверхности земли горизонтальной составляющей (в меридианном направлении) магнитного поля земли можно теоретически вычислить все другие компоненты этого поля.

25*. Исходя из того, что интеграл по замкнутому контуру от напряженности магнитного поля в отсутствие токов равен нулю, показать, что горизонтальную составляющую магнитного поля в некоторой произвольной точке можно приближенно выразить через известные поля в трех других точках, расположенных вокруг первой. Показать, что эти шесть известных величин также не являются независимыми, а связаны между собой одним условием.

26*. Доказать, что если бы земля была шаром и ее магнетизм был обусловлен двумя маленькими прямыми стержневыми магнитами, расположенными в полюсах и имеющими магнитные моменты, равные по величине и одинаково ориентированные вдоль земной оси, то магнитное склонение δ выражалось бы через угол магнитной широты λ следующим образом:

$$8\operatorname{ctg}\left(\delta+\frac{1}{2}\lambda\right)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\lambda-6\operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda-3\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\lambda.$$

27*. Предположим, что земля является шаром радиуса a, а ее поле описывается скалярным потенциалом

$$\Omega=S_1\frac{r}{a}+S_2\left(\frac{r}{a}\right)^2+S_1'\left(\frac{a}{r}\right)^2+S_2'\left(\frac{a}{r}\right)^3$$

Показать, что величину Ω можно полностью определить по значениям горизонтальной напряженности поля, наклонению и склонению, измеренным в четырех точках, и по значениям склонения, измеренным дополнительно еще в четырех точках.

28*. Считая, что в разложении магнитного потенциала поля земли можно пренебречь пятой и высшими гармониками, показать, что из наблюдений результирующего магнитного поля в восьми точках на поверхности земли можно найти значение потенциала всюду.

29*. Предполагая, что земной магнетизм полностью обусловлен наличием внутренних источников и что северная компонента горизонтального поля выражается через

широту λ как $A\cos\lambda + B\cos^3\lambda$, доказать, что вертикальная компонента на данной широте, направленная вниз, зависит от широты следующим образом:

$$2\left(A+\frac{6B}{5}\right)\sin\lambda-\frac{4B}{3}\sin^3\lambda.$$

30*. Магнитная частица, имеющая момент m, находится на расстоянии a над плоской границей бесконечного бруска, сделанного из мягкого железа. Ось частицы перпендикулярна к этой границе. Найти силу, действующую на частицу, и показать, что потенциальная энергия системы равна

$$\frac{m^2(\mu-\mu_v)}{32\pi\mu_v a^3(\mu+\mu_v)}.$$

31*. Маленький магнит с моментом m находится вблизи большого неподвижного куска мягкого железа с проницаемостью μ, имеющего очень большую плоскую поверхность. Расстояние от этой поверхности до магнита равно a, а угол, который составляет ось магнита с кратчайшим расстоянием до поверхности куска, равен θ. Показать, что для того, чтобы удержать магнит в этом положении, необходимо приложить некоторую силу и момент, равный

$$\frac{(\mu-\mu_v)\,m^2\sin\theta\cos\theta}{32\pi\mu_v(\mu+\mu_v)\,a^3}$$

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)

Attwood S. S., Electric and Magnetic Fields, Wiley, 1941.

Bitter F. T., Introduction to Ferromagnetism, McGraw-Hill, 1937.

Ewing J. A., Magnetic Induction in Iron and Other Substances, Van Nostrand, 1900.

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, 1927.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press. 1929.

Moullin E. B., Principles of Electromagnetism, Oxford, 1932.

Planck M. K. E. L., Theory of Electricity and Magnetism, Macmillan, 1932.

Ramsey A. S., Electricity and Magnetism, Cambridge, 1937.

Spooner T., Properties and Testing of Magnetic Materials, McGraw-Hill, 1931.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, Leipzig, 1932.

Williams S. R., Magnetic Phenomena, McGraw-Hill, 1931.

Глава XIII

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Уравнения Максвелла. Мы будем считать, что в тех областях пространства, где μ и ε являются непрерывными функциями координат и где можно ввести понятия плотности электрических зарядов и плотности токов проводимости (или конвекционных токов), электрические и магнитные величины связаны между собой следующими уравнениями:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{13.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{13.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{13.4}$$

Уравнение (13.2) выражает собой закон индукции Фарадея (8.3), а два последних уравнения, (13.3) и (13.4), совпадают, очевидно, с уравнениями (3.4) и (7.1). Новым является лишь уравнение (13.1), которое без последнего члена представляет собой просто закон Ампера (7.4). Этот последний член, введенный Максвеллом, делает при отсутствии зарядов и токов всю систему уравнений более симметричной, а уравнение (13.1) сходным по структуре с уравнением (13.2).

Если закон индукции Фарадея утверждает, что изменение потока магнитной индукции сквозь некоторую замкнутую кривую вызывает появление электродвижущей силы на этой кривой, то уравнение (13.1) устанавливает появление магнитодвижущей силы при изменении потока электрической индукции. Сам Максвелл, повидимому, считал появление магнитного поля следствием действительного перемещения электрических зарядов, однако для подтверждения справедливости уравнения (13.1) в таком представлении нет необходимости. Справедливость всей системы уравнений Максвелла подтверждается правильностью многочисленных следствий и выводов, вытекающих из них. Может быть, в действительности уравнения Максвелла являются лишь приближенными, но в пределах современной точности измерений их можно считать точными. Поскольку электрический заряд сохраняется, то имеет место уравнение непрерывности (6.3)

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{13.5}$$

В изотропных средах $\mathbf{i}$ и $\mathbf{E}$ связаны между собой законом Ома (6.8)

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{i}, \quad \text{или} \quad \mathbf{i} = \gamma \mathbf{E}. \tag{13.6}$$

Для анизотропных сред при соответствующем выборе осей из выражения (6.108) имеем

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}\gamma_x E_x + \mathbf{j}\gamma_y E_y + \mathbf{k}\gamma_z E_z. \tag{13.7}$$

В изотропных средах **D** и **E** связаны между собой соотношением (1.33)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{13.8}$$

В анизотропных средах из соотношения (1.58) при соответствующем выборе осей получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}\varepsilon_1 E_x + \mathbf{j}\varepsilon_2 E_y + \mathbf{k}\varepsilon_3 E_z. \tag{13.9}$$

Предположив, что μ и все величины, входящие в уравнения (13.6)—(13.9), не зависят от напряженностей полей, мы несколько ограничим пределы применимости уравнений Максвелла, в частности, при некоторых частотах это не позволит применить их к ферромагнитным веществам.

§ 2. Волновое уравнение. Электромагнитные потенциалы. Вектор Герца. Считая магнитную проницаемость μ постоянной, применим операцию ротора к уравнению (13.1)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu \left[\gamma (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})\right].$$

Подставим сюда значение $\nabla \cdot \mathbf{B}$ из уравнения (13.4), а $\nabla \cdot \mathbf{E}$ из уравнения (13.2), тогда получим

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{13.10}$$

Аналогично, взяв ротор от обеих частей уравнения (13.2) и заменив $\nabla \cdot \mathbf{E}$, согласно уравнению (13.3) (считая $\rho = 0$), а $\nabla \times \mathbf{B}$, согласно уравнению (13.1), получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{13.11}$$

Мы пришли к волновым уравнениям для вектора магнитной индукции и вектора напряженности электрического поля. Как будет видно из дальнейшего, первый член в правой части этих уравнений обусловливает тепловое рассеивание энергии поля в среде. В непроводящих средах ($\gamma = 0$) этот член отсутствует.

До сих пор мы широко пользовались скалярным электростатическим потенциалом, градиент которого со знаком минус давал напряженность электрического поля, а также магнитостатическим вектор-потенциалом, дивергенция которого была равна нулю, а ротор был равен вектору магнитной индукции. Желательно теперь обобщить определения потенциалов на случай быстропеременных полей. Для этого выберем обобщенный магнитный вектор-потенциал **A** так, чтобы ротор его всегда был равен вектору магнитной индукции **B** и, следовательно, для постоянных полей вектор-потенциал **A** совпадал бы с магнитостатическим. Таким образом,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{13.12}$$

Исключая **B** из уравнения (13.2) и меняя порядок дифференцирования, получаем

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В результате интегрирования этого уравнения избавляемся от ротора, но при этом появляется постоянная интегрирования, которую можно представить как градиент некоторого скаляра ψ, так как ротор градиента тождественно равен нулю

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\psi. \tag{13.13}$$

Введенная, таким образом, скалярная величина ψ называется электрическим потенциалом и совпадает для статических полей с электростатическим потенциалом, рассмотренным в § 7 гл. I. Представляется удобным, хотя, как будет показано в § 2 гл. XIV, в этом нет необходимости, выбрать величины $\mathbf{A}$ и ψ так, чтобы они удовлетворяли тем же уравнениям, что и векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а именно:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mu\gamma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{13.14}$$

$$\nabla^2\psi = \mu\gamma\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{13.15}$$

Это накладывает на $\mathbf{A}$ и ψ определенное ограничение. Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (13.13) и положив $\rho = 0$, т. е. $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ [см. уравнение (13.3)], получаем

$$\nabla^2\psi = -\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (13.15) показывает, что последнее может иметь место только при условии

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\mu\gamma\psi - \mu\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{13.16}$$

Это условие совместимо также и с уравнением (13.14). Чтобы доказать последнее, необходимо взять градиент от обеих частей уравнения (13.16) и преобразовать левую часть, снова пользуясь векторным тождеством, приведенным в начале настоящего параграфа. Произведя замену $\nabla\times\mathbf{B}$ в соответствии с уравнением (13.1) с учетом выражений (13.6) и (13.8), а $\nabla\psi$, согласно уравнению (13.13), после соответствующих сокращений мы придем к уравнению (13.14).

Покажем теперь, что полное электромагнитное поле можно описать при помощи одного вектора $\mathbf{Z}$, называемого вектором Герца, через который потенциалы $\mathbf{A}$ и ψ выражаются следующим образом:

$$\mathbf{A} = \mu\gamma\mathbf{Z} + \mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}, \quad \psi = -\nabla\cdot\mathbf{Z}. \tag{13.17}$$

Для удовлетворения уравнения (13.16), а также и (13.13) необходимо взять

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{Z}) - \nabla^2\mathbf{Z} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{Z}), \tag{13.18}$$

$$\nabla^2\mathbf{Z} = \mu\gamma\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2}. \tag{13.19}$$

Выразим вектор магнитной индукции, используя выражения (13.12) и (13.17), через вектор Герца $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{B} = \mu\gamma\nabla\times\mathbf{Z} + \mu\varepsilon\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{Z})}{\partial t}. \tag{13.20}$$

Уравнение (13.19) описывает все свойства электромагнитных волн. Для непроводящих сред, исключив ψ из уравнений (13.13) и (13.16), получим

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\varepsilon}\int\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}\,dt = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}' \tag{13.21}$$

Как следует из уравнения (13.3), при $\rho = 0$ дивергенция нового вектор-потенциала $\mathbf{A}'$ равна нулю.

§ 3. Вектор Умова—Пойнтинга. Умножим уравнение (13.1) на $-\mathbf{E}$, а уравнение (13.2)—на $\mathbf{B}/\mu$ и сложим результаты

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu}\,(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)=-\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\frac{\mathbf{B}}{\mu}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{13.22}$$

Проинтегрируем левую часть уравнения (13.22) по некоторому произвольному объему v и применим теорему Остроградского—Гаусса (3.2), тогда получим

$$\int_{\mathrm{v}}\left[\frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)\right]d\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}}\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)d\mathrm{v}=\int_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)dS.$$

Объемный интеграл в правой части оставим без изменения, в результате будем иметь

$$-\int_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)dS=\int_{\mathrm{v}}\left[\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right)\right]d\mathrm{v}. \tag{13.23}$$

Первый член, стоящий в правой части соотношения (13.23), представляет собой, как это следует из закона Ома и из выражения (6.11), мощность, выделяемую в объеме v в виде тепла. Второй же и третий члены, согласно выражениям (2.18) и (8.12), предст. вляют собой скорости изменения электрической и магнитной энергий в этом объеме. В силу закона сохранения энергии, если все эти члены больше нуля, энергия, поглощаемая в объеме, должна поступать в него извне. Поток энергии, проходящей сквозь поверхность, окружающую объем v, должен определяться левой частью соотношения (13.23). Таким образом, взятая в направлении внешней нормали и проинтегрированная по замкнутой поверхности компонента вектора

$$\mathbf{\Pi}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu} \tag{13.24}$$

представляет собой поток энергии, выходящей в единицу времени из объема, ограниченного этой поверхностью. Вектор $\mathbf{\Pi}$ называется вектором Умова—Пойнтинга. Следует подчеркнуть, что нами был вскрыт физический смысл только интеграла от этого вектора по замкнутой поверхности и не было показано, что вектор $\mathbf{\Pi}$ представляет собой поток энергии сквозь отдельный элемент поверхности[1].

§ 4. Плоские волны в однородном незаряженном диэлектрике. Электромагнитное возмущение называется плоской волной в том случае, если фазы мгновенных значений величин B, E, ψ, A и Z постоянны вдоль любой из взаимно параллельных плоскостей. Эти плоскости называются фронтом волны, а нормаль к ним, задаваемая единичным вектором $\mathbf{n}$,— волновой нормалью. В диэлектрических средах величина γ равна нулю, и поэтому первый член в правой части уравнения (13.19) исчезает. Можно проверить дифференцированием, что общее решение будет тогда иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=f_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)+f_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}+vt)=\\&=f_1[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}+vt')-v(t+t')]+f_2[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt')+v(t+t')],\end{aligned} \tag{13.25}$$

где $v=(\mu\varepsilon)^{-1/2}$. Таким образом, значение функции f_1 в точке $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}+vt'$ в момент времени $t+t'$ совпадает с ее значением в точке $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ в момент t, т. е. f_1 описывает волну, движущуюся со скоростью v в направлении $\mathbf{n}$.

[1] О локальном значении вектора Умова—Пойнтинга см. книгу И. Е. Тамма, Основы теории электричества, М., 1946.—*Прим. перев.*

Аналогично, функция f_2 описывает волну, движущуюся с такой же скоростью в противоположном направлении $-\mathbf{n}$. Скорость распространения электромагнитной волны в пустоте $c=(\mu_i\varepsilon_i)^{-1/2}$ равна $3\cdot10^8$ *м/сек*. Отношение скорости c в пустоте к скорости v в среде называется показателем преломления этой среды n

$$n=\frac{c}{v}. \tag{13.26}$$

Поскольку уравнения (13.10), (13.11), (13.14), (13.15) и (13.19) одинаковы, то решение для плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}$, можно записать в виде

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_0 f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt), \tag{13.27}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt), \tag{13.28}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0 f_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt), \tag{13.29}$$

где $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ — векторные амплитуды величин $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а $f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)$ — скалярная функция. При плотности заряда ρ, равной нулю, выражение (13.27) вместе с уравнением (13.3) дает

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_0 f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)=0.$$

Отсюда либо функция f' равна нулю, что приводит к случаю статического поля, не представляющему здесь интереса, либо

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_0=0. \tag{13.30}$$

При помощи аналогичной подстановки решения (13.29) в уравнение (13.4) получаем такой же результат:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0=0. \tag{13.31}$$

Это означает, что $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ лежат в плоскости фронта волны. Далее из решений (13.28), (13.29) и уравнения (13.2) имеем

$$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0 f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=v\mathbf{B}_0 f_1'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt).$$

Это справедливо для любого момента времени, поэтому величина f_1 должна быть пропорциональна f, и можно принять

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0=v\mathbf{B}_0, \quad \text{или} \quad \mathbf{n}\times\mathbf{E}=v\mathbf{B}. \tag{13.32}$$

Точно так же, если величина $\mathbf{i}$ равна нулю, то подстановка решений (13.27) и (13.29) в уравнение (13.1) дает

$$\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0=-\mu v\mathbf{D}_0, \quad \text{или} \quad \mathbf{n}\times\mathbf{B}=-\mu v\mathbf{D}. \tag{13.33}$$

Умножая скалярно соотношение (13.32) на (13.33) и учитывая, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0=0$, получим

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0)=-\mu v^2\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{B}_0=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0)-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)=\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0.$$

В силу соотношения (13.33), правая часть этого уравнения равна нулю, поэтому

$$\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_0\cdot\mathbf{B}_0=0. \tag{13.34}$$

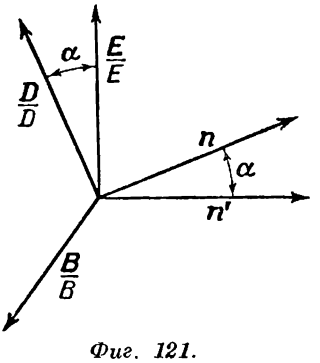
Итак, векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{D}_0$ перпендикулярны к вектору $\mathbf{B}_0$. Из выражения (13.24) для вектора Умова — Пойнтинга получаем

$$\Pi=\mu^{-1}\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0[f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)]^2=\Pi_0[f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)]^2, \tag{13.35}$$

тогда как волновая нормаль совпадает по направлению с $\mathbf{D}_0 \times \mathbf{B}_0$, что очевидно из выражений (13.30) и (13.31). Следовательно, направление распространения энергии $\mathbf{\Pi}$ образует с волновой нормалью $\mathbf{n}$ угол, равный углу между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Если вектор $\mathbf{B}$ остается всюду параллельным некоторому фиксированному направлению, то и вектор $\mathbf{E}$ вследствие соотношения (13.34) тоже будет обладать этим свойством. Такая волна называется линейно или плоско поляризованной. В оптике под плоскостью поляризации подразумевают плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{B}$. В радиотехнической литературе плоскостью поляризации обычно считают плоскость векторов $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{E}$.

§ 5. Скорость распространения волны в анизотропных средах. Рассмотрим распространение электромагнитных волн в однородной анизотропной непроводящей среде с магнитной проницаемостью μ_v. Совместим направления осей координат с электрическими осями среды. Тогда из соотношения (1.58) имеем

$$D_x = \varepsilon_1 E_x, \quad D_y = \varepsilon_2 E_y, \quad D_z = \varepsilon_3 E_z. \tag{13.36}$$



Фиг. 121.

Согласно § 9а гл. II, объемная плотность электрической энергии равна

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_2 E_y^2 + \varepsilon_3 E_z^2) = \frac{B^2}{2\mu_v}. \tag{13.37}$$

При получении последнего соотношения использованы выражения (13.9) для вектора $\mathbf{D}$ и (13.32) для $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ и изменен порядок следования векторного и скалярного произведений. Это соотношение свидетельствует о равенстве плотностей электрической и магнитной энергий. Плотность полной электромагнитной энергии равна удвоенному выражению (13.37). Обозначим направление распространения энергии (направление луча) через $\mathbf{n}'$ На фиг. 121 показана ориентация векторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Очевидно, что $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ лежат в одной плоскости, поскольку они ортогональны к $\mathbf{B}$. Заметим также, что

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}}{E} = -\frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{D}}{D}. \tag{13.38}$$

Для нахождения скорости v перемещения фронта волны вдоль $\mathbf{n}$ преобразуем сначала соотношения (13.32) и (13.33) к виду

$$\mu_v v^2 \mathbf{D} = -\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}) = \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}). \tag{13.39}$$

Затем введем три характеризующие кристалл постоянные v_1, v_2 и v_3

$$\mu_v\varepsilon_1 v_1^2 = 1, \quad \mu_v\varepsilon_2 v_2^2 = 1, \quad \mu_v\varepsilon_3 v_3^2 = 1. \tag{13.40}$$

Исключив теперь $\mathbf{E}$ из выражения (13.39) при помощи соотношений (13.36) и (13.40), получим

$$\mu_v(v_1^2 - v^2)D_x = l(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}), \quad \mu_v(v_2^2 - v^2)D_y = m(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}),$$
$$\mu_v(v_3^2 - v^2)D_z = n(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}), \tag{13.41}$$

где l, m, n — составляющие вектора $\mathbf{n}$, т. е. его направляющие косинусы. Согласно соотношению (13.30), $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = lD_x + mD_y + nD_z = 0$. Если сюда подставить D_x, D_y и D_z из выражения (13.41), то получим

$$\frac{l^2}{v^2 - v_1^2} + \frac{m^2}{v^2 - v_2^2} + \frac{n^2}{v^2 - v_3^2} = 0. \tag{13.42}$$

Это уравнение называется уравнением Френеля; оно выражает скорость распространения фронта волны через значения направляющих косинусов волновой нормали. В общем случае для любого определенного направления нормали существует два различных значения скорости распространения. Путем непосредственной подстановки в соотношение (13.42) легко убедиться, что если $v_1 > v_2 > v_3$, то только для двух направлений величина v имеет одно-единственное значение

$$l_0 = \pm (v_1^2 - v_2^2)^{1/2} (v_1^2 - v_3^2)^{-1/2},$$
$$m_0 = 0, \quad n_0 = \pm (v_2^2 - v_3^2)^{1/2} (v_1^2 - v_3^2)^{-1/2} \tag{13.43}$$

и что это значение равно v_2. Направления, определяемые косинусами l_0, m_0 и n_0, называются оптическими осями двухосного кристалла. Если $v_1 = v_2 \neq v_3$, то скорость распространения v однозначна только в направлении z, для которого $n_0 = 1$, а $m_0 = l_0 = 0$. Если же $v_1 \neq v_2 = v_3$, то v однозначна только в направлении x, для которого $l_0 = 1$, $m_0 = n_0 = 0$. В обоих случаях существует только одна оптическая ось, т. е. кристалл является одноосным.

§ 6. Поверхность, образованная, лучом, и поляризация в анизотропных средах. Для нахождения скорости распространения энергии v' в произвольном направлении в кристалле необходимо поделить выражение (13.24) на $E^2/\mu v$ и умножить на $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$, используя соотношение (13.32). Тогда

$$\mu v \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}}{E^2}\Pi = v\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{E^2} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}) - \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2}{E^2}\mathbf{E}. \tag{13.44}$$

Решив уравнение (13.39) относительно $\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})$, перепишем его в проекциях на оси x, y и z и при помощи соотношений (13.41) исключим D_x, D_y и D_z, а результат подставим в правую часть уравнения (13.44):

$$\mu v \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}}{E^2}\Pi_{x,y,z} = \left[1 - \frac{v^2}{v_{1,2,3}^2} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2}{E^2}\right] E_{x,y,z}. \tag{13.45}$$

Как ясно из соотношений (13.38), а также из фиг. 121, величины v и v' связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{v}{v'}\right)^2 = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2}{E^2}. \tag{13.46}$$

Поскольку $\Pi_{x,y,z} = \Pi_0 n'_{x,y,z}$, выражение (13.45) можно переписать в виде

$$-\frac{n'_{x,y,z}}{\left(\frac{v}{v_{1,2,3}}\right)^2 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2} = \frac{E^2}{\mu v \Pi_0 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})} E_{x,y,z}.$$

Пусть l', m', n' — составляющие вектора $\mathbf{n}'$, т. е. его направляющие косинусы, тогда

$$\mathbf{n}'\cdot\mathbf{E} = lE'_x + m'E_y + n'E_z.$$

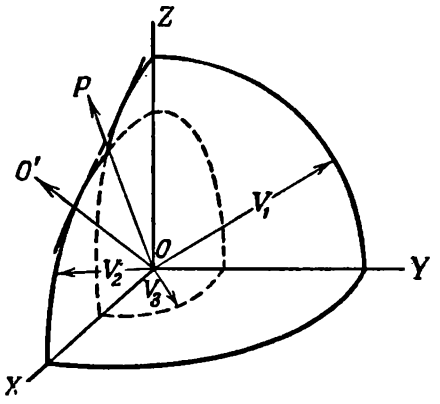
Поэтому, умножая написанные выше уравнения на l', m' и n', а затем складывая полученные результаты, мы приходим к уравнению, определяющему лучевую скорость v' в направлениях l', m' и n' как функцию постоянных кристалла v_1, v_2, v_3:

$$\frac{l'^2 v_1^2}{v'^2 - v_1^2} + \frac{m'^2 v_2^2}{v'^2 - v_2^2} + \frac{n'^2 v_3^2}{v'^2 - v_3^2} = 0. \tag{13.47}$$

Для каждого отдельного направления существуют, вообще говоря, две различные лучевые скорости. Если в некоторой момент времени в начале

координат появилось электромагнитное возмущение, то за 1 сек. оно переместится на расстояние $r=v'$ На фиг. 122 изображена форма волны в первом октанте для случая $v_1 > v_2 > v_3$. В направлении OP, а также вдоль его зеркального изображения в плоскости YZ лучи имеют одинаковые скорости. Из уравнения (13.47) вытекает, что эти направления луча связаны с направлениями оптических осей кристалла соотношениями

$$l_r = \frac{l_0 v_3}{v_2}, \quad m_r = m_0 = 0, \quad n_r = \frac{n_0 v_1}{v_2}. \tag{13.48}$$



Фиг. 122.

Оптической осью на фиг. 122 является прямая OO' Один из листов двухсвязной поверхности, изображенной на фиг. 122, пересекается с координатными плоскостями по окружностям радиусов v_1, v_2 или v_3. Если из трех величин v_1, v_2 и v_3 две равны между собой, то один лист волновой поверхности образует вытянутый или сплюснутый сфероид, а другой — сферу, причем ось сфероида равна диаметру сферы. Луч, образующий сферическую поверхность, называется обыкновенным лучом, а образующий сфероидальную поверхность — необыкновенным.

Будем обозначать два решения уравнения (13.42) через v_a и v_b, а соответствующие им значения компонент электрической индукции — через $D^{(a)}_{x,y,z}$ и $D^{(b)}_{x,y,z}$. Помножим каждое из уравнений (13.41), написанное для $v = v_a$, на аналогичное уравнение, написанное для $v = v_b$, и сгруппируем результаты; тогда

$$\frac{\mu^2 D^{(a)}_{x,y,z} D^{(b)}_{x,y,z}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2} = \frac{n^2_{x,y,z}}{(v^2_{1,2,3} - v_a^2)(v^2_{1,2,3} - v_b^2)}. \tag{13.49}$$

Разбивая правую часть на элементарные дроби и складывая теперь эти три уравнения, получим

$$\frac{\mu^2 \mathbf{D}^{(a)}\cdot\mathbf{D}^{(b)}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2} = \frac{1}{v_a^2 - v_b^2} \sum_{x,y,z} \left(\frac{n^2_{x,y,z}}{v^2_{1,2,3} - v_a^2} - \frac{n^2_{x,y,z}}{v^2_{1,2,3} - v_b^2} \right)$$

Как следует из (13.42), каждый член суммы, стоящей в правой части, равен нулю; поэтому

$$\mathbf{D}^{(a)}\cdot\mathbf{D}^{(b)} = 0. \tag{13.50}$$

Это означает, что лучи v_a и v_b плоско поляризованы. Их плоскости поляризации расположены под прямым углом.

§ 7. Энергия, давление и импульс плоской волны. Представим себе плоскую волну в изотропной среде, падающую нормально на бесконечный плоский лист из поглощающего материала, и рассмотрим прямоугольную призму единичного поперечного сечения, основания которой параллельны поглощающему листу и расположены по разные стороны от него. Для определения потока энергии, входящей внутрь призмы, необходимо проинтегрировать вектор Умова—Пойнтинга Π по поверхности призмы. Но на боковых поверхностях [см. соотношения (13.30), (13.31)] $vB_n = E_n = 0$, т. е. $\Pi_n = 0$. Также равен нулю поток энергии сквозь основание, расположенное за поглощающим

листом. Поэтому единственным интегралом, отличным от нуля, будет интеграл по поверхности основания, расположенного со стороны падающей волны. Следовательно, согласно выражениям (13.35), (13.32), мгновенное значение скорости поглощения энергии в листе (в ваттах на квадратный метр) равно

$$\Pi = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{n}E^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}}{\mu v}.$$

В изотропных средах $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}=0$ и $\overline{B} = (\mu\varepsilon)^{1/2}\overline{E}$ [см. выражение (13.32)]; поэтому

$$\Pi_i = \mathbf{n}\frac{\varepsilon E^2}{(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \mathbf{n}\frac{B^2}{\mu(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \mathbf{n}\frac{1}{(\mu\varepsilon)^{1/2}}\left(\frac{B^2}{2\mu} + \frac{\varepsilon E^2}{2}\right). \qquad (13.51)$$

Для плотности энергии электромагнитного поля [см. соотношения (2.6) и (8.12)] мы получили выражение

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}. \qquad (13.52)$$

Скорость распространения волны равна $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$; поэтому за 1 сек. сквозь площадку, равную 1 $м^2$, проходит количество энергии, заключающееся в цилиндре, имеющем единичную площадь основания (1 $м^2$) и высоту, равную $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$ $м$.

Как было показано выше [см. соотношения (1.39) и (8.60)], в электрических и магнитных полях существует давление, равное соответственно $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ и $\frac{1}{2}B^2/\mu$ и направленное перпендикулярно к силовым линиям[1]. Если плоская волна падает на поглощающий лист, то, поскольку поле отлично от нуля только с одной стороны от листа, последний должен испытывать давление, равное (в ньютонах на 1 $м^2$)

$$P = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu^{-1}B^2. \qquad (13.53)$$

Сравнивая выражение (13.53) с (13.52), мы видим, что электромагнитное давление равно плотности энергии вблизи поверхности листа.

Предположим теперь, что поглощающий лист может свободно перемещаться; скорость перемещения листа под действием давления P будем считать очень незначительной, т. е. его массу будем считать большой[2]. Тогда между давлением P и импульсом p справедливо соотношение

$$P = \frac{dp}{dt}. \qquad (13.54)$$

Применим к этому случаю механический закон сохранения импульса. Тогда импульс, получаемый поглощающим листом, должен отдаваться волной. Сравнивая между собой соотношения (13.54) (13.53) и (13.51), мы приходим к выводу, что электромагнитная волна обладает импульсом, равным (на единицу объема) в направлении распространения $\mathbf{n}$

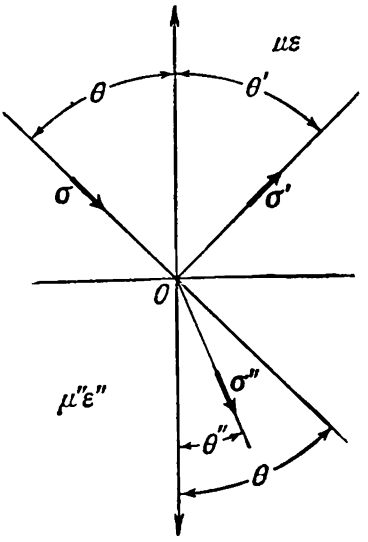
$$g_n = \mu\varepsilon\Pi_n. \qquad (13.55)$$

§ 8. Отражение и преломление плоских волн. Рассмотрим падение плоской волны на бесконечную плоскую границу раздела двух сред, магнитные и диэлектрические проницаемости которых соответственно равны μ, ε

[1] Давление электромагнитных волн (световое давление) впервые было обнаружено и измерено П. Н. Лебедевым в 1901 г. — *Прим. перев.*

[2] При большой массе будет мало ускорение листа. Для обеспечения малой скорости листа необходимо, чтобы интервал времени, в течение которого действует давление P, был бы не слишком велик. — *Прим. перев.*

и μ'', ε''. Благодаря наличию границы раздела в этом случае могут возникнуть еще две волны: отраженная волна, возвращающаяся обратно в первую среду, и преломленная волна, входящая во вторую среду. Обозначим единичные векторы в направлении распространения падающей, отраженной и преломленной волн соответственно через σ, σ' и σ''. Пусть углы, образованные единичными векторами σ, σ'' и σ' с нормалью к плоской поверхности раздела равны θ, θ'' и θ' соответственно; при этом условимся для случая падающей и преломленной волн нормаль направлять во вторую среду, а для отраженной волны — в первую (см. фиг. 123). Будем подразумевать под плоскостью падения плоскость, перпендикулярную к границе раздела и содержащую вектор σ.



Фиг. 123.

Пусть M и N — две произвольные точки в пространстве, а $\mathbf{p}$ — вектор, направленный из M в N. Будем, как и раньше, под $\mathbf{n}$ понимать единичный вектор, ориентированный нормально к фронту волны. Тогда волна, имеющая скорость v, пройдет через точку N лишь спустя $\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}/v$ сек. после того, как она пройдет через точку M. В рассматриваемом нами случае один и тот же фронт волны дважды пройдет через некоторую заданную точку P в первой среде: один раз до отражения, а другой раз после отражения. Если фронт волны в момент времени $t = 0$ проходит через точку O на границе раздела, то он должен был пройти через точку P до отражения в момент времени $t = \sigma\cdot\mathbf{r}/v$ и после отражения в момент времени $t = \sigma'\cdot\mathbf{r}/v$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный из точки O в точку P. Считая закон отражения одинаковым для всех точек границы раздела, мы получаем, что промежуток времени между этими двумя прохождениями будет таким же и для любой другой точки Q, расположенной на одинаковом с точкой P расстоянии от границы раздела. Вектор, направленный из точки O в точку Q, равен $\mathbf{r}+\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}$ лежит в плоскости раздела). Поэтому, приравнивая эти интервалы времени и умножая результаты на v, получим

$$\sigma\cdot\mathbf{r}-\sigma'\cdot\mathbf{r}=\sigma\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{s})-\sigma'\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{s}),\quad \text{или}\quad \sigma\cdot\mathbf{s}=\sigma'\cdot\mathbf{s}. \tag{13.56}$$

Следовательно, σ и σ' образуют одинаковые углы с любым вектором, лежащим в плоскости раздела двух сред, это возможно только в том случае, если σ является зеркальным отображением σ' в плоскости раздела. Таким образом, волновые нормали к падающей и отраженной волнам лежат в плоскости падения с двух противоположных сторон от нормали к границе раздела и образуют с этой нормалью равные (острые) углы.

Найдем теперь направление преломленного луча. Для прохождения фронта волны из точки P, находящейся в первой среде, в ее изображение P'', находящееся во второй среде, требуется определенное время. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный из точки O в точку P, а $\mathbf{r}''$ — радиус-вектор, направленный из точки O в точку P''. Если две другие точки (Q и ее изображение Q'') расположены на таком же расстоянии от границы раздела, что и точки P и P'', то время прохождения фронта волны из Q в Q'' будет одинаково со временем прохождения из P в P''. Радиус-векторы точек Q и Q'' равны $\mathbf{r}+\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}''+\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}$ лежит в плоскости раздела). Приравнивая интервалы времени аналогично тому, как это было проделано

для отраженной волны, мы получим

$$(\mu''\varepsilon'')^{1/2}(\sigma''\cdot\mathbf{r}'')-(\mu\varepsilon)^{1/2}(\sigma\cdot\mathbf{r})=(\mu''\varepsilon'')^{1/2}[\sigma''\cdot(\mathbf{r}''+\mathbf{s})]-(\mu\varepsilon)^{1/2}[\sigma\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{s})],$$

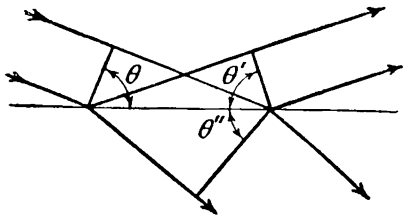
$$(\mu''\varepsilon'')^{1/2}(\sigma''\cdot\mathbf{s})=(\mu\varepsilon)^{1/2}(\sigma\cdot\mathbf{s}). \qquad (13.57)$$

Если $\mathbf{s}$ направить перпендикулярно к σ, т. е. перпендикулярно к плоскости падения, то правая часть соотношения (13.57) будет равна нулю, и, следовательно, вектор σ'' тоже будет перпендикулярен к $\mathbf{s}$. Это означает, что волновые нормали отраженной и преломленной волн лежат в плоскости падения. Выбрав теперь $\mathbf{s}$ лежащим в плоскости падения и обозначив через v и v'' скорости распространения волн в первой и во второй средах, мы получим закон преломления Снеллиуса:

$$\left(\frac{\mu''\varepsilon''}{\mu\varepsilon}\right)^{1/2}=\frac{v}{v''}=\frac{\cos\sigma\mathbf{s}}{\cos\sigma''\mathbf{s}}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=n. \qquad (13.58)$$

Величина n, равная отношению $\sin\theta$ к $\sin\theta''$, называется показателем преломления. Проделанный нами вывод одинаково справедлив и для случая анизотропных сред, с той лишь разницей, что там v и v'' различны для разных углов падения, и поэтому n зависит от θ.

§ 9. Интенсивности отраженной и преломленной волн. Закон сохранения энергии требует, чтобы поток энергии, проходящий через 1 $м^2$ поверхности раздела, был равен разности потоков энергии падающей и отраженной волн. Поэтому, как это очевидно из фиг. 124 и формулы (13.35),



Фиг. 124.

$$(\Pi-\Pi')\cos\theta=\Pi''\cos\theta''. \qquad (13.59)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать отдельно волны, у которых в плоскости падения лежит вектор $\mathbf{B}$, и волны, у которых в плоскости падения лежит вектор $\mathbf{E}$. В связи с этим все векторы, относящиеся к первому случаю, будем отмечать индексом 1, а ко второму — индексом 2.

Если вектор $\mathbf{B}_1$ лежит в плоскости падения, то вектор $\mathbf{E}_1$ параллелен границе раздела. Поэтому, исходя из соотношения (1.45), имеем

$$E_1+E_1'=E_1''. \qquad (13.60)$$

В этом случае, воспользовавшись формулой (13.51) и положив в ней $\mu=\mu''=\mu_0$, выражение (13.59) можно представить в виде

$$\varepsilon^{1/2}(E_1^2-E_1'^2)\cos\theta=\varepsilon''^{1/2}E_1''^2\cos\theta''.$$

Разделив теперь это выражение на выражение (13.60) и учтя соотношение (13.58), найдем

$$E_1-E_1'=\frac{\sin\theta\cos\theta''}{\sin\theta''\cos\theta}E_1''. \qquad (13.61)$$

Решим систему линейных алгебраических уравнений (13.60) и (13.61) относительно E_1' и E_1''; в результате получим

$$E_1'=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}E_1, \qquad (13.62)$$

$$E_1''=\frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')}E_1. \qquad (13.63)$$

Из соотношений (13.32) и (13.58) следует

$$B_1' = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')} B_1, \tag{13.64}$$

$$B_1'' = \frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\theta'')} B_1. \tag{13.65}$$

Используя выражение (13.51), можно определить интенсивность отраженной волны в виде

$$\Pi_1' = \frac{\sin^2(\theta-\theta'')}{\sin^2(\theta+\theta'')} \Pi_1. \tag{13.66}$$

Подставив выражение (13.66) в (13.59), для интенсивности преломленной волны получим

$$\Pi_1'' = \frac{2\sin\theta''\cos\theta\sin 2\theta}{\sin^2(\theta+\theta'')} \Pi_1. \tag{13.67}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда вектор $\mathbf{E}_2$ лежит в плоскости падения, а $\mathbf{B}_2$, следовательно, параллелен границе раздела. Полагая $\mu = \mu'' = \mu_0$, вместо выражения (13.60) будем иметь

$$B_2 + B_2' = B_2''. \tag{13.68}$$

Соотношение (13.59), согласно выражению (13.51), можно представить в виде

$$\varepsilon^{-1/2}(B_2^2 - B_2'^2)\cos\theta = B_2''^2 \varepsilon''^{-1/2}\cos\theta''.$$

Разделив его на выражение (13.68) и воспользовавшись соотношением (13.58), получим

$$B_2 - B_2' = \frac{\sin 2\theta''}{\sin 2\theta} B_2''. \tag{13.69}$$

Решим уравнения (13.68) и (13.69) относительно B_2' и B_2''; в результате найдем

$$B_2' = \frac{\operatorname{tg}(\theta-\theta'')}{\operatorname{tg}(\theta+\theta'')} B_2, \tag{13.70}$$

$$B_2'' = \frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')} B_2. \tag{13.71}$$

Из соотношений (13.32) и (13.58) имеем

$$E_2' = \frac{\operatorname{tg}(\theta-\theta'')}{\operatorname{tg}(\theta+\theta'')} E_2, \tag{13.72}$$

$$E_2'' = \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')} E_2. \tag{13.73}$$

Интенсивность отраженной волны будет равна

$$\Pi_2' = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta-\theta'')}{\operatorname{tg}^2(\theta+\theta'')} \Pi_2. \tag{13.74}$$

Подставляя это в соотношение (13.59), получим интенсивность преломленной волны в виде

$$\Pi_2'' = \frac{2\sin\theta''\cos\theta\sin 2\theta}{\sin^2(\theta+\theta'')\cos^2(\theta-\theta'')} \Pi_2. \tag{13.75}$$

При нормальном падении $\cos\theta$ и $\cos\theta''$ в соотношении (13.59) равны единице, поэтому вместо выражения (13.61) получим

$$E - E' = \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right)^{1/2} E'' = \frac{v}{v''} E''.$$

Учитывая выражение (13.60), найдем

$$E' = -\frac{v - v''}{v + v''} E, \tag{13.76}$$

$$E'' = \frac{2v''}{v + v''} E. \tag{13.77}$$

Из соотношения (13.51) определяем интенсивность отраженной волны

$$\Pi' = \left(\frac{v - v''}{v + v''}\right)^2 \Pi \tag{13.78}$$

и интенсивность проходящей волны

$$\Pi'' = \frac{4vv''}{(v + v'')^2} \Pi. \tag{13.79}$$

Необходимо отметить, что интенсивности, даваемые выражениями (13.66), (13.67), (13.74), (13.75), (13.78) и (13.79), представляют собой энергию, проходящую в 1 сек. сквозь 1 $м^2$ площадки, параллельной фронту волны. Чтобы получить плотность электромагнитной энергии в волне, необходимо разделить П на v — скорость распространения волны в среде.

Как очевидно из выражения (13.70), при $\theta + \theta'' = \pi/2$ $B_2' = 0$. Это означает, что если вектор **E** лежит в плоскости падения волны, то существует такой угол, при котором отраженная волна отсутствует. Его называют углом поляризации, так как падающая под этим углом неполяризованная волна отражается от границы раздела, линейно поляризованной, а именно, вектор **B** в ней лежит в плоскости падения. Угол поляризации, называемый также «углом Брюстера», можно определить из соотношения (13.58) в виде

$$\frac{\sin \theta_p}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_p\right)} = \operatorname{tg} \theta_p = \frac{v}{v''} = n. \tag{13.80}$$

§ 10. Частота. Длина волны. Эллиптическая поляризация. До сих пор при исследовании законов отражения и преломления волн мы пользовались для описания плоской волны решением волнового уравнения в общем виде $f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt)$. Теперь же при обсуждении вопросов, связанных с круговой и эллиптической поляризацией, удобнее иметь дело с регулярными периодическими функциями, которые можно всегда представить в виде ряда Фурье, состоящего из синусоидальных членов. Поэтому положим

$$f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt) = D \cos[\omega (t - v^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \varphi], \tag{13.81}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения. Все вычислительные операции значительно упрощаются, если воспользоваться [см. выражение (10.2)] тем, что

$$D \cos[\omega (t - v^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \varphi] = \operatorname{Re} D e^{i\varphi} e^{j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{v}\right)} \tag{13.82}$$

Как и в § 2 гл. X, величину $De^{i\varphi}$ обычно принято записывать в виде комплексной амплитуды $\check{D}$. Круговая частота ω связана с циклической ν соотношением

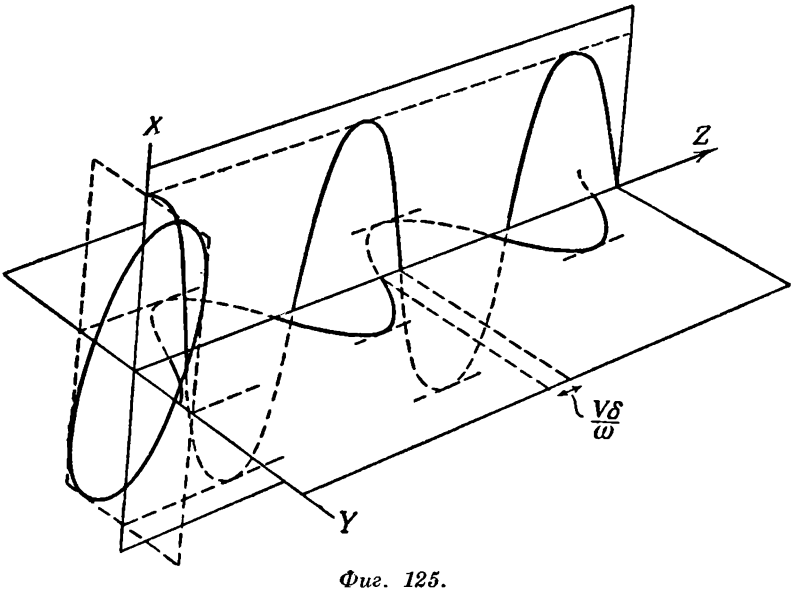
$$\omega = 2\pi\nu. \tag{13.83}$$

Длиной волны λ называется кратчайшее расстояние, которое измеряется в направлении распространения волны и через которое все ее электрические свойства повторяются. Частота, длина волны и скорость распро-

странения v связаны между собой соотношениями

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{1}{\nu(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{13.84}$$

Рассмотрим теперь суперпозицию двух плоских электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся в одном и том же направлении z. Пусть обе волны линейно поляризованы, но у одной вектор магнитной



Фиг. 125.

индукции ориентирован вдоль оси y, а у другой — вдоль оси x, так что для напряженностей электрического поля будем иметь

$$E_x = E_1 \cos[\omega(t - v^{-1}z)], \tag{13.85}$$

$$E_y = E_2 \cos[\omega(t - v^{-1}z) + \delta]. \tag{13.86}$$

На фиг. 125 показаны зависимости E_x и E_y от z. Для нахождения кривой, описываемой в плоскости xy концом вектора $\mathbf{E}$, имеющего компоненты E_x и E_y, положим $z = 0$ и исключим время t из уравнений (13.85) и (13.86). Это приводит к уравнению

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - \frac{2E_xE_y}{E_2E}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{13.87}$$

являющемуся уравнением эллипса, который показан слева на фиг. 125. Такие волны называются эллиптически поляризованными. При $\delta = n\pi$ уравнение (13.87) принимает вид

$$E_2E_x \pm E_1E_y = 0. \tag{13.88}$$

Оно описывает две прямые линии и соответствует линейно поляризованной результирующей волне. При $\delta = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ и, кроме того, при $E_1 = E_2 = E$ уравнение (13.87) дает

$$E_x^2 + E_y^2 = E^2. \tag{13.89}$$

Это уравнение окружности, и, следовательно, результирующая волна будет поляризована по кругу.

§ 11. Полное отражение. Первый пример эллиптически поляризованного излучения мы приведем в связи с явлением, называемым полным отражением. Пусть в формуле (13.58) $\varepsilon'' < \varepsilon$, тогда $\theta'' > \theta$. В частности, θ'' может равняться $\pi/2$ при $\theta < \pi/2$. Значение θ, при котором $\theta'' = \pi/2$, называется критическим углом θ_c. Явление полного отражения подтверждается экспериментально. Ниже будет показано, как можно его использовать. Предположим, что $\theta > \theta_c$ и перепишем соотношение (13.58) для случая $\mu = \mu''$, тогда получим

$$\cos\theta'' = (1 - \sin^2\theta'')^{1/2} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon''}\sin^2\theta\right)^{1/2} = j\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}\sin^2\theta - 1\right)^{1/2}.$$

Затем выражение (13.61) запишем в виде

$$E_1 - \check{E}_1' = j\frac{[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}{\cos\theta}\check{E}_1''. \tag{13.90}$$

Объединяя выражение (13.90) с (13.60), будем иметь

$$\check{E}_1' = \frac{\cos\theta - j[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}{\cos\theta + j[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}} E_1 = e^{j\psi_1}E_1, \tag{13.91}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = -\frac{2\cos\theta[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}{\cos^2\theta - \sin^2\theta + (\varepsilon''/\varepsilon)}. \tag{13.92}$$

Соответственно из выражения (13.69) получим

$$B_2 - \check{B}_2' = \frac{j\{(\varepsilon/\varepsilon'')[(\varepsilon/\varepsilon'')\sin^2\theta - 1]\}^{1/2}}{\cos\theta}\check{B}_2''.$$

Объединяя последнее выражение с (13.68), найдем

$$\check{B}_2' = \frac{\cos\theta - j\{(\varepsilon/\varepsilon'')[(\varepsilon/\varepsilon'')\sin^2\theta - 1]\}^{1/2}}{\cos\theta + j\{(\varepsilon/\varepsilon'')[(\varepsilon/\varepsilon'')\sin^2\theta - 1]\}^{1/2}} B_2 = e^{j\psi_2}B_2, \tag{13.93}$$

$$\operatorname{tg}\psi_2 = -\frac{2\cos\theta\{(\varepsilon/\varepsilon'')[(\varepsilon/\varepsilon'')\sin^2\theta - 1]\}^{1/2}}{\cos^2\theta - (\varepsilon/\varepsilon'')^2\sin^2\theta + (\varepsilon/\varepsilon'')}. \tag{13.94}$$

Поскольку, как это очевидно из соотношений (13.91) и (13.93), $|E_1'| = |E_1|$ и $|B_2'| = |B_2|$, то падающие и отраженные лучи имеют одинаковые интенсивности. Поэтому из закона сохранения энергии следует, что преломленный луч не переносит никакой энергии. Это подтверждается также непосредственным вычислением E_1'' и B_2'' и затем Π''. Сравнивая соотношения (13.91) и (13.93) с соотношением (13.82), мы видим, что при отражении волны, в которой вектор **B** лежит в плоскости падения, фазовый угол меняется на величину ψ_1, а при отражении волны, в которой вектор **B** перпендикулярен к плоскости падения, — на величину ψ_2. Таким образом, в случае падения линейно поляризованной волны, имеющей компонентами напряженности электрического поля E_1 и E_2, отраженная волна будет поляризована по эллипсу. Разность фаз δ можно определить, поделив выражение (13.91) на (13.93) и учитывая, согласно соотношению (13.32), что $B_2' = (\mu\varepsilon)^{1/2}E_2'$ и $B_2 = (\mu\varepsilon)^{1/2}E_2$,

$$e^{j\delta} = e^{j(\psi_1 - \psi_2)} = \frac{\sin^2\theta + j\cos\theta[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}{\sin^2\theta - j\cos\theta[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}.$$

Отношение мнимой части этого выражения к действительной дает $\operatorname{tg}\delta$. Пользуясь формулой (406.02) из справочника Двайта, для $\operatorname{tg}\delta/2$ можно получить

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta[\sin^2\theta - (\varepsilon''/\varepsilon)]^{1/2}}{\sin^2\theta}. \tag{13.95}$$

§ 12. Электромагнитные волны в однородных проводниках. Для сред с отличной от нуля проводимостью необходимо учитывать все члены в волновых уравнениях (13.10) и (13.11). При выводе уравнения (13.11) предполагалось, что $\rho = 0$. Чтобы показать справедливость этого предположения для проводящих сред, возьмем дивергенцию от уравнения (13.1), т. е.

$$\mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu\gamma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Вместо $\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}$, согласно уравнению (13.3), можно написать ρ и проинтегрировать в пределах от 0 до t' и от ρ_0' до ρ'; в результате получим

$$\rho' = \rho_0' e^{-\gamma t'/\varepsilon}. \tag{13.96}$$

Таким образом, всякое распределение плотности электрического заряда ρ_0' постепенно убывает до нуля совершенно независимо от электромагнитных возмущений. Если ρ_0' первоначально было равно нулю, то ρ' будет все время равно нулю. Поэтому мы вообще можем положить $\rho = 0$. Время релаксации T определяется по формуле

$$T = \tau\varepsilon = \gamma^{-1}\varepsilon. \tag{13.97}$$

Рассмотрим простой периодический процесс, для которого векторы B и E можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{Re} \check{\mathbf{B}} e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \mathbf{B}_a e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Производная по времени $\partial/\partial t$ сводится к умножению на $j\omega$; поэтому вместо уравнения (13.10) и (13.11) получим

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu(j\omega\gamma - \omega^2\varepsilon)\mathbf{B}, \tag{13.98}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu(j\omega\gamma - \omega^2\varepsilon)\mathbf{E}. \tag{13.99}$$

По своей форме эти уравнения совпадают с уравнениями (13.10) и (13.11), написанными для периодических процессов в диэлектриках, только вместо ε для проводящих сред нужно писать $\varepsilon - j\gamma/\omega$. Действительная и мнимая части часто встречающейся комплексной величины $(\mu\varepsilon)^{1/2}$ соответственно равны (Двайт, 58.2)

$$[\mu(\varepsilon - j\omega^{-1}\gamma)]^{1/2} = n + jk, \tag{13.100}$$

$$n = \left\{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2} + 1\right]\right\}^{1/2}, \quad k = -\left\{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\}^{1/2}. \tag{13.101}$$

§ 13. Плоские волны в однородных изотропных проводниках. Некоторые свойства плоских волн в проводящих средах можно получить непосредственно при помощи описанной выше подстановки, исходя из свойств плоских волн в диэлектриках, рассмотренных в § 4. Действительно, в случае изотропных сред соотношения (13.30) — (13.32) не зависят от характера величины ε, поэтому и в однородных проводниках векторы $\check{\mathbf{B}}$ и $\check{\mathbf{E}}$ параллельны фронту волны. Из соотношения (13.33) имеем

$$\hat{B}_0 = (n + jk)E_0 = (n^2 + k^2)^{1/2} E_0 e^{j \operatorname{arc\,tg}(k/n)}, \tag{13.102}$$

т. е. векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол $\operatorname{arc\,tg}(k/n)$. Переписывая $\check{\mathbf{E}}$ в форме (13.82) и подставляя в соотношение (13.102), получим

$$\check{\mathbf{E}} e^{j\omega t} = \varepsilon A_1 e^{\omega k \sigma \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega(t - n\sigma \cdot \mathbf{r})}, \tag{13.103}$$

$$\check{\mathbf{B}} e^{j\omega t} = (\varepsilon \times \sigma)(n^2 + k^2)^{1/2} A_1 e^{\omega k \sigma \cdot \mathbf{r}} e^{j[\omega(t - n\sigma \cdot \mathbf{r}) + \operatorname{arc\,tg}(k/n)]}, \tag{13.104}$$

где ε — единичный вектор вдоль $\check{\mathbf{E}}$, а σ — единичный вектор, нормальный к фронту волны. Мы видим, что по мере проникновения волны в среду $\check{\mathbf{E}}$ и $\check{\mathbf{B}}$ экспоненциально убывают. Это свидетельствует о наличии поглощения в среде. Поглощение растет с увеличением k. Величина n называется показателем преломления, а k — коэффициентом затухания.

Иногда бывает полезно знать порядки этих величин, например, для неферромагнитных сред с магнитной проницаемостью, близкой к μ_0. Точное значение диэлектрической проницаемости проводников неизвестно, но, повидимому, по порядку величин она совпадает с проницаемостью диэлектриков. В качестве типичного примера возьмем медь, проводимость которой приблизительно равна $5{,}8\cdot10^7$ $1/ом\cdot м$. Обозначив длину волны в вакууме через λ_0 и используя выражение (13.84), получим для меди ($K=\varepsilon/\varepsilon_0$)

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{\lambda_0\gamma}{2\pi c\varepsilon}\approx\frac{\lambda_0}{K}\cdot 3{,}38\cdot10^9.$$

Эта величина значительно больше единицы всегда, за исключением очень коротких волн, поэтому n и k в выражении (13.101) с большой точностью равны

$$n\approx -k\approx\left(\frac{1}{4}\mu\lambda_0\gamma\right)^{1/2}(\pi c)^{-1/2}. \tag{13.105}$$

При помощи соотношения (13.104) подсчитаем расстояние, на котором величины $\check{\mathbf{E}}$ и $\check{\mathbf{B}}$ уменьшаются в $e^{2\pi}=5\cdot10^2$ раз. Это расстояние равно

$$d=-\frac{2\pi}{\omega k}=-\frac{\lambda_0}{kc}=\left(\frac{4\pi\lambda_0}{\mu\gamma c}\right)^{1/2} м. \tag{13.106}$$

При λ_0 равном 1 *см*, 1 *м*, 100 *м*, 10 *км* величина d для меди принимает соответственно значения 0,0025 *мм*, 0,024 *мм*, 0,24 *мм*, 2,4 *мм*. Представляет также интерес сравнить средние значения электрической и магнитной энергий в волне. Из соотношений (13.104) и (13.52) имеем

$$\frac{W_e}{W_m}=\mu\varepsilon\frac{E^2}{B^2}=\frac{\mu\varepsilon}{n^2+k^2}\approx\frac{2\pi\varepsilon c}{\lambda_0\gamma}. \tag{13.107}$$

Предположим, что $\varepsilon=2\varepsilon_0$, тогда для только что рассмотренных длин волн это отношение соответственно равно $W_e/W_m=5{,}7\cdot10^{-8}$, $5{,}7\cdot10^{-10}$, $5{,}7\cdot10^{-12}$, $5{,}7\cdot10^{-14}$, т. е. полная энергия почти целиком магнитная.

§ 14. Отражение от проводящей поверхности. В § 12 было показано, что в проводящей среде величину $(\mu''\varepsilon'')^{1/2}$ нужно заменить на

$$[\mu''(\varepsilon''-j\omega^{-1}\gamma)]^{1/2}=n+jk.$$

Таким образом, из соотношения (13.58) при помощи выражения (13.100) для $\sin\theta''$ и $\cos\theta''$ получаем

$$\sin\theta''=\frac{(\mu\varepsilon)^{1/2}}{n+jk}\sin\theta,\qquad \cos\theta''=\left[1-\frac{\mu\varepsilon\sin^2\theta}{(n+jk)^2}\right]^{1/2} \tag{13.108}$$

Из предыдущего параграфа следует, что для длин волн порядка 1 *см* и более

$$-k\approx n>1{,}4\cdot10^4.$$

Поэтому угол θ'', определяемый формулой (13.108), оказывается комплексной величиной, очень малой по модулю. Если вектор магнитной индукции лежит в плоскости падения, то, согласно выражению (13.66), имеем

$$\Pi_1'=\frac{\sin^2(\theta-\theta'')}{\sin^2(\theta+\theta'')}\Pi_1\xrightarrow[\theta''\to0]{}\Pi_1. \tag{13.109}$$

Если же в плоскости падения лежит вектор напряженности электрического поля и, кроме того, угол падения θ не слишком близок к $\pi/2$, то из выражения (13.74) получаем

$$\Pi_2' = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}^2(\theta + \theta'')}\,\Pi_2 \xrightarrow[\theta''\to 0]{} \Pi_2. \tag{13.110}$$

Итак, сравнительно длинные электромагнитные волны полностью отражаются от проводящей поверхности независимо от поляризации и угла падения. При меньших значениях проводимости те же результаты справедливы для более длинных волн. Та незначительная часть поля, которая проникает внутрь проводника, очень быстро затухает в нем по мере удаления от его поверхности, так что даже очень тонкий металлический лист почти совершенно непрозрачен по отношению к коротким волнам. Для определения поляризации отраженного луча разделим выражение (13.62) на выражение (13.72), в результате чего получим

$$\frac{E_2'}{E_1'} = -\frac{\cos(\theta + \theta'')\,E_2}{\cos(\theta - \theta'')\,E_1} = -\frac{(\cos\theta'' - \sin\theta''\operatorname{tg}\theta)\,E_2}{(\cos\theta'' + \sin\theta''\operatorname{tg}\theta)\,E_1}. \tag{13.111}$$

В рассмотренном нами диапазоне длин волн

$$n + jk \approx n(1 - j).$$

Если $|\mu\varepsilon/(n + jk)^2| \ll 1$, то $\cos\theta'' = 1$, и из формулы (13.108) имеем

$$\frac{E_2'}{E_1'} = \frac{[n - (\mu\varepsilon)^{1/2}\sin\theta\operatorname{tg}\theta - jn]\,E_2}{[n + (\mu\varepsilon)^{1/2}\sin\theta\operatorname{tg}\theta - jn]\,E_1} = \left\{\frac{[n - (\mu\varepsilon)^{1/2}\sin\theta\operatorname{tg}\theta]^2 + n^2}{[n + (\mu\varepsilon)^{1/2}\sin\theta\operatorname{tg}\theta]^2 + n^2}\right\}^{1/2} e^{j\delta}\frac{E_2}{E_1}, \tag{13.112}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2n(\mu\varepsilon)^{1/2}\sin\theta\operatorname{tg}\theta}{2n^2 - \mu\varepsilon\sin^2\theta\operatorname{tg}^2\theta}. \tag{13.113}$$

Поскольку n — величина большая при любых углах падения θ, за исключением близких к $\pi/2$, то

$$\frac{E_2'}{E_1'} = \frac{E_2}{E_1}.$$

При $\operatorname{tg}\theta \to \infty$ появляются изменения не только величин E_2' и E_1', но и сдвига по фазе δ. Таким образом, для длин волн порядка 1 *см* и более эллиптически поляризованное излучение получается только при скользящем падении линейно поляризованной волны.

§ 15. Плоские волны вдоль идеально проводящих цилиндрических проводников. Плоские волны могут распространяться не только в свободном пространстве или в бесконечно протяженной диэлектрической среде с плоскими границами, но и вдоль системы идеально проводящих цилиндрических проводников, т. е. в некотором направлении z, вдоль которого поперечные сечения проводников не меняются. Согласно § 3 гл. XI, электромагнитное поле не проникает внутрь идеального проводника, а токи текут лишь в бесконечно тонком слое по его поверхности, поэтому с идеальным проводником не связано никаких потерь энергии. Интересующую нас задачу можно решить несколькими способами. При получении результатов § 26 гл. VII считалось, что вектор-потенциал, а следовательно, согласно § 2, и вектор Герца ориентированы вдоль направления z, т. е. параллельно токам. Решение волнового уравнения для вектора Герца дает и скалярный потенциал и вектор-потенциал. Если, воспользовавшись уравнением (13.16), исключить скалярный потенциал, то полученный вектор-потенциал будет лежать в плоскости, нормальной z. Тот же результат можно получить

непосредственно, решая скалярное волновое уравнение

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right]=0. \tag{13.114}$$

Решение получается, если каждую из скобок по отдельности приравнять нулю[1]. Это решение имеет вид

$$W=V_1(x, y)\, f_1[z-(\mu\varepsilon)^{-1/2}t]+V_2(x, y)\, f_2[z+(\mu\varepsilon)^{-1/2}t], \tag{13.115}$$

где V_1 и V_2—решения двухмерного уравнения Лапласа. Пусть W_1 и W_2—комплексные потенциальные функции, рассмотренные в гл. IV, тогда

$$W_1=U_1+jV_1=F_1(x+jy), \qquad W_2=U_2+jV_2=F_2(x+jy). \tag{13.116}$$

Если $\nabla_2 V$ определен как $\mathbf{i}(\partial V/\partial x)+\mathbf{j}(\partial V/\partial y)$, то из § 11 гл. IV мы имеем

$$-\mathbf{k}\times\nabla_2 V=\nabla_2 U, \quad \mathbf{k}\times\nabla_2 U=\nabla_2 V, \quad \nabla\times[\nabla_2 U f(z)]=\mathbf{k}\times\nabla_2 U f'(z). \tag{13.117}$$

Из соотношения (11.11) вектор-потенциал поперечного электрического поля равен

$$\begin{aligned}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{k}W&=-\mathbf{k}\times\nabla_2 V_1 f_1[z-(\mu\varepsilon)^{-1/2}t]-\mathbf{k}\times\nabla_2 V_2 f_2[z+(\mu\varepsilon)^{-1/2}t]=\\&=\nabla_2 U_1(x, y)\, f_1[z-(\mu\varepsilon)^{-1/2}t]+\nabla_2 U_2(x, y)\, f_2[z+(\mu\varepsilon)^{-1/2}t].\end{aligned} \tag{13.118}$$

Очевидно, что первый член соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси z, а второй — в отрицательном направлении оси z. Поля определяются по формулам

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla_2 V(x, y)\, f'[z\mp(\mu\varepsilon)^{-1/2}t], \tag{13.119}$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}=\pm(\mu\varepsilon)^{-1/2}\nabla_2 U(x, y)\, f'[z\mp(\mu\varepsilon)^{-1/2}t]. \tag{13.120}$$

Верхний знак относится к волне, распространяющейся в положительном направлении. Из уравнений (13.117), (13.119) и (13.120) имеем

$$(\mu\varepsilon)^{1/2}\mathbf{E}=\mp\mathbf{k}\times\mathbf{B}. \tag{13.121}$$

Будем различать две группы проводников, предполагая, что токи втекают в проводники одной группы и возвращаются по проводникам другой группы. Тогда из уравнения (13.120) с очевидностью следует, что если при некотором значении z потенциалы проводников, относящихся к одной и той же группе, одинаковы, то они останутся одинаковыми и при любых других значениях z. Для нахождения соотношения между полным током и суммарным зарядом в любой из групп, состоящей из n проводников, нужно воспользоваться формулой (13.121), уравнением (7.2), а также привлечь теорему Гаусса (1.40). В результате получим

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\oint\varepsilon E_n\, ds_i=(\mu\varepsilon)^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\oint H_t\, ds_i=(\mu\varepsilon)^{1/2}I. \tag{13.122}$$

Обозначим через L самоиндукцию на единицу длины, через C — емкость на единицу длины, а через S—площадь поперечного сечения $z=\text{const}$, не занимаемую проводниками. Тогда из соотношений (2.15), (2.47) и (8.35) имеем

$$\frac{LI^2}{2}=\int_S\frac{B^2}{2\mu}\,dS=\int_S\frac{\varepsilon E^2}{2}\,dS=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\mu\varepsilon}{2C}I^2. \tag{13.123}$$

[1] Полагая в уравнении (13.114) постоянную разделения равной нулю, автор ограничивается рассмотрением только главных волн, не оговаривая этого.—*Прим. перев.*

Таким образом, L и C оказываются связанными между собой соотношением

$$LC = \mu\varepsilon = v^{-2}. \tag{13.124}$$

Произведение LC равно величине, обратной квадрату скорости распространения электромагнитной волны в окружающей проводники среде.

Если в некоторой плоскости $z = 0$ задана зависимость векторов **E** и **B** от времени, то, пользуясь уравнением (13.118), легко получить выражение для **A**, пригодное при любых z,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla_2 U(x, y)\{f[t - (\mu\varepsilon)^{1/2} z] + f[t + (\mu\varepsilon)^{1/2} z] + \\ + g[t - (\mu\varepsilon)^{1/2} z] - g[t + (\mu\varepsilon)^{1/2} z]\}. \tag{13.125}$$

Пусть U и V даются формулой (13.116), тогда выражение (13.125) приводит к следующим значениям полей в сечении $z = 0$:

$$\mathbf{E}_0 = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_0 = -\nabla_2 U(x, y) f'(t),$$
$$\mathbf{B}_0 = (\nabla \times \mathbf{A})_0 = -(\mu\varepsilon)^{1/2} \nabla_2 V(x, y) g'(t). \tag{13.126}$$

Столь же просто, пользуясь уравнением (13.118), написать выражение для **A**, если в момент $t = 0$ векторы **E** и **B** заданы в виде функции от z:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla_2 U(x, y)\{f[(\mu\varepsilon)^{1/2} z + t] - f[(\mu\varepsilon)^{1/2} z - t] - \\ - g[(\mu\varepsilon)^{1/2} z + t] - g[(\mu\varepsilon)^{1/2} z - t]\}. \tag{13.127}$$

Пусть U и V определены по формуле (13.116), тогда из выражения (13.127) для **A** получим следующие значения полей в момент времени $t = 0$:

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla_2 U(x, y) f'[(\mu\varepsilon)^{1/2} z], \quad \mathbf{B}_0 = -(\mu\varepsilon)^{1/2} \nabla_2 V(x, y) g'[(\mu\varepsilon)^{1/2} z]. \tag{13.128}$$

§ 16. Характеристический импеданс среды [1]. Если вместо идеального диэлектрика, с которым мы имели дело в предыдущем параграфе, рассматривать среду с проводимостью γ, то уравнение (13.114) необходимо переписать в виде

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \mu\gamma\frac{\partial W}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right] = 0. \tag{13.129}$$

Если теперь вторая скобка равна нулю, то решение уже нельзя записать через произвольные функции. Поэтому мы используем метод разделения переменных, описанный в гл. V, согласно которому уравнение в частных производных разбивается на два уравнения, содержащих полные производные. Решение последних можно представить в виде экспоненциальных функций, причем в зависимости от того, будет ли постоянная разделения действительной или мнимой величиной, решение будет гармоническим в пространстве (переходный процесс) или гармоническим во времени (установившийся процесс). Сейчас мы будем рассматривать только установившиеся решения, предполагая зависимость от времени заданной в виде фактора $e^{j\omega t}$ (см. § 10 настоящей главы). Функцию W, удовлетворяющую уравнению (13.129), можно представить в виде произведения двух множителей; второй множитель удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.106), поэтому функции $f[z \pm (\mu\varepsilon)^{-1/2} t]$, входившие в ряд формул предыдущего

[1] Термин «характеристический импеданс» здесь и далее сохранен за отношением E/H, термин «волновое сопротивление» — за отношением V/I в бегущей волне.— *Прим. перев.*

параграфа, необходимо теперь заменить на $e^{\pm\check{\Gamma}z+j\omega t}$, где

$$\check{\Gamma}^2 = j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) = (\alpha + j\beta)^2, \tag{13.130}$$

$$\alpha = \left\{\left(\frac{1}{2}\omega\mu\right)[(\omega^2\varepsilon^2+\gamma^2)^{1/2} - \omega\varepsilon]\right\}^{1/2}, \quad \beta = \left\{\left(\frac{1}{2}\omega\mu\right)[(\omega^2\varepsilon^2+\gamma^2)^{1/2} + \omega\varepsilon]\right\}^{1/2} \tag{13.131}$$

Здесь $\check{\Gamma}$ — постоянная распространения, α — коэффициент затухания волны, а β — волновое число (или фазовая постоянная). Теперь вместо уравнений (13.119) и (13.120) для волн, распространяющихся в положительном или отрицательном направлениях оси z, будем иметь

$$\mathbf{B} = \mathrm{Re}[\mp\check{\Gamma}\nabla_2 V(x, y)\, e^{\mp\check{\Gamma}z+j\omega t}] =$$
$$= \mp\nabla_2 V(x, y)\, e^{\mp\alpha z}[\alpha\cos(\omega t \mp \beta z) - \beta\sin(\omega t \mp \beta z)], \tag{13.132}$$

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}[-j\omega\nabla_2 U(x, y)\, e^{\check{\Gamma}z+j\omega t}] = \omega\nabla_2 U(x, y)\, e^{\mp\alpha z}\sin(\omega t \mp \beta z), \tag{13.133}$$

$$\check{\Gamma}\mathbf{E} = \mp j\omega(\mathbf{k}\times\check{\mathbf{B}}), \text{ или } \check{\Gamma}\mathbf{k}\times\check{\mathbf{E}} = \pm j\omega\check{\mathbf{B}}. \tag{13.134}$$

Согласно формуле (6.57), произведение сопротивления R между проводниками на емкость C равно $\tau\varepsilon$ или ε/γ (и сопротивление и емкость отнесены к единице длины). Поэтому шунтирующая полная проводимость $\check{Y}$ и последовательный импеданс $\check{Z}_L$, фигурирующие в § 19 гл. X, равны

$$\check{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{\gamma + j\omega\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\mu\varepsilon}{L} = \frac{\check{\Gamma}^2}{j\omega L}, \quad \check{Z}_L = j\omega L.$$

Тогда из соотношения (10.109) для волнового сопротивления линии получим

$$\check{Z}_k = \left(\frac{\check{Z}_L}{\check{Y}}\right)^{1/2} = \frac{j\omega L}{\check{\Gamma}} = \frac{\check{V}}{\check{I}} = \frac{L\check{E}}{\check{B}} = \frac{j\omega\mu\varepsilon}{\check{\Gamma}C}. \tag{13.135}$$

Рассмотрим теперь частный случай линии, состоящей из двух бесконечных параллельных проводящих плоскостей, расположенных на расстоянии 1 *м* друг от друга. Емкость на единицу длины участка линии, имеющего площадь поперечного сечения в z-направлении 1 $м^2$, равна ε, поэтому волновое сопротивление будет равно

$$\check{Z}_k = \left(\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta}, \tag{13.136}$$

причем $V = E$, $B = \mu i$ (i — плотность тока). Мы видим, что $\check{Z}_k$ зависит только от свойств среды. Конфигурация поля в такой линии совпадает с конфигурацией поля в плоско поляризованной волне. Поэтому разумно, следуя Шелкунову, назвать $\check{Z}_k$ характеристическим импедансом среды. Сравнение формул (13.136) и (13.58) показывает, что для оптически прозрачных сред, когда $\gamma = 0$, а $\mu = \mu_0$, характеристический импеданс пропорционален показателю преломления. Пользуясь выражениями (13.131) и (13.136), можно определить характеристическую постоянную распространения среды в виде

$$\check{\Gamma}_k = \alpha + j\beta = [j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)]^{1/2} = j\omega\mu Z_k^{-1}. \tag{13.137}$$

§ 17. Отражения от неоднородностей. Согласующие секции. Предположим, что описанная в последнем параграфе плоская волна, бегущая в направлении z, встречает на своем пути плоскую границу раздела ($z = \mathrm{const}$) двух сред, причем среда, простирающаяся за этой границей, имеет диэлектрическую проницаемость ε_2, магнитную μ_2 и проводимость γ_2. Соотношения между значениями напряжения и тока, соответствующими

падающей, отраженной и проходящей волнам, согласно выражению (13.135), имеют вид

$$\check{V}_1 = \check{Z}_1 \check{i}_1, \quad \check{V}'_1 = -\check{Z}_1 \check{i}'_1, \quad \check{V}_2 = \check{Z}_2 \check{i}_2. \tag{13.138}$$

На самой границе потенциалы и токи должны быть непрерывны, что дает

$$\check{V}_1 + \check{V}'_1 = \check{V}_2 \quad \text{и} \quad \check{i}_1 + \check{i}'_1 = \check{i}_2. \tag{13.139}$$

В результате совместного решения написанных выше уравнений для $\check{V}_1$, $\check{V}_2$, $\check{i}_1$ и $\check{i}_2$ получим

$$\frac{\check{V}'_1}{\check{V}_1} = -\frac{\check{i}'_1}{\check{i}_1} = \frac{\check{Z}_2 - \check{Z}_1}{\check{Z}_2 + \check{Z}_1}, \quad \frac{\check{V}_2}{\check{V}_1} = \frac{\check{i}_2 \check{Z}_2}{\check{i}_1 \check{Z}_1} = \frac{2\check{Z}_2}{\check{Z}_1 + \check{Z}_2}. \tag{13.140}$$

Если обе среды непроводящие, то, как легко видеть из выражений (13.131), (13.135) и (13.58), отношение $\check{Z}_2/\check{Z}_1$ можно заменить на отношение v_2/v_1, т. е. на отношение скоростей распространения волн в двух средах. Следовательно, закон отражения потенциалов при нормальном падении такой же, как и для напряженностей электрического поля [см. выражения (13.76) и (13.77)]. Оперируя с отдельными компонентами, можно использовать формулы линий передачи при получении законов отражения для произвольных углов падения.

Путем введения согласующей секции можно избежать отражений при переходе электромагнитной волны из одной непроводящей диэлектрической среды ($\mu_1 \varepsilon_1$) в другую ($\mu_3 \varepsilon_3$). При идеальной передаче входной импеданс согласующего слоя или секции должен быть равен характеристическому импедансу первой среды. Согласно соотношению (13.135), нужно положить в выражении (10.112)

$$\check{Z}_i = L(\mu_1 \varepsilon_1)^{-1/2}, \quad \check{Z}_k = L(\mu_2 \varepsilon_2)^{-1/2}, \quad \check{Z}_L = L(\mu_3 \varepsilon_3)^{-1/2},$$
$$\check{\Gamma} = j\omega(\mu_2 \varepsilon_2)^{1/2} = 2\pi j \lambda_2^{-1}.$$

Для согласования необходимо удовлетворить следующему уравнению:

$$\left(\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}\right)^{1/2} = \frac{(\mu_3 \varepsilon_3)^{1/2} \cos(2\pi l/\lambda_2) + j(\mu_2 \varepsilon_2)^{1/2} \sin(2\pi l/\lambda_2)}{(\mu_2 \varepsilon_2)^{1/2} \cos(2\pi l/\lambda_2) + j(\mu_3 \varepsilon_3)^{1/2} \sin(2\pi l/\lambda_2)}. \tag{13.141}$$

Это уравнение будет иметь место, если положить [1]

$$l = \frac{1}{4}(2n+1)\lambda_2 \quad \text{и} \quad \mu_2 \varepsilon_2 = (\mu_1 \varepsilon_1)^{1/2} (\mu_3 \varepsilon_3)^{1/2}. \tag{13.142}$$

Таким образом, длина согласующей секции равна нечетному числу $\lambda_2/4$, а ее характеристический импеданс — среднему геометрическому импедансов первой и второй сред; пользуясь оптической терминологией, можно сказать, что показатель преломления согласующего слоя должен быть равен среднему геометрическому показателей преломления сред, расположенных справа и слева от согласующего слоя. Четверть-волновые слои широко применяются для уменьшения отражений от поверхностей линз.

§ 18. Комплексный вектор Умова—Пойнтинга. Выражение для вектора Умова — Пойнтинга в комплексном виде полезно в тех случаях, когда

[1] Формула (13.142) неправильная. Ошибка при выводе заключается в том, что самоиндукция L магнетика равна μ, т. е. разная в различных средах. Следовательно, вместо (13.142) должно иметь место следующее условие согласования:

$$\mu_2 \varepsilon_2^{-1} = (\mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{-1/2})(\mu_3^{1/2} \varepsilon_3^{-1/2}); \quad l = 1/4 (2n+1)\lambda_2.$$

В оптике обычно $\mu = \mu_0$, поэтому формула (13.142) дает правильное соотношение между диэлектрическими проницаемостями.—*Прим. перев.*

поля меняются со временем синусоидально и, следовательно, оператор $\partial/\partial t$ нельзя заменить на множитель $j\omega$. Перепишем уравнение (13.2) и уравнение, комплексно сопряженное с (13.1). Последняя операция является вполне законной, так как она не изменяет реальной части уравнения

$$\nabla \times \check{\mathbf{E}} = -j\omega\check{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \hat{\mathbf{B}} = \mu(\gamma - j\omega\varepsilon)\hat{\mathbf{E}}. \tag{13.143}$$

Умножив первое уравнение на $\hat{\mathbf{B}}$, а второе на $-\check{\mathbf{E}}$ и сложив результаты, получим

$$\hat{\mathbf{B}}\cdot(\nabla\times\check{\mathbf{E}}) - \check{\mathbf{E}}\cdot(\nabla\times\hat{\mathbf{B}}) = -[\mu\gamma\check{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}} - j\omega(\mu\varepsilon\check{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}} - \check{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{B}})].$$

Как и в § 3, левую часть этого выражения, равную $\nabla\,(\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}})$, проинтегрируем по объему v и применим теорему Гаусса. По закону Ома (6.8) вместо $\check{\mathbf{E}}$ можно написать $\check{\mathbf{i}}/\gamma$, или $\tau\check{\mathbf{i}}$, где $\check{\mathbf{i}}$ — плотность тока; в результате получим

$$-\mu^{-1}\int_S \mathbf{n}\,(\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}})\,dS = \int_v \tau i^2\,dv - j\omega\int_v(\varepsilon\check{\mathbf{E}}\cdot\check{\mathbf{E}} - \mu^{-1}\check{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{B}})\,dv. \tag{13.144}$$

Из выражения (11.10) следует, что реальная часть члена, стоящего в левой части, равна удвоенной величине средней энергии, поглощаемой в течение 1 сек. внутри объема интегрирования. Таким образом, проинтегрировав нормальную компоненту вектора

$$\overline{\Pi} = \mathrm{Re}\left[\tfrac{1}{2}\mu^{-1}(\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}})\right] = \tfrac{1}{4}\mu^{-1}(\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}}\times\check{\mathbf{B}}) \tag{13.145}$$

(нормаль направлена внутрь объема) по замкнутой поверхности, окружающей этот объем, мы получим скорость поглощения электромагнитной энергии внутри него. Эту формулу можно использовать, например, для определения потока энергии, проходящего сквозь плоскость $z = z_0$ линии передачи, описанной в § 16. Исключив при помощи выражения (13.134) $\check{\mathbf{E}}$ из выражения (13.145) и используя соотношения (13.123) и (13.135) для волны, бегущей в положительном направлении оси z, получим

$$\int_S \overline{\Pi}\,dS = -\frac{j\omega}{2\mu\check{\Gamma}}\int_S(\mathbf{k}\times\check{\mathbf{B}})\times\hat{\mathbf{B}}\,dS = \mathbf{k}\frac{j\omega}{\check{\Gamma}}\int_S\frac{\check{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}}{2\mu}\,dS = \mathbf{k}\frac{j\omega LI^2}{2\check{\Gamma}} = \mathbf{k}\frac{\check{V}\hat{I}}{2}. \tag{13.146}$$

Как и в выражении (13.122), потенциал предполагается положительным на тех проводниках, по которым ток течет в положительном направлении z. Если изменить знак напряжения или тока (какую-либо одну величину, а не обе сразу), то направление потока энергии сменится на обратное.

§ 19. Квазиплоские волны вдоль неидеальных проводников. Двухпроводная линия Лехера. Если линия передачи, рассмотренная в § 15 и 16, образована проводниками, имеющими конечную проводимость, то из-за наличия вихревых токов часть энергии будет выделяться в виде тепла на поверхности этих проводников. Напряженность электрического поля будет иметь z-компоненту, что приводит к появлению составляющей вектора Умова — Пойнтинга, направленной внутрь проводника. Очевидно, что теперь волна уже не будет чисто плоской. В большинстве практически важных случаев потери мощности на единицу длины малы по сравнению с мощностью, передаваемой вдоль линии, поэтому направление вектора Π незначительно отклоняется от оси z. Поскольку потери энергии пропорциональны квадрату напряженности поля, то поле экспоненциально убывает вдоль z, что приводит к появлению в последовательном импедансе $\check{Z}_L$ активной составля-

ющей R_i. Кроме того, благодаря проникновению магнитного поля внутрь проводника к $\check{Z}_L$ добавляется еще и внутреннее индуктивное сопротивление $j\omega L_i$. Учитывая все это, для волнового сопротивления, определяемого по формуле (13.135), получаем

$$\check{Z}_k = \left(\frac{\check{Z}_L}{\check{Y}}\right)^{1/2} = \left(\frac{L\,[R_i + j\omega\,(L + L_i)]}{\mu\,(\gamma + j\omega\varepsilon)}\right)^{1/2} \tag{13.147}$$

Для большинства линий передачи $R_i \ll \omega L$, $L_i \ll L$ и $\gamma \ll \omega\varepsilon$, поэтому для линии в вакууме волновое сопротивление и постоянная распространения соответственно равны

$$\check{Z}_k = L\,(\mu_v\varepsilon_v)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 L = (3 \cdot 10^8 C)^{-1}, \tag{13.148}$$

$$\check{\Gamma}^2 = \check{Z}_L\check{Y} = \mu L^{-1}\,(\gamma + j\omega\varepsilon)\,[R_i + j\omega\,(L + L_i)]. \tag{13.149}$$

В качестве примера найдем $\check{Z}_k$ и $\check{\Gamma}$ для системы Лехера, состоящей из двух параллельных проводов диаметра d, расстояние между осями которых равно b. Пользуясь формулами (4.71) и (13.124), можно определить внешнюю индуктивность в виде

$$L = \frac{\mu\varepsilon}{C} = \frac{\mu}{\pi}\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{b}{d}. \tag{13.150}$$

Заметим, что L зависит только от конфигурации и не зависит от отдельных размеров. Будем теперь считать частоту и проводимость настолько большими, чтобы глубина проникновения δ была значительно меньше d. Тогда для сопротивления R_i' (на единицу площади) и для индуктивности L_i' (на единицу площади) можно использовать формулу (11.26), в результате имеем

$$R_i I^2 = 2R_i' \oint i_s^2\,ds, \qquad L_i I^2 = 2L_i' \oint i_s^2\,ds, \tag{13.151}$$

где i_s — ток, текущий в цилиндрическом поверхностном слое, приходящийся на дугу единичной длины, а множитель 2 обусловлен наличием двух проводников. Согласно соотношению (13.119), на цилиндре, имеющем потенциал $U = U_1$, тангенциальная составляющая $\mathbf{B}$ равна $\partial V/\partial s$. Применяя к элементу поверхности формулу (7.4), получим $\mu i_s = B$. Таким образом,

$$\oint i_s^2\,ds = \mu^{-2}\oint\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 ds = \mu^{-2}\oint\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)dV$$

Из соотношений (7.44), (4.57) и (4.64) имеем

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\mu I}{\pi a}\sin\frac{\pi\,(U_1 + jV)}{j\mu I}\sin\frac{\pi\,(U_1 - jV)}{-j\mu I} = \frac{\mu I}{\pi a}\left(\mathrm{ch}^2\,\frac{\pi U_1}{\mu I} - \cos^2\frac{\pi V}{\mu I}\right),$$

$$\oint i_s^2\,ds = \frac{I}{\mu\pi a}\int_0^{\mu I}\left(\mathrm{ch}^2\,\frac{\pi U_1}{\mu I} - \cos^2\frac{\pi V}{\mu I}\right)dV = \frac{I^2}{2\pi a}\,\mathrm{ch}\,\frac{2\pi U_1}{\mu I}, \tag{13.152}$$

$$\frac{b}{d} = \mathrm{ch}\,\frac{2\pi U_1}{\mu I}, \qquad b^2 - d^2 = 4a^2. \tag{13.153}$$

Последнее следует из соотношения (4.66). Подставляя выражения (13.152) и (13.153) в (13.151) и разделив все на I^2, получим

$$R_i = \frac{2R_i' b}{\pi d\,(b^2 - d^2)^{1/2}} = \frac{2\tau' b}{\pi\delta d\,(b^2 - d^2)^{1/2}}, \tag{13.154}$$

$$L_i = \frac{2L_i' b}{\pi d\,(b^2 - d^2)^{1/2}} = \frac{2\tau' b}{\pi\omega\delta d\,(b^2 - d^2)^{1/2}}. \tag{13.155}$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда отношение $d/b = 1{,}5$ и линия находится в пустоте или в воздухе, так что $\mu = \mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$. Тогда самоиндукция L, определенная по формуле (13.150), равна 3,85 10^{-7} *гн*. Для подсчета R_i и L_i необходимо, помимо d/b, знать еще частоту, удельное сопротивление, магнитную проницаемость и один из размеров проводников. Для одного из наиболее важных проводников—меди $\gamma' = 1/\tau' = 5{,}8 \cdot 10^7$, а $\mu = \mu_0$. Остановимся на частотах 3 *мгц*, 300 *мгц* и 30 000 *мгц*, которым соответствуют длины волн 100 *м*, 1 *м* и 1 *см*. Индуктивное сопротивление ωL для этих частот соответственно равно 72,5 *ом*, 725 *ом* и 7250 *ом*, а толщина скин-слоя $3{,}82 \cdot 10^{-5}$ *м*, $3{,}82 \cdot 10^{-6}$ *м*, $3{,}82 \cdot 10^{-7}$ *м*. Поэтому в соответствии с формулами (13.152), (13.153) и (13.149) можно составить следующую таблицу.

λ, *м*	d, *м*	R_i, *ом*	L_i, *гн*		β
0,01	0,001	38,5	$1{,}225 \cdot 10^{-10}$	$5{,}1 \cdot 10^{-2}$	19
0,01	0,01	3,85	$1{,}225 \cdot 10^{-11}$	$5{,}1 \cdot 10^{-3}$	19
1,00	0,001	3,85	$1{,}225 \cdot 10^{-9}$	$5{,}1 \cdot 10^{-3}$	1,9
1,00	0,01	0,385	$1{,}225 \cdot 10^{-10}$	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$	1,9
100	0,001	0,385	$1{,}225 \cdot 10^{-8}$	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,19
100	0,01	0,0385	$1{,}225 \cdot 10^{-9}$	$5{,}1 \cdot 10^{-5}$	0,19

Очевидно, что во всех случаях R_i и ωL_i малы по сравнению с ωL; поэтому волновое сопротивление, определенное по формуле (13.148), будет равно 115,5 *ом*.

§ 20. Групповая скорость. Амплитуду любого из векторов поля в плоской волне, распространяющейся в линии передачи, можно записать в виде

$$A(\beta) = f(u_1, u_2)\cos(\omega t - \beta z), \tag{13.156}$$

где u_1 и u_2 — ортогональные координаты в плоскости, перпендикулярной к оси z, а β — волновое число или фазовая постоянная. Если фазовая скорость волны зависит от частоты, как это имеет место, например, в волноводах или диспергирующих средах, то сигнал, образованный группой волн различных частот (волновым пакетом), будет менять свою форму (искажаться) по мере продвижения вдоль z. Пусть такой пакет образован волнами, волновые числа которых расположены в интервале $\beta_0 - \delta$ и $\beta_0 + \delta$, а амплитуда волны в интервале $d\beta$ равна $A(\beta)$. Тогда амплитуда сигнала определится из выражения

$$S = \int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta} A(\beta)\, e^{j(\omega t - \beta z)}\, d\beta.$$

Этот интеграл можно представить в виде произведения двух множителей

$$S = Ce^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}, \text{ где } C = \int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta} A(\beta)\, e^{j[(\omega-\omega_0)t - (\beta-\beta_0)z]}\, d\beta;$$

один из них представляет несущую волну, фазовая скорость которой равна $v_0 = \omega_0/\beta_0$, т. е. равна средней фазовой скорости. Другой множитель (модулирующий фактор) является огибающей пакета, перемещающейся со

скоростью $(\omega-\omega_0)/(\beta-\beta_0)$. Средняя амплитуда волнового пакета равна $^1/_2 C/\delta$. Таким образом, на несущую частоту ω_0 накладывается еще модулирующая частота $\omega-\omega_0$. Пусть теперь мы хотим определить скорость перемещения плоскости, в которой амплитуда модуляции C, образующая сигнал, постоянна. По теореме о среднем значении интеграла

$$C = 2\delta A(\beta_1)\, e^{i[(\omega_1-\omega_0)t-(\beta_1-\beta_0)z]},$$

где $\beta_0-\delta \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0+\delta$. Если диапазон частот, входящих в волновой пакет, настолько мал, что $\beta_1-\beta_0$ и $\omega_1-\omega_0$ бесконечно малы, то скорость сигнала будет равна

$$v_s = \frac{\omega_1-\omega_0}{\beta_1-\beta_0} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \left|\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_0} \tag{13.157}$$

ЗАДАЧИ

1. Два самолета летят на высоте h над плоской поверхностью воды на расстоянии d друг от друга. С одного самолета на другой послан радиосигнал. Приемная и передающие антенны на самолетах представляют собой короткие металлические проволочки длиной l, ориентированные вертикально. Полагая $h \gg l$, $d \gg l$ и $\lambda \gg l$ и считая диэлектрическую проницаемость воды равной ε, показать, что отношение мощности сигнала, принятого после отражения от воды, к мощности прямого сигнала равно

$$\frac{d^3}{(d^2+4h^2)^3}\left\{\frac{[(\varepsilon-\varepsilon_v)d^2+4\varepsilon h^2]^{1/2}-2\varepsilon\varepsilon_v^{-1/2}h}{[(\varepsilon-\varepsilon_v)d^2+4\varepsilon h^2]^{1/2}+2\varepsilon\varepsilon_v^{-1/2}h}\right\}^2$$

2. Плоская электромагнитная волна, поляризованная под углом 45° по отношению к плоскости падения, испытывает полное отражение внутри призмы, в которую она входит и из которой она выходит под прямым углом к ее граням. Показать, что мощность волны, выходящей из призмы, равна $16n^2(1+n)^{-4}I_0$, где n — показатель преломления. Показать также, что выходящая волна будет эллиптически поляризованной с разностью фаз φ, определяемой соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \cos\theta\,(\sin\theta)^{-2}(\sin^2\theta-n^{-2})^{1/2},$$

где θ — угол падения на заднюю грань призмы. При решении задачи пренебречь многократными отражениями.

3. Плоская электромагнитная волна с длиной волны λ падает на бесконечную диэлектрическую плоско-параллельную пластинку толщиной a. Показать, что интенсивность отраженной волны, поляризованной нормально или параллельно плоскости падения, дается выражением

$$4b^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)\left[(1-b^2)^2+4b^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)\right]^{-1}I_0,$$

где b — отношение интенсивности волны, отраженной только от передней грани пластинки, к интенсивности падающей волны, $\delta = 4\pi n a\lambda^{-1}\cos\psi$ — угол преломления, n — показатель преломления. При решении необходимо учитывать фазовые соотношения и многократные отражения; пластинку считать неполглощающей.

4. Показать, что для вектора Умова – Пойнтинга на границе раздела с анизотропной средой в общем случае нельзя пользоваться законом преломления, приведенным в § 7 гл. XIII.

5. Показать, что плоскость, проходящая через точку пересечения оптической оси с лучевой поверхностью перпендикулярно к оптической оси, является плоскостью, касательной к окружности, проведенной вокруг оси луча (см. фиг. 122).

6. Плоская волна падает под углом θ на плоскую поверхность одноосного кристалла, нормаль к которой образует угол α с оптической осью. Пусть φ — угол между плоскостью падения и плоскостью, содержащей нормаль и оптическую ось, пусть также $\varepsilon_1=\varepsilon_2\neq\varepsilon_3$. Показать, что направления волновых нормалей θ_0 и θ_e двух преломленных

волн определяются из выражений

$$\sin\theta_0'' = \frac{\sin\theta}{\varepsilon_1^{1/2}}, \quad \sin^2\theta_e'' = \frac{2P^2 - MN \pm 2P(P^2 - M^2 - MN)^{1/2}}{N^2 + 4P^2},$$

$$M = \cos^2\alpha + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \quad P = \sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi,$$

$$N = \frac{P^2}{\cos^2\alpha} - M^2 + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_v\sin^2\theta - \varepsilon_3)}{\varepsilon_v(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\sin^2\theta}.$$

При углах $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ необходимо брать знак минус, а при $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ — знак плюс.

7. Показать путем непосредственной проверки, что волны, вектор **B** в которых перпендикулярен к оси z, описываются вектор-потенциалами вида

$$\mathbf{A}_1 = C_1[\mathbf{i}j\beta' - \mathbf{k}(\beta'^2 - \beta_1^2)^{1/2}]e^{-(\beta'^2-\beta_1^2)^{1/2}x + j(\omega t - \beta' z)},$$

$$\mathbf{A}_2 = C_2\{\mathbf{i}j\beta'\cos[(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}x] - \mathbf{k}(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}\sin[(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}x]\}e^{j(\omega t - \beta' z)},$$

где $\beta_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1$, $\beta_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2$ и $\beta_2 > \beta_1$. В связи с этим решить задачу о распространении плоской поверхностной волны над бесконечной плоской идеально проводящей поверхностью, покрытой слоем диэлектрика толщиной a. Магнитная и диэлектрическая проницаемости диэлектрика равны соответственно μ_2 и ε_2, а окружающего пространства — μ_1 и ε_1. Показать, что скорость распространения волны определяется из уравнения

$$\varepsilon_2(\beta'^2 - \beta_1^2)^{1/2} = \varepsilon_1(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}\operatorname{tg}[(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}a].$$

Если $\beta_1 a = 1{,}00$, $\mu_2 = \mu_1$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1$, то приблизительно $\beta_1 : \beta' : \beta_2 = 1 : 1{,}636 : 2$, так что амплитуда уменьшается в 10 раз относительно своего максимального значения на расстоянии $x = 1{,}78a$.

8. Показать путем непосредственной проверки, что волна, вектор **E** в которой перпендикулярен к оси z, описывается вектор-потенциалами вида

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{j}C_1 e^{-(\beta'^2-\beta_1^2)^{1/2}x + j(\omega t - \beta' z)}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{j}C_2\sin[(\beta_2^2 - \beta'^2)x]e^{j(\omega t - \beta' z)},$$

где

$$\beta_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1, \quad \beta_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \beta_2 > \beta_1.$$

В связи с этим решить задачу о распространении плоской поверхностной волны над бесконечной идеально проводящей поверхностью, покрытой слоем диэлектрика толщиной a. Магнитная и диэлектрическая проницаемости диэлектрика равны соответственно μ_2 и ε_2, а окружающей среды — μ_1 и ε_1. Показать, что скорость распространения волны определяется из уравнения

$$\mu_2(\beta'^2 - \beta_1^2)^{1/2} = -\mu_1(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2}\operatorname{ctg}[(\beta_2^2 - \beta'^2)a].$$

Если $\beta_1 a = 1{,}00$, $\mu_2 = \mu_1$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1$, то приблизительно $\beta_1 : \beta' : \beta_2 = 1 : 1{,}03 : 2$, так что амплитуда уменьшается в 10 раз относительно своего максимального значения на расстоянии $x = 9{,}4a$.

9. Пусть два одинаковых цилиндрических проводника, ограниченных плоскостями $z = 0$ и $z = l$, имеющими диэлектрическую и магнитную проницаемости, равные нулю, несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды, так что разность потенциалов между ними равна V_0. В момент $t = 0$ поверхности плоскостей становятся проводящими (R — сопротивление между цилиндрическими проводниками). Показать, что потенциал между проводниками можно записать в виде

$$V_s = \frac{V_0}{R + \check{Z}_k}\left(\frac{R - \check{Z}_k}{R + \check{Z}_k}\right)^s\left[R + \frac{4\check{Z}_k}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\frac{(2m+1)\pi z}{l}\cos\frac{(2m+1)\pi t}{(\mu\varepsilon)^{1/2}l}\right],$$

где

$$0 < z < l \quad \text{и} \quad s(\mu\varepsilon)^{1/2}l < t < (s+1)(\mu\varepsilon)^{1/2}l.$$

10. Однородная линия передачи, имеющая длину l и волновое сопротивление $\check{Z}_k$, подключена одним концом к цепи, состоящей из последовательно соединенных батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$, сопротивления R и выключателя. Пренебрегая искажениями поля на концах, показать, что если в момент $t = 0$ цепь замыкается, то через сопротивление R потечет ток

$$i = \frac{2\mathscr{E}}{R + Z_k}\sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{Z_k - R}{Z_k + R}\right)^s, \quad (2n+1)(\mu\varepsilon)^{1/2}l < t < (2n+3)(\mu\varepsilon)^{1/2}l.$$

11. Однородная линия передачи, имеющая длину l и волновое сопротивление $\check{Z}_k$, в сечении $z=l$ закорочена, а в сечении $z=0$ подключена к цепи, состоящей из последовательно соединенных батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$, сопротивления R и выключателя. Пренебрегая искажениями поля на конце линии, показать, что если в момент $t=0$ цепь замыкается, то ток, текущий через батарею, будет равен

$$i=\mathscr{E}\sum_{s=0}^{n}(2-\delta_s^n)\frac{(Z_k-R)^s}{(Z_k+R)^{s+1}},\quad 2n\,(\mu\varepsilon)^{1/2}\,l<t<(2n+2)\,(\mu\varepsilon)^{1/2}\,l.$$

12. Если вектор Герца имеет только z-составляющую, то он удовлетворяет скалярному волновому уравнению (13.114). Показать, что в случае плоской линии передачи потенциалы имеют вид

$$\psi=V(x,\,y)\,f\,[z-(\mu\varepsilon)^{-1/2}t],\qquad \mathbf{A}=\mathbf{k}\,(\mu\varepsilon)^{1/2}\,V(x,\,y)\,f\,[z-(\mu\varepsilon)^{-1/2}\,t].$$

Показать также, что в результате исключения скалярного потенциала при помощи формулы (13.21) мы придем к выражению для результирующего вектор-потенциала $\mathbf{A}'$, совпадающему с выражением (13.118).

13. Линия передачи состоит из двух не охватывающих друг друга цилиндров радиусов a и b, расстояние между осями которых равно c. Показать, что волновое сопротивление такой линии определяется по формулам (13.147) и (13.148), а постоянная распространения в ней — по формуле (13.149), где

$$L=\frac{\mu}{2\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab},\qquad R_i=\omega L_i=\frac{\tau'(b+a)\,[c^2-(b-a)^2]}{2\pi ab\delta\,[(b^2-a^2)^2-2c^2(b^2+a^2)+c^4]^{1/2}}$$

14. Линия передачи состоит из двух конфокальных эллиптических цилиндров, главные оси которых равны $2a$ и $2b$ $(a<b)$. Обозначив через $2c$ расстояние между фокусами, а через K — полный эллиптический интеграл, показать, что $\check{Z}_k$ определяется по формулам (13.147) и (13.148), а $\check{\Gamma}$ — по формуле (13.149), где

$$L=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b+(b^2-c^2)^{1/2}}{a+(a^2-c^2)^{1/2}},\qquad R_i=\omega L_i=\frac{\tau'}{\pi^2\delta}\left[\frac{1}{a}K\left(\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{b}K\left(\frac{c}{b}\right)\right]$$

15. Линия передачи состоит из двух параллельных плоских полосок шириной b, имеющих удельное сопротивление τ'. Плоскости этих полосок отстоят одна от другой на расстоянии a $(a\ll b)$. Показать, что постоянная распространения и волновое сопротивление приближенно равны

$$\check{\Gamma}^2=\frac{b}{a}(\gamma+j\omega\varepsilon)\left[\frac{2\tau'}{b\delta}(1+j)+\frac{j\omega\mu a}{b}\right],\qquad \check{Z}_k=\left\{\frac{a\,[2\tau'(1+j)+j\omega\mu a\delta]}{b^2\delta\,(\gamma+j\omega\varepsilon)}\right\}^{1/2}$$

16. Линия передачи состоит из двух параллельных цилиндров радиусов a и b, расстояние между осями которых равно c; причем один цилиндр находится внутри другого. Показать, что волновое сопротивление определяется по формулам (13.147) и (13.148), а постоянная распространения — по формуле (13.149), где

$$L=\frac{\mu}{2\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\qquad R_i=\gamma L_i=\frac{\tau'(b-a)\,[(a+b)^2-c^2]}{2\pi ab\delta\,[(b^2-a^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4]^{1/2}}.$$

17. В среде с магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью ε плоская волна падает нормально на плоское идеально отражающее зеркало. Показать, что можно избежать отражений, поместив на расстоянии четверти волны от зеркала тонкую пластинку (толщиной d) из вещества с диэлектрической проницаемостью ε' и с проводимостью γ', если $\gamma' d\approx(\varepsilon/\mu)^{1/2}$ и $\gamma'\gg\omega\varepsilon'$.

ЛИТЕРАТУРА

Abraham M., Becker R., Klassische Elektrizität und Magnetismus, Berlin, 1932. (См. перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, 2-е изд., М.—Л., 1939.)

Bateman H., Electrical and Optical Wave Motion, Cambridge, 1915.

Biggs H. F., The Electromagnetic Field, Oxford, 1934.

Born M., Optik, Berlin, 1933. (См. перевод: Борн М., Оптика, М.—Л., 1935.)

Drude P., Theory of Optics, Longmans, 1920. (См. перевод: Друде П., Оптика, М.—Л., 1935.)
Forsterling K., Lehrbuch der Optik, Leipzig, 1928.
Frenkel J., Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. 2, Berlin, 1926, 1928. (Френкель Я. И., Электродинамика, М.—Л., 1935.)
Geiger-Schell, Handbuch der Physik, Bd. XII, XV, XX, Berlin, 1927, 1927, 1928.
Heaviside O., Electrical Papers, Boston, 1925.
Hertz H. R., Electric Waves, Macmillan, 1893.
Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.
King R. W. P., Mimno H. R., Wing A. H., Transmission Lines, Antennas and Wave Guides, McGraw-Hill, 1945. (См. перевод: Кинг Р., Мимно Г., Уинг А., Передающие линии, антенны и волноводы, М.—Л., 1948.)
Livens G. H., Theory of Electricity, Cambridge, 1926.
MacDonald H. M., Electromagnetism, Bell, 1934.
Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.
Maxwell J. G., Electricity and Magnetism, Oxford, 1881.
Plank M. K. E. L., Theory of Electricity and Magnetism, Macmillan, 1932.
Ramo S., Whinnery J. R., Fields and Waves in Modern Radio, Wiley, 1944. (См. перевод: Рамо С., Виннери Д., Поля и волны в современной радиотехнике, 2 изд., т-е М.—Л., 1948.)
Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.
Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Д. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1943.)
Webster A. G., Electricity and Magnetism, Macmillan, 1897.
Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, 1932.

Глава XIV

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Постановка задачи. Любая неэкранированная полностью система, генерирующая электромагнитные колебания, теряет часть энергии за счет волн, расходящихся в окружающее пространство. Если система не предназначена специально для излучения, то эти потери в ней рассматриваются как утечки, и тогда обычно требуется знать только мощность излучения. Если же излучение составляет основное назначение системы, как, например, в случае антенн или рупоров, то, помимо этого, нужно иметь сведения о поляризации излучаемых волн, о распределении излучаемой энергии в пространстве, о потерях, не обусловленных излучением, о распределении зарядов и токов в системе и, наконец, о ее входном импедансе. Эти характеристики зависят от приложенных электродвижущих сил, частоты, размеров системы и ее конфигурации, а также от материала, из которого сделаны эти системы, и от свойств окружающей ее среды. Например, для антенны, находящейся в свободном пространстве, полное решение задачи должно заключаться в нахождении полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла снаружи антенны и внутри нее, а также удовлетворяющих соответствующим граничным условиям на поверхности антенны. В частности, полученные при этом напряженность электрического поля и распределение тока должны быть согласованы на поверхности соединения антенны с линией передачи с полями и токами в этой линии. Такое полное решение задачи для существующих систем, повидимому, невозможно.

Существуют, однако, методы, позволяющие с необходимой точностью вычислять одну или несколько из перечисленных выше характеристик антенн. При помощи запаздывающих потенциалов по заданному распределению зарядов и токов всегда можно найти электромагнитное поле. Часто оказывается, что вдали от антенны это поле чувствительно только по отношению к существенным изменениям в распределении токов или зарядов в антенне, и поэтому последнее можно задавать приближенно. Приближенное распределение позволяет с достаточной точностью определить и джоулевы потери, если они малы. Посредством теоремы Умова — Пойнтинга можно найти действительную (но не мнимую) часть входного импеданса антенны. Формулы скин-эффекта позволяют определить омические потери, если известно магнитное поле непосредственно вблизи поверхности металла. Распределение токов в антеннах, выполненных из идеально проводящего проводника простой геометрической формы (сфера, сфероид), можно найти из строгого решения задачи, основанного на применении системы ортогональных функций, подобных тем, которые встречаются в электростатике, но только более сложных. Но, за исключением случая конической антенны, такое строгое решение дает мало сведений относительно входного реактивного сопротивления. Излучение из отверстий часто сначала вычисляют в предположении, что поля на отверстии известны, а затем эти поля стараются подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

В нижеследующих параграфах будут приведены примеры на применение большинства из этих методов.

§ 2. Два типа вектор-потенциалов. По заданному распределению токов источника можно при помощи уравнения непрерывности найти и распределение его зарядов. В § 4 будет показано, что запаздывающие скалярные и векторные потенциалы можно представить в виде интегралов соответственно от зарядов и токов, подобно тому, как это имеет место в электростатике и в магнитостатике. Запаздывающий вектор Герца, описывающий все поля, выражается через токи при помощи одного интегрирования, так как уравнение непрерывности в источнике предполагается при этом удовлетворенным.

В общем случае в указанных выше методах имеют дело с вектор-потенциалами, дивергенция которых не равна нулю и которые имеют отличные от нуля тангенциальные составляющие на поверхностях антенн. Однако в том случае, когда заряды располагаются на идеально проводящих поверхностях, ограничивающих область, где ищется поле, часто бывает проще пользоваться вектор-потенциалом другого типа, обладающим равной нулю дивергенцией, и тем самым полностью избавиться от скалярного потенциала, как это было указано выше [см. соотношение (13.21)]. Такой вектор-потенциал всегда перпендикулярен к поверхности антенны. Если же существуют заряды вне проводников, то целесообразно разбить вектор-потенциал $\mathbf{A}$ на две части: соленоидальную $\mathbf{A}''$ и потенциальную $\mathbf{A}'$. В частности, производная по времени от $\mathbf{A}'$ равна градиенту скаляра Ψ' Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (13.13) и воспользовавшись (13.3), получим

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \quad \nabla\Psi = -\nabla^2 (\Psi' + \Psi) = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Обозначая $\Psi + \Psi'$ через новую скалярную функцию Φ, имеем

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{14.1}$$

Таким образом, единственное осложнение, вносимое зарядами, заключается в необходимости решить уравнение Пуассона, что можно сделать методами электростатики. Заметим, что Φ всегда находится в фазе с ρ. Это свидетельствует о том, что с полем, описываемым потенциалом Φ, не связано никакого распространения энергии.

§ 3. Сферические электромагнитные волны. Диполь. Как следует из результатов § 2 гл. XIII, все векторы электромагнитного поля удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению; поэтому если в изотропной непроводящей среде каждая компонента $u_{x,\,y,\,z}$ является функцией только r, то она должна удовлетворять следующему уравнению в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u_{x,\,y,\,z}}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u_{x,\,y,\,z} = \frac{v^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u_{x,\,y,\,z}}{\partial r}\right), \tag{14.2}$$

где $v^2 = (\mu\varepsilon)^{-1}$. Пусть $w = r u_{x,\,y,\,z}$, тогда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \tag{14.3}$$

В § 4 гл. XIII было показано, что решением этого уравнения будет

$$w = r u_{x,\,y,\,z} = f_1 [t - (\mu\varepsilon)^{1/2} r] + f_2 [t + (\mu\varepsilon)^{1/2} r]. \tag{14.4}$$

Как и в решении (13.25), первый член означает расходящуюся волну, а второй — сходящуюся волну. Дифференцируя уравнение (14.2) последова-

тельно по x, y и z и меняя порядок дифференцирования, мы придем к выводу, что производные u по x, y и z также являются решениями уравнения (14.3); поэтому решение уравнения (14.2) можно представить в виде

$$u_{x,y,z}=\frac{\partial^{m+n+s}}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial z^s}\left\{\frac{1}{r}f_1[t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]+\frac{1}{r}f_2[t+(\mu\varepsilon)^{1/2}r]\right\} \tag{14.5}$$

Это решение позволяет написать выражение для поля, создаваемого любым электрическим мультиполем с изменяющимся во времени моментом. При $r\to 0$ вблизи начала координат электрический потенциал должен совпадать с электростатическим потенциалом, приведенным в § 8а гл. I. Таким образом, скалярный потенциал вблизи начала координат и соответствующий вектор Герца для мультиполей единичного момента, описанных в § 8а гл. I, в частном случае, диполя и линейного квадруполя, ориентированных в направлении z, будут, согласно соотношениям (14.5) и (13.7), равны

$$\Psi=-\frac{f(t)}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-(\nabla\cdot\mathbf{Z})_{r\to 0};\qquad \mathbf{Z}=\frac{\mathbf{k}}{4\pi\varepsilon r}f[t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r], \tag{14.6}$$

$$\Psi=\frac{f(t)}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-(\nabla\cdot\mathbf{Z})_{r\to 0},\quad \mathbf{Z}=-\frac{\mathbf{k}}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r}f[t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]\right\} \tag{14.7}$$

Поле излучения поверхностного квадруполя не определяется однозначно электростатическим потенциалом: оно зависит от направления токов, текущих между зарядами. В случае совершенно симметричного квадруполя получаем

$$\Psi=\frac{f(t)}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-[\nabla\cdot\mathbf{Z}]_{r\to 0}, \tag{14.8}$$

$$\mathbf{Z}=-\mathbf{i}\frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{r}f[t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]\right\}-\mathbf{j}\frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{r}f[t-(\mu\varepsilon)r^{1/2}]\right\} \tag{14.9}$$

Нетрудно заметить, что из девяти вторых производных независимыми между собой являются только шесть, так как порядок дифференцирования можно менять. Каждый из этих векторов после умножения на произвольную постоянную можно рассматривать как компоненту некоторого квадруполя общего вида, момент которого является симметричным тензором второго ранга, каким, например, являлась диэлектрическая проницаемость среды, рассмотренная в § 20 гл. I. Аналогично и моменты мультиполей более высоких порядков являются тензорами более высоких рангов. Более полное изложение этих вопросов содержится в книге Стрэттона. Заменяя **B** на **E** и $\mu\varepsilon$**E** на **B**, можно из поля электрического мультиполя получить поле аналогичного магнитного мультиполя (см. § 11 гл. VII).

Наиболее важным видом мультипольного излучателя является электрический диполь, момент которого мы обозначим через $\mathrm{m}\cos\omega t$. Из соотношений (14.6), (13.17) и (13.18) получим

$$\mathbf{Z}=\frac{\mathrm{m}}{4\pi\varepsilon r}(\mathbf{r}_1\cos\theta-\boldsymbol{\theta}\sin\theta)\cos(\omega t-\beta r), \tag{14.10}$$

$$\Psi=-\nabla\cdot\mathbf{Z}=\frac{\mathrm{m}\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}[\cos(\omega t-\beta r)-\beta r\sin(\omega t-\beta r)], \tag{14.11}$$

$$\mathbf{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}=\frac{\omega\mu\mathrm{m}}{4\pi r}(\mathbf{r}_1\cos\theta-\boldsymbol{\theta}\sin\theta)\sin(\omega t-\beta r), \tag{14.12}$$

$$E_r=-\frac{\partial A_r}{\partial t}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{\mathrm{m}\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3}[\cos(\omega t-\beta r)-\beta r\sin(\omega t-\beta r)], \tag{14.13}$$

$$E_\theta=-\frac{\partial A_\theta}{\partial t}-\frac{\partial\Psi}{r\,\partial\theta}=\frac{\mathrm{m}\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}[(1-\beta^2r^2)\cos(\omega t-\beta r)-\beta r\sin(\omega t-\beta r)], \tag{14.14}$$

$$B_\varphi=\frac{\partial(rA_\theta)}{r\,\partial r}-\frac{\partial A_r}{r\,\partial\theta}=-\frac{\omega\mu\mathrm{m}\sin\theta}{4\pi r^2}[r\beta\cos(\omega t-\beta r)+\sin(\omega t-\beta r)], \tag{14.15}$$

$$\beta=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}=\omega v^{-1}=2\pi\lambda^{-1}. \tag{14.16}$$

Вторая часть вектор-потенциала, определяемая как $\mathbf{A}' = -\int \mathbf{E}\,dt$, также дает магнитную индукцию (14.15). Как уже было указано в § 2, при использовании потенциала $\mathbf{A}'$, дивергенция которого равна нулю, нет нужды в скалярном потенциале. Эта форма представления полей получается при применении соотношения (11.11) к скаляру $\partial u / \partial z$, определяемому выражением (14.4).

Если представить себе диполь в виде двух проводников, соединенных между собой тонким проводом длиной l, так что зарядом на проводе можно было бы пренебречь по сравнению с зарядом на концевых проводниках, то дипольный момент окажется равным $\mathfrak{m} = Ql$, где Q – максимальная величина заряда на одном из проводников. Максимальная величина тока в проводе I равна ωQ, а B_φ при малых r находится в фазе с током I. Поэтому для получения поля диполя, ток в котором меняется по закону $I\cos\omega t$, необходимо в выписанных выше формулах $\omega\mathfrak{m}$ заменить на Il, а ωt – на $\omega t - (\pi/2)$. На больших расстояниях от излучателя выражения (14.13) – (14.15) принимают вид

$$E_r = 0, \quad E_\theta = (\mu\varepsilon)^{-1/2} B_\varphi = -\frac{\omega\mu I l \sin\theta}{4\pi r} \sin(\omega t - \beta r). \tag{14.17}$$

Мгновенное значение потока излучаемой энергии, согласно выражению (13.23), равно

$$P = \int_S \Pi\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^\pi \frac{E_\theta B}{\mu} 2\pi R^2 \sin\theta\,d\theta = \frac{\beta^3 I^2 l^2}{6\pi\omega\varepsilon} \sin^2(\omega t - \beta r). \tag{14.18}$$

Средняя мощность излучения равна половине амплитуды мгновенной мощности, т. е., как следует из соотношения (13.32), для вакуума

$$\overline{P} = \frac{\beta_v^3 I^2 l^2}{12\pi\omega\varepsilon_v} = \frac{\omega^2 I^2 l^2}{12\pi\varepsilon_v c^3} = \frac{\pi I^2 l^2}{3\varepsilon_v c\lambda^2} = \frac{395 I^2 l^2}{\lambda^2}, \tag{14.19}$$

где l и λ измеряются в любых, но одних и тех же единицах, P – в ваттах, а I – амплитуда тока в диполе – в амперах. Для реальных антенн эта формула не является точной, даже если не принимать во внимание влияние земли и других близлежащих объектов, потому что ток вдоль антенны распределен неравномерно; однако ею можно пользоваться при $l \ll \lambda$, введя среднюю величину амплитуды I. Потери мощности на излучение, как и омические потери, пропорциональны квадрату тока, поэтому обычно вводят понятие сопротивления излучения, определяя его как коэффициент пропорциональности между мощностью излучения и квадратом эффективного значения тока

$$R_r = \frac{\overline{P}}{I_e^2} = \frac{790 l^2}{\lambda^2} \text{ ом}. \tag{14.20}$$

§ 4. Запаздывающие потенциалы. Для нахождения решений уравнений Максвелла (см. § 1 гл. XIII) часто пользуются методом запаздывающих потенциалов. Согласно уравнениям (13.14) и (13.15), векторные и скалярные потенциалы распространяются в однородной диэлектрической среде со скоростью $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$. Попытаемся написать решения этих уравнений, аналогичные решениям (7.10) и (3.28). Для этого будем считать, что распределение плотности тока $\mathbf{i}$ и плотности заряда ρ фиксировано в пространстве и меняется только во времени, отложив рассмотрение движущихся изолированных зарядов до последней главы. Нам нужно вычислить значение потенциалов $\mathbf{A}$ и Ψ в точке P в некоторый момент времени t. Сигнал, посылаемый в точку P элементом dv, находящимся в точке x_1, y_1, z_1 на расстоянии r от P, пройдет

это расстояние со скоростью $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$ и, следовательно, выйдя из dv в момент времени $t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r$, будет определяться условиями, характеризовавшими элемент dv в этот момент времени. Суммируя сигналы от всех элементов, для потенциалов в точке P в момент времени t, согласно решениям (7.10) и (3.28), будем иметь следующие выражения:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t)=\frac{\mu}{4\pi}\int\int\int\frac{\mathbf{i}[x_1, y_1, z_1, t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]}{r}dx_1\,dy_1\,dz_1, \qquad (14.21)$$

$$\Psi(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\int\int\frac{\rho[x_1, y_1, z_1, t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]}{r}dx_1\,dy_1\,dz_1. \qquad (14.22)$$

Поля определяются по этим запаздывающим потенциалам так же, как и в § 2 гл. XIII. Нетрудно убедиться в том, что выражения (14.21) и (14.22) действительно удовлетворяют волновым уравнениям, так как подинтегральные выражения у A_x, A_y, A_z и Ψ в точности совпадают с общим видом решения $f[t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]/r$, полученным в § 3 [см. (14.4)].

В свободном пространстве, как следует из соотношений (13.17), $\mathbf{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}$; поэтому для запаздывающего вектора Герца непосредственно из решения (14.21) имеем

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\int\int\int\frac{\mathbf{i}[x_1, y_1, z_1, t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r]}{r}dx_1\,dy_1\,dz_1\,dt. \qquad (14.23)$$

Но нужно еще убедиться в том, что это выражение не противоречит решению (14.22), учитывая, что $\mathbf{i}$ и ρ связаны между собой уравнением непрерывности (13.5). Для получения Ψ и $\mathbf{Z}$ возьмем дивергенцию от $\mathbf{Z}$ по координатам точки наблюдения, так что оператор ∇ будет действовать в выражении (14.23) только на r. Поскольку $r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$, то любая производная от r по координатам точки наблюдения x, y, z равна взятой со знаком минус соответствующей производной ∇_1 по координатам точки x_1, y_1, z_1 элемента источника dv. Вид функции $\mathbf{i}$ в выражении (14.23) показывает, что

$$\nabla\cdot\mathbf{i}=-(\mu\varepsilon)^{1/2}\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}\cdot\nabla r; \quad \nabla_1\cdot\mathbf{i}=-(\mu\varepsilon)^{1/2}\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}\cdot\nabla_1 r+\nabla_1'\cdot\mathbf{i},$$

где оператор ∇_1' действует только на x_1, y_1 и z_1 и не действует на t или r. Заменив теперь $-\nabla_1 r$ на ∇r и применяя уравнение непрерывности к элементу источника в момент времени $t-(\mu\varepsilon)^{1/2}r$, после подстановки в выражение (14.23) получим

$$\nabla\cdot\mathbf{i}=-\nabla_1\cdot\mathbf{i}+\nabla_1'\cdot\mathbf{i}=-\nabla_1\cdot\mathbf{i}-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{Z}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\int\nabla_1\cdot\left(\frac{\mathbf{i}}{r}\right)dv\,dt-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv\,dt.$$

Первый интеграл по объему исчезает, потому что его можно (по теореме Остроградского—Гаусса) преобразовать в поверхностный интеграл и выбрать поверхность вне источника, где $\mathbf{i}$ равно нулю. Второй член после интегрирования по t принимает вид (14.22), т. е. мы показали, что из выражений (14.23) и (13.5) можно получить (14.21) и (14.22).

Возможность использования выражений (14.21)—(14.23) зависит от той точности, с которой можно задать распределение зарядов и токов в источнике. Если последний представляет собой очень тонкий, идеально проводящий провод, протянутый вдоль кривой s, то необходимо потребовать, во-первых, чтобы вдоль провода равнялась нулю s-составляющая напряженности электрического поля, определяемая формулой (13.13), и, во-вторых, чтобы

было удовлетворено уравнение непрерывности (13.5), т. е.

$$E_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{14.24}$$

Но поскольку провод бесконечно тонкий, можно приблизиться к нему на бесконечно малое (по сравнению с радиусом кривизны кривой s) расстояние r, на котором A и Ф определяются по формулам, выведенным для бесконечно длинного прямого провода,

$$\Phi = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon} \ln r, \qquad A_s = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln r. \tag{14.25}$$

Подставляя эти значения в уравнения (14.24) и дифференцируя по времени t и по длине s, после исключения A_s и Ф будем иметь

$$\frac{\partial^2 I}{\partial s^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \tag{14.26}$$

Для гармонических во времени процессов решение уравнения (14.26) записывается в виде

$$I(s) = \check{I}_1 e^{j(\omega t - \beta s)} + \check{I}_2 e^{j(\omega t + \beta s)}. \tag{14.27}$$

Таким образом, ток вдоль провода распределен синусоидально.

§ 5. Излучение линейной антенны. Запаздывающие потенциалы можно применить при вычислении поля, создаваемого линейной антенной. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ и z; обозначим через z' координату некоторой точки антенны, расположенной вдоль оси z между z'_1 и z'_2. Пусть отношение диаметра антенны к ее длине настолько мало, что ток в ней распределен в виде синусоидальной стоячей волны. Начало координат поместим в той точке антенны (или ее продолжения), где имеется (или должен бы иметься) узел тока. Таким образом,

$$I = I_0 \sin \beta z' \cos \omega t. \tag{14.28}$$

Для определения поля можно воспользоваться либо потенциалами, либо вектором Герца. Однако при употреблении потенциалов более ясно виден физический смысл условий на концах антенны, в зависимости от которых ток на конце может равняться или не равняться нулю. Плотность линейного заряда, согласно выражению (13.5), равна

$$\sigma = -(\mu\varepsilon)^{1/2} I_0 \cos \beta z' \sin \omega t. \tag{14.29}$$

Заметим, что плотность σ всюду конечна, поэтому решение применимо только в тех случаях, когда сосредоточенные на концах заряды не излучают. Однако, если это необходимо, к полученному решению нетрудно добавить поле, обусловленное этими источниками. Из выражений (14.21) и (14.23) для запаздывающих потенциалов получим

$$A_z = \frac{\mu I_0}{4\pi} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{\sin \beta z' \cos(\omega t - \beta r)}{r} dz', \tag{14.30}$$

$$\Psi = -\frac{\beta I_0}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{\cos \beta z' \sin(\omega t - \beta r)}{r} dz', \tag{14.31}$$

где $r^2=(z'-z)^2+\rho^2$. Для определения величины E_z из уравнения (13.13) положим

$$u=\frac{\sin(\omega t-\beta r)}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial z'}, \quad v=\cos\beta z', \quad \frac{\partial v}{\partial z'}=-\beta\sin\beta z',$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial t}=\frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta}\int_{z_1'}^{z_2'} u\,dv, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta}\int_{z_1'}^{z_2'} v\,du.$$

Таким образом, из уравнения (13.13) для E_z имеем

$$E_z=-\frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta}\Big|uv\Big|_{z_1'}^{z_2'}=\frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta}\left[\frac{\cos\beta z_1'\sin(\omega t-\beta r_1)}{r_1}-\frac{\cos\beta z_2'\sin(\omega t-\beta r_2)}{r_2}\right] \tag{14.32}$$

Величины E_ρ и H_φ можно найти, не интегрируя выражения (14.30) и (14.31), а подставив в них $u=r+z'-z$ и $v=r-z'+z$, откуда $r\,du=u\,dz'$ и $r\,dv=-v\,dz'$. Тогда эти интегралы (Двайт, 401.01) запишутся в виде

$$-\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sin(\omega t-\beta z-\beta u)}{2u}\,du\mp\int_{v_1}^{v_2}\frac{\sin(\omega t+\beta z-\beta v)}{2v}\,dv, \tag{14.33}$$

где верхний знак относится к выражению (14.30), а нижний — к выражению (14.31). Заметим, что ρ входит только в пределы интегрирования и что

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial\rho}=\frac{\partial v_{1,2}}{\partial\rho}=\frac{\rho}{r_{1,2}}, \tag{14.34}$$

поэтому дифференцирование этих интегралов по ρ дает

$$\frac{\rho}{2}\left[-\frac{\sin(\omega t-\beta r+\beta z')}{r(r+z'-z)}\mp\frac{\sin(\omega t-\beta r+\beta z')}{r(r-z'+z)}\right]_{z_1'}^{z_2'}. \tag{14.35}$$

Приводя к общему знаменателю, подставляя $r^2-(z'-z)^2$ вместо ρ^2, а также используя формулы для синуса суммы и разности аргументов $\omega t-\beta r$ и $\beta z'$, получаем

$$E_\rho=-\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}=-\frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta\rho}\Big[\cos(\omega t-\beta r_2)\sin\beta z_2'-\cos(\omega t-\beta r_1)\sin\beta z_1'+$$
$$+\frac{z_2'-z}{r_2}\sin(\omega t-\beta r_2)\cos\beta z_2'-\frac{z_1'-z}{r_1}\sin(\omega t-\beta r_1)\cos\beta z_1'\Big], \tag{14.36}$$

$$B_z=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}=\frac{\mu I_0}{4\pi\rho}[\sin(\omega t-\beta r_2)\cos\beta z_2'-\sin(\omega t-\beta r_1)\cos\beta z_1'+$$
$$+\frac{z_2'-z}{r_2}\cos(\omega t-\beta r_2)\sin\beta z_2'-\frac{z_1'-z}{r_1}\cos(\omega t-\beta r_1)\sin\beta z_1']. \tag{14.37}$$

Выражения (14.32), (14.36) и (14.37) применимы и к антеннам с отличными от нуля нагрузками на концах, но при условии, что излучение от этих нагрузок отсутствует. Последнее можно осуществить при помощи заземленных экранов, как, например, в случае антенны, оканчивающейся коаксиальной линией, изображенной на фиг. 126, *а*.

На фиг. 126, *б* и *в* показаны два типа нагрузок на конце; их действие учитывается путем добавления к скалярному потенциалу (14.31) запаздывающего потенциала, обусловленного зарядом на конце. Если нагрузку заменить участком антенны, продолженным до ближайшего узла тока, то заряд на этом участке будет равен заряду нагрузки, так как в них текут одинаковые заряжающие токи. Проинтегрировав выражение (14.29) для плотности заряда σ от ближайшего узла до z_1' и от точки z_2' до

ближайшего к ней узла, мы получим выражения для зарядов Q_1 в точке z_1' и Q_2 в точке z_2':

$$Q_1 = -\omega^{-1} I_0 \sin \beta z_1' \sin \omega t, \qquad Q_2 = \omega^{-1} I_0 \sin \beta z_2' \sin \omega t.$$

Если нагрузки сосредоточены на малом участке антенны, то их можно рассматривать как точечные заряды. В этом случае к скалярному потенциалу (14.31) нужно добавить соответствующий запаздывающий скалярный потенциал вида

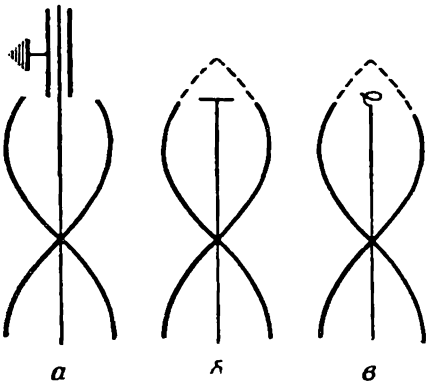
$$\Delta\Psi = \frac{I_0}{4\pi\omega\varepsilon}\left[\frac{\sin\beta z_2' \sin(\omega t - \beta r_2)}{r_2} - \frac{\sin\beta z_1' \sin(\omega t - \beta r_1)}{r_1}\right] \qquad (14.38)$$

Соответствующие добавки к полям E_z и E_ρ окажутся равными

$$\Delta E_z = \frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta^2}\left\{-\sin\beta z_2' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sin(\omega t - \beta r_2)}{r_2}\right] + \sin\beta z_1' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sin(\omega t - \beta r_1)}{r_1}\right]\right\}, \qquad (14.39)$$

$$\Delta E_\rho = \frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta^2}\left\{-\sin\beta z_2' \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\sin(\omega t - \beta r_2)}{r_2}\right] + \sin\beta z_1' \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\sin(\omega t - \beta r_1)}{r_1}\right]\right\} \qquad (14.40)$$

Магнитное поле, определяемое выражением (14.37), не претерпевает изменений. Интересно отметить, что приводимые Стрэттоном вычисления Бехмана для поля линейного осциллятора (в них используется вектор Герца) приводят к наличию нагрузки такого типа на обоих концах антенны.



Фиг. 126.

Если концы антенны совпадают с узлами тока, то, как следует из выражения (14.28), $\beta z_1'$ и $\beta z_2'$ должны быть равны $m_1\pi$ и $m_2\pi$, где m_1 и m_2 — положительные или отрицательные целые числа; соответствующие же косинусы будут равны $(-1)^{m_1}$ и $(-1)^{m_2}$. В этом случае поля, определяемые выражениями (14.32), (14.36) и (14.37), можно записать в более простом виде, а именно:

$$E_z = \frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta}\left[\frac{(-1)^{m_1}\sin(\omega t - \beta r_1)}{r_1} - \frac{(-1)^{m_2}\sin(\omega t - \beta r_2)}{r_2}\right], \qquad (14.41)$$

$$E_\rho = \frac{\omega\mu I_0}{4\pi\beta\rho}\left[\frac{(z_1' - z)\sin(\omega t - \beta r_1)}{(-1)^{m_1} r_1} - \frac{(z_2' - z)\sin(\omega t - \beta r_2)}{(-1)^{m_2} r_2}\right], \qquad (14.42)$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu I_0}{4\pi\rho}\left[(-1)^{m_1}\sin(\omega t - \beta r_1) - (-1)^{m_2}\sin(\omega t - \beta r_2)\right]; \qquad (14.43)$$

здесь $m_2 - m_1 = n$ — число пучностей тока, укладывающихся вдоль антенны.

Пусть антенна имеет длину $2l$, один ее конец (a) находится в точке $z' = -l$, а другой (b) — в точке $z' = l$; возбуждение происходит в центре; частота колебаний произвольная, и хотя на концах всегда имеются нули тока, на самой антенне может не существовать ни одной пучности тока. По формулам (14.32), (14.36), (14.37) найдем поля, создаваемые каждой из половин антенны в отдельности, а затем сложим результаты. При этом при вычислении величин, относящихся к концам a и b, положим

$$z_1' = 0, \quad z_2' = l, \quad r_1 = r_a, \quad r_2 = r, \quad z - z_1' = r_1\cos\theta_a, \quad z - z_2' = r_2\cos\theta;$$

$$z_1' = 0, \quad z_2' = -l, \quad r_1 = r_b, \quad r_2 = r, \quad z - z_1' = r_1\cos\theta_b, \quad z - z_2' = r_2\cos\theta.$$

Углы θ, θ_a и θ_b отсчитываются от положительного направления оси z. Подставляя эти значения в формулы (14.32), (14.36) и (14.37) и учитывая, что $\omega = c\beta$, получим

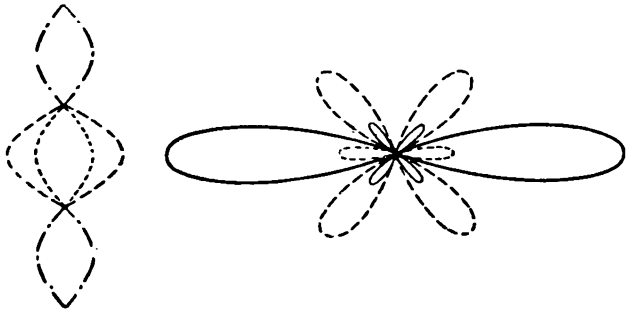
$$E_z = \frac{c\mu I_0}{4\pi}\left[\frac{\sin(\omega t - \beta r_a)}{r_a} + \frac{\sin(\omega t - \beta r_b)}{r_b} - 2\frac{\cos\beta l \sin(\omega t - \beta r)}{r}\right], \quad (14.44)$$

$$E_\rho = \frac{c\mu I_0}{4\pi\rho}[2\cos\theta\cos\beta l\sin(\omega t - \beta r) - \cos\theta_a \sin(\omega t - \beta r_a) - \cos\theta_b \sin(\omega t - \beta r_b)], \quad (14.45)$$

$$B_\varphi = \frac{\mu I_0}{4\pi\rho}[2\cos\beta l\sin(\omega t - \beta r) - \sin(\omega t - \beta r_a) - \sin(\omega t - \beta r_b)]. \quad (14.46)$$

Заметим, что амплитуда тока может достигать максимального значения I_0 в любой точке в пределах антенны за исключением ее концов.

§ 6. Поля на больших расстояниях от линейной антенны. Получим теперь диаграмму направленности излучения на больших расстояниях от линейной антенны длиной $2l$, возбуждаемой в центре генератором произвольной частоты. Ток на концах антенны будем считать равным нулю.



Фиг. 127.

Выражение (14.46), положив в нем $r_a = r + l\cos\theta$, $r_b = r - l\cos\theta$ и $\rho = r\sin\theta$, можно записать в виде

$$B_\varphi = (\mu\varepsilon)^{1/2} E_\theta = \frac{\mu I_0[\cos\beta l - \cos(\beta l\cos\theta)]\sin(\omega t - \beta r)}{2\pi r\sin\theta}, \quad (14.47)$$

но из соотношения (13.145) следует, что средний по времени поток энергии, излучаемой в r-направлении, равен

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}|E_\theta||H_\varphi| = \frac{1}{2}\mu^{-3/2}\varepsilon^{-1/2}|B_\varphi|^2. \quad (14.48)$$

Если антенна является резонансной[1] и имеет в центре пучность тока, т. е. $2\beta l = n\pi$, то совершенно ясно, что, изобразив $\overline{\Pi}$ в виде радиус-вектора в полярной системе координат, мы получим, что число максимумов и минимумов в результирующей кривой соответствует числу узлов и пучностей в стоячей волне тока. Пунктирная кривая изображенная на фиг. 127, относится к случаю $n = 3$. Полная излучаемая мощность равна интегралу от $\overline{\Pi}$ по сфере большого радиуса с центром в начале координат. Вычислим этот интеграл только для случая резонанса. Подставив $n\pi/2$ вместо βl и выразив квадрат знаменателя в выражении (14.47) по формулам двойного

[1] Резонансной антенной называют иногда антенну, реактивное сопротивление которой равно нулю. В этом случае длина резонансной антенны оказывается, вообще говоря, слегка отличной от $n\lambda/2$. См. далее стр. 472. — *Прим. перев.*

угла (Двайт, 404.22), получим

$$\overline{P} = \frac{\mu c I_0^2}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-(-1)^n \cos(n\pi\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \sin\theta\, d\theta. \qquad (14.49)$$

Обозначив теперь $\cos\theta$ через u и разбив при помощи разложения на элементарные дроби этот интеграл на два, мы убеждаемся, что полученные интегралы равны между собой (для этого в одном из них переменную интегрирования u надо заменить на $-u$):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos n\pi u}{2(1-u)}\, du + \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos n\pi u}{2(1+u)}\, du = \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos n\pi u}{1+u}\, du.$$

Положим $v = n\pi(1+u)$, тогда выражение (14.49) можно записать в виде

$$\overline{P} = \frac{\mu c I_0^2}{8\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{1-\cos v}{v}\, dv = \frac{\mu c I_0^2}{8\pi} [C + \ln(2n\pi) - \mathrm{Ci}(2n\pi)], \qquad (14.50)$$

где $\mathrm{Ci}(2n\pi)$ — интегральный косинус, таблицы которого имеются у Янке и Эмде, а $C = 0{,}5772$. Подставляя численные значения, для сопротивления излучения получим

$$R_r = \frac{\overline{P}}{I_e^2} = \frac{2\overline{P}}{I_0^2} = 72{,}4 + 30\ln n - 30\,\mathrm{Ci}(6{,}28n). \qquad (14.51)$$

При $n = 1$ оно равно 73,13 *ом*. В § 10 будут получены формулы для сопротивления излучения антенны, у которой распределение тока не имеет пучности в точке возбуждения.

Предположение о бесконечной тонкости антенны составляет только один из недостатков приведенного выше рассмотрения задачи. Для поддержания постулированного режима стоячей волны в антенне необходимо в каждый ее элемент поставлять энергию, компенсируя расходы на джоулевы потери и на излучение. Причем если первые максимальны в центре антенны, где максимален ток, то, как нетрудно видеть из выражений (14.41) и (14.43), последние достигают наибольшей величины вблизи концов антенны. Таким образом, очевидно, что, во-первых, невозможно при помощи возбуждения в одной точке поддерживать данное распределение тока вдоль всей антенны и, во-вторых, что для восполнения потерь энергии в антенне должна присутствовать затухающая бегущая волна, в которой нет узлов и которая излучает совершенно по-другому, чем стоячая волна тока. Грубую качественную оценку влияния уменьшения амплитуды тока вблизи концов антенны можно получить, например, взяв суперпозицию полей, создáнных двумя антеннами, в одной из которых возбуждаются колебания первого типа ($n = 1$), а в другой — колебания третьего типа ($n = 3$). Если частоты и амплитуды этих колебаний совпадают, то в результате получится поле, создаваемое линейной антенной длиной $3\lambda/2$, в которой амплитуда тока в центральной полуволне в два раза превосходит амплитуду тока в крайних полуволнах. Используя выражение (14.47) и считая $\beta l = n\pi/2$, после некоторых упрощений (Двайт, 403.23) получим

$$B_\varphi = (\mu\varepsilon)^{1/2} E_\theta = \frac{\mu I_0 \cos(\frac{1}{2}\pi\cos\theta)\cos(\pi\cos\theta)}{\pi r \sin\theta} \sin(\omega t - \beta r). \qquad (14.52)$$

Диаграмма направленности, вычисляемая путем подстановки выражения (14.52) в (14.48), изображена на фиг. 127 сплошной кривой. Мы видим, что, хотя амплитуды крайних полуволн такие же, как и раньше, однако величина крайних лепестков сильно уменьшилась, а центрального лепестка увеличилась в 4 раза.

§ 7. Излучение бегущей волны. Рассмотрим волну тока с постоянной амплитудой $I_0 \cos(\omega t - \beta z')$, бегущую вдоль провода от точки $z' = -l/2$ к точке $z' = +l/2$, где она полностью без отражений поглощается. По формуле (14.21) поле, создаваемое в точке x, y, z на больших расстояниях $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ от антенны, равно

$$B_\varphi = (\mu\varepsilon)^{1/2} E_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\frac{\mu I_0}{4\pi} \int_{-1/2l}^{1/2l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{\cos[\omega t - \beta(r' + z')]}{r'} \right\} dz',$$

где $r' = [(z - z')^2 + \rho^2]^{1/2} \approx r - z' \cos\theta$ и $\rho = r \sin\theta$. При $r' \gg l$ членами порядка r^{-2} можно пренебречь, и тогда (Двайт, 401.11)

$$B_\varphi = \frac{\mu I_0}{2\pi r} \frac{\sin\theta \sin(\omega t - \beta r) \sin[\frac{1}{2}\beta l(1 - \cos\theta)]}{1 - \cos\theta} \tag{14.53}$$

Среднюю излучаемую мощность можно получить путем интегрирования выражения (14.48), а именно:

$$\overline{P} = \frac{\mu^{1/2} I_0^2}{4\pi\varepsilon^{1/2}} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta \sin^2[\frac{1}{2}\beta l(1 - \cos\theta)]}{(1 - \cos\theta)^2} \sin\theta \, d\theta. \tag{14.54}$$

Заменив $\beta l(1 - \cos\theta)$ на u и используя формулу (403.2) из справочника Двайта, получим

$$\overline{P} = \frac{\mu^{1/2} I_0}{4\pi\varepsilon^{1/2}} \left[\int_0^{2\beta l} \frac{1 - \cos u}{u} du - \frac{1}{2\beta l} \int_0^{2\beta l} (1 - \cos u) du \right]$$

Первый интеграл выражается через $\mathrm{Ci}\, 2\beta l$ (см. Янке и Эмде, стр. 98), так что подстановка численных величин и замена β на $2\pi/\lambda$ окончательно приводит к следующему выражению:

$$\overline{P} = 30 I_0^2 \left[2{,}108 + \ln\frac{l}{\lambda} + \mathrm{Ci}\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\sin(4\pi l/\lambda)}{4\pi l/\lambda} \right] \tag{14.55}$$

§ 8. Коническая линия передачи. Формулы (14.44)—(14.46) дают поле излучения, создаваемое линейной антенной, возбуждаемой в центре, а формула (14.51) определяет сопротивление излучения такой антенны для случая, когда пучность тока совпадает с точкой возбуждения. Но из рассмотрения бесконечно тонкого провода нельзя получить никаких сведений о реактивном сопротивлении антенны, так как самоиндукция провода на единицу длины равна бесконечности. Если же для избежания этой трудности радиус провода принять отличным от нуля, то вычисление реактивного сопротивления все же окажется затруднительным вследствие появления бесконечной емкости в бесконечно узком зазоре на входе антенны. Шелкунов сумел преодолеть обе трудности путем рассмотрения биконической антенны, состоящей из двух конусов, вершины которых находятся в точке возбуждения. Для простоты изложения продискутируем сначала вопросы, связанные с конической линией передачи.

Волновое уравнение в сферической системе координат, описывающее волну с круговой частотой ω, согласно § 2 гл. XIII и соотношениям (3.17), (13.131), имеет вид

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial W}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) - r^2 \Gamma^2 W = 0. \tag{14.56}$$

Чтобы разбить это уравнение на два, приравняем первую и вторую пары членов по отдельности нулю и получим уравнения (5.87) и (14.2), где

$\Gamma^2 = v^2/\omega^2$. Но из решений (5.88) и (14.4) для расходящейся волны имеем

$$W = r^{-1}V(\theta, \varphi)\, e^{-\alpha r}\cos(\omega t - \beta r), \tag{14.57}$$

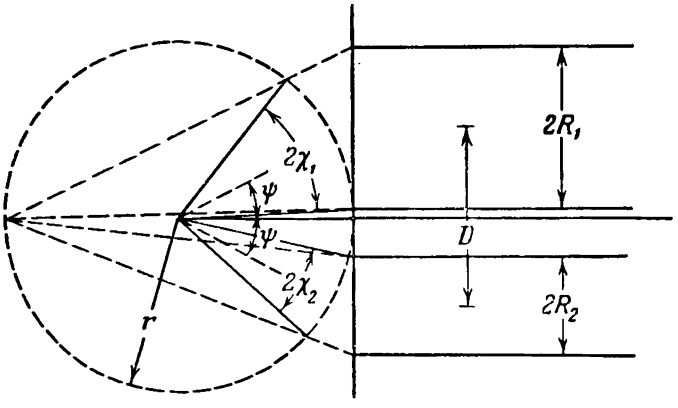
где α — коэффициент затухания, а β — волновое число

$$U(\theta, \varphi) + jV(\theta, \varphi) = F\left(e^{j\varphi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta\right). \tag{14.58}$$

Вектор-потенциал для волны поперечно-электромагнитного поля TEM равен

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{r}W = -\mathbf{r}_1 \times \nabla_2 V e^{-\alpha r}\cos(\omega t - \beta r) = \nabla_2 U e^{-\alpha r}\cos(\omega t - \beta r), \tag{14.59}$$

где ∇_2 имеет только θ- и φ-составляющие. По форме это выражение совпадает с выражением (13.118); это свидетельствует о том, что при приложении переменного потенциала к вершинам двух или нескольких идеально



Фиг. 128.

проводящих конусов, поверхности которых образованы путем вращения радиус-вектора, вдоль этих конусов будет распространяться сферическая волна, эквивалентная плоской волне, распространяющейся вдоль цилиндрической линии передачи, задаваемой уравнением

$$x = \cos\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta, \qquad y = \sin\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta, \qquad z = r. \tag{14.60}$$

Рассмотрим теперь частный случай двух круговых конусов с углами при вершинах, равными $2\chi_1$ и $2\chi_2$, оси которых пересекаются, как это показано на фиг. 128, под углом 2ψ. Стереографическая проекция линий пересечения этих конусов со сферой радиуса r на тангенциальную к ней плоскость (см. § 21 гл. VI) приводит к эквивалентной линии передачи, состоящей из двух цилиндров радиусов R_1 и R_2 с расстоянием между осями D; поперечное сечение линии показано на фиг. 32, *б*. Из фиг. 128 следует

$$\tfrac{1}{2}D + R_{1,2} = 2r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi + \chi_{1,2}), \qquad \tfrac{1}{2}D - R_{1,2} = 2r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi - \chi_{1,2}).$$

Беря отношение этих равенств, применяя формулу (Пайерс, 602) и затем разрешив относительно $D/(2R_{1,2})$, найдем

$$\frac{D}{2R_{1,2}} = \frac{\sin\psi}{\sin\chi_{1,2}}. \tag{14.61}$$

Емкость (на единицу длины) эквивалентной цилиндрической линии, согласно соотношениям (4.71) или (4.69), равна (при $\chi = \chi_1 = \chi_2$ или $\chi_1 \neq \chi_2$)

$$\frac{\varepsilon}{C} = \frac{1}{\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{\sin\psi}{\sin\chi} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon}{C} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{ar\,ch}\left(\pm\frac{4\sin^2\psi - \sin^2\chi_1 - \sin^2\chi_2}{2\sin\chi_1\sin\chi_2}\right). \tag{14.62}$$

Знак минус соответствует двум вложенным друг в друга конусам, в противном случае надо употреблять знак плюс. Согласно выражению (13.135), волновое сопротивление равно

$$Z_k = \frac{\varepsilon}{C}\left(\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \frac{j\omega\mu\varepsilon}{(\alpha + j\beta)C}, \tag{14.63}$$

где μ — магнитная проницаемость, ε — диэлектрическая проницаемость, а γ — проводимость окружающей конус среды.

При $\psi = \pi/2$, беря, для простоты, направление $\theta = 0$ за ось одного из конусов, мы получаем, что U не зависит от координаты φ, и, положив в выражении (14.58) $F(u)$ равным $C \ln u$, из соотношения (5.157) найдем

$$U = V_0 \frac{\ln \operatorname{tg}(\theta/2)}{\ln \operatorname{tg}(\chi/2)} = V_0 \frac{Q_0(\cos\theta)}{Q_0(\cos\chi)}, \tag{14.64}$$

где разность потенциалов между конусами и емкость на единицу длины соответственно равны

$$V = 2V_0 e^{-ar}\cos(\omega t - \beta r), \qquad C = \pi\varepsilon\left(\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\chi\right)^{-1} \tag{14.65}$$

§ 9. Биконическая антенна. Если оба конуса в биконической линии передачи имеют конечные размеры, то они образуют биконическую антенну. Независимо от того, замкнуты ли концы конусов сферической оболочкой, или открыты, целесообразно решать задачу о вычислении поля как краевую задачу в сферической системе координат (см. § 13). Этот метод особенно хорошо использовать для конусов с углами при вершинах, близкими к 0 или к 180°. В случае малых углов численные результаты можно найти и другими методами.

Возьмем два идеально проводящих коаксиальных конуса одинаковой длины, у которых угол при вершине 2χ настолько мал, что распределение тока, согласно соотношениям (14.24) и (14.27), можно записать в виде

$$i = I_0 \cos\omega t \sin(\beta l - \beta r). \tag{14.66}$$

Тогда поля определяются по формулам (14.44) — (14.46), а излучаемая мощность находится путем интегрирования вектора Умова — Пойнтинга по поверхностям конуса. Пусть χ_a, χ, χ_b — углы, под которыми виден из точек $z = -l$, $z = 0$ и $z = l$ соответственно радиус конуса ρ, оканчивающийся на поверхности конуса на расстоянии r от его вершины. Пользуясь выражением для вектора Умова — Пойнтинга (13.23), а также теоремой о циркуляции H (7.2), для мгновенной мощности, излучаемой обоими конусами, получим

$$P = 2\int_0^l E_r H_\varphi 2\pi\rho\, dr = 2\int_0^l i(E_z\cos\chi + E_\rho\sin\chi)\, dr. \tag{14.67}$$

Подстановка выражений (14.44) для E_z, (14.45) для E_ρ и (14.66) для i дает

$$P = \frac{c\mu I^2\cos\omega t}{2\pi}\int_0^l \left[\left(\frac{\cos\chi}{r_a} - \frac{\cos\chi_a}{r}\right)S_a + \left(\frac{\cos\chi}{r_b} + \frac{\cos\chi_b}{r}\right)S_b\right]\sin(\beta l - \beta r)\, dr,$$

где $S_a = \sin(\omega t - \beta r_a)$ и $S_b = \sin(\omega t - \beta r_b)$. Члены, содержащие $\cos\beta l$, исчезают, потому что $\rho = r\sin\chi$. Поскольку угол χ выбран малым, то r_a и r_b можно заменить на $l + r$ и $l - r$, а $\cos\chi_a$, $\cos\chi$ и $\cos\chi_b$ считать равными единице. Если S_a и S_b разбить на множители, то при помощи формул

(401.05)—(401.07) из справочника Двайта для $2\pi P(c\mu I^{-2})^{-1}$ будем иметь

$$\frac{\sin 2\omega t}{4}\int_{\delta'}^{l-\delta}\left[\left(\frac{1}{l+r}-\frac{1}{r}\right)(\sin L-\sin R)+\left(\frac{1}{l-r}+\frac{1}{r}\right)\sin(L-R)\right]dr-$$

$$-\frac{\cos^2\omega t}{2}\int_{\delta'}^{l-\delta}\left\{-\frac{l}{r(l+r)}(\cos R-\cos L)+\frac{l}{r(l-r)}\left[1-\cos(L-R)\right]\right\}dr,$$

где $R=2\beta r$, а $L=2\beta l$. Величины δ и δ' нужно положить равными нулю всюду, где это не приводит к появлению бесконечных членов. В книге Янке и Эмде можно найти формулы для интегральных синусов и косинусов

$$\int_0^a\frac{\sin Ax}{x}dx=\mathrm{Si}(Aa),\qquad\int_0^a\frac{1-\cos Ax}{x}dx=C+\ln(Aa)-\mathrm{Ci}(Aa),$$

где $C=0{,}5772$. При помощи этих формул легко проинтегрировать выражение для мощности, и поскольку $\ln\delta$ и $\ln\delta'$ выпадают, то все члены остаются конечными. Таким образом,

$$P=\frac{c\mu I_0^2\sin 2\omega t}{8\pi}\{2\mathrm{Si}(2\beta l)-\mathrm{Si}(4\beta l)\cos(2\beta l)+[\mathrm{Ci}(4\beta l)-C-\ln(\beta l)]\sin(2\beta l)\}-$$

$$-\frac{c\mu I_0^2\cos^2\omega t}{4\pi}\{2C+2\ln(2\beta l)-2\,\mathrm{Ci}(2\beta l)+[C+\mathrm{Ci}(4\beta l)-2\,\mathrm{Ci}(2\beta l)+$$

$$+\ln(\beta l)]\cos(2\beta l)+[\mathrm{Si}(4\beta l)-2\,\mathrm{Si}(2\beta l)]\sin(2\beta l)\}. \qquad (14.68)$$

Сравнение с выражением (10.14), где $\mathscr{E}^2$ заменяется на $I_0^2\breve{Z}^2$, показывает, что коэффициент при $I_0^2\sin 2\omega t$ равен $2\breve{Z}_r\sin\psi$ или $2X_r$, где X_r — реактивное сопротивление излучения, а коэффициент при $I_0^2\cos^2\omega t$ равен $\breve{Z}_r\cos\psi$ или R_r, где R_r — сопротивление излучения. Если в точке возбуждения находится пучность тока ($2\beta l=n\pi$, где n — нечетное число), то величина R_r имеет то же значение, что и в выражении (14.51). Если же в точке возбуждения находится узел тока и n — число четное, то результат получится другой, потому что при получении выражений (14.66) и (14.67) направление тока в обеих половинах антенны предполагалось одинаковым, в то время как при выводе соотношения (14.50) токи считались текущими в противоположных направлениях.

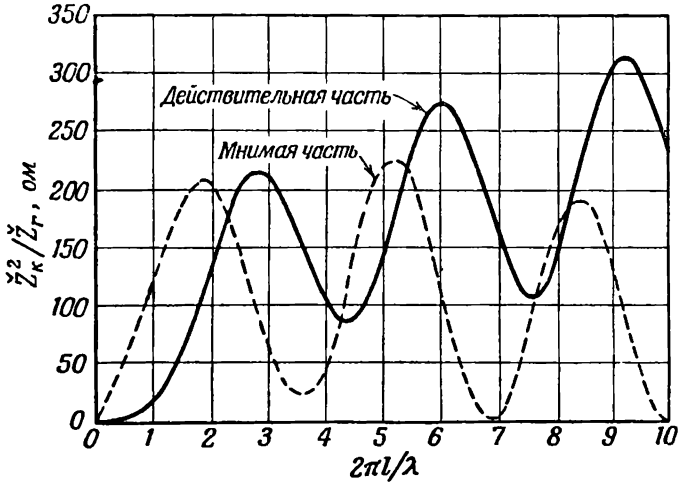
Несмотря на то, что мощность потерь в антеннах уже определена, еще ничего не известно о том, где нужно подключить антенну к линии, чтобы получить правильное значение входного импеданса[1]. Из распределения (14.66) следует, что H_φ, а следовательно, и мощность потерь обращаются в нуль в узлах тока; поэтому нельзя подсоединять линию к концам антенны. Чтобы найти наиболее простым способом место подключения, нужно рассмотреть случай, когда идеально проводящая антенна настроена так, что поступающая в нее мощность расходуется только на излучение. Тогда в точке возбуждения находится пучность тока $\left[\beta l=\frac{1}{2}(2n+1)\pi\right]$, а амплитуда входного тока равна I_0. Подставляя ее значение в уравнение (10.106) и полагая коэффициент затухания равным нулю, для входного

[1] Неправильная постановка задачи. Вопрос о распределении мощности потерь на излучение вдоль антенны, строго говоря, не имеет смысла. При правильной постановке задача заключается в определении входного импеданса антенны и в согласовании последней с соответствующей линией передачи. — *Прим. перев.*

импеданса и для средней затрачиваемой мощности получим

$$\check{Z}_i = \check{Z}_l^{-1}\check{Z}_k^2, \qquad \bar{P} = \frac{1}{2}\check{Z}_i I_0^2, \tag{14.69}$$

где $\check{Z}_l$ — импеданс нагрузки. Но формула (14.68) для средней мощности дает $(\check{Z}_r I_0^2)/2$, поэтому для настроенной антенны $\check{Z}_l\check{Z}_l = \check{Z}_k^2$. Попытаемся использовать это значение в уравнении (10.106) для определения входного импеданса ненастроенной антенны, и для доказательства справедливости этого



Фиг. 129. Зависимость действительной части и мнимой части $\check{Z}_k^2/\check{Z}_r$ от величины $2\pi l/\lambda$.

покажем, что в случае тонкой антенны величина активной мощности согласуется с формулой (14.68). Таким образом,

$$\check{Z}_i = \check{Z}_k \frac{\check{Z}_k \cos\beta l + j\check{Z}_r \sin\beta l}{\check{Z}_r \cos\beta l + \check{Z}_k \sin\beta l}. \tag{14.70}$$

Пусть теперь импульс $\check{Z}_k$ очень велик, что имеет место для очень тонкого конуса, входной ток которого равен $I_0 \sin\beta l$, а входная мощность, согласно соотношению (14.69), равна

$$\bar{P}_i = \frac{1}{2}\check{Z}_i I_0^2 \sin^2\beta l = \frac{1}{2}\left(\check{Z}_r - \frac{1}{2}j\check{Z}_k \sin 2\beta l\right) I_0^2. \tag{14.71}$$

Отсюда активная мощность, как это и должно быть, получается равной $(R_r I_0^2)/2$. Заметим, что формулу (14.70) можно получить из уравнения (10.106), если в ней заменить βl на βl $(\pi/2)$ и $\check{Z}_L$ на $\check{Z}_r$. Но это эквивалентно укорочению длины линии на $\lambda/4$ и использованию $\check{Z}_r$ в качестве импеданса на конце. Таким образом, эффективное местоположение импеданса излучения[1] находится на расстоянии $\lambda/4$ от конца линии. На фиг. 129 показана величина, обратная импедансу излучения, в том виде, в каком она приведена Шелкуновым[2].

---

[1] То есть та точка, где импеданс излучения антенны равен ее входному импедансу. — *Прим. перев.*

[2] Schelkunoff, Proc. Inst. Rad. Eng., September, 493—521 (1941).

Из формулы (14.70) ясно, что резонансная длина волны, при которой $\check{Z}_i$ является чисто действительной величиной, зависит от реактивного сопротивления излучения, но при $|\check{Z}_k| \gg X_r$ она находится вблизи $2\beta l = n\pi$.

§ 10. Сложные антенны. Линейная антенна имеет симметричную диаграмму направленности относительно оси. Для концентрации излучения в одном направлении требуется «направленная система», диаграмма которой формируется при помощи нескольких, обычно одинаковых излучателей длиной $2l$, расположенных параллельно друг другу. Амплитуды и фазы токов в антеннах могут быть различными. Пусть излучатели расположены параллельно оси z в положительном октанте прямоугольной системы координат в виде решетки, расстояния между двумя близлежащими элементами которой в направлениях осей x, y и z соответственно равны a, b и c. Расстояние от начала координат до излучателя, характеризуемого целыми числами u, v, w, определяется выражением

$$\mathbf{r}_{uvw} = \mathbf{i}ua + \mathbf{j}vb + \mathbf{k}wc. \tag{14.72}$$

Обозначим радиус-вектор, проведенный из начала координат O в очень удаленную точку наблюдения P, через $r\mathbf{r}_1$; тогда разность путей прохождения сигналов из точки O в точку P и от излучателя uvw в точку P будет $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{uvw}$. Предположим, что размеры системы малы по сравнению с $\mathbf{r}$ и что при вычислении амплитуды поля в точке P все излучатели можно рассматривать расположенными на одинаковом расстоянии от точки P. Если колебания в антенне uvw отстают по фазе от колебаний в антенне 000 на фазовый угол ψ_{uvw}, а ток в ней равен I_{uvw}, то, согласно соотношению (14.47), вклад этой антенны в поле B_φ, создаваемое в точке P, будет определяться реальной частью следующего выражения:

$$\frac{\mu I_{uvw}[\cos\beta l - \cos(\beta l \cos\theta)]}{2\pi r \sin\theta} e^{j[\omega t - \psi_{uvw} - \beta(r - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{uvw})]}$$

Обозначая первый множитель через F_{uvw}, для всей системы в целом, получим

$$\check{B}_\varphi = (\mu\varepsilon)^{1/2}\check{E}_\theta = e^{-j\beta r}\sum_u\sum_v\sum_w F_{uvw}e^{j(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_{uvw} - \psi_{uvw})} \tag{14.73}$$

В случае одинаковых излучателей множитель F постоянен, и эта формула упрощается. Пусть в направлениях x, y и z каждый последующий излучатель имеет по сравнению с предшествующим постоянный сдвиг фазы, равный соответственно ξ, η или ζ. Тогда тройная сумма в выражении (14.73) распадается на произведение трех сумм:

$$F\sum_u\sum_v\sum_w e^{j[u(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{i}a - \xi) + v(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{j}b - \eta) + w(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{k}c - \zeta)]} =$$

$$= F\sum_u e^{ju(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{i}a - \xi)}\sum_v e^{jv(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{j}b - \eta)}\sum_w e^{jw(\beta\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{k}c - \zeta)}. \tag{14.74}$$

Каждый ряд представляет собой геометрическую прогрессию, и его можно просуммировать (см. Двайт, 26):

$$\sum_{n=0}^{m_x - 1} e^{jn\Psi} = \frac{1 - e^{jm_x\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} = \frac{\sin\frac{1}{2}m_x\Psi}{\sin\frac{1}{2}\Psi}e^{-j1/2(m_x - 1)\Psi}, \tag{14.75}$$

где m_x — номер осциллятора в направлении x. Из выражения (13.146) для среднего значения вектора Умова — Пойнтинга имеем $\frac{1}{2}(\mu^3\varepsilon)^{-1/2}\check{\mathbf{B}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{B}}_\rho$, поэтому

$$\overline{\Pi} = \frac{F^2 \sin^2[{}^1/_2 m_x(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{i}a - \xi)] \sin^2[{}^1/_2 m_y(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{j}b - \eta_1)] \sin^2[{}^1/_2 m_z(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}c - \zeta)]}{2\mu^{3/2}\varepsilon^{1/2} \sin^2[{}^1/_2(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{i}a - \xi)] \sin^2[{}^1/_2(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{j}b - \eta)] \sin^2[{}^1/_2(\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}c - \zeta)]} \tag{14.76}$$

Как уже было сказано, система предназначается для концентрации излучения в определенном направлении. Коэффициент направленного действия или выигрыш системы G определяется как отношение максимальной интенсивности излучения Φ_M к интенсивности Φ_0, усредненной по сферической поверхности большого радиуса, концентричной с излучающей системой. Выигрыш, выраженный в децибеллах, мы будем обозначать через G_d. Итак,

$$G = \frac{\Phi_M}{\Phi_0}, \qquad G_d = 10 \lg \frac{\Phi_M}{\Phi_0} \tag{14.77}$$

Функция выигрыша $G(\theta, \varphi)$ для любого направления является отношением $\Phi(\theta, \varphi)$ к Φ_M. Например, для полуволновой антенны, как следует из соотношений (14.48) и (14.50), отношение максимальной интенсивности к

Фиг. 130.

средней равно $4[\ln(2\pi) + C - \mathrm{Ci}(2\pi)]^{-1}$, что дает для экваториальной плоскости $G = 1{,}64$ или $G_d = 2{,}15$ *дб*. Нормированная диаграмма направленности есть поверхность

$$r = \frac{G(\theta, \varphi)}{G_M} = \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{\Phi_M} \tag{14.78}$$

Рассмотрим теперь частный случай системы, состоящей из m одинаковых n-полуволновых антенн, колеблющихся в фазе и находящихся на расстоянии $\lambda/2$ одна от другой. Положим $m_y = m_z = 1$, $\xi = 0$, $\beta a = \beta\lambda/2 = \pi$ и $\beta l = n\pi/2$, так что в выражении (14.76) $\beta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{i}a = \pi \cos\varphi \sin\theta$, и поэтому

$$\overline{\Pi} = \frac{\mu^{1/2} I_0^2}{8\pi^2 r^2 \varepsilon^{1/2}} \left[\frac{\cos({}^1/_2 n\pi \cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 \left[\frac{\sin({}^1/_2 m\pi \cos\varphi \sin\theta)}{\sin({}^1/_2 \pi \cos\varphi \sin\theta)}\right]^2 \tag{14.79}$$

Такая система называется антенной типа бродсайд (broadside array), так как при $\varphi = \pi/2$ второй множитель в выражении (14.79) максимален, и, следовательно, максимум диаграммы направленности антенны лежит в плоскости, перпендикулярной оси системы. На фиг. 130 показаны относительные значения $\overline{\Pi}$ в плоскости $\theta = 0$ (дополнительные максимумы опущены). Около максимума синусы, входящие во второй множитель, малы, поэтому этот множитель равен m^2. Однако отсюда нельзя сделать вывод, что при равенстве полных мощностей излучение системы в этом направлении в m раз больше, чем излучение одиночного осциллятора, потому что излучатели взаимодействуют между собой. Для определения действительного выигрыша нужно подсчитать Φ_0. Заметим, что из соотношения (14.75) следует, что последний множитель в выражении (14.79) можно, введя $\alpha = \pi \cos\varphi \sin\theta$, записать в виде

$$\left|\frac{\sin {}^1/_2 m\alpha}{\sin {}^1/_2 \alpha} e^{{}^1/_2 j(m-1)\alpha}\right|^2 = \left|\sum_{p=0}^{m-1} e^{jp\alpha}\right|^2 = m + 2\sum_{p=1}^{m-1}(m-p)\cos p\alpha.$$

Преобразуя косинус по формуле (415.02) из справочника Двайта, интегрируя по φ (Двайт, 854.1), а затем объединяя члены, не зависящие от θ, получим

$$2m\pi + \sum_{p=1}^{m-1} (m-p) \int_0^{2\pi} \cos(p\pi \cos\varphi \sin\theta)\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[m^2 + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(m-p)(jp\pi \sin\theta)^{2s}}{2^{2s-1}(s!)^2} \right]$$

Для определения излучаемой мощности это выражение надо умножить на оставшийся множитель в выражении (14.79) и на $r^2 \sin\theta\, d\theta$, а затем проинтегрировать в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$. Первый член уже был проинтегрирован в § 6. Другие же интегралы имеют вид

$$\int_0^{\pi} \cos^2\left(\frac{1}{2} n\pi \cos\theta\right) \sin^{2s-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 + \cos(n\pi \cos\theta)] \sin^{2s-1}\theta\, d\theta.$$

В результате интегрирования получим (см. Двайт, 854.1)

$$\frac{[(s-1)!]^2 2^{2s-2}}{(2s-1)!} + \frac{(s-1)!}{2\pi^{s-1}} \left(\frac{2}{n}\right)^{s-1/2} J_{s-1/2}(n\pi).$$

Суммирование по s в первом члене приводит (Двайт, 442.11) к результату, выражаемому через интегральный косинус (Янке и Эмде, стр. 98). Таким образом,

$$2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (p\pi)^{2s}}{2s\,(2s)!} = -2 \int_0^{p\pi} \frac{1-\cos x}{x}\, dx = -2C - 2\ln(p\pi) + 2\mathrm{Ci}(p\pi).$$

Объединяя все члены, для полной излучаемой мощности получим

$$P = \frac{\mu I_0^2 c}{8\pi} \left\{ m^2 C + m^2 \ln(2n\pi) - m^2\, \mathrm{Ci}(2n\pi) + \right.$$

$$\left. + 4 \sum_{p=1}^{m-1} (m-p) \left[\mathrm{Ci}(p\pi) - C - \ln(p\pi) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \pi^{s+1} p^{2s}}{4s s!\,(2n)^{s-1/2}} J_{s-1/2}(n\pi) \right] \right\}. \quad (14.80)$$

Из соотношений (14.77) и (14.78) выигрыш в децибеллах получается равным $10 \lg [1/2\, \mu c I^2 m^2/(n\bar{P})]$. Для $n = 1$, $m = 2$ отношение Φ_M/Φ_0 равно 3,81, что более чем в два раза превышает Φ_M/Φ_0 у полуволновой антенны. Выигрыш равен 5,81 *дб*.

§ 11. Влияние земли. Диэлектрические или проводящие тела, находящиеся вблизи антенны, оказывают влияние на нее и искажают ее поле. Чаще всего таким телом является поверхность земли. Для волн, близких к сферическим, можно применить законы отражения и преломления на границе раздела с проводящей средой, полученные в § 14 гл. XIII. Если же антенна расположена вблизи поверхности, то определить угол падения очень сложно, и пользоваться этими законами затруднительно. Часто, однако, поверхность можно считать плоской и идеально проводящей. Тогда поле над ней останется неизменным, если эту идеально проводящую плоскость заменить второй, антенной, представляющей собой отражение первой и расположенной и ориентированной таким образом, чтобы результирующее электрическое поле было нормально к поверхности земли. Если все первоначальные антенны располагались перпендикулярно или параллельно земной поверхности, то результирующее поле, очевидно, можно вычислить по формулам предыдущего параграфа.

§ 12. Единственность решения. Прежде чем находить решения волнового уравнения, соответствующие данной краевой задаче, следует определить, какие величины надо задать, чтобы решение было единственным. Рассмотрим область, не содержащую источников и ограниченную изнутри поверхностями $S_1, \ldots, S_n$, а снаружи поверхностью S_0. Пусть ε, μ и γ являются функциями координат, но не зависят от напряженностей полей. Предположим, что два решения уравнений Максвелла $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ совпадают между собой в любой точке области при $t = 0$. Теорема Умова — Пойнтинга (§ 3 гл. XIII) и закон Ома для разностных полей $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$, $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}'$ и т. д. дают следующее соотношение:

$$\int_V \left\{ \frac{(\Delta i)^2}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon (\Delta E)^2}{2} + \frac{(\Delta B)^2}{2\mu} \right] \right\} dv = -\sum_{i=0}^{n} \int_{S_i} \frac{\Delta\mathbf{E} \times \Delta\mathbf{B}}{\mu} \cdot \mathbf{n}\, dS_1.$$

Чтобы поверхностный интеграл равнялся нулю, должно выполняться равенство

$$\Delta\mathbf{E} \times \Delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \Delta\mathbf{B} \times \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{E} = \mathbf{n} \times \Delta\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{B} = 0.$$

Таким образом, если $\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{B}$ или $\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{E}$ равны нулю при $t > 0$, то поверхностные интегралы исчезают. Член в квадратных скобках либо равен нулю, либо положителен, но при $t = 0$ он был равен нулю, поэтому если он вообще меняется, то он должен становиться положительным. Но первый член в левой части тоже либо равен нулю, либо больше нуля. Следовательно, подинтегральное выражение равно нулю, т. е. $\Delta E = \Delta B = 0$. Таким образом, решения $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ одинаковы и полностью определяются начальными значениями полей внутри области и тангенциальными компонентами $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ на поверхности, ограничивающей эту область, заданными для любого момента времени $t > 0$. Практически обычно имеют дело со стационарными решениями задачи; в этом случае значения величин в какой-нибудь момент времени полностью определяют значения этих величин во все предшествующие моменты времени.

§ 13. Решения волнового уравнения в сферических координатах. В изотропной непроводящей среде на расстояниях, значительно превышающих размеры источника, все волны являются сферическими. Поэтому в задачах об излучении наиболее полезной формой решения волнового уравнения является решение в сферических координатах, имеющее вид суммы произведений ортогональных функций, взятых с коэффициентами, определяемыми заданными граничными условиями. Как мы видели в § 2 гл. XIII, полное поле излучения в этом случае описывается вектор-потенциалом, дивергенция которого равна нулю и который можно выразить, как было указано в § 2 гл. XI, через два решения W_{te} и W_{tm} скалярного волнового уравнения, т. е. если, согласно уравнению (11.12),

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{A}, \quad \nabla^2 W_{te} = -\mu\varepsilon\omega^2 W_{te}, \quad \nabla^2 W_{tm} = -\mu\varepsilon\omega^2 W_{tm}, \quad (14.81)$$

то решение первого уравнения определяется через решения остальных по формуле

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{r} W_{te} + \mathbf{r} \times \nabla W_{tm}). \quad (14.82)$$

Заметим, что решение, соответствующее W_{te}, приводит к вектор-потенциалу, а следовательно, и к электрическому полю, направленному перпендикулярно к $\mathbf{r}$. Эти поля называются поперечно-электрическими волнами и отмечаются индексом te. По формуле (11.14) вектор магнитной индукции будет равен

$$\mathbf{B} = -\nabla \times (\mu\varepsilon\omega^2 \mathbf{r} W_{tm} + \mathbf{r} \times \nabla W_{te}). \quad (14.83)$$

Отсюда видно, что магнитное поле, определяемое из W_{tm}, ориентировано нормально к r, поэтому эти волны называются поперечно-магнитными. Уравнение (14.81) решается так же, как и в § 6 гл. XI, но только для большей общности мы добавим множитель $\Phi(\varphi)$:

$$\check{W} = r^{-1/2}\check{R}(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi). \tag{14.84}$$

Подставив выражение (14.84) в (14.81), получим для $\check{R}$ дифференциальное уравнение (11.53), для Θ — уравнение (5.102), а для Φ — уравнение $d^2\Phi/d\varphi^2 = -m^2\Phi$. Таким образом, если положить $u = \cos\theta$, $\beta = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$, то решение для $\check{W}$ запишется в виде

$$\check{W} = [AP_n^m(u) + BQ_n^m(u)]\,[\check{C}j_n(\beta r) + \check{D}\check{k}_n(j\beta r)]\cos(m\varphi + \delta_m). \tag{14.85}$$

Сферические функции Бесселя обозначены здесь так же, как и в § 32 и 38 гл. V, а именно:

$$j_n(\beta r) = \pi^{1/2}(2\beta r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\beta r); \qquad k_n(j\beta r) = \left(\tfrac{1}{2} j\pi\beta r\right)^{-1/2} \check{K}_{n+1/2}(j\beta r). \tag{14.86}$$

Первая функция в комбинации с множителем $e^{j\omega t}$ представляет стоячую волну, а вторая, в зависимости от того, является ли n положительным или отрицательным числом, представляет соответственно расходящуюся или сходящуюся волну.

§ 14. Разложение плоской волны по полиномам Лежандра. Для удовлетворения граничным условиям на сферических поверхностях часто бывает необходимо иметь разложение плоской волны по функциям (14.85). Хотя для простоты мы будем рассматривать волну, распространяющуюся вдоль оси $\theta = 0$, однако полученные ниже результаты можно отнести и к волнам, распространяющимся вдоль любых других осей. Из выражений (13.132) и (13.133) можно видеть, что координата $z = r\cos\theta$, будучи умноженной на $\check{\Gamma}$, входит в формулы для плоских волн только через показатель экспоненциальной функции. Поэтому в качестве коэффициента перед $P_n(\cos\theta)$ при разложении в ряд по полиномам Лежандра нужно взять $\exp[\check{\Gamma} r\cos\theta]$. Из выражения (5.130)

$$\check{a}_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}(\check{\Gamma}r)^n \int_{-1}^{+1} e^{\check{\Gamma}ru}(1-u^2)^n\,du. \tag{14.87}$$

Разложение в ряд экспоненциальной функции (Двайт, 550) дает

$$\check{a}_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}(\check{\Gamma}r)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\check{\Gamma}r)^s}{s!} \int_{-1}^{+1} u^s(1-u^2)^n\,du. \tag{14.88}$$

При s-нечетных этот интеграл равен нулю; поэтому заменим s на $2m$ и, взяв пределы интегрирования от 0 до 1, поставим перед интегралом множитель 2. В знаменателе этого выражения вместо $(2m)!$ можно написать $2^{2m}m!\,\pi^{-1/2}\Gamma(m+1/2)$ (Двайт, 850.7 и 855.1), тогда при помощи соотношения (5.407), заменив $n!$ на $\Gamma(n+1)$, получим

$$\check{a}_n = \frac{(2n+1)\pi^{1/2}}{2^{n+1}\Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\check{\Gamma}r)^{n+2m}}{2^{2m}m!\,\Gamma(m+1/2)} \frac{\Gamma(m+1/2)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+3/2)} =$$

$$= (2n+1)\left(\frac{\pi}{2\check{\Gamma}r}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1/2\check{\Gamma}r)^{n+2m+1/2}}{m!\,\Gamma(m+n+3/2)} = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2\check{\Gamma}r}\right)^{1/2} I_{n+1/2}(\check{\Gamma}r). \tag{14.89}$$

При отсутствии затухания $\check{\Gamma}$ можно заменить на $j\beta$ и, учитывая соотношение (5.407), получить

$$\check{a}_n = (2n+1)\, j^n \left(\frac{\pi}{2\beta r}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(\beta r) = j^n (2n+1)\, j_n(\beta r). \qquad (14.90)$$

Таким образом, искомое разложение будет иметь вид

$$e^{j\beta z} = e^{j\beta r\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1)\, j_n(\beta r)\, P_n(\cos\theta). \qquad (14.91)$$

Для волны $e^{-j\beta z}$ надо заменить β на $-\beta$, или, что то же самое, $\cos\theta$ на $\cos(\pi-\theta)$. Это эквивалентно [см. соотношение (5.314) или § 13 гл. V] введению в правую часть множителя $(-1)^n$

$$e^{-j\beta z} = e^{-j\beta r\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n (2n+1)\, j_n(\beta r)\, P_n(\cos\theta). \qquad (14.92)$$

§ 15. Излучение кольцевого тока. Магнитный диполь. Разложение решений по ортогональным функциям, данное в § 13, обычно применяется в краевых задачах, но оно может оказаться предпочтительным и для источников с заданным распределением тока. Например, на больших расстояниях от круглой петли, ток вдоль которой распределен равномерно, поле можно легко найти при помощи метода запаздывающих потенциалов (см. § 4), но вблизи петли это сделать довольно трудно. Из соображений симметрии ясно, что такой источник создает только поперечно-электрические волны, и, согласно выражениям (14.21) и (14.22), эти волны можно описать, не привлекая скалярного потенциала, при помощи только φ-компоненты вектор-потенциала. Поэтому из выражения (14.85) при $r > a$ мы имеем

$$\check{W}_{te} = \sum_{n=0}^{\infty} \check{A}_n P_n(\cos\theta)\, j_n(\beta a)\, \check{k}_n(j\beta r). \qquad (14.93)$$

При $r < a$ надо переставить местами r и a. Согласно выражению (14.82), вектор-потенциалы равны

$$r > a \qquad \check{A}_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \check{A}_n P_n^1(\cos\theta)\, j_n(\beta a)\, \check{k}_n(j\beta r), \qquad (14.94)$$

$$r < a \qquad \check{A}_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \check{1}_n P_n^1(\cos\theta)\, j_n(\beta r)\, \check{k}_n(j\beta a). \qquad (14.95)$$

Ясно, что эти потенциалы равны между собой при $r = a$. Кроме того, поскольку поле должно быть симметричным относительно плоскости $\theta = \pi/2$, в рядах могут существовать только члены, соответствующие нечетным n, поэтому n следует заменить на $(2m+1)$. Из выражения (14.27) ясно, что ток может быть однородным только в случае очень малых βa, для которых $j_n(\beta r) \approx (\beta r)^{2m+1}/(4m+3)!!$ и $\check{k}_n(j\beta a) \approx (4m+1)!!\,(j\beta a)^{-2m-2}$ при $r \leqslant a$ [см. соотношения (5.401) и (5.472)]. За исключением временного множителя, выражение (14.95) является чисто действительным и совпадающим по форме с выражением (7.71), если $\alpha = \pi/2$, так что оно, будучи умноженным на $\cos\omega t$, дает значения $\check{A}_\varphi$ при $r \leqslant a$. Учитывая, что, согласно § 16 гл. V и соотношению (5.182), $P_{2m+1}^1(0) = (-1)^m (2m+1)!!$ и подставляя найденные из выражения (14.95) значения A_m в (14.94), получим

$$r > a \qquad \check{A}_\varphi = -\frac{1}{2}\mu I \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!\,(\beta a)^{2m+2}}{(2m+2)!!\,(4m+1)!!} P_{2m+1}^1(\cos\theta)\, \check{k}_{2m+1}(j\beta r). \qquad (14.96)$$

Для нахождения действительной части от $\check{A}_\varphi e^{j\omega t}$ по формуле (5.474) можно заменить

$$\mathrm{Re}\,[e^{j\omega t}k_{2m+1}(j\beta r)] = (-1)^m\,[n_{2m+1}(\beta r)\cos\omega t - j_{2m+1}(\beta r)\sin\omega t].$$

При больших r, в силу малости βa, всеми членами, кроме $m=0$, можно пренебречь и n_1 и j_1 определять по формулам (5.395), (5.396), (5.400) и (5.402). Тогда выражение для A_φ принимает вид

$$A_\varphi = \frac{1}{4}\mu I a^2 r^{-2}\sin\theta\,[\cos(\omega t-\beta r) - \beta r\sin(\omega t-\beta r)]. \qquad (14.97)$$

Если $\pi a^2 I$ заменить на M, то напряженность электрического поля $-\partial A/\partial t$ оказывается равной магнитной индукции, создаваемой электрическим диполем [см. выражение (14.15)], а компоненты вектора магнитной индукции B_r и B_θ — равными умноженным на $-\mu\varepsilon$ соответствующим компонентам напряженности электрического поля, создаваемого электрическим диполем. На больших расстояниях поле становится равным

$$E_\varphi = (\mu\varepsilon)^{-1/2}B_\theta = -\frac{\omega\mu\beta a^2 I\sin\theta}{4r}\cos(\omega t-\beta r), \qquad (14.98)$$

что совпадает с выражением (14.17), умноженным на $\pi\beta a^2 l^{-1}$, так что излучаемая мощность и сопротивление излучения определяются по формулам (14.19) и (14.20) с учетом квадрата того же множителя

$$\overline{P} = 153\,900\,a^4 I^2\lambda^{-4};\quad R_r = 307\,800\,a^4\lambda^{-4}. \qquad (14.99)$$

Таким образом, мощность излучения, будучи выраженной через ток в антенне, оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны, тогда как в случае линейной антенны она обратно пропорциональна всего лишь второй степени λ.

§ 16. Свободные колебания проводящей сферы. Приводимые в § 13 решения волнового уравнения можно с успехом применить для изучения электромагнитных колебаний сферических тел. Как следует из выражения (14.82), возможны два типа колебаний: поперечно-электрические и поперечно-магнитные. Исследование выражения (14.85) показывает, что при $\check{D}=0$ снаружи сферы будет существовать стоячая волна [см. соотношение (5.399)], а при $\check{C}=0$ — расходящаяся волна [см. соотношение (5.473)]. Решение Q_n^m должно быть исключено, так как оно равно бесконечности при $\theta=0$, $\theta=\pi$. В случае диэлектрического или не идеально проводящего шара поле будет существовать и внутри него. Мы воспользуемся суммой решений типа (14.85), взятых пока с неопределенными, но различными для внешней и внутренней областей коэффициентами. Найденные при помощи выражения (14.85) по этим решениям значения вектор-потенциала должны удовлетворять граничным условиям (7.118) и (7.119), как это имело место в § 7 гл. XI.

В качестве простого и интересного примера рассмотрим случай идеально проводящей сферы. Если начальное поле внутри сферы было равно нулю, то оно будет отсутствовать и во все последующие моменты времени, так что потери энергии обусловливаются только излучением. Входящую в выражение (14.85) неизвестную, вообще говоря, частоту колебаний нужно определить из граничных условий. Сначала исследуем колебания поперечно-магнитного типа, могущие возникнуть, например, при перемещении сферы в статическом электрическом поле. Простейшее колебание соответствует

значениям $m=0$ и $n=1$ в выражении (14.85), для которого, учитывая соотношение (14.82),

$$\check{\mathbf{A}}=\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\check{W}_{tm})=\frac{\mathbf{r}_1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\check{W}_{tm}}{\partial\theta}\right)-\frac{\theta}{r}\frac{\partial^2(r\check{W}_{tm})}{\partial r\,\partial\theta}=$$

$$=\sum_p\check{A}_p\left\{-\frac{2\mathbf{r}_1\cos\theta}{r}\check{k}_1(j\beta_p r)+\frac{\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\check{k}_1(j\beta_p r)]\right\} \qquad (14.100)$$

Условие равенства нулю тангенциальной компоненты $-\partial\check{A}_\theta/\partial t$ электрического поля при $r=a$, согласно соотношению (5.473), дает

$$\left(-1-\frac{1}{j\beta a}+\frac{1}{\beta^2a^2}\right)e^{-j\beta a}=\left(\frac{1}{\beta a}+\frac{j\,3^{1/2}}{2}\right)\left(\frac{1}{\beta a}+\frac{j\,3^{1/2}}{2}\right)e^{-j\beta a}=0. \qquad (14.101)$$

Подставляя в выражение (14.85) найденные отсюда два значения $\beta_p=\omega_p(\mu\varepsilon)^{1/2}$, для $\check{W}_{tm}e^{j\omega t}$ получим

$$\sin\theta\left\{A_1\check{k}_1\left[\frac{2jr}{(j+3^{1/2})a}\right]e^{\frac{-2jt(\mu\varepsilon)^{-1/2}}{(j+3^{1/2})a}}+A_2\check{k}_1\left[\frac{-2jr}{(j-3^{1/2})a}\right]e^{\frac{-2jt(\mu\varepsilon)^{-1/2}}{(j-3^{1/2})a}}\right\} \qquad (14.102)$$

При помощи соотношений (5.471), (5.473) и подстановки

$$\gamma=\frac{1}{2}3^{1/2}(\mu\varepsilon)^{-1/2}a^{-1},\quad \alpha=\frac{1}{2}(\mu\varepsilon)^{-1/2}a^{-1},\quad \beta=\frac{1}{2}3^{1/2}a^{-1} \qquad (14.103)$$

после объединения произвольных постоянных действительную часть $\check{W}_{tm}e^{j\omega t}$ можно записать в виде

$$Cr^{-2}a\sin\theta\,[3^{1/2}(a-r)\sin(\omega t-\beta r-\psi)-$$

$$-(a+r)\cos(\omega t-\beta r-\psi)\,e^{-\alpha t+\frac{1}{2}a^{-1}r}]. \qquad (14.104)$$

Из формул (14.103) и (13.84) видно, что длина волны колебаний равна $7{,}26a$ и при прохождении волной расстояния, равного диаметру сферы, ее амплитуда уменьшается в e раз. Таким образом, колебания очень быстро затухают, исчезая уже через несколько периодов. Аналогичным путем можно рассмотреть и колебания поперечно-электрического типа.

Подобный, но только более сложный анализ применим и по отношению к вытянутому сфероиду. Если эксцентриситет сфероида велик, то он прекрасно апроксимирует собой прямой провод конечной длины.

§ 17. Вынужденные колебания диэлектрического или проводящего шара. Формулы, полученные в § 13 и 14, позволяют строго решить задачу об установившемся процессе дифракции плоской электромагнитной волны на однородном шаре. Мы ограничимся случаем, когда шар является идеально диэлектрическим или идеально проводящим. Пусть плоская волна распространяется в направлении z и имеет только x-компоненту поля E. Тогда из соотношений (13.132), (13.133) и (13.21) для комплексной амплитуды напряженности электрического поля, магнитной индукции и вектор-потенциала, относящихся к этой волне, будем иметь

$$\check{E}_x=(\mu\varepsilon)^{-1/2}\check{B}_y=Ee^{-j\beta z},\qquad \check{A}_x=j\omega^{-1}Ee^{-j\beta z}. \qquad (14.105)$$

И $\check{E}_x$ и $\check{B}_y$ имеют r-составляющие, поэтому для описания волны в сферических координатах потребуются и поля TE и поля TM. Из выражений

(14.82) и (14.83) находим

$$\check{A}_r = \check{A}_x \sin\theta\cos\varphi = [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \check{W}'_{tm})]_r,$$
$$\check{B}_r = \check{B}_y \sin\theta\sin\varphi = [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \check{W}'_{te})]_r \qquad (14.106)$$

В разложении (14.92) функция $e^{-j\beta z}$ представлена в виде суммы членов типа (14.85). Путем дифференцирования по θ введем множитель $\sin\theta$, входящий в соотношение (14.106):

$$j\beta r \sin\theta e^{-j\beta z} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n (2n+1)\, j_n(\beta r)\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (14.107)$$

$$\check{A}_r = -\frac{E\cos\varphi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n (2n+1)\, j_n(\beta r)\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (14.108)$$

$$\check{B}_r = -\frac{E\sin\varphi}{j\omega r}\sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n (2n+1)\, j_n(\beta r)\, P_n^1(\cos\theta). \qquad (14.109)$$

Применив оператор (14.106) к n-му члену в выражении (14.91) с учетом соотношения (5.85), получаем

$$[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \check{W}_n)]_r = \left[\nabla \times \left(\varphi \frac{\partial \check{W}_n}{\partial\theta} - \frac{\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \check{W}_n}{\partial\varphi}\right)\right]_r =$$
$$= \frac{j_n(\beta r)}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S_n}{\partial\varphi^2}\right] = -\frac{n(n+1)}{r}\check{W}_n. \qquad (14.110)$$

Итак, те части $\check{W}'_{tm}$ и $\check{W}'_{te}$ функций $\check{W}_{tm}$ и $\check{W}_{te}$, которые описывают падающую плоскую волну, можно найти путем умножения n-го члена рядов (14.108) и (14.109) на $-r[n(n+1)]^{-1}$. Те же части, которые описывают диффрагированные волны, должны содержать функцию $\check{k}_n(j\beta r)$, так как эти волны являются расходящимися. Таким образом, имеем

$$\check{W}_{tm} = \frac{E\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[(-j)^n j_n(\beta r) + \check{A}_n\check{k}_n(j\beta r)]\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (14.111)$$

$$\check{W}_{te} = \frac{E\sin\varphi}{j\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[(-j)^n j_n(\beta r) + \check{B}_n\check{k}_n(j\beta r)]\, P_n^1(\cos\theta). \qquad (14.112)$$

Внутри шара поля должны оставаться конечными в начале координат; поэтому

$$\check{W}_{tmi} = \frac{E\cos\varphi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}(-j)^n \check{A}_{ni} j_n(\beta' r)\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (14.113)$$

$$\check{W}_{tei} = \frac{E\sin\varphi}{j\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}(-j)^n \check{B}_{ni} j_n(\beta' r)\, P_n^1(\cos\theta). \qquad (14.114)$$

Приравняв нормальные компоненты вектора электрической индукции, согласно выражениям (14.110) и (14.106), найдем

$$\varepsilon_i \check{A}_{ni} j_n(\beta' a) = \varepsilon[j_n(\beta a) + j^n \check{A}_n \check{k}_n(j\beta a)]. \qquad (14.115)$$

Приравняв нормальные компоненты вектора магнитной индукции, согласно выражениям (14.110) и (14.106), придем к следующему соотношению:

$$\check{B}_{ni} j_n(\beta' a) = j_n(\beta a) + j^n \check{B}_n k_n(j\beta a). \qquad (14.116)$$

Тангенциальная составляющая вектор-потенциала A в соответствии с выражениями (14.110) и (14.82) равна

$$\check{A}_t = \theta\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\check{W}_{tm})}{\partial\theta\,\partial r}\right] - \varphi\left[\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\check{W}_{tm})}{\partial\varphi\,\partial r}\right] \quad (14.117)$$

Равенство тангенциальных компонент $\check{E}$ или $\check{A}$ включает в себя только производные $\check{W}_{tm}$ по r, так как члены, относящиеся к $\check{W}_{te}$, уже равны в силу соотношения (14.116). Условия, накладываемые на θ- или φ-составляющие, приводят к одному и тому же соотношению

$$\check{A}_{ni}\frac{\partial[aj_n(\beta' a)]}{\partial a} = \frac{\partial[aj_n(\beta a)]}{\partial a} + j^n\check{A}_n\frac{\partial[a\check{k}_n(j\beta a)]}{\partial a} \quad (14.118)$$

Сравнение (14.82) с (14.83) показывает, что $\check{W}_{tm}$ входит в выражение для $\check{A}_t$ таким же образом, как $\check{W}_{te}$—выражение для $\check{B}_t$. Равенство θ- или φ-составляющих вектора $\mu^{-1}\check{\mathbf{B}}$ при $r=a$ включает в себя только r-производные от функции $\check{W}_{te}$, потому что члены, содержащие функцию $\check{W}_{tm}$, уже равны между собой, в силу соотношений (14.115), (14.117) и (14.83). Поэтому

$$\frac{1}{\mu_i}\check{B}_{ni}\frac{\partial[aj_n(\beta' a)]}{\partial a} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial[aj_n(\beta a)]}{\partial a} + j^n\check{B}_n\frac{\partial[a\check{k}_n(j\beta a)]}{\partial a}\right\} \quad (14.119)$$

Приравнивая величины A_{ni} в выражениях (14.115) и (14.118) и разрешая полученное уравнение относительно $\check{A}_n$ при помощи соотношений (5.474), (5.403) и (5.404), получим $\check{A}_n = (1 - jN)^{-1}$, где N равно

$$\frac{\beta a\varepsilon_1 j_n(\beta' a)\,n_{n-1}(\beta a) - \beta' a\varepsilon n_n(\beta a)\,j_{n-1}(\beta' a) - n(\varepsilon_1-\varepsilon)\,j_n(\beta' a)\,n_n(\beta a)}{\beta a\varepsilon_1 j_n(\beta' a)\,j_{n-1}(\beta a) - \beta' a\varepsilon j_n(\beta a)\,j_{n-1}(\beta' a) - n(\varepsilon_1-\varepsilon)\,j_n(\beta' a)\,j_n(\beta a)}. \quad (14.120)$$

Такие же формулы, но только с μ_i и μ вместо ε_i и ε, получаются и для $\check{B}_n$ путем решения уравнений (14.116) и (14.119). В случае идеально проводящей сферы для нахождения $\check{A}_n$ и $\check{B}_n$ нужно левые части соотношений (14.116) и (14.118) приравнять нулю, что дает

$$\check{A}_n = \left\{1 - j\frac{\beta a n_{n-1}(\beta a) - n n_n(\beta a)}{\beta a j_{n-1}(\beta a) - n j_n(\beta a)}\right\}^{-1} \qquad \check{B}_n = \frac{j_n(\beta a)}{j_n(\beta a) - j n_n(\beta a)} \quad (14.121)$$

Энергия, рассеянная сферой в некотором направлении, равна, согласно выражению (13.143), действительной части комплексного вектора Умова — Пойнтинга

$$\frac{1}{2}\mu^{-1}\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\mu^{-1}(\mu\varepsilon)^{1/2}\check{\mathbf{E}}\times(\mathbf{r}_1\times\hat{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}_1\mu^{-1/2}\varepsilon^{1/2}(\check{E}_\theta\hat{E}_\theta + \check{E}_\varphi\hat{E}_\varphi). \quad (14.122)$$

Но из соотношения (5.473) на больших расстояниях, где при $p > 1$ можно пренебречь членами r^{-p}, имеем

$$\check{k}_n(j\beta r) = \frac{1}{j\beta r}e^{-j\beta r}, \qquad \frac{\partial[r\check{k}_n(j\beta r)]}{r\partial r} = -\frac{1}{r}e^{-j\beta r}. \quad (14.123)$$

Подставляя это в выражения (14.111), (14.112) и (14.117) для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля, рассеянного на шаре, на больших расстояниях от него получим

$$\check{E}_s = -j\omega\check{A}_s = \frac{jE}{\beta r}e^{-j\beta r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left\{\theta\left[\check{A}_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \check{B}_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\cos\varphi - \varphi\left[\check{A}_n\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \check{B}_n\sin\theta P_n^{1\prime}(\cos\theta)\right]\sin\varphi\right\} \quad (14.124)$$

Для получения полной рассеянной энергии выражение (14.122) надо умножить на $r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi$ и проинтегрировать в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Подстановка выражения (14.124) в (14.122) и проведение интегрирования по φ, дающее множитель π, приводят, если опустить аргументы полиномов Лежандра, к выражению

$$\frac{\varepsilon^{1/2}\pi E^2}{2\mu^{1/2}\beta^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2m+1)}{n(n+1)m(m+1)} \left[(\check{A}_n \hat{A}_m + \check{B}_n \hat{B}_m)(\sin^2\theta P_n^{1'} P_m^{1'} + \frac{P_n^1 P_m^1}{\sin^2\theta}) + \right.$$

$$\left. + (\check{A}_n \hat{B}_m + \check{B}_n \hat{A}_m)(P_n^{1'} P_m^1 + P_n^1 P_m^{1'}) \right]. \quad (14.125)$$

Умножая на $r^2 \sin\theta\, d\theta$ и интегрируя от 0 до π, получаем, что первая группа полиномов Лежандра сводится к интегралу (5.198), который равен нулю при $m \neq n$, и к (5.199) при $m = n$. Интеграл от первого члена второй группы сокращается с интегралом от второго члена. В результате полная рассеянная мощность получается величиной действительной и равной

$$\overline{P} = \frac{\pi\varepsilon^{1/2}E^2}{\mu^{1/2}\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|A_n|^2 + |B_n|^2). \quad (14.126)$$

В книгах Макдональда и Стрэттона, названия которых приведены в конце этой главы, дискутируются некоторые интересные случаи диффракции на шаре.

§ 18. Решения волнового уравнения в цилиндрических координатах. В § 15 гл. XIII был рассмотрен частный случай цилиндрической волны, распространяющейся в направлении z; при этом в волновом уравнении приравнивались нулю по отдельности члены, содержащие z и t. Если теперь вместо этого первую группу членов положить равной $\pm \beta_{mn}^2$, а вторую—равной $\mp \beta_{mn}^2$ и зависимость от времени считать синусоидальной ($\beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu$), то получим следующие уравнения:

$$\nabla_2^2 \check{U} \pm \beta_{mn}^2 \check{U} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \check{Z}}{\partial z^2} + (\beta^2 \mp \beta_{mn}^2)\check{Z} = 0, \qquad \check{W} = \check{U}\check{Z}. \quad (14.127)$$

Сравнение с уравнениями (5.300), (5.304) и (5.317) показывает, что в системе координат ρ, φ, z функция $\check{W}$ имеет вид

$$\check{W} = (\check{A}e^{jk_{mn}z} + \check{B}e^{-jk_{mn}z})[\check{C}J_m(\beta_{mn}\rho) + \check{D}Y_m(\beta_{mn}\rho)]\cos(m\varphi + \delta_m), \quad (14.128)$$

$$\check{W} = (\check{A}e^{jk'_{mn}z} + \check{B}e^{-jk'_{mn}z})[\check{C}I_m(\beta_{mn}\rho) + \check{D}K_m(\beta_{mn}\rho)]\cos(m\varphi + \delta_m), \quad (14.129)$$

где $k_{mn}^2 = \beta^2 - \beta_{mn}^2$ и $k_{mn}'^2 = \beta^2 + \beta_{mn}^2$. Если $\check{C}$, $\check{D}$, k_{mn} и k'_{mn} являются действительными, то обе функции описывают волны, распространяющиеся вдоль оси z. При $\beta_{mn}^2 > \beta^2$ величина k_{mn} становится мнимой, и выражение (14.128) описывает волны, экспоненциально убывающие в направлении z. Если $\check{C}$ действительная, а $\check{D}$ комплексная величина, то это значит, что выражение (14.128) определяет также и распространение в радиальном направлении. Если же наконец, зависимость от z отсутствует, т. е. k_{mn} и k'_{mn} равны нулю, то выражения (14.128) и (14.129) описывают волны с цилиндрическим фронтом.

Определим поперечно-электрические и поперечно-магнитные волны как волны, электрические и, соответственно, магнитные поля в которых ориентированы перпендикулярно к оси z. Тогда, полагая в соотноше-

ниях (11.11) и (11.15) $\mathbf{u}=\mathbf{k}$, получаем

$$\check{\mathbf{A}}=\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial\check{W}_{te}}{\partial\varphi}-\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\check{W}_{te}}{\partial\rho}-\left[\boldsymbol{\rho}_1\frac{\partial^2\check{W}_{tm}}{\partial\rho\,\partial z}+\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial^2\check{W}_{tm}}{\rho\partial\varphi\,\partial z}+\mathbf{k}\left(\beta^2\check{W}_{tm}+\frac{\partial^2\check{W}_{tm}}{\partial z^2}\right)\right], \quad (14.130)$$

$$\check{\mathbf{B}}=\boldsymbol{\rho}_1\cdot\frac{\partial^2\check{W}_{te}}{\partial\rho\,\partial z}+\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial^2\check{W}_{te}}{\rho\partial\varphi\,\partial z}+\mathbf{k}\left(\beta^2\check{W}_{te}+\frac{\partial^2\check{W}_{te}}{\partial z^2}\right)-\boldsymbol{\rho}_1\frac{\beta^2}{\rho}\frac{\partial\check{W}_{tm}}{\partial\varphi}+\boldsymbol{\varphi}\beta^2\frac{\partial\check{W}_{tm}}{\partial\rho} \quad (14.131)$$

§ 19. Разложение плоской волны по цилиндрическим гармоникам. Для плоской синусоидальной волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}$, согласно § 16 гл. XIII, имеем

$$\check{W}e^{j\omega t}=f(u_1,u_2)\,e^{j(\omega t-\beta\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}=f(u_1,u_2)\,e^{j\omega t}e^{-j\beta\rho\cos(\alpha-\varphi)}, \quad (14.132)$$

где направление $\mathbf{n}$ перпендикулярно к оси z и составляет с плоскостью $\varphi=0$ угол α, а u_1 и u_2 — координаты в плоскости, нормальной к $\mathbf{n}$. Плоскую волну можно выразить через цилиндрические гармоники. Для этого нужно последний экспоненциальный множитель в формуле (14.132) разложить в комплексный ряд Фурье. Однако, чтобы использовать уже полученные соотношения, проще разлагать в ряд отдельно действительную и мнимую части. Разложим сначала в ряд Фурье функцию $\cos(x\sin\psi)$:

$$\cos(x\sin\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\psi,$$

$$a_n=\frac{2-\delta_n^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\psi)\cos n\psi\,d\psi. \quad (14.133)$$

Воспользовавшись формулой (401.06) из справочника Двайта и учитывая, что в случае четной подинтегральной функции вместо интеграла от $-\pi$ до π достаточно взять интеграл от 0 до π и умножить его на 2, получим

$$a_n=\frac{2-\delta_n^0}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(n\psi-x\sin\psi)\,d\psi+\int_0^{\pi}\cos(n\psi+x\sin\psi)\,d\psi\right] \quad (14.134)$$

Но, согласно соотношению (5.372), эти интегралы равны $J_n(x)$ и $J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x)$; поэтому все a_n, соответствующие n-нечетным, равны нулю, и если n обозначить через $2m$, то

$$\cos(x\sin\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_m^0)\,J_{2m}(x)\cos 2m\psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\cos n\psi \quad (14.135)$$

Точно таким же путем разлагается в ряд и функция $\sin(x\sin\psi)$, для которой вместо суммы $J_n(x)$ и $J_n(-x)$ получаем их разность

$$\sin(x\sin\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}2J_{2m+1}(x)\sin(2m+1)\psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\sin n\psi. \quad (14.136)$$

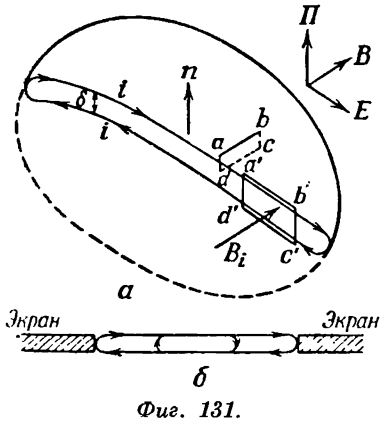
Помножив (14.135) на j и сложив с (14.134), мы придем к разложению экспоненциальной функции, для которой, в прежних обозначениях ($x=\beta\rho$, $\psi=\frac{\pi}{2}+\varphi-\alpha$), ряд имеет следующий вид:

$$e^{j\beta\rho\cos(\alpha-\varphi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}j^nJ_n(\beta\rho)\,e^{jn(\alpha-\varphi)}=J_0(\beta\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}j^nJ_n(\beta\rho)\cos n(\alpha-\varphi). \quad (14.137)$$

§ 20. Излучение из отверстий в плоском проводящем экране. Строгое решение задачи о нахождении поля, излучаемого сквозь отверстие,

чрезвычайно сложно. Поля должны удовлетворять не только волновым уравнениям вне отверстия и определенным условиям на его границах, но и непрерывно соединяться с полями, существующими на самом отверстии. Последние обычно очень сильно меняются под действием отраженного излучения, возникающего вследствие наличия экрана. Поэтому строгое решение задачи возможно лишь в очень ограниченном числе случаев, когда математически можно рассматривать все пространство, где существует поле, как единую область.

В § 12 было доказано, что задание начальных значений полей во всей области, а также задание тангенциальных компонент электрического или магнитного полей на поверхности, ограничивающей эту область, однозначно определяют поля в любые последующие моменты времени. Для установившихся процессов имеет смысл только одно второе условие. В случае идеально проводящего экрана целесообразно оперировать с электрическим полем, потому что его тангенциальная составляющая на поверхности экрана равна нулю, т. е. известна. В качестве первого приближения при нахождении неизвестного электрического поля на отверстии лучше всего, повидимому, взять значения поля, существующего в отсутствие экрана. Приводимое ниже рассмотрение относится только к случаю плоских проводящих экранов; на форму и количество отверстий, равно как и на структуру падающей волны, не будет накладываться никаких ограничений.



Фиг. 131.

Нам нужно найти источник, создающий такое поле E, тангенциальная компонента которого исчезает на всей бесконечной плоскости, кроме ее участка S, где она равна некоторой заданной величине. Рассмотрим тонкий двойной лист с током. Пусть расстояние между слоями тока очень мало, а плотности токов в них равны по величине и противоположны по направлению, как это показано на фиг. 131, *а*. Если ток постоянен вдоль своего направления, то он весь проходит через края, где его направление меняется на обратное; если же плотность тока в центре больше, чем на краях, то, как это показано на фиг. 131, *б*, часть тока возвращается назад еще до достижения краев. Поскольку лист считается очень тонким, то внешнее магнитное поле пренебрежимо мало по сравнению с полем между слоями. Поэтому, применяя теорему о циркуляции H к прямоугольному контуру $abcd$, ориентированному перпендикуляно i и своей большой стороной плотно прилегающему к верхнему слою (фиг. 131, *а*), мы найдем, что $B_i = \mu i$. Далее, под действием изменения потока магнитной индукции $N = B_i \delta dl$ сквозь площадку контура $a'b'c'd'$ в последнем возникнет э.д.с. $-(dN/dt)$, равная, в силу симметрии, $2Edl$ при $\delta \to 0$, так что напряженность электрического поля E непосредственно над поверхностью листа будет равна $-\frac{1}{2} j\omega\mu\delta \mathbf{i}$.

Такой двойной слой тока можно, очевидно, выполнить при помощи бесконечно малых соленоидов длиной dc, имеющих поперечное сечение δdl и магнитный момент $\mathbf{n} \times \mathbf{i}\delta dldc$, равный, если его выразить через E, величине $-2(j\omega\mu)^{-1}\mathbf{n} \times \mathbf{E}dS$. Эти элементарные соленоиды нужно распределить таким образом, чтобы они создавали требуемое изменение поля E вдоль поверхности. Из симметрии очевидно, что вне границ двойного слоя создаваемое им поле E будет нормальным к поверхности экрана. Согласно выражению (14.97), вектор-потенциал, описывающий поле, создаваемое в некоторой точке P маленькой петлей тока, ориентирован перпендикулярно к оси

последней и прямо пропорционален синусу угла между этой осью и радиус-вектором **r**, направленным от петли в точку P. Подстановка только что найденной величины момента вместо момента петли $\pi a^2 I$, входящего в выражение (14.97), дает

$$\mathbf{A} = \check{\mathbf{A}} e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi\omega} e^{j\omega t} \int_S \frac{(j-\beta r)(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{r}_1}{r^2} e^{-j\beta r} dS, \qquad (14.138)$$

где $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор вдоль направления **r**. На больших расстояниях членом с j в подинтегральном выражении можно пренебречь по сравнению с βr. В общем случае амплитуда, направление и фаза **E** могут меняться вдоль поверхности отверстия.

Рассмотрим систему источников электромагнитного поля, находящихся над плоскостью xy, а также систему их изображений с противоположными знаками, находящихся под этой плоскостью. Ясно, что на плоскости xy тангенциальные составляющие электрического и нормальные составляющие магнитного полей, создаваемых обеими системами, вычитаются и исчезают, тогда как нормальные составляющие электрического и тангенциальные составляющие магнитного полей складываются. Поэтому если любую часть плоскости xy покрыть тонким листом идеально проводящего металла, то это не приведет к искажениям поля. Если после этого изображенные источники убрать совсем, то на отверстии нормальные составляющие электрического и тангенциальные составляющие магнитного полей, создаваемые истинными источниками, останутся без изменений, так как вихревые токи, текущие в проводящей плоскости, оказывают действие только на нормальные составляющие магнитного и тангенциальные составляющие электрического полей. Таким образом, когда электромагнитная волна произвольного вида падает на плоский и идеально проводящий лист произвольной формы, нормальные составляющие электрического и тангенциальные составляющие магнитного полей остаются невозмущенными на отверстиях, прорезанных в этом листе. Поэтому из выражения (14.138) имеем

$$[\check{B}_0]_t = \frac{1}{2\pi\omega}\left[\nabla\times\int_S \frac{(j-\beta r)(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{r}_1}{r^2} e^{-j\beta r} dS\right]_t \qquad (14.139)$$

Это интегральное уравнение можно решить относительно $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ на отверстии. Подставив результат в выражение (14.138), мы получим совершенно строго диффрагированное поле в случае бесконечно тонкого плоского проводящего экрана произвольной формы.

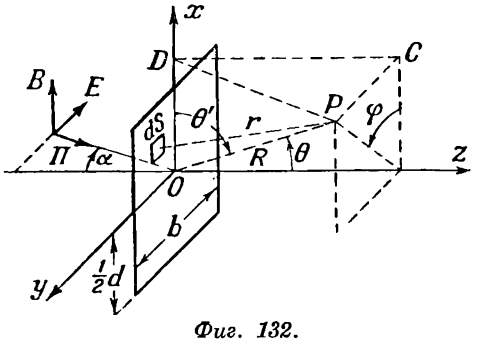
Если магнитное поле в падающей волне ориентировано параллельно экрану и длина волны значительно превосходит размеры отверстия, то часто можно найти, исходя из теории потенциала, точную величину отношения нормальной и тангенциальной компонент вектора магнитной индукции на отверстии и отсюда уже определить величину тангенциальной составляющей напряженности электрического поля. Перемещение прямоугольника $a'b'c'd'$ вдоль B_i уменьшает величину $2Edl$ ровно настолько, насколько уменьшается величина dN/dt. Это уменьшение, в свою очередь, равно скорости изменения потока магнитной индукции, выходящего через обе поверхности двойного слоя на участке между двумя соседними положениями контура $a'b'c'd'$. Таким образом, на отверстии, прорезанном в плоскости xy, если **E** имеет только y-составляющую, имеем

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = j\omega B_z. \qquad (14.140)$$

Путем интегрирования этого уравнения находим тангенциальную составляющую **E**, входящую в выражение (14.138). Решение статической задачи

позволяет определить B_z на отверстии через значение тангенциальной к плоскости экрана компоненты B вдали от отверстия. Эта величина относится к стоячей волне, поэтому она в два раза превышает величину B в падающей волне, появляющейся в отверстии. В конце главы помещены примеры, в которые включены результаты Бете о диффракции на малых отверстиях.

§ 21. Диффракция на прямоугольном отверстии в проводящем плоском экране. Формулы, полученные в предыдущем параграфе, позволяют найти диффрагированное поле в случае прямоугольного отверстия в идеально проводящем экране, совпадающем с плоскостью xy. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси x, а вектор Умова — Пойнтинга наклонен относительно оси z на угол α, как это показано на фиг. 132. Если через x_1 и y_1 обозначить координаты элемента dS через r — радиус-вектор, проведенный из dS в точку P, а через R — радиус-вектор из точки O в точку P, то при $R \gg a$ и $R \gg b$ приближенно будем иметь



Фиг. 132.

$$r \approx R - x_1 \cos\varphi \sin\theta - y_1 \sin\varphi \sin\theta. \tag{14.141}$$

Тангенциальная компонента E_t в плоскости $z = 0$ имеет непостоянную фазу, а именно:

$$\breve{E}_t e^{j\omega t} = E \cos\alpha e^{j(\omega t - \beta y_1 \sin\alpha)}. \tag{14.142}$$

Так как векторное произведение $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ параллельно оси x, то вектор $(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{R}$ лежит в плоскости yz и перпендикулярен к DP, а следовательно, и $\mathbf{R}$, и пропорционален по величине $\sin\theta'$ Таким образом, имеем

$$\breve{A}_y = -\cos\theta \operatorname{cosec}\theta' \breve{A}, \qquad \breve{A}_z = \sin\theta \sin\varphi \operatorname{cosec}\theta' \breve{A}, \tag{14.143}$$

$$\breve{A}_\theta = \breve{A}_y \sin\varphi \cos\theta - \breve{A}_z \sin\theta, \qquad \breve{A}_\varphi = \breve{A}_y \cos\varphi, \qquad \breve{A}_r = 0. \tag{14.144}$$

Если теперь выражение (14.138) подставить в выражение (14.143), то $\operatorname{cosec}\theta'$ сократится с $\sin\theta'$ Пренебрежем x_1^2 и y_1^2 по сравнению с R^2, сохранив члены x_1 и y_1 в выражении для $\breve{A}$ только в показателе. Тогда, переписав выражение (14.142) для $\breve{E}_t$ и учитывая выражение (14.144), получим

$$\breve{A}_\theta = \frac{\beta E \cos\alpha \sin\varphi}{2\pi\omega R} e^{-j\beta R} \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} e^{j\beta[x_1 \cos\varphi \sin\theta + y_1(\sin\varphi \sin\theta - \sin\alpha)]}\, dx_1\, dy_1 =$$

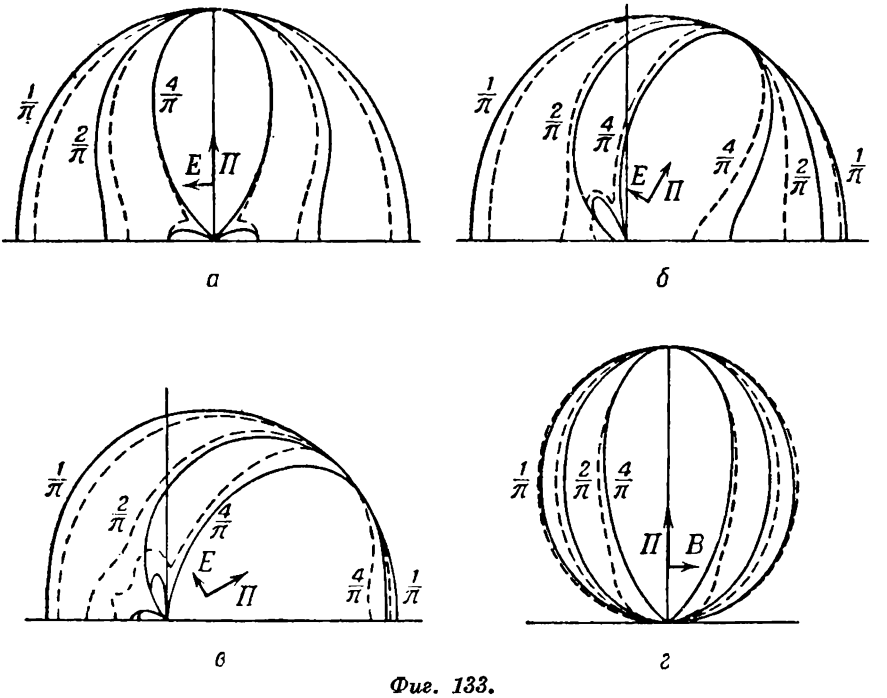
$$= \frac{2E \cos\alpha \sin\varphi \sin\left(\frac{1}{2}\beta a \cos\varphi \sin\theta\right) \sin\left[\frac{1}{2}\beta b (\sin\varphi \sin\theta - \sin\alpha)\right]}{\pi\beta\omega R \cos\varphi \sin\theta (\sin\varphi \sin\theta - \sin\alpha)} e^{-j\beta R}, \tag{14.145}$$

$$A_\varphi = A_\theta \operatorname{ctg}\varphi \cos\theta. \tag{14.146}$$

Единственное допущение, сделанное при выводе этих формул, заключается в предположении о невозмущенном электрическом поле на отверстии. Стрэттон и Чу[1]) получили эти формулы путем суперпозиции или «отражения» двух решений уравнений Максвелла, при этом электрическое и магнитное поля на отверстии предполагались невозмущенными. Суперпозиция необходима

[1]) Stratton, Chu, Phys. Rev., 56, 106.

для исключения тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности экрана, и, как можно видеть из только что полученного решения и из теоремы единственности, это эквивалентно отбрасыванию членов, относящихся к магнитному полю. Для проверки формул (14.145) и (14.146) при разных b и a эти авторы сравнивают величину $E_\theta^2 + E_\varphi^2$ в плоскости yz со строгим решением для щели ($a = \infty$), полученным Морзе и Рубенштейном[1]. Результаты приведены на фиг. 133, *а*, *б* и *в*. Аналогичное сравнение



Фиг. 133.

для поля в плоскости xz со щелью ($b = \infty$) при $a = 0$ показано на фиг. 133, *г*. Такое прекрасное совпадение свидетельствует о малой величине ошибки, совершенной при допущении о невозмущенном электрическом поле на отверстии. Ясно, что скалярная теория дифракции Кирхгофа, используемая в оптике, согласно которой фиг. 133, *а* и *г* должны совпадать, становится совершенно неправильной при размерах отверстия в проводящем экране, соизмеримых с длиной волны.

§ 22. Ортогональные функции в задаче о дифракции. Излучение открытого конца коаксиальной линии. Развитый в последних двух параграфах метод не применим к неплоским экранам, но даже и для плоского экрана вычисление интеграла (14.138) в непосредственной близости от отверстия часто бывает затруднительным. В этих случаях можно исходить из решений скалярного волнового уравнения, записанных в виде

$$e^{j\omega t} \sum_n \sum_m C_{mn} U_{mn}(u_1) V_n(u_2) W_{mn}(u_3),$$

$$\int\int U_{mn} V_n U_{pq} V_p \, du_1 \, du_2 = \delta_{pq}^{nm} D_{nm}.$$

[1] Morse, Rubenstein, Phys. Rev., 54, 895.

Координата u_3 отсчитывается в направлении, нормальном к экрану, а u_1, u_2 являются ортогональными криволинейными координатами на его поверхности. Интеграл берется по поверхности экрана и отверстия; $\delta_{pq}^{nm} = 0$ при любых n, m, p, q, кроме $p = n$ и $q = m$. Такие решения уже встречались нам [см. (14.85), (14.128) и (14.129)], мы будем иметь с ними дело также и в ряде задач о волноводах. Для проводящего экрана величина C_{mn} вычисляется по значению тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на отверстии.

Этим методом можно, например, найти излучение от открытого конца коаксиальной линии. Поле на больших расстояниях проще вычислять по формуле (14.138), но при нахождении поля вблизи отверстия используемый здесь метод предпочтительнее. Область существования электромагнитного поля в линии ограничена изнутри и снаружи цилиндрами радиусов $\rho = a$ и $\rho = b$. Линия соединена с плоскостью $z = 0$, являющейся идеально проводящей всюду, за исключением $a < \rho < b$. При вычислении поля излучения в области $z > 0$ мы будем предполагать, что $b \ll \lambda$, и для отыскания поля при $r < b$ будем пользоваться методами электростатики. Для любого радиального распределения потенциала оно находится путем интегрирования последнего по плоскости $z = 0$, потенциал которой считается равным нулю всюду, кроме узкого кольца радиуса ρ и ширины $d\rho$, имеющего потенциал $V(\rho)$. Потенциал V_P, созданный этим кольцом в точке P на оси, можно найти при помощи теоремы взаимности Грина, исходя из значения заряда dq, индуцированного зарядом q, находящимся в точке P, на кольцевом элементе заземленной плоскости. Чтобы определить dq, надо в формуле (5.25) положить $b - a = z$ и $a \to b \to \infty$. При $z > \rho$ разложение в ряд (см. Двайт, 9.05) дает

$$dq = \frac{-zq2\pi\rho d\rho}{2\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$dV_P = -\frac{dq}{q} V(\rho) = V(\rho)\, d\rho \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!\, \rho^{2n+1}}{(2n)!!\, z^{2n+2}} \qquad (14.147)$$

Для получения dV в точке r, θ подставим r вместо z и умножим на $P_{2n+1}(\cos\theta)$. Потенциал в плоскости $z = 0$ будет иметь значения

$$\rho > b, \quad V(\rho) = 0, \quad b > \rho > a, \quad V(\rho) = V_0 \frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)},$$
$$a > \rho > 0, \quad V(\rho) = V_0. \qquad (14.148)$$

Если подставить это в выражение (14.147) и проинтегрировать (Двайт, 610.9), то

$$V = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+2} - a^{2n+2}}{(2n+2)\, r^{2n+2}} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(\cos\theta). \qquad (14.149)$$

Для нахождения поля излучения надо положить в (14.85) $A = 1$ и $B = \check{C} = m = \delta = 0$, в результате чего получится расходящаяся волна. Величины $\check{D}_n$ определяются путем приравнивания коэффициентов при $P_{2n+1}(\cos\theta)$ в выражении для E_θ, полученном из W_{tm}, соответствующим коэффициентам в выражении для E_θ, даваемом соотношением (14.149), при $r = b$. Из выражений (14.85) и (14.82) получим

$$(\check{E}_\theta)_{r=b} = \left[\frac{j\omega}{r} \frac{\partial^2 (r\check{W}_{tm})}{\partial r \partial\theta}\right]_{r=b} = -\frac{j\omega}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \check{D}_n \frac{d}{db} [b\check{k}_{2n+1}(j\beta b)]\, P_{2n+1}^1(\cos\theta).$$

Поскольку βb мало, то вместо производных в этом выражении можно,

согласно (5.472) и (5.473), написать: $(2n+1)(4n+1)!!\,(j\beta b)^{-(2n+2)}$. Чтобы найти E_θ при $r=b$, в выражении (14.149) вместо $P_{2n+1}(\cos\theta)$ напишем $-b^{-1}\partial\,[P_{2n+1}(\cos\theta)]/\partial\theta = b^{-1}P^1_{2n+1}(\cos\theta)$, а вместо r^{2n+2} подставим b^{2n+2}. Приравнивая коэффициенты и разрешая относительно $\check{D}_n$, находим

$$\check{D}_n = \frac{jV_0\,(2n-1)!!\,[(\beta b)^{2n+2}-(\beta a)^{2n+2}]}{\omega \ln(b/a)\,(2n+2)\,(2n+2)!!\,(4n+1)!!} \tag{14.150}$$

Электрическое и магнитное поля при r, бо́льших b, определяются из соотношений (14.82), (14.85), (14.110) и (14.83) в виде

$$\check{E}_\theta = -j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\check{D}_n}{r}\frac{d}{dr}\,[r\check{k}_{2n+1}(j\beta r)]\,P^1_{2n+1}(\cos\theta), \tag{14.151}$$

$$\check{E}_r = j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \check{D}_n r^{-1}(2n+1)(2n+2)\,\check{k}_{2n+1}(j\beta r)\,P_{2n+1}(\cos\theta), \tag{14.152}$$

$$\check{B}_\varphi = -\beta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \check{D}_n \check{k}_{2n+1}(j\beta r)\,P^1_{2n+1}(\cos\theta). \tag{14.153}$$

Эти выражения дают поля в области $r > b$. Если $b \ll \lambda$, они удовлетворяют совершенно строго граничным условиям (14.148). Пренебрегая высокими степенями βb и βa и удерживая только первые члены в рядах, для поля на больших расстояниях, где $\check{k}_{2n+1}(j\beta r)$ можно заменить на $(j\beta r)^{-1}e^{-j\beta r}$, получим

$$B_\varphi = (\mu\varepsilon)^{1/2}E_\theta = -\frac{\beta^3(b^2-a^2)V_0}{4\omega r \ln(b/a)}\sin\theta\cos(\omega t-\beta r). \tag{14.154}$$

Как ясно из сравнения с выражением (14.17), это поле эквивалентно полю на больших расстояниях, создаваемому элементом тока $-Il\sin\omega t$, где $Il = \pi\omega\varepsilon(b^2-a^2)V_0/\ln(b/a)$, так что мощность, излучаемая в верхнее полупространство, равна половине мощности, определяемой выражением (14.19)

$$\overline{P} = \frac{\pi\omega\varepsilon\beta^3(b^2-a^2)^2V_0^2}{24[\ln(b/a)]^2} = \frac{2\pi^2 c\varepsilon\,(b^2-a^2)^2V_0^2}{3[\ln(b/a)]^2\lambda^4}, \tag{14.155}$$

$$R_r = \frac{V_0^2}{2\overline{P}} = \frac{3[\ln(b/a)]^2\lambda^4}{4\pi^5 c\varepsilon\,(b^2-a^2)^2}. \tag{14.156}$$

Этот же метод применим и в случае неплоских экранов, таких, например, как бесконечный проводящий коаксиальный конус с подключенной к нему линией. Ход решения здесь тот же самый, однако отправным пунктом должен быть § 27б гл. V. В приводимых ниже задачах содержатся другие примеры на применения этого метода.

ЗАДАЧИ

1. Линейный квадруполь состоит из зарядов $-q$, $+2q$ и $-q$, расположенных соответственно в точках $z=-a$, 0, $+a$. Квадрупольный момент Q равен $a^2q\sin\omega t$. Показать, что поля на расстоянии $r \gg a$ будут равны

$$E_r = \frac{Q_0(1-3\cos^2\theta)}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3\beta}{r^3}\cos(\omega t-\beta r)+\left(\frac{3}{r^4}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)\sin(\omega t-\beta r)\right]$$

$$E_\theta = \frac{Q_0\sin 2\theta}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{\beta^3}{2r}-\frac{3\beta}{r^3}\right)\cos(\omega t-\beta r)+\left(\frac{3\beta^2}{2r^2}-\frac{3}{r^4}\right)\sin(\omega t-\beta r)\right]$$

$$B_\varphi = \frac{Q_0\beta\sin 2\theta}{8\pi\omega\varepsilon}\left[\left(\frac{\beta^3}{r}-\frac{3\beta}{r^3}\right)\cos(\omega t-\beta r)+\frac{3\beta^2}{r^2}\sin(\omega t-\beta r)\right]$$

2. Показать, что средний по времени поток энергии, излучаемой квадруполем описанным в предыдущей задаче, равен $16\pi^5 c Q_0^2 (15\lambda^6\varepsilon)^{-1}$.

3. Плоский квадруполь состоит из зарядов $-q$, $+q$, $-q$ и $+q$, расположенных по углам квадрата, стороны которого длиной a параллельны соответственно линиям $\varphi=0$, $\frac{1}{2}\pi$, π и $\frac{3}{2}\pi$. Квадрупольный момент равен $Q=a^2q\cos\omega t=Q_0\cos\omega t$. Показать, что на расстояниях $r\gg a$ поля будут равны

$$E_r=\frac{3Q_0\sin^2\theta\sin 2\varphi}{8\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{3}{r^3}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)\cos(\omega t-\beta r)-\frac{3\beta}{r^3}\sin(\omega t-\beta r)\right],$$

$$E_\varphi=\frac{Q_0\sin\theta\cos 2\varphi}{8\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{3\beta^2}{r^2}-\frac{6}{r^4}\right)\cos(\omega t-\beta r)+\left(\frac{6\beta}{r^3}-\frac{\beta^3}{r}\right)\sin(\omega t-\beta r)\right]$$

$$E_\theta=-E_\varphi\cos\theta\operatorname{tg}2\varphi,\quad B_r=0,\quad B_\varphi=B_\theta\cos\theta\operatorname{tg}2\varphi,$$

$$B_\theta=-\frac{Q_0\beta\sin\theta\cos 2\varphi}{8\pi\varepsilon\omega}\left[\frac{3\beta^2}{r^2}\cos(\omega t-\beta r)-\left(\frac{\beta^3}{r}-\frac{3\beta}{r^3}\right)\sin(\omega t-\beta r)\right]$$

4. Показать, что средний по времени поток энергии, излучаемой описанным в предыдущей задаче квадруполем, равен $4\pi^5 c Q_0^2 (5\lambda^6\varepsilon)^{-1}$.

5. Электрический диполь, лежащий в плоскости xy в начале координат, вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω, причем в момент времени $t=0$ диполь ориентирован вдоль оси x. Показать, что составляющие вектора магнитной индукции будут равны

$$B_r=0,\quad B_\theta=-\frac{\omega\mu M}{4\pi r^2}[r\beta\sin(\omega t-\beta r-\varphi)-\cos(\omega t-\beta r-\varphi)],$$

$$B_\varphi=\frac{\omega\mu M\cos\theta}{4\pi r^2}[r\beta\cos(\omega t-\beta r-\varphi)+\sin(\omega t-\beta r-\varphi)].$$

7 [1]). Две антенны одинаковой длины $(2n+1)\lambda/2$ расположены параллельно оси z и имеют центры в точках $x=0$ и $x=a$. Колебания в антенне $x=a$ запаздывают по фазе относительно колебаний в антенне $x=0$ на 90°. Показать, что интенсивность излучения такой антенны будет

$$\overline{\Pi}_1=\frac{\mu c I_0^2\cos^2\left[\frac{1}{2}(2n+1)\pi\cos\theta\right]\cos^2\left[\frac{1}{4}\pi\left(1-\frac{4a}{\lambda}\sin\theta\cos\varphi\right)\right]}{2\pi^2 r^2\sin^2\theta}.$$

Изобразить приблизительно форму сердцевидной диаграммы направленности при $a=\lambda/4$ в плоскости $\theta=\pi/2$.

8. Показать, что при $a=\lambda/4$ выигрыш двойной антенны, описанной в предыдущей задаче, в два раза превышает выигрыш одиночной антенны, возбуждаемой на том же типе колебаний.

9. Система состоит из p синфазных пар антенн, описанных в задаче 7 и расположенных вдоль оси y на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга. Показать, что диаграмма направленности для интенсивности излучения дается функцией

$$\overline{\Pi}=\overline{\Pi}_1\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}p\pi\sin\theta\sin\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sin\theta\sin\varphi\right)}$$

где интенсивность $\overline{\Pi}_1$ равна интенсивности в задаче 7 при $a=\lambda/4$. Показать, что выигрыш в два раза больше, чем у системы, состоящей из p одиночных антенн, расположенных вдоль оси y на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга.

10. Система состоит из p полуволновых синфазных антенн, расположенных друг за другом вдоль оси z. Показать, что интенсивность излучения на больших расстояниях равна

$$\overline{\Pi}=\frac{\mu c I_0^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}p\pi\cos\theta\right)}{8\pi^2 r^2\sin^2\theta\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)}.$$

---

[1]) Вследствие неправильной постановки задача 6 при переводе опущена.— *Прим. перев.*

Заметим, что такая система совпадает с длинной линейной антенной, нагруженной через каждые $\lambda/2$ таким образом, чтобы ликвидировать наличие переменных фаз.

11. Распределение тока в круглой проволочной петле радиуса a имеет вид $I_0 \sin n\varphi_0 \cos \omega t$. Используя запаздывающие потенциалы и привлекая формулы § 18, показать, что при больших r в точке r, θ, φ потенциал A_φ равен

$$\frac{1}{2}\mu a r^{-1} I_0 J_n'(\beta a \sin\theta) \sin n\varphi \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + \omega t - \beta r\right).$$

12. Электромагнитные волны рассеиваются проводящим шаром, радиус которого мал по сравнению с длиной волны. Показать, что на расстояниях от шара, значительно превышающих его радиус, поле, излучаемое под углом $\pi/3$ по отношению к направлению падающего луча, будет линейно поляризованным.

13. Линейно поляризованная электромагнитная волна падает на непроводящий шар, имеющий диэлектрическую проницаемость ε_1 и магнитную μ_1. Радиус этого шара мал по сравнению с длиной волны. Показать, что рассеиваемое излучение равно излучению системы, состоящей из расположенных в начале координат электрического диполя, ориентированного вдоль вектора **E** падающей волны, и перпендикулярного к нему магнитного диполя. Показать, что моменты этих диполей равны

$$M = \frac{4\pi a^3(\varepsilon_1 - \varepsilon)\varepsilon E}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon}\cos\omega t \quad \text{и} \quad \pi r^2 I = \frac{4\pi a^3(\mu_1 - \mu)E}{\mu c(\mu_1 + 2\mu)}\cos\omega t.$$

14. Плоская электромагнитная волна, вектор **E** которой ориентирован вдоль оси y и равен $E\cos(\omega t - \beta x)$, падает на идеально проводящий цилиндр радиуса a с осью вдоль z. Показать, что полное поле определяется действительной частью следующих выражений:

$$E_\rho = -\frac{j\omega}{\rho}\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\varphi}e^{j\omega t}, \quad E_\varphi = j\omega\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\rho}e^{j\omega t}, \quad B_z = \beta^2 \check{W}_{te} e^{j\omega t};$$

$$\check{W}_{te} = -\frac{jE}{\omega\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j)^n(2-\delta_n^0)[J_n'(\beta a)Y_n(\beta\rho) - J_n(\beta\rho)Y_n'(\beta a)]}{J_n'(\beta a) - jY_n'(\beta a)}\cos n\varphi.$$

15. В среде $\mu\varepsilon$ плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой равен $E\cos(\omega t - \beta x)$ и ориентирован вдоль оси y, падает на цилиндр $\mu'\varepsilon'$ (радиус цилиндра a, а ось направлена вдоль z). Показать, что рассеиваемое поле определяется действительной частью следующих выражений:

$$B_z = \beta^2 \check{W}_{te} e^{j\omega t}, \quad E_\rho = -\frac{j\omega}{\rho}\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\varphi}e^{j\omega t}, \quad E_\varphi = j\omega\frac{\partial \check{W}_{te}}{\partial\rho}e^{j\omega t}$$

$$\check{W}_{te} = (\omega\beta)^{-1}E\sum_{n=0}^{\infty}\check{B}_n[J_n(\beta\rho) - jY_n(\beta\rho)]\cos n\varphi,$$

$$\check{B}_n = \frac{(-j)^n(2-\delta_n^0)[(\mu'\varepsilon)^{1/2}J_n(\beta a)J_n'(\beta' a) - (\mu\varepsilon')^{1/2}J_n'(\beta a)J_n(\beta' a)]}{(\mu\varepsilon')^{1/2}J_n(\beta' a)[J_n'(\beta a) - jY_n'(\beta a)] - (\mu'\varepsilon)^{1/2}J_n'(\beta' a)[J_n(\beta a) - jY_n(\beta a)]}$$

16. Плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой ориентирован вдоль оси z и равен $E\cos(\omega t - \beta x)$, падает на идеально проводящий цилиндр радиуса a с осью вдоль z. Показать, что полное поле определяется действительной частью следующих выражений:

$$E_z = j\omega\beta^2 \check{W}_{tm} e^{j\omega t}, \quad B_\rho = -\frac{\beta^2}{\rho}\frac{\partial \check{W}_{tm}}{\partial\varphi}e^{j\omega t}, \quad B_\varphi = \beta^2\frac{\partial \check{W}_{tm}}{\partial\rho}e^{j\omega t},$$

$$\check{W}_{tm} = \frac{E}{\omega\beta^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j)^n(2-\delta_n^0)[J_n(\beta a)Y_n(\beta\rho) - J_n(\beta\rho)Y_n(\beta a)]}{J_n(\beta a) - jY_n(\beta a)}\cos n\varphi.$$

17. В среде $\mu\varepsilon$ плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой ориентирован вдоль оси z и равен $E\cos(\omega t - \beta x)$, падает на цилиндр $\mu'\varepsilon'$ (радиус цилиндра a, а ось направлена вдоль z). Показать, что рассеиваемое поле определяется действительной частью следующих выражений:

$$E_z = j\omega\beta^2 \check{W}_{tm} e^{j\omega t}, \quad B_\rho = -\frac{\beta^2}{\rho}\frac{\partial \check{W}_{tm}}{\partial\varphi}e^{j\omega t}, \quad B_\varphi = \beta^2\frac{\partial \check{W}_{tm}}{\partial\rho}e^{j\omega t},$$

$$\check{W}_{tm}=\frac{E}{j\omega\beta^2}\sum_{n=0}^{\infty}\check{C}_n\left[J_n(\beta\rho)-jY_n(\beta\rho)\right]\cos m\varphi,$$

$$\check{C}_n=\frac{(-j)^n(2-\delta_n^0)\left[(\mu\varepsilon')^{1/2}J_n(\beta a)J_n'(\beta' a)-(\mu'\varepsilon)^{1/2}J_n'(\beta a)J_n(\beta' a)\right]}{(\mu'\varepsilon)^{1/2}J_n(\beta' a)\left[J_n'(\beta a)-jY_n'(\beta a)\right]-(\mu\varepsilon')^{1/2}J_n'(\beta' a)\left[J_n(\beta a)-jY_n(\beta a)\right]}$$

18. Часть идеально проводящего шара радиуса a, расположенная между $\theta=\gamma$ и $\theta=\pi-\gamma$, удалена, а между конусами поддерживается разность потенциалов $V\cos\omega t$ при $r=a$. Принимая, что распределение потенциала в зазоре при $r=a$ определяется по формуле (14.64), показать, что поле излучения равно действительной части следующих выражений:

$$E_\theta=V_0r^{-1}e^{j\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\check{C}_n\left[(2n+2)\check{k}_{2n+1}(j\beta r)-j\beta r\check{k}_{2n+2}(j\beta r)\right]P_{2n+1}^1(\cos\theta),$$

$$E_r=-V_0r^{-1}e^{j\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+2)\check{C}_n\check{k}_{2n+1}(j\beta r)P_{2n+1}(\cos\theta),$$

$$B_\varphi=-V_0j\beta^2\omega^{-1}e^{j\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\check{C}_n\check{k}_{2n+1}(j\beta r)P_{2n+1}(\cos\theta),$$

$$\check{C}_n=\frac{-\omega\mu(4n+3)P_{2n+1}(\cos\gamma)}{\pi\beta\check{Z}_k(2n+1)(2n+2)\left[(2n+2)\check{k}_{2n+1}(j\beta a)-j\beta a\check{k}_{2n+2}(j\beta a)\right]}$$

где $\check{Z}_k$ определяется по формулам (14.63) и (14.65)

19. Подсчитать входной импеданс системы, описанной в предыдущей задаче, доказав ее эквивалентность конической линии передачи, нагруженной при $r=a$ бесконечным множеством параллельно соединенных импедансов $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$, ..., где

$$\frac{1}{\check{Z}_n}=-\frac{2\pi aj\beta^2\sin\gamma}{\mu\omega}\check{C}_n\check{k}_{2n+1}(j\beta a)P_{2n+1}^1(\cos\gamma).$$

20. Среда $\mu\varepsilon$ заполняет пространство между бесконечным диэлектрическим цилиндром $\mu'\varepsilon'$ радиуса a и идеально проводящим цилиндром $\rho=b$. Показать, что вдоль цилиндра могут распространяться поперечно-электрические волны при каждом значении u_n, удовлетворяющем уравнению

$$\frac{\mu'J_1(u_n)}{u_nJ_0(u_n)}=\frac{\mu\left[J_1(v_n)Y_1(v_nb/a)-Y_1(v_n)J_1(v_nb/a)\right]}{v_n\left[J_0(v_n)Y_1(v_nb/a)-Y_0(v_n)J_1(v_nb/a)\right]}=\frac{\mu R_1(v_n)}{v_nR_0(v_n)},$$

а также при условии, что $\omega^2a^2\mu'\varepsilon'>u_n^2$ и $\omega^2a^2\mu\varepsilon>v_n^2$.

Показать, что скорость n-й волны равна

$$\omega a(\omega^2a^2\mu'\varepsilon'-u_n^2)^{-1/2}$$

и что поля в среде $\mu'\varepsilon'$ определяются по формуле

$$-k_n\check{E}_z=\omega\check{B}_\rho=k_n\check{C}_ne^{-jk_nz}J_1(u_n\rho/a);\qquad -j\omega a\check{B}_z=u_n\check{C}_ne^{-jk_nz}J_0(u_n\rho/a),$$

где $\omega^2a^2\mu'\varepsilon'-u_n^2=\omega^2a^2\mu\varepsilon-v_n^2=k_n^2a^2$.

21. Показать, что если отражатель при $\rho=b$ в последней задаче отсутствует, то при тех же частотах и значениях материальных констант плоская волна не может существовать, но результаты предыдущей задачи остаются в силе, если R_0 и R_1 заменить на функции Ханкеля J_0-jY_0 и J_1-jY_1.

22. Бесконечная среда $\mu\varepsilon$ окружает бесконечный диэлектрический цилиндр $\mu'\varepsilon'$ радиуса a. Показать, что плоская поперечно-электрическая волна может распространяться вдоль такого цилиндра при каждом значении u_n, удовлетворяющем уравнениям

$$\mu'v_nK_0(v_n)J_1(u_n)+\mu u_nK_1(v_n)J_0(u_n)=0,\quad \omega^2a^2\mu'\varepsilon'-u_n^2=\omega^2a^2\mu\varepsilon+v_n^2=k_n^2a^2,$$

а также при условии, что $\omega^2a^2\mu'\varepsilon'>u_n^2$ и $\varepsilon'>\varepsilon$.

Показать, что скорость волны равна $\omega a\,(\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' - u_n^2)^{-1/2}$ и что поля снаружи определяются по формулам

$$k_n\check{E}_\varphi = -\omega\check{B}_\rho = k_n\check{C}e^{-jk_n z}K_1(v_n a^{-1}\rho), \qquad -j\omega a\check{B}_z = v_n\check{C}e^{-jk_n z}K_0(v_n a^{-1}\rho)$$

23. Удостовериться в том, что при $Y_1(v_n b/a) = 0$ условия задачи 20 приближенно удовлетворяются при $\varepsilon = 1{,}99\varepsilon' = 1{,}99\varepsilon_0$, $\mu = \mu' = \mu_0$, $\omega a = 10^9$, $u = 1$, $v = 3{,}46$, и показать, что фазовая скорость приблизительно равна $3{,}15\cdot 10^8$ *м/сек*.

24. Удостовериться в том, что условия задачи 22 приближенно удовлетворяются при

$$\varepsilon' = 1{,}72\varepsilon = 1{,}72\varepsilon_0, \quad \mu = \mu' = \mu_0, \quad \omega a = 10^9, \quad u = 2{,}65, \quad v = 1,$$

и показать, что фазовая скорость в z-направлении приблизительно равна $2{,}87\cdot 10^8$ *м/сек*.

25. Среда $\mu\varepsilon$ заполняет пространство между бесконечным диэлектрическим цилиндром $\mu'\varepsilon'$ радиуса a и идеально проводящим цилиндром $\rho = b$. Показать, что плоские поперечно-магнитные волны могут распространяться вдоль цилиндра при любых значениях u_n, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{u_n J_0(u_n)}{\varepsilon' J_1(u_n)} = \frac{v_n[J_0(v_n)Y_0(v_n b/a) - Y_0(v_n)J_0(v_n b/a)]}{\varepsilon[J_1(v_n)Y_0(v_n b/a) - Y_1(v_n)J_0(v_n b/a)]} = \frac{v_n R_0(v_n)}{\varepsilon R_1(v_n)},$$

а также при условии, что $\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' > u_n^2$ и $\omega^2 a^2\mu\varepsilon > v_n^2$.

Показать, что скорость n-й волны равна $\omega a\,(\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' - u_n^2)^{-1/2}$ и что поля в среде $\mu'\varepsilon'$ определяются по формулам

$$\check{E}_\rho = k_n(\omega\mu'\varepsilon')^{-1}\check{B}_\varphi = j\check{C}e^{-jk_n z}J_1(u_n\rho/a), \qquad k_n a\check{E}_z = u_n\check{C}_n e^{-jk_n z}J_0(u_n\rho/a),$$

где $\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' - u_n^2 = \omega^2 a^2\mu\varepsilon - v_n^2 = k_n^2 a^2$.

26. Показать, что если отражатель при $\rho = b$ в последней задаче отсутствует, то при тех же частотах и значениях материальных констант плоская волна не может существовать, однако результаты предыдущей задачи остаются в силе, если R_0 и R_1 заменить на функции Ханкеля $J_0 - jY_0$ и $J_1 - jY_1$.

27. Бесконечная среда $\mu\varepsilon$ окружает бесконечный диэлектрический цилиндр $\mu'\varepsilon'$ радиуса a. Показать, что плоская поперечно-магнитная волна может распространяться вдоль цилиндра при каждом значении u_n, удовлетворяющем уравнениям

$$v_n\varepsilon' J_1(u_n)K_0(v_n) + u_n\varepsilon J_0(u_n)K_1(v_n) = 0, \qquad \omega^2 a^2\mu'\varepsilon' - u_n^2 = \omega^2 a^2\mu\varepsilon + v_n^2 = k_n^2 a^2,$$

а также при условии, что

$$\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' > u_n^2.$$

Показать, что скорость n-й волны равна

$$\omega a\,(\omega^2 a^2\mu'\varepsilon' - u_n^2)^{-1/2}$$

и что поля снаружи цилиндра определяются по формулам

$$\check{E}_\rho = -k_n(\omega\mu\varepsilon)^{-1}\check{B}_\varphi = \check{C}_n e^{-jk_n z}K_1(v_n a^{-1}\rho),$$

$$k_n a\check{E}_z = jv_n\check{C}_n e^{-jk_n z}K_0(v_n a^{-1}\rho).$$

28. Удостовериться в том, что если $Y_0(v_n b/a) = 0$, условия задачи 25 приближенно удовлетворяются при

$$\varepsilon = 2\varepsilon' = 2\varepsilon_0, \quad \mu = \mu' = \mu_0, \quad \omega a = 1{,}2\cdot 10^9, \quad u_n = 1, \quad v_n = 3,$$

и показать, что фазовая скорость в направлении z приблизительно равна $3{,}10\cdot 10^8$ *м/сек*.

29. Удостовериться в том, что условия задачи 27 приближенно удовлетворяются при

$$\varepsilon' = 1{,}81\varepsilon = 1{,}81\varepsilon_0, \quad \mu = \mu' = \mu_0, \quad \omega a = 0{,}99\cdot 10^9, \quad u_n = 2{,}8 \quad \text{и} \quad v_n = 1,$$

и показать, что фазовая скорость приблизительно равна $2{,}88\cdot 10^8$ *м/сек*.

30. Бесконечная плоская идеально проводящая поверхность покрыта слоем диэлектрика $\mu_2\varepsilon_2$ толщиной a, над которым простирается бесконечная диэлектрическая среда $\mu_1\varepsilon_1$. Используя результаты § 18, показать, что расходящаяся поверхностная волна TM, которая может существовать в такой системе, описывается вектор-потенциалами, равными действительным частям следующих выражений:

$$\mathbf{A}_1 = C_1 [\rho_1 (\beta'^2 - \beta_1^2)^{1/2} H_0^{(2)'} (\beta'\rho) - \mathbf{k}\beta' H_0^{(2)} (\beta'\rho)] e^{-(\beta_1^2 - \beta'^2)^{1/2} z + j\omega t},$$

$$\mathbf{A}_2 = C_2 \{\rho_1 (\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2} \sin [(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2} z] H_0^{(2)'} (\beta'\rho) - \mathbf{k}\beta' \cos [(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2} z] H_0^{(2)} (\beta'\rho)\} e^{j\omega t},$$

где

$$\beta_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1, \quad \beta_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \beta_2 > \beta' > \beta_1.$$

Показать, что скорость этой волны точно такая же, как у плоской волны, рассмотренной в задаче 7 гл. XIII.

31. Бесконечная плоская идеально проводящая поверхность покрыта слоем диэлектрика $\mu_2\varepsilon_2$ толщиной a, над которым простирается бесконечная диэлектрическая среда $\mu_1\varepsilon_1$. Используя результаты § 18, показать, что расходящаяся поверхностная волна TE, которая может существовать в такой системе, описывается при помощи вектор-потенциалов, равных действительным частям следующих выражений:

$$\mathbf{A}_1 = \varphi C_1 e^{-(\beta'^2 - \beta_1^2)^{1/2} z} H_1^{(2)} (\beta'\rho) e^{j\omega t}, \quad \mathbf{A}_2 = \varphi C_2 \sin [(\beta_2^2 - \beta'^2)^{1/2} z] H_1^{(2)} (\beta'\rho) e^{j\omega t},$$

где

$$\beta_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1, \quad \beta_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \beta_2 > \beta' > \beta_1.$$

Показать, что скорость этой волны равна скорос плоской волны, рассмотренной в задаче 8 гл. XIII.

32. Бесконечный идеально проводящий цилиндр радиуса a покрыт слоем диэлектрика $\mu_2\varepsilon_2$, внешний радиус которого равен b, и находится в бесконечной диэлектрической среде $\mu_1\varepsilon_1$. Пользуясь результатами § 18, показать, что возможными вектор-потенциалами, описывающими поверхностную волну TM, являются действительные части следующих выражений:

$$\mathbf{A}_1 = C_1 [-\rho_1 j\beta' K_1 (p_1\rho) + \mathbf{k} p_1 K_0 (p_1\rho)] e^{j(\omega t - \beta' z)},$$

$$\mathbf{A}_2 = C_2 [\rho_1 j\beta' R_1^0 (p_2\rho) - \mathbf{k} p_2 R_0^0 (p_1\rho)] e^{j(\omega t - \beta' z)},$$

где

$$\beta_1^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1, \quad \beta_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2, \quad \beta_2 > \beta' > \beta_1, \quad p_1^2 = \beta'^2 - \beta_1^2, \quad p_2^2 = \beta_2^2 \quad \beta_1^2,$$

$$R_0^0 (p_2\rho) = K_0 (p_2 a) I_0 (p_2\rho) - I_0 (p_2 a) K_0 (p_2\rho),$$

$$R_1^0 (p_2\rho) = K_0 (p_2 a) I_1 (p_2\rho) + I_0 (p_2 a) K_1 (p_2\rho).$$

Показать, что скорость можно найти из уравнения

$$-\varepsilon_2 p_1 K_0 (p_1 b) R_1^0 (p_2 b) = \varepsilon_1 p_2 K_1 (p_1 b) R_0^0 (p_2 b).$$

Пусть $a = 1$, $b = 2$, $\mu_2 = \mu_1$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1$ и $\beta_1 b = 1\,000$; показать, что $\beta_1 : \beta' : \beta_2 = 1 : 1{,}163 : 2$ и что при $\rho = 3{,}445\ b$ компонента B_ρ равна $^1/_{10}$ своего значения при $\rho = b$.

33. Получить формулу (14.158), исходя непосредственно из выражения (14.138).

34 Плоскость поляризации падающей волны, показанной на фиг. 132, вращается так, что вектор E остается параллельным оси x. Показать, что вектор-потенциал диффрагированной волны на больших расстояниях равен

$$\check{A}_\theta = -\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha \sin\varphi} \check{A}'_\theta, \qquad \check{A}'_\rho = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha} \check{A}'_\theta,$$

где A_θ, определяется по формуле (14.145).

35. Пусть отверстие, о котором шла речь в § 21, имеет форму не прямоугольника, а кольца, внешний и внутренний радиусы которого соответственно равны a и b. Показать, что вектор-потенциал диффрагированного поля на больших расстояниях имеет вид

$$\check{A}_\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\theta} \check{A}_\theta = -\frac{E\cos\alpha \sin\varphi}{\omega R Q} [aJ_1 (\beta Q a) - bJ_1 (\beta Q b)] e^{-j\beta R},$$

где

$$Q=(\sin^2\alpha+\sin^2\theta-2\sin\alpha\sin\theta\sin\varphi)^{1/2}.$$

36 Пусть плоскость поляризации падающей волны, рассмотренной в последней задаче, вращается, сохраняя вектор E параллельным оси x. Показать, что вектор-потенциал диффрагированного поля на больших расстояниях имеет вид

$$\check{A}_\theta=-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\cos\theta}\check{A}_\varphi=-\frac{E\cos\varphi}{\omega kQ}[bJ_1(\beta Qb)-aJ_1(\beta Qa)]e^{-j\beta R}.$$

37. Показать, что если в § 21 или в последних трех задачах имеется не одно, а два одинаковых отверстия с центрами в точках $y=c$ и $y=-c$, то при $R\gg c$ потенциал для одиночного отверстия надо умножить на фактор

$$2\cos[\beta c(-\sin\alpha+y/R)].$$

38. Пусть центры отверстий, рассмотренных в последней задаче, расположены в точках $x=c$ и $x=-c$. Показать, что необходимым множителем в этом случае будет

$$2\cos(\beta cx/R).$$

39 Сферическая оболочка радиуса a является совершенно поглощающей изнутри и идеально проводящей снаружи. Электрический диполь $M\cos\omega t$ находится в центре, в начале координат, и ориентирован вдоль направления $\theta=0$. Часть оболочки, расположенная между $\theta=\alpha'$ и $\theta=\alpha''$, удалена Показать, что выражение для вектор-потенциала диффрагированного поля определяется по формулам § 13, где

$$\check{W}_{tm}=M(1-\beta^2a^2+j\beta a)\sum_{n=1}^{\infty}\check{A}_nP_n(\cos\theta)\check{k}_n(j\beta r),$$

$$\check{A}_n=e^{-j\beta a}\left[\frac{(2n+1)P_n(u)-(n+2)uP_{n-1}(u)-(n-1)uP_{n+1}(u)}{8\pi j\omega\varepsilon a^2(n-1)(n+2)\partial[a\check{k}_n(j\beta a)]/\partial a}\right]_{u=\cos\alpha'}^{u=\cos\alpha''}.$$

40. Пусть в предыдущей задаче в центре оболочки находится не электрический диполь, а маленькая коаксиальная с осью симметрии системы проволочная петля радиуса b, по которой течет ток $Ie^{j\omega t}$. Показать, что выражение (14.82) определяет значение вектор-потенциала диффрагированного поля снаружи, если

$$\check{W}_{te}=\mu Ib^2(1+j\beta a)\sum_{n=1}^{\infty}\check{A}_nP_n(\cos\theta)\check{k}_n(j\beta r),$$

$$\check{A}_n=e^{-j\beta a}\left[\frac{(n+2)uP_{n-1}(u)+(n-1)uP_{n+1}(u)-(2n+1)P_n(u)}{8a^2\check{k}_n(j\beta a)(n-1)(n+2)}\right]_{u=\cos\alpha'}^{u=\cos\alpha''}$$

41. Маленькая проволочная петля радиуса b, несущая ток $I\cos\omega t$, расположена на расстоянии c от центра коаксиального с ней отверстия радиуса a, прорезанного в бесконечном плоском проводящем экране. Доказать, что если $a\ll\lambda$, $b\ll c$ и $c\ll\lambda$, то вектор-потенциал диффрагированного поля равен

$$\check{A}_\varphi e^{j\omega t}=-\mu\beta^2Ib^2(16r)^{-1}[2c-(2c^2+a^2)(c^2+a^2)^{-1/2}]\sin2\theta\,e^{j(\omega t-\beta R)}.$$

42. Плоская волна, вектор напряженности электрического поля которой равен $E_0e^{j(\omega t-\beta y)}$ и направлен вдоль оси z, падает нормально на бесконечный плоский идеально проводящий тонкий экран. В экране прорезана щель шириной $2a$, такая, что ось z делит ее по длине на две равные части. Пренебрегая разностью фаз на щели, показать при помощи результатов § 24 гл. IV и § 20 настоящей главы, что на расстояниях от щели $R\gg a$ электрическое поле, прошедшее через щель, будет равно

$$\check{E}_ze^{j\omega t'}=\frac{j\beta aE_0\cos\theta}{2\sin\upsilon}\left[\frac{2\pi}{\beta R}\right]^{1/2}J_1(\beta a\sin\theta)e^{j(\omega t'-\beta R)},$$

где $t'=t+\pi/(4\omega)$ и θ — угол между R и нормалью. Заметим, что амплитуда B, соответствующая стоячей волне (см. § 24 гл IV), в два раза превышает амплитуду бегущей волны.

43. Вектор напряженности электрического поля в стоячей волне, равный в пучности величине $E_0e^{j\omega t}$, ориентирован нормально к бесконечной идеально проводящей плоскости, в которой имеется щель шириной $2a$. Пренебрегая разностью фаз на щели, показать при помощи § 24 гл. IV и § 20 настоящей главы, что на расстояниях от щели

$R \gg a$ прошедшее поле равно

$$\check{E}_\theta e^{j\omega t'} = \frac{j\beta a E}{4}\left[\frac{2\pi}{\beta R}\right]^{1/2} J_1(\beta a \sin\theta)\, e^{j(\omega t' - \beta R)},$$

где $t' = t + \pi/(4\omega)$ и θ — угол между R и нормалью.

44. Оставляя в последней задаче значение E_0 неопределенным, вычислить из A_θ величину B_z. Взять выражение для B_z, в котором еще не проведено интегрирование по x, и вычислить B_z при $x=0$ и $\beta a \ll 1$, т. е. при малом аргументе функции Ханкеля. Выразить E_0 через $B_0 e^{j\omega t}$ и показать, что если плоская волна, у которой $B_z = B_0 e^{j(\omega t - \beta x)}$, падает на тонкий плоский идеально проводящий экран с прорезанной в нем щелью шириной $2a$ и осью, совпадающей с $x=0$, то при $a \ll \lambda$ диффрагированное поле равно

$$\check{B}_z e^{j\omega t'} = \frac{j\pi B_0}{4 \ln \beta a}\left(\frac{2\pi}{\beta R}\right)^{1/2} e^{j(\omega t' - \beta R)} J_1(\beta a \sin\theta),$$

где $t' = t + \pi/(4\omega)$ и θ — угол между R и нормалью. При решении воспользоваться формулой (5.445).

45. Плоская волна, вектор магнитной индукции в которой $B_0 e^{j(\omega t - \beta y)}$ ориентирован вдоль оси z, падает нормально на бесконечный плоский идеально проводящий тонкий экран, совпадающий с плоскостью $y=0$. В экране имеется щель шириной $2a$, такая, что ось z делит ее по длине на две равные части. Пренебрегая разностью фаз на щели, показать при помощи результатов § 23 гл. IV и § 20 настоящей главы, что на расстояниях от щели $R \gg a$ проходящее поле равно

$$\check{B}_z e^{j\omega t'} = \frac{-jB_0}{2 \ln \beta a}\left(\frac{2\pi}{\beta R}\right)^{1/2} J_0(\beta a \sin\theta)\, e^{j(\omega t' - \beta R)},$$

где $t' = t + \pi/(4\omega)$, θ — угол между R и нормалью, а величина B_z вычисляется в центре щели, где она приравнивается B_0.

46. Линейно поляризованная электромагнитная волна, фронт которой наклонен на угол α относительно плоскости yz, падает на щель, описанную в задаче 42. Пусть вектор магнитной индукции волны параллелен щели. Показать, что если βa мало и разностью фаз на щели можно пренебречь, то интенсивность излучения диффрагированного поля на больших расстояниях R от щели равна

$$\overline{\Pi} = \frac{\pi}{2\beta R (\ln \beta a)^2}\left(\cos\alpha + \frac{1}{4}\pi\beta a \sin\theta \sin\alpha\right)^2 \overline{\Pi}_0.$$

47. Пусть вектор напряженности электрического поля волны, рассмотренной в последней задаче, параллелен щели. Показать, что если βa очень мало и можно пренебречь разностью фаз на щели, то из задачи 42 интенсивность диффрагированного излучения равна

$$\overline{\Pi} = \frac{\pi\beta^3 a^4 \cos^2\theta \cos^2\alpha}{8R}\overline{\Pi}_0.$$

48. Отверстие радиуса a прорезано в бесконечном плоском идеально проводящем экране, представляющем собой границу однородного электрического поля типа стоячей волны $E_0 e^{j\omega t}$. Пренебрегая разностью фаз на отверстии и пользуясь выражениями (5.258) и (14.138), показать, что вектор-потенциал на больших расстояниях от центра щели равен

$$\check{A}_\theta = \frac{-jE_0[\sin(\beta a \sin\theta) - \beta a \sin\theta \cos(\beta a \sin\theta)]}{\pi\omega\beta R \sin^2\theta} e^{-j\beta R}.$$

49. Показать, пользуясь методами § 28б гл. V, что если в однородной стоячей волне магнитная индукция равна $B_0 e^{j\omega t}$ и направлена вдоль оси x параллельно бесконечному тонкому идеально проводящему экрану, совпадающему с плоскостью $z=0$, в котором имеется небольшое отверстие радиуса a, то z-составляющая B на отверстии равна

$$2B\left(\frac{x}{\pi}\right)(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}.$$

При помощи § 20, пренебрегая разностью фаз, показать, что на больших расстояниях от центра щели вектор-потенциал диффрагированного поля равен

$$\check{A}_\theta = \frac{2jB_0 \sin\varphi\,[\sin(\beta a \sin\theta) - \beta a \sin\theta \cos(\beta a \sin\theta)]}{\pi\beta^2 R \sin^3\theta}\, e^{-j\beta R}, \quad \check{A}_\theta = \check{A}_\varphi \cos\theta \operatorname{ctg}\varphi,$$

где φ — азимутальный угол, отсчитываемый от оси x, а θ - полярный угол, измеряемый от оси щели.

50. Линейно поляризованная волна падает на тонкий плоский идеально проводящий экран под углом α к его нормали. В экране имеется малое отверстие радиуса a. Пусть вектор $\mathbf{E}_0$ параллелен плоскости экрана. Показать, что если в задаче 49 βa мало, то интенсивность диффрагированного излучения равна

$$\overline{\Pi} = \frac{16\beta^4 a^6 \cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)}{9\pi^2 R^2}\,\overline{\Pi}_0.$$

Заметим, что B_0 в стоячей волне задачи 49 в два раза больше, чем в бегущей.

51. Показать, что средняя излучаемая отверстием мощность в последней задаче равна

$$\overline{P} = \frac{64\beta^4 a^6 \cos^2\alpha}{27\pi}\,\overline{\Pi}_0.$$

52. Пусть вектор $\mathbf{E}_0$, рассмотренный в задаче 50, лежит в плоскости падения волны. Показать, что если в задачах 48 и 49 βa очень мало, то интенсивность диффрагированного излучения равна

$$\overline{\Pi} = \frac{4\beta^4 a^6}{9\pi^2 R^2}\,[4\sin^2\varphi\cos^2\theta + (2\cos\varphi - \sin\theta\sin\alpha)^2]\,\overline{\Pi}_0.$$

Заметим, что амплитуда стоячей волны в задачах 48 и 49 в два раза превышает амплитуду в Π_0.

53. Показать, что средняя излучаемая отверстием мощность в последней задаче равна

$$\overline{P} = \frac{16\beta^4 a^6 (4 + \sin^2\alpha)}{27\pi}\,\overline{\Pi}_0.$$

54. Электродвижущая сила $\mathscr{E}$ приложена в середине очень узкой щели, прорезанной в бесконечном плоском проводящем экране $y = 0$ и имеющей границы $x = \pm\delta$, $z = \pm l$. Предполагая, что поле в щели в плоскости $y = 0$ равно $\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}\delta^{-1}\mathscr{E}\sin[\beta(l - z)]$, показать при помощи выражения (14.138), что напряженность электрического поля вне щели при $y > 0$ равна

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\pi^{-1}\mathscr{E}\,(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x)\sum_{\pm}\int_{1/2(l\mp l)}^{1/2(l\pm l)} R^{-3}(1 + j\beta R)\sin[\beta(l \mp z_1)]\, e^{j(\omega t - \beta R)}\, dz_1,$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + (z - z_1)^2$. Показать путем сравнения с ротором от (14.138), что

$$[\mathbf{E}]_{\text{щели}} = -2\mathscr{E}\,(\mu I_0)^{-1}\,[\mathbf{B}]_{\text{антенны}},$$

так что поле одинаково по виду с полем антенны, возбуждаемой в центре, если поменять местами **B** и **E**. Следовательно, из (14.45)

$$E_\varphi = -\frac{1}{2}\mathscr{E}\,(\pi\rho)^{-1}\,[2\cos\beta l\sin(\omega t - \beta r) - \sin(\omega t - \beta r_a) - \sin(\omega t - \beta r_b)],$$

где r_a и r_b — расстояния между концами щели и точкой наблюдения.

55. Применить результаты предыдущей задачи к случаю резонансной щели $l = {}^1/_4\lambda$ и показать при помощи (14.50), что сопротивление излучения щели при излучении в обе стороны равно 363 *ом*.

Замечание. Содержание нижеследующих задач базируется на теории диффракции Кирхгофа, которая не только полезна при решении оптических задач, но с некоторой осторожностью может быть применена и в других случаях.

56. Пусть функция $U = \psi(x, y, z)\, e^{j\omega t}$ является составляющей вектора Герца в непроводящей среде, т. е. удовлетворяет уравнению (13.19) при $\tau = \infty$. Пусть также

$$V = r^{-1} e^{j(\omega t - \beta r)} = \varphi(x, y, z)\, e^{j\omega t}$$

— аналогичная составляющая для сферической волны, возникающей в точке P, как она определена в (14.5). Подставив ψ и φ в формулу Грина (3.22) и выбрав объем интегрирования между очень маленькой сферой, окружающей P, и некоторой очень большой поверхностью S, содержащей внутри себя сферу, показать, что

$$4\pi\psi_p = \int_S [r^{-1} e^{-j\beta r}\nabla\psi - \psi\nabla(r^{-1} e^{-j\beta r})]\cdot\mathbf{n}\, dS,$$

где ψ_P — значение ψ в P. Эта формула, лежащая в основе теории дифракции Кирхгофа, выражает эффект в точке P через интеграл по поверхности, окружающей точку P.

57. Пусть поверхность S имеет отверстие, а U является сферической волной, возникающей в точке Q, расположенной вне S. Предполагая, что функция U имеет на отверстии те же значения, какие она имела бы при отсутствии S, и считая U равной нулю на остальной части S, показать, что

$$\psi_P = \frac{j\beta}{4\pi} \int_{S'} \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1}{r_1} \right) e^{-j\beta(r+r_1)}\, dS',$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы из Q и P в некоторую точку на отверстии; величины обоих радиус-векторов значительно больше β^{-1}; S' — площадь отверстия.

58. Пусть в поверхности имеется отверстие S'. Обозначим через R и R_1 средние расстояния из центра отверстия O до точек P и Q, а через x' и y' координаты некоторой точки отверстия, отсчитываемые от центра O. Разложить r и r_1 в ряды по степеням x' и y' и показать, что

$$\psi_P = \frac{j}{2\lambda R R_1} \left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}_1}{R_1} \right) e^{-2\pi j(R+R_1)/\lambda} \int_{S'} e^{-2\pi j F(x', y', R^{-1}, R_1^{-1})/\lambda}\, dS',$$

где $\beta = 2\pi\lambda^{-1}$.

59. Рассмотрим плоскую волну с интенсивностью I_0, падающую нормально на круглое отверстие радиуса a, так что $R_1 = \infty$, и выберем $R \gg a$, а P в точке $x = x$, $y = 0$; тогда

$$F(x', y', R^{-1}, R_1^{-1}) \approx -xx'R^{-1} = \rho' \cos\theta' \sin\alpha,$$

где α — угол, под которым видно x из точки 0. При помощи (5.370) и (5.371) подсчитать интеграл и показать, что интенсивность дифрагированного излучения равна

$$I_d = \frac{1}{4} I_0 R^{-2} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{1}{2}\alpha \right) [J_1(2\pi a\lambda^{-1} \sin\alpha)]^2.$$

60. Взяв Q и P на оси круглого отверстия радиуса a и считая, что R_1 и R много больше a, показать, что если интенсивность падающей волны I_0, то интенсивность в точке P равна

$$4R^2 I_0 (R_1 + R)^{-2} \sin^2 [\pi a^2 (2\lambda)^{-1} (R^{-1} + R_1^{-1})].$$

ЛИТЕРАТУРА

Biggs H. F., The Electromagnetic Field, Oxford, 1934.

Frenkel J., Lehrbuch der Elektrodynamik, 2 Bd. Berlin, 1926, 1928. (Френкель Я. И., Электродинамика, М.—Л., 1935.)

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, XV, XX, Berlin, 1927, 1927, 1928.

Hertz H. R., Electric Waves, Macmillan, 1893.

King R. W. P., Mimno H. R., Wing A. H., Transmission Lines, Antennas, and Wave Guides, McGraw-Hill, 1945. (См. перевод: Кинг Р., Мимно Г., Уинг А., Передающие линии, антенны и волноводы, М., 1948.)

MacDonald H. M., Electromagnetism, Bell, 1934.

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Maxwell J. G., Electricity and Magnetism, Oxford, 1881.

Page L., Adams N. I., Jr., Electrodynamics, Van Nostrand, 1940.

Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.

Silver S., Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill, 1949. (См. перевод: Сильвер С., Антенны сантиметровых волн, ч. I и II, М., 1950.)

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, 1932.

Глава XV

ВОЛНОВОДЫ И ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

§ 1. Волны в полых цилиндрических трубах. В § 15—19 гл. XIII было показано, что вдоль двух или большего числа идеально проводящих цилиндров, расположенных один внутри другого, могут распространяться плоские электромагнитные волны. Если эти цилиндры окружить еще одним, внешним, идеально проводящим цилиндром, то на очень высоких частотах внутри такой системы появятся незатухающие волны других типов; в частности, внутри одиночного проводящего цилиндра простые плоские волны не могут существовать [1]. Любую, как внутреннюю, так и внешнюю, границу цилиндрического волновода можно получить путем перемещения образующей параллельно оси z. Часто рассматривают волноводы, замкнутые в сечении $z=0$ и простирающиеся от $z=0$ до $z=\infty$. Как было доказано раньше [см. выражение (13.21)], любую волну можно описать при помощи вектор-потенциала A, который в соответствии с § 15 гл. XIII выражается через решение W скалярного волнового уравнения двумя способами, один из которых приводит к волне поперечно-электрического типа (TE), а другой — к волне поперечно-магнитного типа (TM). Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\nabla^2\mathbf{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 W_{te}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2 W_{te}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 W_{tm}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2 W_{tm}}{\partial t^2}. \tag{15.1}$$

Нас будут интересовать установившиеся решения, соответствующие процессам, происходящим с круговой частотой ω. В этом случае, как следует из § 2 гл. XI, вектор-потенциал, удовлетворяющий первому уравнению, а также ротор этого вектор-потенциала можно выразить через решения скалярных уравнений следующим образом:

$$\check{\mathbf{A}}=\nabla\times(\mathbf{k}\check{W}_{te}+\mathbf{k}\times\nabla\check{W}_{tm}), \qquad \check{\mathbf{B}}=-\nabla\times(\mathbf{k}\beta^2\check{W}_{tm}+\mathbf{k}\times\nabla\check{W}_{te}), \tag{15.2}$$

где $\beta^2=\omega^2\varepsilon\mu$. В формулах (14.130) и (14.131) эти выражения даны в цилиндрических координатах. Как и в § 18 предыдущей главы, $\check{W}$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от z, а другая — только от поперечных координат. Тогда скалярное уравнение (15.1) распадается на два

$$\check{W}=U\check{Z}, \qquad \nabla_2^2 U\pm\beta_{mn}^2 U=0, \qquad \frac{\partial^2\check{Z}}{\partial z^2}+(\beta^2\mp\beta_{mn}^2)\check{Z}=0. \tag{15.3}$$

Здесь U зависит только от поперечных координат u_1 и u_2, а β_{mn} определяется граничными условиями и симметрией системы. Обозначим через $\mathbf{n}$

---

[1] Классификация волн, которой придерживается здесь автор, не совпадает с общепринятой. В частности, волны в волноводе принято называть плоскими неоднородными. — *Прим. перев.*

единичный вектор, нормальный к поверхности границы, т. е. совпадающий по направлению с $\check{\mathbf{A}}$. Согласно соотношениям (15.2), граничные условия можно записать в виде

$$0 = \mathbf{n} \times \check{\mathbf{A}}_{te} = -\mathbf{n} \cdot \nabla (\mathbf{k} \check{W}_{te}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial U_{te}}{\partial n} = 0, \tag{15.4}$$

$$0 = \mathbf{n} \times [\nabla \times (\mathbf{k} \times \nabla \check{W}_{tm})] = \mathbf{n} \times [\mathbf{k} \nabla^2 \check{W}_{tm} - \mathbf{k} \cdot \nabla (\nabla \check{W}_{tm})] =$$

$$= -\beta^2 \mathbf{n} \times \mathbf{k} \check{W}_{tm} - \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n} \times \nabla \check{W}_{tm}) =$$

$$= \mathbf{s}_1 \left[\beta^2 \check{W}_{tm} + \frac{\partial^2 \check{W}_{tm}}{\partial z^2} \right] - \mathbf{k} \frac{\partial^2 \check{W}_{tm}}{\partial s \, \partial z} = \mathbf{s}_1 \beta_{mn}^2 \check{W}_{tm} - \mathbf{k} \frac{\partial^2 \check{W}_{tm}}{\partial s \, \partial z}.$$

Здесь s — координата, измеряемая на цилиндрической поверхности вдоль линии пересечения ее плоскостью, перпендикулярной к оси z, так что $\mathbf{s}_1 = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$. Таким образом, функция U на границе должна удовлетворять условиям

$$U_{tm} = 0 \quad \text{или} \quad \beta_{mn} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_{tem}}{\partial s} = 0. \tag{15.5}$$

Второе и третье условия в соотношениях (15.5) совпадают с теми, которые встречались нам при рассмотрении главных волн (см. § 15 и 19 гл. XIII), т. е. волн, скорость распространения которых не зависит от частоты. Такие волны возможны только при наличии двух или более проводящих цилиндров.

Поскольку дифференциальные уравнения (15.3) являются уравнениями второго порядка, то каждое из них имеет два независимых решения, а их общее решение можно записать в виде

$$\check{W} = [\check{A} U_1 (u_1, u_2) + \check{B} U_2 (u_1, u_2)] (\check{C} e^{-\check{\Gamma}_{mn} z} + \check{D} e^{\check{\Gamma}_{mn} z}), \tag{15.6}$$

$$\check{\Gamma}_{mn} = j (\beta^2 - \beta_{mn}^2)^{1/2} = \alpha_{mn} + j \beta'_{mn}. \tag{15.7}$$

При $\beta > \beta_{mn}$ постоянная распространения $\check{\Gamma}_{mn}$ является чисто мнимой величиной ($\alpha = 0$), и экспоненциальные множители в выражении (15.6) свидетельствуют о наличии двух незатухающих волн, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z. Если же $\beta < \beta_{mn}$, то, поскольку поля должны оставаться конечными, необходимо положить $\check{C} = 0$ при $z > 0$, а при $z < 0$ положить $\check{D} = 0$. Тогда в оставшемся члене $\check{\Gamma}_{mn}$ — величина чисто действительная ($\beta'_{mn} = 0$), что приводит к экспоненциальному убыванию поля вдоль z. Критическая частота ν_{mn} и критическая длина волны типа mn соответственно равны

$$\nu_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{2\pi} (\mu\varepsilon)^{-1/2} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi}, \quad \lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \tag{15.8}$$

Чтобы распространить на волноводы понятие характеристического импеданса, подставим в определение (13.136) значения $\check{\mathbf{E}}$ и $\check{\mathbf{B}}$ из соотношения (13.134). Это дает

$$|\check{Z}_h|_{te} = \mp \frac{\mu \check{\mathbf{E}}_{te}}{\mathbf{k} \times \check{\mathbf{B}}_{te}} = \frac{\pm j \omega \mu |\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{te}|}{|\mathbf{k} \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{te})]|} = \frac{\pm j \omega \mu |\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{te}|}{|\partial (\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{te})/\partial z|} = \pm \frac{j \omega \mu}{\check{\Gamma}_{mn}}, \tag{15.9}$$

$$|\check{Z}_h|_{tm} = \pm \frac{\mu |\mathbf{k} \times \check{\mathbf{E}}_{tm}|}{|\check{\mathbf{B}}_{tm}|} = \mp \frac{j |\mathbf{k} \times [\nabla \times (\mathbf{k} \times \nabla \check{W}_{tm})]|}{\omega \varepsilon |\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{tm}|} =$$

$$= \mp \frac{j |\partial (\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{tm})/\partial z|}{\omega \varepsilon |\nabla \times \mathbf{k} \check{W}_{tm}|} = \mp \frac{j \check{\Gamma}_{mn}}{\omega \varepsilon}. \tag{15.10}$$

Выражая эту же величину через критическую частоту, получаем

$$|\check{Z}_h|_{te} = \frac{\pm \mu^{1/2}\varepsilon^{-1/2}}{[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}}, \quad |\check{Z}_h|_{tm} = \pm \mu^{1/2}\varepsilon^{-1/2}[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}. \qquad (15.11)$$

Как и в соотношении (13.134), знак выбирается в зависимости от направления распространения волны: верхний знак соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси z, а нижний — волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси z. Заметим, что при частотах выше критической характеристический импеданс для обеих волн представляет действительную величину, что свидетельствует о передаче энергии вдоль волновода; при частотах ниже критической характеристический импеданс является чисто мнимым. В этом имеется отличие от того определения линии передачи, которое было дано в § 17 гл. XIII.

Из соотношений (15.6) и (15.7) получаем выражение для фазовой скорости распространения волны при $\beta > \beta_{mn}$

$$v_{mn} = \frac{\omega}{\beta'_{mn}} = \frac{\omega}{(\beta^2-\beta_{mn}^2)^{1/2}} = \frac{v}{[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}} = \frac{v}{[1-(\lambda/\lambda_{mn})^2]^{1/2}}, \qquad (15.12)$$

где v — скорость распространения света в среде, заполняющей волновод. Групповая скорость на основании соотношений (13.157) и (15.12) равна

$$(v_s)_{mn} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta'_{mn}} = \frac{1}{(\mu\varepsilon)^{1/2}}\frac{\partial\beta}{\partial\beta'_{mn}} = \frac{\beta'_{mn}}{\beta(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \frac{1}{\mu\varepsilon v_{mn}} = \frac{v^2}{v_{mn}}. \qquad (15.13)$$

Итак, $v_{mn} > v > (v_s)_{mn}$. При очень высоких частотах фазовая и групповая скорости приближаются к скорости волн в свободном пространстве. Выразим векторы электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через U при помощи соотношений (15.2) и (15.3):

$$\check{\mathbf{E}}_{te} = -j\omega\check{\mathbf{A}}_{te} = j\omega\mathbf{k}\times\nabla U_{te}e^{-j\beta'_{mn}z}, \qquad (15.14)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{te} = \nabla\times\check{\mathbf{A}}_{te} = (-j\beta'_{mn}\nabla_2 U_{te} + \mathbf{k}\beta_{mn}^2 U_{te})e^{-j\beta'_{mn}z}, \qquad (15.15)$$

$$\check{\mathbf{E}}_{tm} = -j\omega\check{\mathbf{A}}_{tm} = (\omega\beta'_{mn}\nabla_2 U_{tm} + \mathbf{k}j\omega\beta_{mn}^2 U_{tm})e^{-j\beta'_{mn}z}, \qquad (15.16)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{tm} = \nabla\times\check{\mathbf{A}}_{tm} = \beta^2\mathbf{k}\times\nabla U_{tm}e^{-j\beta'_{mn}z} \qquad (15.17)$$

Здесь U_{te} и U_{tm} удовлетворяют уравнению (15.3); как видно из соотношений (15.2), размерность их различна.

§ 2. Учет затухания в волноводах. Волноводы применяются для передачи высокочастотной энергии из одной точки в другую. Поэтому очень важно знать величину потерь в волноводах. В случае заполнения волновода неидеальным диэлектриком в последнем будет поглощаться часть энергии, но в обычных волноводах с воздушным заполнением эти потери редко имеют значение, и поэтому расчет их отнесен нами в задачи, помещенные в конце главы. Помимо этих потерь, в стенках волновода неизбежно возникают потери, обусловленные наличием вихревых токов, которые, как правило, следует учитывать. Во всех практических случаях проводимость стенок столь велика, что при вычислении P можно в качестве очень хорошего приближения использовать решение, полученное для случая идеальных проводников. Если уменьшение некоторой величины пропорционально значению самой величины, то в таких случаях всегда имеет место экспонен-

циальное затухание. Как видно из формулы (11.24), мощность потерь в проводящей поверхности пропорциональна квадрату тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности. Поэтому поля при распространении вдоль трубы затухают экспоненциально, и если коэффициент затухания для поля равен α, то для вектора Умова—Пойнтинга он равен 2α. При усреднении по времени мощности $\overline{P}$, передаваемой вдоль волновода, множители, периодически зависящие от времени, исчезают, и мы имеем $\overline{P}e^{-2\alpha z}$.

Вычислив производную от $\overline{P}$ по z при помощи выражения (11.24) и поделив ее на P, получим

$$2\alpha = -\frac{1}{P}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z} = \frac{\tau}{2\mu^2 P\delta}\oint \check{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{B}}\,ds, \tag{15.18}$$

где $\partial\overline{P}/\partial z$ — средняя мощность потерь на единицу длины, $\check{\mathbf{B}}$ — вектор магнитной индукции непосредственно вблизи стенок, τ — удельное сопротивление материала стенок, δ — толщина скин-слоя. На стенке $\nabla_2 U_{te} = s_1\,\partial U_{te}/\partial s$, поэтому из выражений (15.15) и (15.17) имеем

$$\check{\mathbf{B}}_{te}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{te} = (\beta^2-\beta_{mn}^2)\left(\frac{\partial U_{te}}{\partial s}\right)^2 + \beta_{mn}^4 U_{te}^2,\quad \check{\mathbf{B}}_{tm}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{tm} = \beta^4\nabla_2 U_{tm}\cdot\nabla_2 U_{tm}. \tag{15.19}$$

Но, согласно соотношению (13.145), среднее значение энергии, проходящей в z-направлении через единичную площадку в одну секунду, равно $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\mu^{-1}\check{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}}\right)$, или, пользуясь выражениями (15.14)—(15.17), получаем

$$|\Pi_{te}|_z = -\frac{1}{2}\mu^{-1}\omega\beta'\,[(\mathbf{k}\times\nabla U_{te})\times\nabla_2 U_{te}]_z = \frac{1}{2}\mu^{-1}\omega\,(\beta^2-\beta_{mn}^2)^{1/2}\,\nabla_2 U_{te}\cdot\nabla_2 U_{te}, \tag{15.20}$$

$$|\Pi_{tm}|_z = \frac{1}{2}\mu^{-1}\omega\beta'\beta^2\,[\nabla_2 U_{tm}\times(\mathbf{k}\times\nabla U_{tm})]_z = \frac{1}{2}\mu^{-1}\omega\beta^2\,(\beta^2-\beta_{mn}^2)^{1/2}\,\nabla_2 U_{tm}\cdot\nabla_2 U_{tm}. \tag{15.21}$$

Для упрощения поверхностного интеграла представим скалярное произведение, входящее в выражения (15.20) и (15.21), в развернутом виде и, кроме того, воспользуемся соотношением (15.3), тогда получим

$$\int_S \nabla_2 U\cdot\nabla_2 U\,dS = \int_S [\nabla_2\cdot(U\nabla_2 U) - U\nabla_2^2 U]\,dS = \beta_{mn}^2\int_S U^2\,dS. \tag{15.22}$$

Первый интеграл по поверхности, т. е. $\int_S \nabla_2\cdot(U\nabla_2 U)\,dS$, равен нулю, в чем можно убедиться, преобразовав его в линейный интеграл по контуру границы и воспользовавшись соотношениями (15.4) или (15.5), согласно которым на границе или U, или $\nabla_2 U$ равно нулю. Из выражений (15.18)—(15.20) находим коэффициент затухания поперечно-электрической волны

$$\alpha_{te} = \frac{\tau}{2\mu v\delta}\,\frac{\beta_{mn}^{-2}\,[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]\oint(\partial U_{te}/\partial s)^2\,ds + (\nu_{mn}/\nu)^2\oint U_{te}^2\,ds}{[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}\int_S U_{te}^2\,dS}. \tag{15.23}$$

Здесь $\delta = \left(\frac{1}{2}\omega\mu'\gamma\right)^{-1/2}$ — глубина проникновения, μ' — магнитная проницаемость стенок, ν — частота, ν_{mn} — критическая частота, v — скорость света в среде с магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью ε,

а $\beta_{mn}=2\cdot v^{-1}\nu_{mn}$. Поскольку вектор ∇U ортогонален поверхностям стенок, то на основании выражений (15.18), (15.19) и (15.21) можно написать

$$\alpha_{tm}=\frac{\tau}{2\mu v\delta}\frac{\oint(\partial U_{tm}/\partial n)^2\,ds}{\beta_{mn}^2[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}\int\limits_S U_{tm}^2\,dS}. \qquad (15.24)$$

Эта формула показывает, что затухание поперечно-магнитных волн с увеличением частоты возрастает одинаково при любой форме поперечного сечения волновода. Затухание поперечно-электрических волн, как видно из формулы (15.23), зависит от формы поперечного сечения трубы и увеличивается с ростом частоты только в том случае, когда первый член в числителе выражения (15.23) не равен нулю (первый член равен нулю для некоторых типов круглых волноводов).

§ 3. Прямоугольный волновод. Рассмотрим трубу, ограниченную плоскостями $x=0$, $x=a$, y 0, $y=b$. Легко видеть, что решениями уравнения (15.3), удовлетворяющими граничным условиям (15.4) и (15.5), будут

$$U_{te}=C_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\qquad U_{tm}=C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (15.25)$$

$$\beta_{mn}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\text{ или }\nu_{mn}^2=\frac{1}{4}v^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)=\frac{v^2}{\lambda_{mn}^2}, \qquad (15.26)$$

если m и n — целые числа. Согласно выражениям (15.14) и (15.15), поля TE можно записать в виде

$$\check{\mathbf{E}}_{te}=j\omega\pi\check{C}\left(\mathbf{i}\frac{n}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}-\mathbf{j}\frac{m}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta'_{mn}z}, \qquad (15.27)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{te}=\check{C}\left\{j\pi\beta'_{mn}\left[\mathbf{i}\frac{m}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}+\mathbf{j}\frac{n}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]+\right.$$
$$\left.+\mathbf{k}\beta_{mn}^2\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right\}e^{-j\beta'_{mn}z}. \qquad (15.28)$$

На основании соотношений (15.23), (15.25) и (15.26) затухание этих волн равно

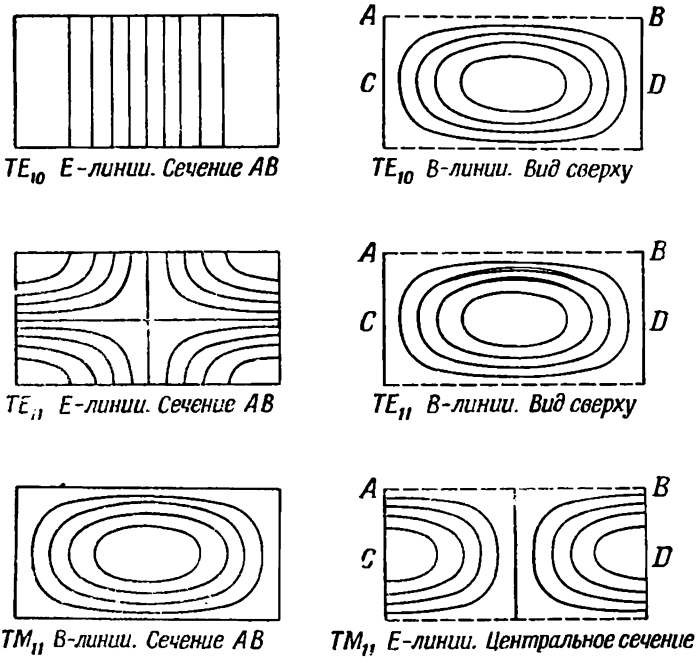
$$|\alpha_{te}|_{mo}=\frac{\tau}{\mu v\delta}\frac{a+2b(\nu_{mo}/\nu)^2}{ab[1-(\nu_{mo}/\nu)^2]^{1/2}}, \qquad (15.29)$$

$$|\alpha_{te}|_{mn}=\frac{2\tau}{\mu v\delta}\left\{\frac{(m^2b+n^2a)[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}}{m^2b^2+n^2a^2}+\frac{(a+b)(\nu_{mn}/\nu)^2}{ab[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}}\right\}. \qquad (15.30)$$

Наибольшая критическая длина волны для полей TE в волноводе, у которого $a=2$ *см* и $b=4$ *см*, согласно выражению (15.26), соответствует значениям $m=0$ и $n=1$ и равна $\lambda_{01}=8$ *см*. Величина λ_{01} не зависит от a. Следующая по длине волна соответствует $m=1$ и $n=0$ и равна $\lambda_{10}=4$ *см*. Величина λ_{10} не зависит от b. Как мы увидим в дальнейшем, волновод можно выполнить таким образом, чтобы в нем возбуждались только волны вполне определенного типа. Для пятисантиметровой волны, распространяющейся в волноводе только в виде волны типа TE_{01}, толщина скин-слоя $\delta\approx 8{,}5\cdot 10^{-7}$ *м* (для меди). Поэтому коэффициент затухания α_{te}, определяемый по формуле (15.29), приблизительно равен 0,005, так что (см. Двайт, 550.2) на 1 *м* длины волновода напряженность поля убывает на $^1/_2\%$, а энергия — на 1%. Из соотношения (15.12) коэффициент затухания при $\lambda=\lambda_{10}$ равен

$$\alpha_{10}=j\beta'_{10}=0{,}3\pi=0{,}94,$$

или в 200 раз больше, чем для λ_{01}. Групповая скорость волны, как следует из выражений (15.12) и (15.13), составляет лишь 78% от скорости электромагнитных волн. На фиг. 134 представлен вид полей для волн TE_{10} и TE_{11}.



Фиг. 134.

Согласно выражениям (15.16) и (15.17), поля для волн типа TM можно записать в виде

$$\check{\mathbf{E}}_{lm} = \check{C}\left\{\omega\pi\beta'_{mn}\left[\mathbf{i}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{j}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right] + \right.$$
$$\left. + \mathbf{k}j\omega\beta^2_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right\} e^{-j\beta'_{mn}z}, \qquad (15.31)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{lm} = \pi\beta^2\check{C}\left(-\mathbf{i}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{j}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta'_{mn}z} \qquad (15.32)$$

Коэффициент затухания для этих волн на основании соотношений (15.24)—(15.26) определится выражением

$$\alpha_{lm} = \frac{2\tau}{\mu v\delta}\frac{m^2b^3 + n^2a^3}{ab\,(m^2b^2 + n^2a^2)\,[1-(\nu_{mn}/\nu)^2]^{1/2}} \qquad (15.33)$$

Наибольшая критическая длина волны для полей TM в волноводе, у которого $a = 2$ *см*, $b = 4$ *см*, согласно выражению (15.26), соответствует значениям $m = n = 1$ и равна $\lambda_{11} = 3{,}58$ *см*; следующая критическая длина волны равна $\lambda_{12} = 2{,}83$ *см*. На фиг. 134 представлен вид полей для волны TM_{11}.

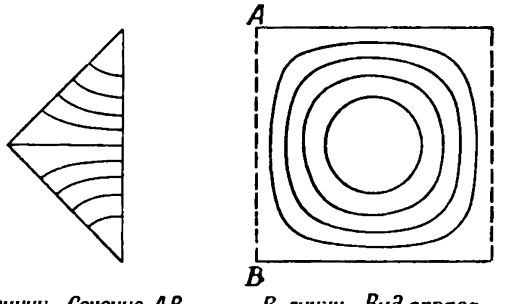
Суперпозиция двух полей в квадратном волноводе даст поле в треугольном волноводе, сечение которого представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник (см. фиг. 135). Критическая частота остается прежней.

§ 4. Круглый волновод. Рассмотрим круглый волновод радиуса a. Как следует из § 18 гл. XIV, решение уравнения (15.3), конечное на оси, будет иметь вид

$$\check{U}(\rho, \varphi) = J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi), \tag{15.34}$$

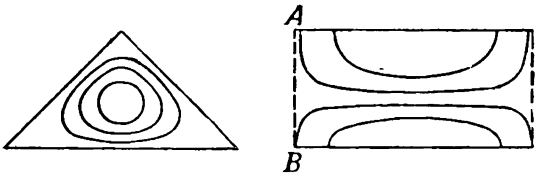
где, исходя из соотношений (15.4) и (15.5), β_{mn} надо выбрать таким, чтобы

$$\left|\frac{\partial J_m(\beta_{mn}a)}{\partial a}\right|_{te} = 0, \quad |J_m(\beta_{mn}a)|_{tm} = 0. \tag{15.35}$$



E-линии. Сечение AB *B-линии. Вид справа*

$TE_{10} - TE_{01}$



B-линии. Сечение AB *E-линии. Вертикальное сечение*

$TM_{21} + TM_{12}$

Фиг. 135.

Ниже приведены наиболее важные нулевые точки этих функций:

$$J_0'(3{,}832) = J_0'(7{,}016) = J_1'(1{,}841) = J_1'(5{,}331) = 0, \tag{15.36}$$

$$J_0(2{,}405) = J_0(5{,}520) = J_1(3{,}832) = J_1(7{,}016) = 0. \tag{15.37}$$

Поля для волн TE, согласно соотношениям (15.4) и (15.15), определяются следующим образом:

$$[\check{\mathbf{E}}]_{te} = j\omega\,[\boldsymbol{\rho}_1 m\rho^{-1} J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\sin m\varphi - \check{D}_{mn}\cos m\varphi) + \\ + \boldsymbol{\varphi}\beta_{mn} J_m'(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi)]\, e^{-j\beta' mn z}, \tag{15.38}$$

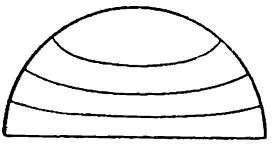
$$[\check{\mathbf{B}}]_{te} = \{j\beta'_{mn}[-\boldsymbol{\rho}_1\beta_{mn} J_m'(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi) + \\ + \boldsymbol{\varphi} m\rho^{-1} J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\sin m\varphi - \check{D}_{mn}\cos m\varphi)] + \\ + \mathbf{k}\beta_{mn}^2 J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi)\}\, e^{-j\beta' mn z} \tag{15.39}$$

Из соотношений (15.34), (15.35), (15.23) и (5.337) находим выражение для коэффициента затухания волн TE

$$\alpha_{te} = \frac{\tau}{\mu v a\delta}\left[1 - \left(\frac{\nu_{mn}}{\nu}\right)^2\right]^{-1/2}\left[\frac{m^2}{\beta_{mn}^2 a^2 - m^2} + \left(\frac{\nu_{mn}}{\nu}\right)^2\right] \tag{15.40}$$

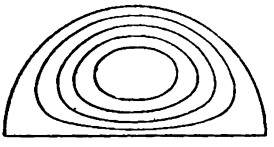
Мы видим, что волны с круговой симметрией, для которых $m = 0$, обладают необычным свойством: с ростом частоты их коэффициент затухания уменьшается. Из волн типа TE наибольшую критическую длину волны имеет волна типа TE_{11}, у которой, согласно выражениям (15.35), (15.36) и (15.8),

TE_{01}-волна. E-линии в сечении AB, дающие одинаковые приращения напряженности поля

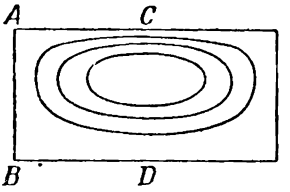


TE_{11}-волна. E-линии в сечении AB, дающие одинаковые приращения напряженности поля на центральной линии

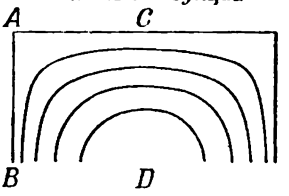
TM_{01}-волна. B-линии в сечении AB, дающие одинаковые приращения магнитной индукции



TM_{01}-волна. B-линии в сечении AB, дающие одинаковые приращения магнитной индукции на центральной линии

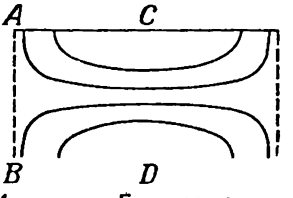


TE_{10}-волна. Главное сечение трубок равного потока магнитной индукции



TE_{11}-волна. B-линии в главном сечении, дающие одинаковые приращения магнитной индукции на центральной линии

TM_{01}-волна. Главное сечение трубок равного потока электрической индукции



TM_{11}-волна. E-линии в главном сечении, дающие одинаковые приращения напряженности поля на центральной линии

Фиг. 136.

$\lambda_{11} = 3{,}42\,a$; следующая критическая длина волны $\lambda_{01} = 1{,}64\,a$. Положим $a = 2{,}34$ *см*, тогда $\lambda_{11} = 8$ *см*, т. е. равна критической длине волны прямоугольного волновода, у которого $a = 2$ *см*, а $b = 4$ *см* (см. предыдущий параграф). Для пятисантиметровых волн коэффициент затухания α равен $0{,}0028$ $м^{-1}$, т. е. он меньше, чем коэффициент затухания в соответствующем прямоугольном волноводе, где он равен $0{,}005$ $м^{-1}$. Вид полей для некоторых типов TE-волн представлен на фиг. 136.

Поля для волн TM, согласно соотношениям (15.16) и (15.17), определяются по формулам

$$\check{E}_{tm} = \{\omega\beta'_{mn}[\rho_1\beta_{mn}J'_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi) - \\ - \varphi m\rho^{-1}J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\sin m\varphi - \check{D}_{mn}\cos m\varphi)] + \\ + \mathbf{k}j\omega\beta^2_{mn}J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi)\}\, e^{-j\beta'_{mn}z}, \quad (15.41)$$

$$\check{B}_{tm} = [\rho_1\beta^2 m\rho^{-1}J_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\sin m\varphi - \check{D}_{mn}\cos m\varphi) + \\ + \varphi\beta^2\beta_{mn}J'_m(\beta_{mn}\rho)(\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi)]\, e^{-j\beta'_{mn}z}. \quad (15.42)$$

Коэффициент затухания волн TM на основании соотношений (15.34), (15.35), (15.24) и (5.337) равен

$$\alpha_{tm} = \frac{\tau}{\mu a v\delta}\left[1 - \left(\frac{\nu_{mn}}{\nu}\right)^2\right]^{-1/2}. \quad (15.43)$$

Наибольшими значениями λ_{mn} являются $\lambda_{01} = 2{,}61\,a$, $\lambda_{11} = 1{,}64\,a$ и $\lambda_{02} = 1{,}14\,a$.

§ 5. Коаксиальный волновод. Линии передачи, образованные двумя проводящими цилиндрами — внутренним (радиуса a) и внешним (радиуса b), относятся к классу линий, по которым могут распространяться волны любых частот (такие линии рассмотрены в § 15 гл. XIV). Сопротивление линии на единицу длины равно [см. соотношение (13.151)]

$$R_i I^2 = R_i\left(\oint\limits_a i^2\,ds + \oint\limits_b i^2\,ds\right) = \frac{I^2 R_i}{2\pi}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \frac{\tau I^2(a+b)}{2\pi ab\delta} = \omega L_i I^2. \quad (15.44)$$

Характеристический импеданс, определенный выражением (13.147), равен

$$\check{Z}_k = \left\{\frac{L[R_i + j\omega(L+L_i)]}{\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}\right\}^{1/2}, \quad (15.45)$$

где

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Формула для коэффициента самоиндукции на единицу длины была получена, исходя из соотношения $LC = \mu\varepsilon$ и из выражения (2.9). Если самоиндукция L_i, обусловленная скин-эффектом, и проводимость диэлектрика γ малы, то при $\partial(R_i/L)/\partial(b/a)$, равном нулю, коэффициент затухания имеет тупой минимум. Значение минимального коэффициента затухания, получающееся при $b = 3{,}6\,a$, всего лишь на 5% меньше значения коэффициентов затухания при $b = 2{,}5\,a$ и при $b = 5{,}0a$.

При достаточно коротких длинах волн в коаксиальной линии могут существовать волны высших порядков, подобные описанным в предыдущем параграфе. Эти волны появляются главным образом при удовлетворении граничных условий на неоднородностях. Поскольку область вблизи оси в этом случае исключена из поля, необходимо в решении писать обе функции Бесселя. Таким образом, в соответствии с выражением (14.128) имеем

$$\check{U} = (\check{C}_{mn}\cos m\varphi + \check{D}_{mn}\sin m\varphi)\,R_m(\beta_{mn}\rho), \quad (15.46)$$

$$[R_m(\beta_{mn}\rho)]_{te} = J_m(\beta_{mn}\rho)\,Y'_m(\beta_{mn}a) - Y_m(\beta_{mn}\rho)\,J'_m(\beta_{mn}a), \quad (15.47)$$

$$[R_m(\beta_{mn}\rho)]_{tm} = J_m(\beta_{mn}\rho)\,Y_m(\beta_{mn}a) - Y_m(\beta_{mn}\rho)\,J_m(\beta_{mn}a), \quad (15.48)$$

где, согласно соотношениям (15.4) и (15.5), β_{mn} нужно выбирать таким, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial[R_m(\beta_{mn}b)]_{te}}{\partial b} = 0, \qquad [R_m(\beta_{mn}b)]_{tm} = 0. \quad (15.49)$$

Из выражений (15.47)—(15.49) видно, что при $\rho = a$ и $\rho = b$ граничные условия, определяемые соотношениями (15.4) и (15.5), удовлетворяются. Выражения для полей, коэффициентов затухания и т. д. можно определить так же, как и в предыдущем параграфе, но для коаксиального волновода они представляют меньший практический интерес.

§ 6. Плоские неоднородности в коаксиальной линии. При решении некоторых задач о распространении электромагнитных волн в ряде случаев можно получить достаточно точные результаты, воспользовавшись методами электростатики. Действительно, введя в уравнение (15.1) длину волны λ, мы видим, что

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = -4\pi^2 \lambda^{-2} \mathbf{E} \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (15.50)$$

Таким образом, если длина волны значительно превышает размеры области, то мгновенные значения полей в последней не отличаются от полей, описываемых решениями уравнения Лапласа, удовлетворяющими тем же граничным условиям.

Рассмотрим две коаксиальные линии, коаксиально соединенные между собой в плоскости $z = 0$, которая является идеально проводящей всюду, за исключением отверстий, соединяющих области распространения волн в линиях. Пусть длина волны настолько велика, что в коаксиальных линиях может распространяться только главная волна. Ясно, что если она имеет характер стоячей волны и узел электрического поля совпадает с плоскостью $z = 0$, то неоднородность не будет оказывать никакого влияния, так как в этой плоскости отсутствует радиальная составляющая электрического поля, а линии магнитной индукции всюду касательны к этой плоскости. В любой линии передачи картина распределения стоячей волны вдоль линии не нарушается только в том случае, если в узел электрического поля помещают шунтирующий элемент. Поэтому действие рассматриваемой нами неоднородности эквивалентно действию шунтирующего элемента в плоскости $z = 0$.

Рассмотрим теперь частный случай коаксиального кольцевого отверстия и предположим, что плоскость $z = 0$ находится точно посередине между двумя соседними узлами стоячей волны электрического поля. Очевидно, что радиальная составляющая поля главной волны не перпендикулярна к плоскости $z = 0$, поэтому для удовлетворения граничных условий здесь необходимо присутствие местных полей высших порядков, вид которых определяется соотношениями (15.47) или (15.48). Все они содержат фактор $e^{-|\beta'_{0n}|z}$ [см. соотношение (15.38)], т. е. поля существенно отличны от нуля лишь вблизи сечения $z = 0$, в области, значительно меньшей, чем длина волны. Таким образом, местные поля находятся в фазе. Согласно выражению (15.50), мгновенное значение электрического поля в сечении совпадает со статическим полем между внутренним и внешним проводниками, а емкость линии в сечении $z = 0$ равна разности между действительной емкостью этого сечения и суммой емкостей концентрических цилиндрических конденсаторов по обе стороны сечения.

В качестве простейшего примера может служить случай, когда отношение внешнего радиуса ко внутреннему близко к единице. Небольшой участок цилиндрического конденсатора можно заменить узкой пластинкой плоского конденсатора и решить задачу при помощи конформных преобразований. Такое решение для случая плоского конденсатора с параллельными пластинами, имеющими уступ с одной стороны, изображено на фиг. 63,*б* (линии $V = 0$ и $V = \pi/2$) и рассмотрено в § 14 гл. VI. Половина величины дополнительного сопротивления (на единицу длины) определяется по формуле (6.63), а соответствующая добавочная емкость (на единицу

длины), согласно соотношению (6.67), будет равна $2\varepsilon/(\tau\Delta R)$. Емкость неоднородности определяется как произведение этой емкости на периметр $2\pi r$ области, в которой распространяются волны. Таким образом, из соотношения (6.63) имеем

$$C = 2\pi r C_1 = 2\varepsilon r\left(\frac{h^2+k^2}{hk}\ln\frac{k+h}{k-h} + 2\ln\frac{k^2-h^2}{2hk}\right) \qquad (15.51)$$

Виннери и Джемисон[1] эмпирически показали, что если имеется уступ только в одной стенке, то нужно умножать добавочную емкость на периметр другой стенки. При отношении внутреннего радиуса к внешнему, равном 5, этот способ дает ошибку только около 10%. Отражения от таких препятствий вычислены в § 17 гл. XIII [см. выражение (13.140)], где Z_{h1} и Z_{h2} — волновые сопротивления линий по разные стороны от препятствия (ступеньки)

$$Z_1 = Z_{h1}, \qquad \frac{1}{Z_2} = j\omega C + \frac{1}{Z_{h2}} = \frac{2\pi jC}{\lambda} + \frac{1}{Z_{h2}}. \qquad (15.52)$$

§ 7. Возбуждение волноводов. Строгое решение задачи о возбуждении волновода посредством петли связи или штыря представляет исключительные трудности. Однако в этом случае, как и для антенн (см. § 4—7 гл. XIII), можно получить приближенные решения, если принять определенное распределение тока вдоль провода и считать, что весь ток сконцентрирован вдоль оси провода. Тем самым задается магнитное поле вблизи провода, которое затем можно представить в виде суперпозиции полей различных типов волн. Если принятое распределение тока является правильным, то электрическое поле сторонних э. д. с. на поверхности провода будет полностью скомпенсировано тангенциальной составляющей электрического поля, создаваемого данным током. Поэтому импеданс излучения некоторого участка провода будет равен взятой со знаком минус сумме линейных интегралов от электрических полей различных типов (интегралы берутся вдоль провода в направлении тока), деленной на величину тока. Таким образом, поле каждого типа действует как некоторый независимый контур, подключенный к концам этого участка провода. Данный элемент тока возбуждает такие типы волн, у которых имеется составляющая электрического поля вдоль провода, что подразумевает также наличие магнитного потока, сцепленного с проводом. Рассмотрим элемент тока, лежащий в плоскости $z = z_0$ бесконечного волновода, простирающегося от $z = -\infty$ до $z = \infty$. Составляющую $\mathbf{B}$, тангенциальную к этому сечению, ($\mathbf{B}_t$), можно записать в виде бесконечной суммы, каждый член которой относится к определенному типу волны и имеет вид $A_{mn}U_{mn}(u_1)V_m(u_2)$, где $U_{mn}(u_1)$ и $V_m(u_2)$ — ортогональные функции поперечных координат u_1 и u_2. Умножим это равенство на $U_{pq}(u_1)V_p(u_2)\,du_1\,du_2$ и проинтегрируем по всему сечению. Тогда с одной стороны равенства останется только член, соответствующий pq. Величина $\mathbf{B}_t$ всюду равна нулю, за исключением малой области (u_1', u_2'), в которой $U_{pq}(u_1')V_p(u_2')$ можно заменить средним значением $U_{pq}(u_1')\,V_p(u_2')$. Согласно закону о циркуляции магнитного поля [см. выражение (7.2)], интеграл от $\mathbf{B}_t$ в направлении, перпендикулярном к направлению элемента тока, равен $\frac{1}{2}\mu I$. С этим методом мы уже встречались в магнитостатических задачах в § 12, 14 и 32 гл. VII. Обычно такой элемент возбуждает и волны TE и волны TM. Если поместить в точку $z = -z_0$ второй элемент тока, равный первому по величине и противоположный по знаку, то суммарное электрическое поле будет перпендикулярно к плоскости $z = 0$ и, следовательно, будет совпадать с полем,

[1] Whinnery, Jamison, Proc. Inst. Rad. Eng., 32, 98.

возбуждаемым в волноводе, замкнутом в сечении $z = 0$ идеально проводящей плоскостью.

Элемент тока, ориентированный вдоль оси z, возбуждает только волны TM. Метод, описанный в § 3 гл. XIV, оставляет неопределенными и длину и фазу дипольного источника, полученного путем дифференцирования поля точечного источника по координате z, совпадающей с направлением распространения. Поэтому лучше взять дипольный источник, расположенный в плоскости постоянной фазы, как это и было сделано в § 22 гл. XIV [см. выражение (14.147)], где плоскость z_0 была всюду заземлена, за исключением бесконечно малого отверстия, на котором поддерживался потенциал $V_0 e^{j\omega t}$. Электрический дипольный момент этого источника, как и магнитный дипольный момент маленькой петли с током, пропорционален его площади dS_0. Таким образом, формула (14.154) для элемента тока с моментом $I\,dz_0 \cos \omega t$ дает

$$I_0\,dz_0 = \frac{j\omega\pi\varepsilon\,(b^2 - a^2)\,V_0}{\ln\,(b/a)} \xrightarrow[a-b]{} 2j\omega\varepsilon V_0 \pi a^2 = 2j\omega\varepsilon V_0\,dS_0. \qquad (15.53)$$

Выпишем выражение для тангенциальной составляющей E_{tm} в плоскости z_0 в виде бесконечной суммы членов вида $A_{mn}U_{mn}(u_1)V_m(u_2)$ и определим коэффициент A_{pq}, умножив эту сумму на $U_{pq}(u_1)V_p(u_2)\,du_1\,du_2$ и проинтегрировав по сечению. Тогда в правой части останется только член, содержащий A_{pq}, а в левой части мы возьмем dS_0 в виде криволинейного квадрата, ограниченного линиями u_1', $u_1' + \Delta u_1'$, u_2', $u_2' + \Delta u_2'$. На элементе dS_0 и вне его E_{tm} равно нулю, но интеграл от E_{tm} при переходе через границы элемента dS_0 равен $\pm V_0$. Если элемент тока несет на себе еще и свободные заряды, как это должно быть в случае штыря, введенного внутрь волновода, то, согласно выражению (14.1), скалярный потенциал будет совпадать по фазе с зарядом, что удовлетворяет электростатическим условиям и не оказывает влияния на распространяющиеся волны. Это местное поле приводит к наличию емкостного реактивного сопротивления. В случае произвольной ориентации элемента тока его можно разложить на продольную и поперечную составляющие и рассматривать каждую из них в отдельности.

При возбуждении волновода через отверстие метод, изложенный в § 22 гл. XIV, часто позволяет получить приближенное решение, если постулировать, что на отверстии сохраняется тангенциальная составляющая невозмущенного поля.

§ 8. Возбуждение круглого волновода элементом тока. Применим метод, описанный в предыдущем параграфе, для вычисления волнового режима внутри круглого волновода, возбужденного радиальным или продольным элементом тока. Для элемента тока, ориентированного нормально к указанным двум направлениям, вычисления сходны с вычислениями в случае радиального тока, и поэтому они помещены (вместе с аналогичными примерами для прямоугольных волноводов) в задачи, находящиеся в конце главы.

Рассмотрим элемент тока $\rho_1 I e^{j\omega t}$, длина которого в точке ρ_0, 0 в плоскости z_0 равна $d\rho_0$. Если бы этот элемент находился не в точке $\varphi = 0$, а в точке $\varphi = \varphi_0$, то в формулах § 4 достаточно было бы заменить φ на $\varphi - \varphi_0$. Полное поле типа TE равно двойной сумме по m и n членов, определяемых соотношениями (15.38) и (15.39). Чтобы найти амплитуду члена pq, положим в выражении (15.39) t 0, $z = z_0$ и $\check{C}_{mn} = 0$, а затем, учитывая, что $\check{E}_\rho$ — четная функция φ, умножим его скалярно на величину

$$[\rho_1 \beta_{pq} J_p'(\beta_{pq}\rho) \sin p\varphi + \varphi_1 p \rho^{-1} J_p(\beta_{pq}\rho) \cos p\varphi]\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

и проинтегрируем в пределах от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$ и от $\rho = 0$ до $\rho = a$. В результате первого интегрирования в сумме по m исчезнут все члены, кроме p-го, а интегралы от $\sin^2 p\varphi$ и $\cos^2 p\varphi$ будут равны π. Обозначим $\beta_{pn}\rho$ через v_1, а $\beta_{pq}\rho$—через v_2, тогда оставшийся интеграл по ρ примет вид

$$\pi\beta_{pq}\beta_{pn}^{-1}\int_0^{\beta_{pn}a}\left[J_p'(v_1)J_p'(v_2)+\frac{p^2}{v_1v_2}J_p(v_1)J_p(v_2)\right]v_1dv_1. \qquad (15.54)$$

Но, согласно соотношению (5.350), этот интеграл равен нулю для любых n, кроме $n = q$, когда он [см. соотношение (5.351)] равен

$$\frac{1}{2}(\beta_{pq}^2a^2-p^2)J_p^2(\beta_{pq}a).$$

В плоскости z_0 поле B_ρ всюду равно нулю, а поле B_φ отлично от нуля только на элементе $d\rho_0$ вблизи точки ρ_0, 0. На основании соотношения (7.2) $\oint B_\varphi\rho\,d\varphi = -\frac{1}{2}\mu I$ при $\rho = \rho_0$. Решая относительно $\check{D}_{pq}$, имеем

$$[\check{D}_{pq}]_{le} = -\frac{p\mu I\,d\rho_0 J_p(\beta_{pq}\rho_0)}{\pi\rho_0 J_1'(\beta_{pq}a)(\beta_{pq}^2a^2-p^2)[J_p(\beta_{pq}a)]^2}e^{j\beta'_{pq}z_0}. \qquad (15.55)$$

Для полей TM, возбуждаемых радиальным элементом тока, в выражении (15.42) положим $t = 0$, $z = z_0$ и $\check{D}_{mn} = 0$ и помножим его скалярно на величину

$$[\rho_1 p\rho^{-1}J_p(\beta_{pq}\rho)\sin p\varphi + \varphi\beta_{pq}J_p'(\beta_{pq}\rho)\cos p\varphi]\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

а затем проинтегрируем в пределах от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$ и от $\rho = 0$ до $\rho = a$. Полученные интегралы совпадают с рассмотренными выше, за исключением множителя $(2-\delta_p^0)$, а интеграл, входящий в выражение (15.54), равен $\frac{1}{2}[\beta_{pq}aJ_p'(\beta_{pq}a)]^2$, потому что $J_p(\beta_{pq}a) = 0$. Таким образом, получаем

$$[\check{C}_{pq}]_{tm} = -\frac{\mu I d\rho_0 J_p'(\beta_{pq}\rho_0)(2-\delta_p^0)}{2\pi p_{pq}[\beta_{pq}aJ_p'(\beta_{pq}a)]^2}e^{j\beta'_{pq}z_0}. \qquad (15.56)$$

В случае продольного элемента тока, используя источник, характеризуемый соотношением (15.53), положим в выражении (15.41) $z = z_0$, $\check{D}_{mn} = 0$ и умножим скалярно обе части его на величину

$$[\rho_1\rho\beta_{pq}J_p'(\beta_{pq}\rho)\cos p\varphi - \varphi pJ_p(\beta_{pq}\rho)\sin p\varphi]\,d\rho\,d\varphi = \mathbf{R}_{pq}\,d\rho\,d\varphi,$$

а затем проинтегрируем в пределах $0 < \rho < a$ и $0 < \varphi < 2\pi$. В результате интегрирования по φ правой части, используя соотношения (5.350) и (5.351) и помня, что $J_p(\beta_{pq}a) = 0$, получаем

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}_{pq}d\rho\,d\varphi = \frac{\pi\omega\varepsilon'_{pq}C_{pq}}{2-\delta_p^0}\beta_{pq}^2a^2[J_p'(\beta_{pq}a)]^2e^{-j\beta'_{pq}z_0}. \qquad (15.57)$$

Площадка dS_0 ограничена дугами $c+\frac{1}{2}\delta$ и $c-\frac{1}{2}\delta$ и радиальными линиями $\frac{1}{2}\Delta\varphi$ и $-\frac{1}{2}\Delta\varphi$. Интеграл вдоль дуг, где подинтегральная функция не зависит от φ, равен

$$\beta_{pq}\left\{\left(c+\tfrac{1}{2}\delta\right)J_p'\left[\beta_{pq}\left(c+\tfrac{1}{2}\delta\right)\right]-\left(c-\tfrac{1}{2}\delta\right)J_p'\left[\beta_{pq}\left(c-\tfrac{1}{2}\delta\right)\right]\right\}\times$$
$$\times V_0\Delta\varphi \xrightarrow[\delta\to 0]{} \beta_{pq}[\beta_{pq}cJ_p''(\beta_{pq}c)+J_p'(\beta_{pq}c)]V_0\delta\,\Delta\varphi. \qquad (15.58)$$

На радиальных сторонах δ настолько мало, что можно положить $\rho = c$, тогда получим

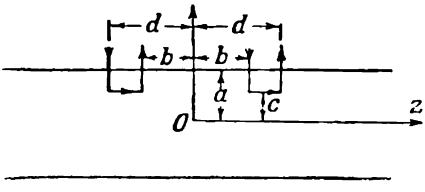
$$-\delta p c^{-1} J_p(\beta_{pq} c)\left[\sin\left(\frac{1}{2} p\Delta\varphi\right) - \sin\left(-\frac{1}{2} p\Delta\varphi\right)\right] V_0 = \\ = -p^2 \Delta\varphi \delta c^{-1} V_0 J_p(\beta_{pq} c). \qquad (15.59)$$

Сумма выражений (15.58) и (15.59) равна левой части выражения (15.57). Заменив $c\delta\Delta\varphi$ на dS_0, подставив $V_0 dS_0$ из выражения (15.53) и комбинируя функции Бесселя при помощи уравнения Бесселя (5.314), для C_{pq} получим

$$[C_{pq}]_{tm} = \frac{I(2-\delta_p^0) I\, dz_0 J_p(\beta_{pq} c)}{2\pi \beta'_{pq} \omega^2 \varepsilon [a J'_p(\beta_{pq} a)]^2} e^{j\beta'_{pq} z_0}. \qquad (15.60)$$

Следует отметить, что в выражениях (15.56) и (15.60) функцию $J'_p(\beta_{pq} a)$ можно в силу соотношения (5.134) заменить на $-J_{p+1}(\beta_{pq} a)$, потому что $J_p(\beta_{pq} a) = 0$.

§ 9. Возбуждение круглого волновода петлей с током. Применим формулы предыдущего параграфа к плоской квадратной петле, расположенной в плоскости $\varphi = 0$ круглого волновода радиуса a, замкнутого в сечении $z = 0$ проводящей стенкой, граничные условия на которой удовлетворяются, если взять зеркальное изображение петли, как это показано на фиг. 137. Будем предполагать, что распределение тока в петле однородно, хотя интегралы можно вычислить для любого заданного распределения. Волны TE возбуждаются только радиальными участками петли. Суммируя прирост амплитуды D_{mn} за счет элементов $I\,d\rho_0$ в точке ρ_0, d, $-I\,d\rho_0$ в точке ρ_0, b, $I\,d\rho_0$ в точке ρ_0, $-b$ и $-I\,d\rho_0$ в точке ρ_0, $-d$ [см. соотношение (15.55)] и интегрируя в пределах от $\rho_0 = c$ до $\rho_0 = a$, для области $|z| \geqslant d$ получим



Фиг. 137.

$$|\check{D}_{mn}|_{te} = -\frac{2m\omega I [\sin(\beta'_{mn} d) - \sin(\beta'_{mn} b)]}{\pi \beta'_{mn} (\beta_{mn}^2 a^2 - m^2) [J_m(\beta_{mn} a)]^2} \int_{\beta_{mn} c}^{\beta_{mn} a} \frac{J_m(v)}{v} d, \qquad (15.61)$$

где β_{mn} определяется выражением (15.35), а $\beta'^2_{mn} = \beta^2 - \beta^2_{mn}$. Интеграл в соотношении (15.61) можно вычислить путем разложения $J_m(v)$ в ряд [см. (5.314)], в котором обычно бывает достаточно взять лишь несколько членов. Поля волн TE определяются выражениями (15.38) и (15.39), в которые необходимо подставить выражение для $\check{D}_{mn}$, а $\check{C}_{mn}$ положить равным нулю.

Из предыдущего параграфа следует, что волны TM возбуждаются всеми участками петли. Действуя так же, как и при нахождении волн TE, но применяя соотношение (15.56) вместо соотношения (15.55), находим, что боковые стороны петли для области $z > d$ дают

$$[\check{C}'_{mn}]_{tm} = \frac{j\mu I_0 (2-\delta_m^0) [\sin(\beta'_{mn} d) - \sin(\beta'_{mn} b)] J_m(\beta_{mn} c)}{\pi [\beta \beta_{mn} a J'_m(\beta_{mn} a)]^2}. \qquad (15.62)$$

Для продольного участка, как видно из фиг. 137, нужно просуммировать действие элементов в z_0 и $-z_0$, а затем проинтегрировать в пределах от $z_0 = b$ до $z_0 = d$, что приводит к следующему:

$$z > d, \quad [\check{C}''_{mn}]_{tm} = \frac{-(2-\delta_m^0) \mu I_0 [\sin(\beta'_{mn} d) - \sin(\beta'_{mn} b)] J_m(\beta_{mn} c)}{j\pi [\beta \beta'_{mn} a J'_m(\beta_{mn} a)]^2}. \qquad (15.63)$$

Суммируя выражения (15.62) и (15.63) и учитывая, что на основании соотношения (15.7) $\beta^2 = \beta'^2_{mn} + \beta^2_{mn}$, для волн TM, возбуждаемых петлей, окончательно получаем

$$[\check{C}_{mn}]_{lm} = \frac{j(2-\delta_m^0)\,\mu I_0 [\sin(\beta'_{mn}d) - \sin(\beta'_{mn}b)]\,J_m(\beta_{mn}c)}{\pi[\beta'_{mn}\beta_{mn}aJ'_m(\beta_{mn}a)]^2}. \quad (15.64)$$

Поля определяются путем подстановки этой величины в выражения (15.41) и (15.42). Для распространяющихся волн β'_{mn} — величина действительная, так что входящие в числитель тригонометрические члены можно записать (см. Двайт, 401.09) в виде

$$\sin(\beta'_{mn}d) - \sin(\beta'_{mn}b) = 2\sin[\pi(d-b)\lambda'^{-1}_{mn}]\cos[\pi(d+b)\lambda'^{-1}_{mn}]. \quad (15.65)$$

Совершенно очевидно, что если длина петли $d-b$ равна целому числу длин волн в волноводе или если расстояние $\frac{1}{2}(d+b)$ от центра петли до замыкающей стенки равно нечетному числу полуволн, то соответствующий тип волны не будет возбуждаться. Если же нижняя часть петли лежит на оси волновода, то возбуждается только симметричная волна TM, потому что $J_m(0) = 0$ при $m \neq 0$.

§ 10. Возбуждение круглого волновода через отверстие. В последнем параграфе решалась задача о возбуждении волновода в случае заданного распределения тока в антенне или в петле. Теперь решим ее для заданного значения тангенциальной составляющей электрического поля на отверстии. Рассмотрим коаксиальную линию, состоящую из двух цилиндров радиусов $\rho = b$ и $\rho = c$ $(c > b)$ и ограниченную с одного конца идеально проводящей плоскостью $z = 0$, в которой прорезано кольцевое отверстие. Эта плоскость замыкает круглый полубесконечный волновод $\rho = a$, $z = 0$, $z = \infty$. Из симметрии ясно, что в волноводе может возбуждаться только не зависящая от φ волна TM, а из соотношений (15.49) и (15.41) мы получаем

$$J_0(\beta_n a) = 0, \qquad \check{E}_\rho = \omega \sum_{n=1}^{\infty} \check{C}_n \beta'_n \beta_n J_1(\beta_n \rho)\, e^{-j\beta'_n z}. \quad (15.66)$$

Как и в выражении (14.148), мы принимаем для плоскости $z = 0$ следующие граничные условия:

$$0 < \rho < b, \quad \check{E}_\rho = 0;$$

$$b < \rho < c, \quad \check{E}_\rho = \check{V}_0 \left[\rho \ln\left(\frac{b}{c}\right)\right]^{-1}; \quad c < \rho < a, \quad \check{E}_\rho = 0. \quad (15.67)$$

Подставляя эти значения для $\check{E}_\rho$ в соотношение (15.66), умножая затем обе части на $\rho J_1(\beta_n \rho)\,d\rho$ и интегрируя в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = a$, для $\check{C}_n$ получим

$$\check{C}_n = \frac{2\check{V}_0 [J_0(\beta_n b) - J_0(\beta_n c)]}{\omega \beta'_n \beta_n^2 a^2 \ln(b/c)\,[J_1(\beta_n a)]^2}. \quad (15.68)$$

Для вычисления входного импеданса волновода, подсоединенного к коаксиальной линии, проинтегрируем вектор Умова—Пойнтинга по площади отверстия. На основании формулы (13.97), используя отношение E_ρ/B_φ, определяемое выражениями (15.41) и (15.42), имеем

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2\mu} \int \check{E}_\rho \hat{B}_\varphi\, dS = \frac{\beta^2}{2\omega\mu\beta'_n} \int_b^c E_\rho^2 2\pi\rho\, d\rho = \frac{V_0^2}{2\check{Z}_i}. \quad (15.69)$$

Возведем выражение (15.66) в квадрат и произведем интегрирование при помощи соотношения (5.354):

$$\frac{1}{\check{Z}_i} = \frac{4\pi\omega\varepsilon}{a^4 \ln^2(b/c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_0(\beta_n b) - J_0(\beta_n c)]^2 \{[cJ_1(\beta_n c)]^2 - [bJ_1(\beta_n b)]^2\}}{\beta_n^2 \beta'_n [J_1(\beta_n a)]^2}. \quad (15.70)$$

Таким образом, волновод эквивалентен цепи, состоящей из параллельно включенных импедансов, каждый из которых соответствует определенному типу волны. Для распространяющихся волн β'_n — действительная величина и импеданс получается чисто активным. Для других волн β'_n — мнимая величина, т. е. импеданс реактивен. Точное решение требует согласования полей на отверстии со стороны волновода и со стороны коаксиальной линии с использованием соотношения (15.48).

§ 11. Плоские неоднородности в прямоугольных волноводах. Плоская неоднородность может быть образована путем соединения двух прямоугольных волноводов, расположенных с двух сторон от перпендикулярной к ним идеально проводящей плоскости $z = d$, в которой прорезаны отверстия, соединяющие внутренние области волновода. Пусть в обоих волноводах распространяется только волна типа TE_{10}. Тогда можно создать такую стоячую волну, у которой узел электрического поля (см. § 6) будет совпадать с плоскостью z d. Следовательно, по тем же причинам, что и в § 6, такое сочленение должно действовать, как некоторый шунтирующий элемент $\check{Z}_s$, помещенный в линию в сечение $z = d$. Рассмотрим теперь частный случай, считая длину волны λ_{10} одинаковой для обоих волноводов и предположив, что стоячая волна TE_{10} имеет узлы электрического поля в точках $z = 0$ и $z = 2d$. Напряженность электрического поля для волны TE_{10}, в соответствии с соотношением (15.27), равна

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\beta'_{10} z \cos\omega t, \quad (15.71)$$

где $0 < z < d$. Поскольку это поле дает отличную от нуля тангенциальную слагающую на металлических поверхностях в сечении $z = d$, в волноводе должны присутствовать также и волны высших типов, которые его компенсируют. Как видно из соотношения (15.27), содержащего множитель $e^{-|\gamma'_{mn}(z-d)|}$, при достаточно большой величине λ_{10} поля высших типов локализованы в очень небольшом интервале z. Следовательно, их колебания совпадают по фазе, что позволяет, учитывая соотношение (15.50), определить конфигурацию этих полей статическим методом.

Отрезок волновода $0 < z < 2d$ эквивалентен Т-образному звену (изображенному на фиг. 101), замкнутому накоротко в сечениях $A'A''$ ($z = 0$) и $B'B''$ ($z = 2d$), причем $\check{Z}_a = \check{Z}_b$, $\check{Z}_2 = \check{Z}_s$; в этом звене происходят колебания такого типа, при которых $i_{r+1} = -i_r$ и $\frac{1}{2}\check{Z}_a + \check{Z}_s = 0$. Обычно при рассмотрении неоднородностей в волноводе пользуются понятием «нормированного», или относительного импеданса, который мы будем обозначать через Z^0. Нормированный на единицу импеданс равен действительному импедансу, отнесенному к характеристическому импедансу волновода. Для волны TE_{10}, распространяющейся без затухания, соотношение (10.112) дает

$$\check{Z}_i^0 = \frac{\check{Z}_L^0 \cos\beta'_{10} l + j \sin\beta'_{10} l}{\cos\beta'_{10} l + j\check{Z}_L^0 \sin\beta'_{10} l}. \quad (15.72)$$

В случае коротко замкнутого Т-образного звена $Z_L^0 = 0$ и $l = d$, поэтому при резонансе

$$Z_s^0 = -\frac{1}{2} Z_i^0 = -\frac{1}{2} j \operatorname{tg} \beta'_{10} d. \tag{15.73}$$

Остановимся теперь на специальном случае, когда геометрия волновода в любом сечении, параллельном плоскости $x = 0$, а следовательно, и электрическому полю, одинакова. В сечении $z = d$ это могут быть уступы в стенках, или диафрагмы, или комбинации и тех и других. Электрическое поле ориентировано параллельно плоскости $x = 0$, так что на участке вблизи $z = d$, где можно пренебречь изменениями фазы, вектор E при любых значениях x должен быть непрерывен по y и z и должен выражаться через потенциал, удовлетворяющий двухмерному уравнению Лапласа, записанному в координатах y и z. В любых узлах электрического поля ток одинаков, поэтому полный заряд на верхней и нижней стенках волновода между узлами E также одинаков. Пусть в интервале $0 < z < 2d$ заряд на единицу ширины стенки (вдоль x) при $x = x_0$ равен Q_{10} для волны TE_{10} и Q_0 для всех других типов волн. Обозначим статическую емкость неоднородности (на единицу ширины) через C_1. Разность потенциалов между верхней и нижней стенкой волновода при $x = x_0$ и $z = d$ равна $V_d = bE_d$. Тогда на основании выражения (15.71) имеем

$$C_1 = \frac{Q_0 - Q_{\cdot 0}}{bE_d} = \frac{2}{bE_d}\left(\int_0^{\frac{1}{4}\lambda_{10}} \varepsilon E_y\, dz - \int_0^{d} \varepsilon E_y\, dz\right) = \frac{2\varepsilon \operatorname{ctg} \beta'_{10} d}{b\beta'_{10}} \tag{15.74}$$

Подстановка этой величины в выражение (15.73) дает

$$Z_s^0 = \frac{\varepsilon}{jb\beta'_{10} C_1} = \frac{1}{j\omega C^0} \quad \text{или} \quad C^0 = \frac{b\beta'_{10}}{\omega\varepsilon} C_1. \tag{15.75}$$

Таким образом, такая неоднородность имеет емкостный характер.

В качестве примера рассмотрим такую диафрагму в волноводе, которая образует в нем окно высотой c (высота сечения волновода равна b), как это изображено на фиг. 39, где все эквипотенциальные поверхности, за исключением граничных поверхностей, на которых $U = 0$ и $U = \frac{1}{2}\pi$, показаны пунктирными линиями. Подставляя в выражение (14.106) $a = c$, $W = jV$, $z = jd$, для V (при $d \to \infty$) получим

$$V = \frac{\pi d}{2b} - \ln \sin \frac{\pi c}{2b} = \frac{\pi d}{2b} + \ln \operatorname{cosec} \frac{\pi c}{2b}. \tag{15.76}$$

Заряд на единицу длины на расстоянии от 0 до d равен εV. Последний член, умноженный на ε, равен половине дополнительного заряда на стенке волновода, обусловленного присутствием диафрагмы, при условии, если разность потенциалов равна $\pi/2$. Поэтому для получения C_1 нужно второй член умножить на 2 и на $2\varepsilon/\pi$. Подстановка C_1 в выражение (15.75) и замена β'_{10} на $2\pi\lambda_g^{-1}$ дает для нормированной реактивной проводимости B^0 следующее выражение:

$$B^0 = \omega C^0 = \frac{8b'}{\lambda_g} \ln \operatorname{cosec} \frac{\pi c}{2b}. \tag{15.77}$$

В случае симметричной диафрагмы, ограниченной поверхностями $U = -\pi/2$ и $U = \pi/2$ (см. фиг. 39), единственная разница будет заключаться в том, что разность потенциалов равна не $\pi/2$, а π, и, следовательно, выражение (15.77) нужно разделить на 2. Поскольку ближайшая экспоненциально спадающая волна TE_{11} исключается теперь в силу симметрии, то результаты

оказываются несколько более точными. Из фиг. 39 ясно, что емкостная полоска в центре ведет себя в точности так же, как и симметричная диафрагма.

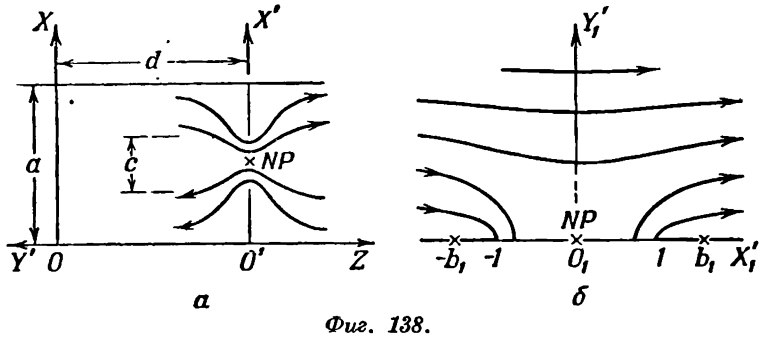
Другой интересный случай имеет место тогда, когда геометрия волновода в любом сечении, параллельном плоскости $y=0$, а следовательно, и магнитному полю, одинакова.

Согласно выражению (15.28), амплитуды составляющих **B** в плоскости $z=d$ равны

$$B_x = A_1\beta'_{10}\cos(\beta'_{10}d)\sin\frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} mA\,|\beta'_{m0}|\,\mathrm{ch}\,|\beta'_{m0}d|\sin\frac{m\pi x}{a}, \qquad (15.78)$$

$$B_z = -\frac{\pi A_1}{a}\sin(\beta'_{10}d)\cos\frac{\pi x}{a} - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{m^2\pi}{a}A_m\,\mathrm{sh}\,|\beta'_{m0}d|\cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad (15.79)$$

где $\beta_{m0}=m\pi/a$. Умножив выражение (15.78) на $\sin(\pi x/a)\,dx$, а выражение



Фиг. 138.

(15.79) на $\cos(\pi x/a)\,dx$, произведем интегрирование в пределах от $x=0$ до $x=a$ и исключим A_1; это дает

$$\mathrm{tg}\,(\beta'_{10}d) = -\frac{\beta'_{10}a\int_0^a B_z\cos(\pi x/a)\,dx}{\pi\int_0^a B_x\sin(\pi x/a)\,dx} \qquad (15.80)$$

Здесь требуется статическая апроксимация высших типов волн только в плоскости $z=d$, а не во всей области их существования, поэтому это выражение может привести к более точным результатам, чем выражение (15.74).

На фиг. 138, *а* показан частный случай симметричной диафрагмы с зазором, равным *c*. Очевидно, что магнитные силовые линии проходят по обе стороны от центра окна в противоположных направлениях. Приведенные на фиг. 138, *а* и *б* схемы связаны между собой так же, как схемы на фиг. 39. Поле, изображенное на фиг. 138, *б*, получается от щели, ширина которой равна 2 и которая вырезана в бесконечной плоскости, имеющей нулевую магнитную проницаемость. Эта плоскость является границей раздела двух равных по величине, но противоположно направленных однородных магнитных полей. На фиг. 40 показана верхняя часть поля при $a=1$. Суперпозиция двух полей в соответствии с соотношением (4.110) приводит к полю, изображенному на фиг. 138, *б*. Применив к последнему преобразование (4.107), указанное на фиг. 39, но несколько измененное (начало координат помещается у основания диафрагмы), получаем поле, показанное

на фиг. 138, *а*. Таким образом,

$$W = C'(z_1'^2 - 1)^{1/2}, \qquad z_1' = b_1 \sin \frac{\pi\left(z' - \frac{1}{2}a\right)}{a}. \tag{15.81}$$

Исключая z_1' и требуя выполнения равенства $z' = \frac{1}{2}(a-c)$ при $z_1' = 1$, находим

$$W = C\left(\cos^2 \frac{\pi z'}{a} - \sin^2 \frac{\pi c}{2a}\right)^{1/2} \tag{15.82}$$

В сечении волновода плоскостью $z = d$ $y' = 0$, что с учетом выражения (4.56) дает

$$B_x + jB_z = \pm C \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} - \sin^2 \frac{\pi c}{2a}\right)^{1/2} \tag{15.83}$$

Таким образом, B_x является четной функцией относительно оси волновода, равной нулю при $\frac{1}{2}(a-c) < x < \frac{1}{2}(a+c)$, а B_z является нечетной функцией, равной нулю при $0 < x < \frac{1}{2}(x-c)$ и при $\frac{1}{2}(a+c) < x < a$. Интегралы в выражении (15.80) можно взять по частям, если в одном из них положить $dv = B_x dx$ и $u = \sin(\pi x/a)$, а в другом $dv = B_z dx$ и $u = \cos(\pi x/a)$. Произведение uv равно нулю, и если в одном интеграле $\sin(\pi x/a)$ заменить на $t\cos\left(\frac{1}{2}\pi c/a\right)$, а в другом $\cos(\pi x/a)$ — на $t\sin\left(\frac{1}{2}\pi c/a\right)$, то они сведутся к интегралу (350.01), приведенному в справочнике Двайта. Подстановка их значений в выражения (15.80) и (15.73) дает

$$\check{Z}_s^0 = j\frac{a}{\lambda_g}\operatorname{tg}^2 \frac{\pi c}{2a} = j\omega L_s^0. \tag{15.84}$$

Рассматриваемая диафрагма является индуктивной, и соответствующая ей нормированная шунтирующая реактивная проводимость равна

$$B^0 = \frac{B}{Y_k} = -\frac{1}{\omega L} = -\frac{\lambda_g}{a}\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi c}{2a}. \tag{15.85}$$

В конце главы имеются задачи на расчет других видов диафрагм.

§ 12. Полые резонаторы. Собственные колебания. При возникновении электромагнитного возмущения внутри замкнутой полости с идеально проводящими стенками волны будут бесконечное число раз отражаться от стенок, так как в системе отсутствует рассеяние энергии. Поскольку на стенках тангенциальная составляющая электрического поля обращается в нуль, волна произвольной формы должна быть образована из элементарных стоячих волн, соответствующих таким частотам, при которых на стенках создаются узлы электрического поля. Эти стоячие волны образуют собственные (нормальные) колебания полости. Ясно, что если две непрерывные волны с одинаковой частотой, поляризацией и амплитудой распространяются в линии передачи или волноводе в противоположных направлениях, то через каждые полволны образуется узел поперечного электрического поля. Если в любых двух узлах электрического поля пересечь волновод двумя идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными к его оси, и образовать таким образом полость, то часть «пойманной» между ними волны будет описываться одной из собственных функций колебания этой полости. Очевидно, при произвольном расстоянии между плоскостями собственные частоты будут характеризоваться тем, что для них на длине волновода между плоскостями будет укладываться целое число полуволн. Это сооб-

ражение можно использовать при нахождении частот собственных (нормальных или свободных) колебаний полости, образованной из отрезка волновода описанным выше путем. Амплитуды двух волн, распространяющихся в волноводе в противоположных направлениях, равны между собой, т. е. в выражении (15.6) $\check{C} = \pm \check{D}$. Если рассеяние энергии в полости отсутствует, а ее торцевые стенки совпадают с плоскостями $z = 0$ и $z = d$, то для p-го поперечно-электрического типа колебаний, взяв действительную часть выражения (15.6), получим

$$W_{te} = [AU_1(u_1, u_2) + BU_2(u_1, u_2)]_{te} \sin \frac{p\pi z}{d} \cos(\omega_p t + \psi_p)_{te}, \qquad (15.86)$$

а для p-го поперечно-магнитного типа колебаний имеем

$$W_{tm} [AU_1(u_1, u_2) + BU_2(u_1, u_2)]_{tm} \cos \frac{p\pi z}{d} \cos(\omega_p t + \psi_p)_{tm}, \qquad (15.87)$$

где β'_{mn} выбрано равным $p\pi/d$, что обеспечивает исчезновение тангенциальной составляющей электрического поля на торцевых стенках полости. Граничные условия (15.4), (15.5) и (15.7), из которых находится величина β_{mn}, остаются при этом выполненными. Заменив теперь β на β_{mnp} и β'_{mn} на $p\pi/d$ и решив выражение (15.7) относительно собственных частот колебаний типа mnp для эвакуированной полости, найдем

$$\omega_{mnp} = (\mu_c \varepsilon_c)^{-1/2} \beta_{mnp} = v \beta_{mnp} = v (\beta_{mn}^2 + \beta_{mn}'^2)^{1/2} = v [\beta_{mn}^2 + p^2\pi^2 d^{-2}]^{1/2}. \qquad (15.88)$$

Для прямоугольного волновода β_{mn} дается формулой (15.26), для круглого — формулой (15.35), а значения β_{mn}, соответствующие волнам высших типов в коаксиальном волноводе, определяются по формуле (15.49). В случае главной волны в коаксиальной линии, согласно выражению (15.5), $\beta_{mn} = 0$.

§ 13. Типы независимых собственных колебаний полости. Обычно электромагнитное возмущение возбуждает в полости одновременно несколько типов собственных колебаний. Мы докажем, что мгновенное значение полной энергии равно сумме мгновенных значений энергии собственных колебаний каждого типа, составляющих заданное возмущение, т. е. что

$$\int_v E^2 \, dv = \sum_{i=1}^{n} \int_v E_i^2 \, dv \quad \text{и} \quad \int_v B^2 \, dv = \sum_{i=1}^{n} \int_v B_i^2 \, dv. \qquad (15.89)$$

Для этого подставим в формулу (3.24), являющуюся векторным аналогом теоремы Грина, $\mathbf{E}_i$ или $\mathbf{B}_i$ вместо $\boldsymbol{\Psi}$ и $\mathbf{E}_j$ или $\mathbf{B}_j$ вместо $\boldsymbol{\Phi}$ и заменим оператор rot rot, согласно соотношениям (13.10) и (13.11) на $\omega^2\mu\varepsilon$. Тогда

$$\mu\varepsilon (\omega_j^2 - \omega_i^2) \int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j \, dv = \int_S [\mathbf{E}_j \times (\nabla \times \mathbf{E}_i) - \mathbf{E}_i \times (\nabla \times \mathbf{E}_j)] \, \mathbf{n} \, dS. \qquad (15.90)$$

Но $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_j$ имеют на границах лишь нормальные составляющие, поэтому оба вектора, стоящие в прямых скобках, тангенциальны к поверхности границы, и, следовательно, их скалярное произведение на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ равно нулю. Таким образом, поверхностный интеграл обращается в нуль и в силу соотношения $\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A}$ мы получаем

$$\omega_i \neq \omega_j, \quad \int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j \, dv = \int_v \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}_j \, dv = \int_v \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j \, dv = 0. \qquad (15.91)$$

Итак, внутри произвольной полости с идеально проводящими стенками, заполненной неноглощающим диэлектриком, собственные колебания, име-

ющие разные частоты, являются совершенно независимыми. Но если потери в полости настолько велики, что резонансные кривые, соответствующие колебаниям двух типов, перекрываются, то этот вывод оказывается несправедливым, потому что первый множитель в левой части выражения (15.90) может тогда быть равен нулю в отдельные моменты времени.

Используемый здесь вектор-потенциал всегда определяется как ротор W, так что его дивергенция равна нулю. Как было показано в § 2 гл. XIV, при отсутствии зарядов такой вектор-потенциал описывает все поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Если же внутри полости находится электрод, несущий изменяющийся во времени заряд, то в соответствии с выражением (14.1)' к решению необходимо добавить еще скалярный потенциал поля, колебания которого во всей полости совпадают по фазе с колебаниями заряда. Этот скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Чтобы доказать независимость энергии поля $-\nabla\Phi$ от энергии поля $-j\omega\mathbf{A}$ или $-j\omega\nabla\times\mathbf{W}$, нужно воспользоваться формулой (3.2):

$$\int_{\mathrm{v}}(\nabla_w\times\mathbf{W})\cdot\nabla\Phi\,d\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}}\nabla_w\cdot(\mathbf{W}\times\nabla\Phi)\,d\mathrm{v}=\int_{S}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{W}\times\nabla\Phi)\,dS=0. \quad (15.92)$$

Поверхностный интеграл равен нулю, поскольку $\nabla\Phi$ параллелен n.

§ 14. Емкость и индуктивность цилиндрической полости. В общем случае распределение зарядов, токов и потенциалов вдоль стенок полости таково, что невозможно дать строго последовательное определение этих величин, исходя из представления о контуре с сосредоточенными постоянными, эквивалентном рассматриваемой полости. Чтобы эти определения были полезны, они должны приводить к значениям тока, самоиндукции, емкости, энергии и резонансной частоты, имеющим такой же порядок величины, что и в эквивалентном контуре с сосредоточенными постоянными. Мы будем определять эквивалентный ток полости для какого-нибудь типа колебаний как эффективное значение объемной плотности тока смещения, умноженное на площадь среднего поперечного сечения полости $S_c=2^{-1/2}S_0$ для волн TM или на площадь среднего продольного сечения $S_c=\left(\frac{1}{2}S_0\right)^{1/2}d$ для волн TE. Ясно, что такое определение совпадает с обычным определением тока в линейном контуре LC с поперечно-магнитным полем, если поле в конденсаторе однородно, а площадь его пластин равна S_c. Таким образом, из первого уравнения Максвелла (13.1) мгновенное значение тока в i-м типе колебаний, учитывая, что $\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{A}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$, равно

$$I_i=S_c\left[\frac{1}{\mathrm{v}}\int_{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial D_i}{\partial t}\right)^2 d\mathrm{v}\right]^{1/2}=\frac{S_c}{\mu}\left[\frac{1}{\mathrm{v}}\int_{\mathrm{v}}(\nabla\times\mathbf{B}_i)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_i)\,d\mathrm{v}\right]^{1/2}=$$

$$=\omega^2\varepsilon S_c\left[\frac{1}{\mathrm{v}}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_i\,d\mathrm{v}\right]^{1/2} \quad (15.93)$$

где v — объем полости. Из соотношений (8.11), (13.1) и (8.12) получаем мгновенное значение магнитной энергии

$$W_M=\frac{1}{2\mu}\int_{\mathrm{v}}(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}\,d\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i^2\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_i\,d\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}}{2\varepsilon S_c^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i^2}{\omega_i^2}. \quad (15.94)$$

Из соотношения (15.93) и (1.39) находим мгновенное значение электрической энергии

$$W_E=\frac{1}{2\varepsilon}\int_V D^2\,dv=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int\left[\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 dv\right]^{1/2}dt\right\}^2=\frac{v}{2\varepsilon S_c^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\int I_i\,dt\right)^2. \quad (15.95)$$

Если теперь вместо $\int I_i\,dt$ написать q_i, то выражения (15.94) и (15.95) будут представлять энергию в n-м независимом эквивалентном контуре LC [см. соотношение (9.1)]; при этом величины L_i и C_i определятся следующим образом:

$$L_i=\frac{\mu v}{\beta_i^2 S_c^2},\qquad L_{tm}=\frac{2vd}{\beta_i^2 S_0},\qquad L_{te}=\frac{2\mu}{\beta_i^2 d}, \quad (15.96)$$

$$C_i=\frac{\varepsilon S_c^2}{v},\qquad C_{tm}=\frac{\varepsilon S_0}{2d},\qquad C_{te}=\frac{\varepsilon d}{2}. \quad (15.97)$$

Заметим, во-первых, что резонансное соотношение $\omega^{-2}=LC$ удовлетворяется и, во-вторых, что для всех колебаний одного типа (например, типа TE или TM) величина емкости для данной полости одинакова.

§ 15. Затухание собственных колебаний. Активное сопротивление полости. До сих пор при вычислении нормальных частот мы считали стенки полости идеально проводящими. Большинство применяемых металлов являются настолько хорошими проводниками, что затухание свободных колебаний начинает сказываться только после значительного числа колебаний. Поэтому при определении мощности, поглощаемой стенками, можно пользоваться уже полученными нами в § 3 гл. XI формулами скин-эффекта. Таким образом, согласно выражению (11.26),

$$\bar{P}=(2\mu^2\gamma\delta)^{-1}\int_S \mathbf{B}_t\cdot\mathbf{B}_t\,dS, \quad (15.98)$$

где γ и δ — соответственно проводимость стенки и толщина скин-слоя, а $\mathbf{B}_t$ — амплитуда тангенциальной составляющей вектора магнитной индукции на поверхности стенки. Поглощающие свойства полого резонатора обычно принято выражать через его добротность Q, величина которой определяется из соотношения

$$W_t=W_0e^{-\omega t/Q}, \quad (15.99)$$

где W_t — энергия в момент времени t. Разделив это выражение на его производную по времени, получим

$$Q=-\omega W\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^{-1}=\frac{\omega W}{\bar{P}}. \quad (15.100)$$

Заметим, что, согласно выражениям (15.94) и (15.95), энергия периодически изменяется от чисто электрической до чисто магнитной, но сумма магнитной и электрической энергий все время остается постоянной с точностью до множителя, определяющего затухание. Поэтому полную энергию можно считать равной максимальной магнитной энергии, определяемой выражением (15.94), так что

$$Q=\frac{\omega^3\mu^2\varepsilon\gamma\delta\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\,dv}{\int \mathbf{B}_t\cdot\mathbf{B}_t\,dS}=\frac{\omega\mu\gamma\delta\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\,dv}{\int \mathbf{B}_t\cdot\mathbf{B}_t\,dS}=\frac{2\mu\int B^2\,dv}{\mu'\delta\int B^2\,dS}. \quad (15.101)$$

В выражении (9.7) показатель, характеризующий затухание, и для q и для i был равен $-\frac{1}{2}(R/L)t$, т. е. $-(R/L)t$ для W. Отсюда, пользуясь формулами (15.100) и (15.96), находим активное сопротивление полости, имеющей объем v, при колебании i-го типа:

$$R_i = \frac{\omega_i L_i}{Q_i} = \left[\frac{2d}{\omega_i \varepsilon S_0 Q_i}\right]_{tm} = \left[\frac{2}{\omega_i \varepsilon a Q_i}\right]_{te}. \qquad (15.102)$$

При наличии потерь в стенках резонансная частота будет меньше, чем $\omega_0 = (LC)^{-1}$. Заменив в дифференциальном уравнении колебаний полости d/dt на $j\omega$ и предполагая R настолько малым, что $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ и $\omega\omega_0 \approx \omega_0^2$, мы придем к следующему результату[1]):

$$-L\omega^2 + j\omega R + C^{-1} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\omega = |\omega_0 - \omega| \approx \frac{1}{2}\omega_0 Q^{-1}. \qquad (15.103)$$

§ 16. Собственные колебания цилиндрической полости. Выражения для собственных частот свободных колебаний цилиндрической полости были получены нами в § 12 [см. выражение (15.99)], а для эквивалентной емкости и самоиндукции — в § 15 [см. соотношения (15.96) и (15.97)]. Теперь найдем выражения для эквивалентного тока, добротности Q и для напряженностей полей через величины, характеризующие размеры полости. В целях упрощения этих вычислений можно воспользоваться следующей формулой, справедливость которой доказывается при помощи соотношения (15.22):

$$\int_{\mathrm{v}} (\nabla \times \mathbf{k}W)\cdot(\nabla \times \mathbf{k}W)\, d\mathrm{v} = \int_{\mathrm{v}} (\nabla_2 W)^2\, d\mathrm{v} =$$

$$= \int_{S_0} (\nabla_2 U)^2 dS \int_0^d \left(\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right)^2 \frac{p\pi z}{d}\, dz = \frac{\beta_{mn}^2 d}{2-\delta_p^0} \int_{S_0} U^2\, dS. \qquad (15.104)$$

Применяя эту формулу, а также учитывая соотношения (15.2) и (15.93), для эквивалентного тока в полости получим

$$I_{te} = \omega^2 \varepsilon S_c \left[\frac{1}{\mathrm{v}} \int_{\mathrm{v}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\, d\mathrm{v}\right]^{1/2} = \frac{\beta_{mnp}^2 \beta_{mn} d}{2\mu} \left[\int_{S_0} (U_{te})^2 dS\right]^{1/2} \cos(\omega t + \varphi). \qquad (15.105)$$

Для колебаний типа TM выразим объемный интеграл не через **A**, а через **B**, как это было сделано в соотношении (15.101). Тогда, воспользовавшись выражениями (15.104) и (15.2), придем к следующему:

$$I_{tm} = \frac{\beta_{mnp}}{\mu}\left[\frac{S_0}{2d}\int_{\mathrm{v}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\, d\mathrm{v}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\beta_{mnp}^3 \beta_{mn}}{\mu}\left[\frac{S_0}{2(2-\delta_p^0)}\int_{S_0} (U_{tm})^2\, dS\right]^{1/2} \cos(\omega t + \varphi). \qquad (15.106)$$

В соответствии с соотношениями (15.2), (15.86) и (15.87) поля в полом резонаторе можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{te} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{te}}{\partial t} = \omega_p (\mathbf{k}\times\nabla U_{te}) \sin\frac{p\pi z}{d} \sin(\omega_p t + \varphi_p), \qquad (15.107)$$

$$\mathbf{B}_{te} = \left(\frac{p\pi}{d}\nabla_2 U_{te} \cos\frac{p\pi z}{d} + \mathbf{k}\beta_{mn}^2 U_{te} \sin\frac{p\pi z}{d}\right) \cos(\omega_p t + \varphi_p), \qquad (15.108)$$

[1]) Следует иметь в виду, что автор при оценке изменения частоты не учитывает влияние самоиндукции скин-эффекта, сказывающееся в том же порядке. — *Прим. перев.*

$$\mathbf{E}_{lm} = \omega_p \left(\frac{p\pi}{d} \nabla_2 U_{lm} \sin\frac{p\pi z}{d} - \mathbf{k}\beta_{mn}^2 U_{lm} \cos\frac{p\pi z}{d} \right) \sin(\omega_p t + \varphi_p), \quad (15.109)$$

$$\mathbf{B}_{lm} = -\beta_{mnp}^2 (\mathbf{k} \times \nabla U_{lm}) \cos\frac{p\pi z}{d} \cos(\omega_p t + \varphi_p). \quad (15.110)$$

Для определения Q нужно вычислить поверхностный интеграл, входящий в выражение (15.101). Для одной торцевой поверхности из соотношений (15.105), (15.108) и (15.22) находим

$$\int_{S_0} \mathbf{B}_{te} \cdot \mathbf{B}_{te}\, dS = \frac{p^2\pi^2}{d^2} \int_{S_0} (\nabla_2 U_{te})^2\, dS = \frac{p^2\pi^2\zeta_{mn}^2}{d^2} \int_{S_0} U_{te}^2\, dS = \frac{4p^2\pi^2\mu^2}{\zeta_{mnp}^2 d^4} I_{te}^2. \quad (15.111)$$

Подставим теперь в выражение (15.101) объемный интеграл из соотношения (15.105); тогда получим

$$Q_{te} = \frac{\beta_{mnp}^4 d^3 \gamma\delta}{4\pi^2\omega\varepsilon p^2} \left(1 + \frac{\beta_{mnp}^4 d^4}{8p^2\pi^2\mu^2 I_{te}^2} \int_{S_1} B_{te}^2\, dS \right)^{-1} \quad (15.112)$$

где S_1 — боковая поверхность полости. В случае колебаний типа TM для одной торцевой поверхности из соотношений (15.110), (15.22) и (15.20) имеем

$$\int_{S_0} \mathbf{B}_{lm} \cdot \mathbf{B}_{lm}\, dS = \beta_{mnp}^4 \beta_{mn}^2 \int_{S_0} U_{lm}^2\, dS = \frac{2\mu^2 (2 - \delta_p^0)}{\zeta_{mnp}^2 S_0} I_{lm}^2. \quad (15.113)$$

Подстановка объемного интеграла из соотношения (15.93) в выражение (15.101) дает

$$Q_{lm} = \frac{\omega p^3 \gamma\delta d}{2(2 - \delta_p^0)} \left[1 + \frac{\zeta_{mnp}^2 S_0}{4\mu^2 (2 - \delta_p^0) I_{lm}^2} \int_{S_1} B_{lm}^2\, dS \right]^{-1} \quad (15.114)$$

В последующих параграфах подробно разбираются свойства прямоугольного, круглого и коаксиального цилиндрических резонаторов. Результаты, относящиеся к резонаторам других форм, помещены в задачах в конце главы.

§ 17. Свойства прямоугольного резонатора. Собственные частоты колебаний прямоугольной полости, согласно выражениям (15.88) и (15.26), равны

$$\nu_{mnp}^2 = \frac{v^2}{\lambda_{mnp}^2} = \frac{v^2}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) = \frac{v^2}{4\pi^2} \beta_{mnp}^2. \quad (15.115)$$

В соответствии с соотношениями (15.25) и (15.107)—(15.110) поля в таком резонаторе определяются по формулам

$$\mathbf{E}_{te} = \pi\omega_{mnp} C \left[-\mathbf{i} \frac{n}{b} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{j} \frac{m}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \right] \sin\frac{p\pi z}{d} \sin(\omega t + \psi)_{mnp}, \quad (15.116)$$

$$\mathbf{B}_{te} = \pi^2 C \left\{ -\frac{p}{d} \left[\mathbf{i} \frac{m}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{j} \frac{n}{b} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \right] \cos\frac{p\pi z}{d} + \mathbf{k} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{d} \right\} \cos(\omega t + \psi)_{mnp}, \quad (15.117)$$

$$\mathbf{E}_{lm} = \pi^2 \omega_{mnp} C' \left\{ \frac{p}{d} \left[\mathbf{i} \frac{m}{a} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{j} \frac{n}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \right] \sin\frac{p\pi z}{d} - \mathbf{k} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{d} \right\} \sin(\omega t + \psi)_{mnp}, \quad (15.118)$$

$$\mathbf{B}_{lm} = -\pi\beta^2_{mnp}C'\left[\mathbf{i}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} - \right.$$
$$\left. - \mathbf{j}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]\cos\frac{p\pi z}{d}\cos(\omega t + \psi)_{mnp}. \quad (15.119)$$

Если один из индексов m, n или p равен нулю, то вектор **E** будет ориентирован вдоль соответствующей оси, а ν не будет зависеть от длины резонатора в этом направлении. В этом наиболее распространенном случае, если принять $p = 0$ и заменить $\pi^2(m^2a^{-2} + n^2b^{-2})C'$ на C_0, поля можно записать следующим образом:

$$E_z = -\omega_{mn}C_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin(\omega t - \psi)_{mn}, \quad (15.120)$$

$$\mathbf{B} = \pi C_0\left(\mathbf{i}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} - \mathbf{i}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\cos(\omega t + \psi)_{mn}. \quad (15.121)$$

Если же электрическое поле ориентировано вдоль другой оси, то поля можно найти при помощи циклической перестановки x, y, z, a, b, c и m, n, p. Для определения значений L_i, C_i и I_i, близких к значениям в соответствующем эквивалентном контуре с сосредоточенными параметрами, последний нужно рассматривать как систему с колебаниями типа *TM*. На фиг. 133 представлена структура поля в полом резонаторе, совпадающая с соответствующей структурой поля в волноводе за исключением верхнего рисунка: его надо рассматривать как вид в сечении *CD*, а не *AB*. Кроме того, вся картина уже не изменяется во времени, а является стационарной, причем там, где **E** обращается в нуль, **B** достигает максимума и наоборот. Поперечные границы должны ставиться так, чтобы линии *E* пересекали их ортогонально. Если исключить для колебаний *TE* случай $m = 0$ и n 0, то для эквивалентных токов прямоугольного резонатора на основании соотношений (15.105) и (15.106) будем иметь

$$I_{le} = \frac{\beta^2_{mnp}\beta_{mn}(ab)^{1/2}dC}{4\mu}\cos(\omega t + \psi), \quad I_{lm} = \frac{\beta^3_{mnp}\beta_{mn}abC'}{2\mu\,|2(2-\delta^0_p)]^{1/2}}\cos(\omega t + \psi). \quad (15.122)$$

Добротность Q_{le} при отличных от нуля m, n, p, согласно выражению (15.112), равна

$$Q_{le} = \frac{\frac{1}{4}v\mu\gamma\delta\pi(m^2b^2 \quad n^2a^2)(m^2b^2d^2 + n^2a^2d^2 + p^2a^2b^2)^{3/2}}{p^2a^3b^3\,|n^2a(a+d) + m^2b(b+d)| + d^3(a+b)(m^2b^2 \quad n^2a^2)^2}. \quad (15.123)$$

Поскольку при $m = 0$ или $n = 0$, $A_{lm} = 0$, то для Q_{lm} из соотношения (15.114) получим

$$Q_{lm} = \frac{v\mu\gamma\delta\pi(m^2b^2 + n^2a^2)(m^2b^2d^2 + n^2a^2d^2 \quad p^2a^2b^2)^{1/2}}{2\,|ab(2-\delta^0_p)(m^2b^2 + n^2a^2) + 2d(n^2a^3 + m^2b^3)|}. \quad (15.124)$$

Как видно из формулы (15.115), наименьшую возможную частоту колебаний резонатор аможно получить, если индекс, соответствующий наименьшему размеру рез натора, равен нулю, а два остальных равны единице. Пусть, например, $p = 0$, а d — наименьший размер резонатора. Тогда

$$Q_{lm} = \frac{v\mu\gamma\delta\pi d(a^2 + b^2)^{3/2}}{2[ab(a^2 + b^2) + 2d(a^3 + b^3)]}. \quad (15.125)$$

Для полости с квадратным сечением ($a = b$) и для кубической полости ($a = b = d$) соответственно получим

$$Q_{lm} = \frac{v\mu\gamma\delta\pi d}{2^{1/2}(a + 2d)}, \quad Q_{lm} = \frac{v\mu\gamma\delta\pi}{2^{1/2}\cdot 3}, \quad (15.126)$$

где v — скорость распространения волны в свободном пространстве, магнитная проницаемость которого равна μ, γ — проводимость стенок, а δ — толщина скин слоя. В задачах в конце главы приведены числовые примеры.

§ 18. Свойства резонатора, имеющего форму круглого цилиндра. Собственные частоты колебаний такого полого резонатора, как следует из § 12, выражаются через скорость v и длину волны λ_{mnp} электромагнитных волн, распространяющихся в среде, заполняющей резонатор, следующим образом:

$$\nu_{mnp}^2 = \frac{v^2}{\lambda_{mnp}^2} = \frac{v^2}{4\pi^2}\left(\beta_{mn}^2 + \frac{p^2\pi^2}{d^2}\right) = \frac{v^2}{4\pi^2}\beta_{mnp}^2. \tag{15.127}$$

Здесь волновое число β_{mn} выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись условия (15.35). Из выражений (15.34) и (15.110), положив

$$\sin(m\varphi + \psi_m) = s(\varphi), \quad \cos(m\varphi + \psi_m) = c(\varphi), \quad J_m(\beta_{mn}\rho) = J_m,$$
$$\sin(\omega t + \alpha) = s(t) \quad \text{и} \quad \cos(\omega t + \alpha) = c(t),$$

получим следующие выражения для полей:

$$\mathbf{E}_{te} = \omega_{mnp} C\left[\rho_1 \frac{m}{\rho} J_m s(\varphi) + \varphi \beta_{mn} J'_m c(\varphi)\right] \sin\frac{p\pi z}{d}\, s(t), \tag{15.128}$$

$$\mathbf{B}_{te} = C\left\{\frac{p\pi}{a}\left[\rho_1 \beta_{mn} J'_m c(\varphi) - \varphi \frac{m}{\rho} J_m s(\varphi)\right]\cos\frac{p\pi z}{d} + \right.$$
$$\left. + \mathbf{k}\beta_{mn}^2 J_m c(\varphi) \sin\frac{p\pi z}{d}\right\} c(t), \tag{15.129}$$

$$\mathbf{E}_{tm} = \omega_{mnp} C'\left\{\frac{p\pi}{d}\left[\rho_1 \beta_{mn} J'_m c(\varphi) - \varphi \frac{m}{\rho} J_m s(\varphi)\right]\sin\frac{p\pi z}{d} - \right.$$
$$\left. - \mathbf{k}\beta_{mn}^2 J_m c(\varphi)\cos\frac{p\pi z}{d}\right\} s(t), \tag{15.130}$$

$$\mathbf{B}_{tm} = -\beta_{mnp}^2 C'\left[\rho_1 \frac{m}{\rho} J_m s(\varphi) + \varphi \beta_{mn} J'_m c(\varphi)\right]\cos\frac{p\pi z}{d}\, c(t). \tag{15.131}$$

Согласно соотношениям (15.105), (15.106) и (5.350), эквивалентные токи полого резонатора равны

$$I_{te} = (2\mu)^{-1} dC\beta_{mnp}^2 [\pi(\beta_{mn}^2 a^2 - m^2)]^{1/2} (2 - \delta_m^0)^{-1/2} J_m(\beta_{mn} a)\cos(\omega t + \alpha), \tag{15.132}$$

$$I_{tm} = \mu^{-1}\pi a^2 C' \beta_{mnp}\beta_{mn} [2(2 - \delta_p^0)(2 - \delta_m^0)]^{-1/2} J'_m(\beta_{mn} a)\cos(\omega t + \alpha). \tag{15.133}$$

Поскольку $p \neq 0$ для волн TE, то из выражений (15.112) и (15.114) имеем

$$Q_{te} = \frac{\gamma\mu\gamma\delta a d^3 \beta_{mnp}^3 (\beta_{mn}^2 a^2 - m^2)}{2\{p^2\pi^2 [m^2(d - 2a) \quad 2\beta_{mn}^2 a^3] + \beta_{mn} a^2 d^3\}}, \tag{15.134}$$

$$Q_{tm} = \frac{\gamma\mu\gamma\delta a d^3 \beta_{mnp}}{2[a(2 - \delta_p^0) + d]} = \frac{\mu a d}{\mu'\delta[(2 - \delta_p^0) a + d]}. \tag{15.135}$$

Числовые примеры приведены в § 26.

§ 19. Многосвязные цилиндрические полые резонаторы. В многосвязной полости всегда можно провести такую замкнутую кривую, которую нельзя сжать в точку без пересечения границ полости. Если полость ограничена снаружи двумя параллельными плоскостями и нормальной к ним цилиндрической поверхностью, а изнутри одной или более цилиндрическими поверхностями, также нормальными к этим плоскостям, то внутри полости возможны такие типы колебаний, частота которых определяется только

расстоянием между плоскостями. Эти типы колебаний называются основными (главными). Они удовлетворяют второй системе граничных условий, определяемых выражениями (15.5), причем $\beta_{mn}=0$, и представляют собой стоячую волну типа тех волн, которые существуют в линиях передачи (см. § 14—19 гл. XIII). На основании соотношения (15.88) резонансные частоты, соответствующие главным типам колебаний, для такой многосвязной полости равны

$$\nu_p=\frac{v}{\lambda_p}=\frac{v\beta_p}{2\pi}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{pv}{2d}. \tag{15.136}$$

Поля можно записать при помощи выражений (13.119) и (13.120) в виде

$$\mathbf{E}=C_p\nabla_2 U(x,y)\sin\frac{p\pi z}{d}\sin\omega_p t,\quad \mathbf{B}=C_p'(\mu\varepsilon)^{1/2}\nabla_2 V(x,y)\cos\frac{p\pi z}{d}\cos\omega_p t, \tag{15.137}$$

где $U(x,y)$ и $V(x,y)$ — сопряженные функции, рассмотренные в гл. IV, причем $U(x,y)$ на одном семействе цилиндрических поверхностей принимает значение U_1, а на другом — значение U_2 [1]. Согласно соотношению (4.55), интеграл от ∇U или ∇V по замкнутому контуру, на котором $U=\text{const}$, равен приращению $[V]$ величины V Обычно эта величина равна 2π, как, например, для эллиптических цилиндров (см. фиг. 38, где вместо V нужно подставить U). Пусть мгновенное значение заряда на метр для p-го главного типа колебаний в сечении z равно σ_p. Определим эквивалентный заряд полого резонатора через среднее значение σ_p^2 при помощи соотношения (1.40) следующим образом:

$$q_p=\Big(d\int_0^d\sigma_p^2\,dz\Big)^{1/2}=\Big[\varepsilon^2 d\int_0^d\Big(\oint E_p\,ds\Big)^2 dz\Big]^{1/2}=$$
$$=2^{-1/2}\varepsilon d\,[V]\,C_p\sin\omega_p t. \tag{15.138}$$

Пусть мгновенное значение тока в p-м главном типе колебаний на поверхностях с потенциалами U_1 и U_2 в сечении z равно I_p. Определим эквивалентный ток полого резонатора через среднее значение I_p^2 при помощи выражения (7.2) следующим образом:

$$i_p=\Big(\frac{p^2\pi^2}{d}\int_0^d I_p^2\,dz\Big)^{1/2}=\Big[\frac{\omega_p^2 d}{\mu^2 v^2}\int_0^d\Big(\oint B_p\,ds\Big)^2 dz\Big]^{1/2}=$$
$$=\frac{\varepsilon d}{2^{1/2}}[V]\,C_p\omega_p\cos\omega_p t=\frac{dq_p}{dt}. \tag{15.139}$$

Тогда мгновенные значения электрической и магнитной энергий будут равны

$$(W_e)_p=\frac{1}{2C_1}\int_0^d\sigma_p^2\,dz=\frac{q^2}{2C_1 d},\qquad (W_m)_p=\frac{L_1}{2}\int_0^d I_p^2\,dz=\frac{L_1 d}{2p^2\pi^2}i_p^2, \tag{15.140}$$

где C_1 и L_1 — емкость и самоиндукция на единицу длины. Если L_p и C — эквивалентные самоиндукция и емкость полости, то на основании выражений (13.124) и (15.136) они связаны между собой следующим образом:

$$L_p=\frac{L_1 d}{p^2\pi^2},\quad C=C_1 d,\quad L_pC=\frac{1}{\omega_p^2},\quad L_1C_1=\mu\varepsilon. \tag{15.141}$$

---

[1] Автор не учитывает, что главная волна $(N-1)$-кратно вырождена.—*Прим. перев.*

Если V_0 — максимальная разность потенциалов между стенками полости в некоторый момент времени, то электрическая энергия в полости равна

$$W_e = \frac{1}{2}\int_0^d C_1 V_0^2 \sin^2\frac{p\pi z}{d}\,dz = \frac{1}{4}C_1 V_0^2 = \frac{1}{2}CV_p^2, \qquad (15.142)$$

где $V_p = 2^{-1/2}V_0$. Следовательно, при таком определении V_p все соотношения между L, C, i, q и V, имеющие место для контуров с сосредоточенными параметрами, сохраняют силу и для главных типов колебаний. Для определения потерь вычислим поверхностный интеграл в выражении (15.98). На торцевых плоскостях на основании соотношений (15.137) и (15.140) имеем

$$2\int_{S_0} \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\,dS = \frac{4}{d}\int_V \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\,dv = \frac{\delta_p}{d}(W_m)_p = \frac{4\mu L_p}{d}i_p^2. \qquad (15.143)$$

Так как величины ∇V, $\partial V/\partial s$ и $|\partial W/\partial z_1|$ такие же, как для соотношения (15.137), то на двух семействах цилиндрических поверхностей, имеющих потенциалы U_1 и U_2, имеем

$$\int_{S_{1,2}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\,dS = \frac{1}{2}\mu\varepsilon\,dC_p^2\oint_{1,2}(\nabla V)^2 ds\cos^2\omega_p t = \frac{1}{2}\mu\varepsilon\,dC_p^2\int_{1,2}\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| dV\cos^2\omega_p t. \qquad (15.144)$$

Подстановка выражений (15.140), (15.143) и (15.144) в формулы (15.98)—(15.100) дает

$$Q_p = \frac{\mu d}{2\rho'\delta_p}\left[1 + \frac{d}{4|V|(U_2-U_1)}\left(\oint_1\left|\frac{\partial z}{\partial W}\right|^{-1}dV + \oint_2\left|\frac{\partial z_1}{\partial W}\right|^{-1}dV\right)\right]^{-1} \qquad (15.145)$$

Для вычисления линейного интеграла необходимо выразить z_1 как функцию W, как это было сделано в выражении (4.103), откуда ясно, что $\partial z_1/\partial W$ — функция U и V. В первом интеграле U нужно положить равным U_1, а во втором — равным U_2, а область интегрирования в обоих случаях необходимо распространить на все значения V, покрывающие поверхность $U = \text{const}$.

§ 20. Отрезок коаксиального кабеля как резонатор. Простейшим случаем многосвязного полого резонатора с криволинейными поверхностями является полость, образованная двумя коаксиальными круговыми цилиндрами. Главный тип колебаний в ней определяется таким же образом, как и в предыдущем параграфе. Из § 13 гл. IV имеем

$$W = \ln z_1, \qquad z_1 = e^W, \quad U = \ln\rho, \qquad V = \theta. \qquad (15.146)$$

Следовательно, поля, определяемые по формулам (15.136) и (15.137), будут равны

$$E_\rho = \frac{C_p}{\rho}\sin\frac{p\pi z}{d}\sin\omega_p t, \qquad B_\theta = \frac{C_p}{\rho v}\cos\frac{p\pi z}{d}\cos\omega_p t. \qquad (15.147)$$

Приращение V, обозначаемое нами через $[V]$, равно 2π. Поэтому, если b — внешний радиус, а a — внутренний, то

$$(U_2 - U_1) = \ln\frac{b}{a}, \qquad \oint_1\left|\frac{\partial z_1}{\partial W}\right|^{-1}dV = e^{-U_1}\int_0^{2\pi} dV = 2\pi e^{-U_1} = \frac{2\pi}{a}. \qquad (15.148)$$

Аналогичным путем для другого линейного интеграла получим $2\pi/b$. Подставляя эти результаты в соотношение (15.145), получаем для p-го главного типа колебаний

$$Q_p = \frac{\mu d}{2\mu' \delta}\left[1 + \frac{(a+b)\,d}{4ab \ln (b/a)}\right]^{-1} \tag{15.149}$$

Из соотношений (15.136), (15.139) и (15.141) имеем

$$i_p = 2^{1/2}\pi\omega_p \varepsilon d C_p \cos \omega_p t, \qquad L_p = \frac{\mu d}{2p^3\pi^3}\ln\frac{b}{a}, \qquad C = 2\pi\varepsilon d\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1} \tag{15.150}$$

Ток i_p равен радиальному току смещения I [см. выражение (15.93)], если средняя площадь поперечного сечения определяется выражением

$$S_c = \pi d\left[\frac{2(b^2-a^2)}{\ln (b/a)}\right]^{1/2} \xrightarrow[a\to b]{} 2\pi ad. \tag{15.151}$$

Помимо колебаний главных типов в коаксиальном резонаторе существуют также и колебания других типов, которые выражаются через функции Бесселя первого и второго родов [см. соотношения (15.46) – (15.49)]. Если d значительно больше $b-a$, то колебания этих типов имеют частоты, значительно превышающие частоту главного типа колебаний $p=1$. Эти частоты можно вычислить методами, рассмотренными в § 16.

§ 21. Собственные колебания сферической полости. Решение волнового уравнения, рассмотренного в § 13 гл. XIV, состоит из произведений сферических гармоник на сферические функции Бесселя. В соотношении (14.85) в членах θ и R необходимо сохранить только $P_n(\cos\theta)$ и $j_n(\beta r)$, потому что $Q_n(\cos\theta)$ обращается в бесконечность на оси, а $k_n(j\beta r)$ представляет волну, бегущую в радиальном направлении, тогда как в случае колебаний полости с идеально проводящими стенками могут существовать только стоячие волны. Из соотношений (14.85), (14.83), (14.110) и (14.117), полагая $\sin(m\varphi+\psi_m) = s(\varphi)$, $\cos(m\varphi+\psi_m) = c(\varphi)$ и $j_n(\beta_{pn} r) = j_n$, получим следующие выражения для напряженности электрического поля и магнитной индукции:

$$\mathbf{E}_{te} = \omega C\left[\boldsymbol{\theta}\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\,s(\varphi) - \boldsymbol{\varphi}\sin\theta\,P_n^{m'}(\cos\theta)\,c(\varphi)\right] j_n \sin(\omega t+\gamma), \tag{15.152}$$

$$\mathbf{B}_{te} = C\left[\mathbf{r}_1\frac{n(n+1)}{r}P_n^m(\cos\theta)\,c(\varphi)\,j_n - \boldsymbol{\theta}\frac{\sin\theta}{r}P_n^{m'}(\cos\theta)\,c(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(rj_n) - \right.$$
$$\left. - \boldsymbol{\varphi}\frac{m}{r\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\,s(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(rj_n)\right]\cos(\omega t+\gamma), \tag{15.153}$$

$$\mathbf{E}_{tm} = \omega C'\left[\mathbf{r}_1\frac{n(n+1)}{r}P_n^m(\cos\theta)\,c(\varphi)\,j_n - \boldsymbol{\theta}\frac{\sin\theta}{r}P_n^{m'}(\cos\theta)\,c(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(rj_n) - \right.$$
$$\left. - \boldsymbol{\varphi}\frac{m}{r\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\,s(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}(rj_n)\right]\sin(\omega t+\gamma), \tag{15.154}$$

$$\mathbf{B}_{tm} = \omega^2\mu\varepsilon C'\left[\boldsymbol{\theta}\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\,s(\varphi) - \boldsymbol{\varphi}\sin\theta\,P_n^{m'}(\cos\theta)\,c(\varphi)\right] j_n\cos(\omega t+\gamma). \tag{15.155}$$

На границе полости ($r=a$) тангенциальная составляющая $\mathbf{E}$ должна обращаться в нуль, так что β_{pn} необходимо выбрать так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$[j_n(\beta_{pn}a)]_{te} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial a}[aj_n(\beta_{pn}a)]_{tm} = 0. \tag{15.156}$$

Эквивалентный ток полости можно представить в виде выражения, аналогичного выражению (15.93), т. е. как эффективное значение объемного тока смещения при средней площади поперечного сечения, равной $\frac{1}{2}\pi a^2$. Это значение является точным для колебаний типа TE_{01}, при которых ток смещения течет вокруг оси, но оно приемлемо также и для колебания типа TM_{10}. Возводя выражение (15.152) в квадрат и проинтегрировав по объему v, получим в результате интегрирования по φ $2\pi/(2-\delta_m^0)$, а в результате интегрирования по другим координатам, согласно соотношениям (5.198), (5.402) и (5.346), найдем

$$I_{te}=\frac{1}{2}\omega^2\varepsilon\pi a^2 C j_{n-1}(\beta_{pn}a)\left[\frac{3n(n+1)(n+m)!}{2(2-\delta_m^0)(2n+1)(n-m)!}\right]^{1/2} \qquad (15.157)$$

Для определения эквивалентного тока, соответствующего колебаниям типа TM, выразим W_m через A и B. Учитывая, что объемный интеграл от A^2 равен объемному интегралу от B^2, деленному на β_{pn}^2, и, пользуясь выражением (15.155), мы придем к такому же интегралу, что и раньше, но только входящая в него величина β_{pn} должна удовлетворять второму условию (15.156). Таким образом,

$$I_{tm}=\frac{1}{2}\omega^2\varepsilon\pi a C' j_n(\beta_{pn}a)\left\{\frac{3n(n+1)(n+m)!\left[\beta_{pn}^2a^2-\frac{1}{4}(2m+1)^2\right]}{2(2-\delta_m^0)(2n+1)(n-m)!}\right\}^{1/2} \qquad (15.158)$$

Из выражений (15.94) и (15.100) находим самоиндукцию и емкость:

$$L=\frac{8\mu}{3\beta_{pn}^2\pi a}, \qquad C=\frac{3\pi\varepsilon a}{8}. \qquad (15.159)$$

Вычисление Q по формуле (15.101) упрощается благодаря тому обстоятельству, что, согласно выражениям (15.152) и (15.153), интегрирование по θ и φ приводит к появлению одинаковых множителей в объемном и поверхностном интегралах, которые сокращаются; поэтому достаточно только провести в объемном интеграле интегрирование по r. Используя в случае волн TE первое выражение (15.101), а в случае волн TM второе выражение (15.101) и выполняя интегрирование при помощи соотношений (5.402) и (5.346), после упрощений, связанных с выполнением условия (15.156), получаем

$$Q_{te}=\frac{\mu a}{\mu'\delta}, \qquad Q_{tm}=\frac{\mu a}{\mu'\delta}\left[1-\frac{(2n+1)^2}{4\beta_{pn}^2a^2}\right] \qquad (15.160)$$

§ 22. Собственные колебания реальных полых резонаторов. До сих пор мы рассматривали полости, образованные замкнутыми идеально проводящими поверхностями. Если же в стенках имелись потери, то они определялись по формуле (15.103). На практике для введения энергии в полость в ее стенках проделываются отверстия или внутрь полости вводятся электроды. Обычно стремятся лишь незначительно исказить поля в резонаторе, и поэтому отверстия и электроды делают по возможности небольшими. Обозначим вектор-потенциал и резонансную частоту идеальной полости соответственно через $\mathbf{A}_0$ и ω_0, а реальной полости — через $\mathbf{A}$ и ω. Полагая в соотношении (3.24) $\Psi=\mathbf{A}$, $\Phi=\mathbf{A}_0$ и учитывая, что умножение на $\omega^2\mu\varepsilon$ равносильно применению оператора rotrot, получим

$$\mu\varepsilon(\omega^2-\omega_0^2)\int_v \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_0\,dv=\int_S[\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A}_0)-\mathbf{A}_0\times(\nabla\times\mathbf{A})]\cdot\mathbf{n}\,dS. \qquad (15.161)$$

Пусть v — объем идеальной полости, а S — ее поверхность, к которой

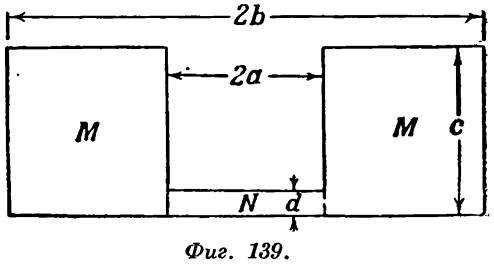
вектор $\mathbf{A}_0$ ортогонален. Тогда второй член в поверхностном интеграле равен нулю. Если отверстие мало, то $\omega \approx \omega_0$, $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ и $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_0$ в большей части объема V, так что

$$\omega_0 - \omega = \frac{\int \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}\, dS}{2j\omega_0^2 \mu\varepsilon \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}\, dv} = -\frac{j \int \mathbf{E}_t \times \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}\, dS}{4\mu W_m}, \qquad (15.162)$$

где W_m, $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{B}_0$ — соответственно мгновенные значения магнитной энергии в полости и тангенциальные компоненты действительного поля E и поля $\mathbf{B}_0$ в случае отсутствия отверстия. Часть поля $\mathbf{E}_t$, обусловленную полем $\mathbf{B}_0$, можно найти путем решения магнитостатической задачи о бесконечной плоскости (с нулевой магнитной проницаемостью), в которой проделано отверстие заданной формы и которая является границей поля $\mathbf{B}_0$, однородного и параллельного плоскости всюду, за исключением области вблизи отверстия, где имеются искажения. Из этой задачи определяется связь между нормальной составляющей $\mathbf{B}_n$ на отверстии и полем $\mathbf{B}_0$. Влияние отверстия можно полностью скомпенсировать, если закрыть его двойным слоем тока (см. § 20 гл. XIV), излучение которого в точности равно поглощению энергии в нем.

Поля $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{E}_t$, создаваемые этим двойным слоем тока, равны по величине, но противоположны по знаку соответствующим полям отверстия, а поле $\mathbf{B}_t$ дополняет поле отверстия до поля стоячей волны $\mathbf{B}_0$. Если отверстие прорезано в плоскости xy, а поле $\mathbf{B}_0$ направлено вдоль x, то $(E_t)_y$ можно найти путем интегрирования выражения (14.140), зная величину $\mathbf{B}_n$. В задаче 49 гл. XIV дана величина $\mathbf{B}_n$ для круглого отверстия в тонкой металлической стенке. Если в отсутствие отверстия электрическое поле, перпендикулярное к поверхности, было равно $\mathbf{E}_0$, то для определения составляющей $\mathbf{E}_t$ на отверстии, обусловленной наличием поля $\mathbf{E}_0$, необходимо найти решение электростатической задачи о плоской поверхности с отверстием, которая является границей поля $\mathbf{E}_0$, однородного вдали от отверстия. В § 28в гл. V рассматривается случай круглого отверстия в тонком экране. При определении добротности Q нужно к потерям в стенках добавить еще потери на излучение сквозь отверстие.

§ 23. Полые резонаторы сложной формы. Одним из наиболее важных видов полых резонаторов является сложный резонатор, состоящий из нескольких простых соединенных между собой полостей, границы которых только частично совпадают с координатными поверхностями. Как правило, в каждом таком отдельном случае требуется специальное решение задачи. Рассмотрим в качестве примера полость, представляющую собой прямой круглый цилиндр радиуса b и длины c, внутри которого с одной стороны вставлен другой, более короткий прямой круглый замкнутый цилиндр (радиуса a), коаксиальный с первым. Между основаниями цилиндров с другой стороны образуется при этом зазор с высотой, равной d. Полость такой формы (ее сечение показано на фиг. 139) нельзя отнести к категории уже рассмотренных нами полых резонаторов. Сначала мы укажем путь отыскания точного решения задачи по методу Хана [1]; затем приведем менее точное решение, справедливое в том важном для практики случае, когда d



Фиг. 139.

[1] Hahn, Journ. Appl Phys. 12, 62.

много меньше a, b или λ. И, наконец, в заключение нами будет рассмотрена грубая апроксимация, использующая аналогию с линией передачи. Будем интересоваться только полями в полости и наименьшей собственной частотой колебаний. Согласно § 16 и 18 гл. XV, компоненты векторов поля TM в областях M, удовлетворяющие граничному условию $E_t = 0$ при $\rho = b$, $z = 0$ и $z = c$ можно записать в виде

$$\check{E}_z = \check{C}_0 \frac{R_0(\beta_0 \rho)}{R_0(\beta_0 a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \check{C}_m \frac{R_0(\beta_m \rho)}{R_0(\beta_m a)} \cos \frac{m\pi z}{c}, \tag{15.163}$$

$$\check{B}_\rho = \frac{\beta_0^2}{j\omega} \left[\frac{\check{C}_0 R_0'(\beta_0 \rho)}{\beta_0 R_0(\beta_0 a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\check{C}_m R_0'(\beta_m \rho)}{\beta_m R_0(\beta_m a)} \cos \frac{m\pi z}{c} \right], \tag{15.164}$$

$$R_0(\beta_0 \rho) = J_0(\beta_0 b) Y_0(\beta_0 \rho) - Y_0(\beta_0 b) J_0(\beta_0 \rho), \tag{15.165}$$

$$R_0(\beta_m \rho) = I_0(\beta_m b) K_0(\beta_m \rho) - K_0(\beta_m b) I_0(\beta_m \rho),$$

$$\beta_m^2 = \beta_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{c^2}, \quad \beta_n^2 = \beta_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}, \quad \beta_0^2 = \beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}. \tag{15.166}$$

В области N поля, остающиеся конечными при $\rho = 0$ и удовлетворяющие условию $E = 0$ при $z = 0$ и $z = d$, равны

$$\check{E}_z' = \check{A}_0 \frac{J_0(\beta_0 \rho)}{J_0(\beta_0 a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \check{A}_n \frac{I_0(\beta_n \rho)}{I_0(\beta_n a)} \cos \frac{n\pi z}{d}, \tag{15.167}$$

$$\check{B}_\rho' = \frac{\beta_0^2}{j\omega} \left[\frac{\check{A}_0 J_0'(\beta_0 \rho)}{\beta_0 J_0(\beta_0 a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\check{A}_n I_0'(\beta_n \rho)}{\beta_n I_0(\beta_n a)} \cos \frac{n\pi z}{d} \right] \tag{15.168}$$

Приравнивая между собой $\check{B}_\varphi$ и $\check{B}_\rho'$ при $\rho = a$ и умножая обе части равенства на $\cos(p\pi z/d)\,dz$, а затем интегрируя в пределах от $z = -d$ до $z = d$, мы получим выражение для коэффициента $\check{A}_p$ через все коэффициенты $\check{C}_m$. Аналогично, полагая $\check{E}_z = \check{E}_z'$ при $0 \quad |z| < d$ и $\check{E}_z = 0$ при $d < |z| < c$, а затем умножая обе части равенства на $\cos(q\pi z/c)\,dz$ и интегрируя в пределах от $z = -c$ до $z = c$, мы найдем выражение для $\check{C}_q$ через все коэффициенты $\check{A}_n$. Исключая из этих уравнений коэффициенты $\check{A}_n$ и поделив на $\check{C}_0$, выразим величину $\check{C}_q/\check{C}_0$ через отношение $\check{C}_m/\check{C}_0$. Таких уравнений можно написать бесконечное число (по одному для каждого значения q), поэтому для определения $\check{C}_m/\check{C}_0$ нужно вычислить бесконечный детерминант. Подстановка этих значений $\check{C}_q/\check{C}_0$ в уравнение, соответствующее $q = 0$, приводит к следующему соотношению:

$$1 = \frac{J_0(\beta_0 a)}{J_0'(\beta_0 a)} \left[\check{C}_0 \frac{R_0'(\beta_0 a)}{R_0(\beta_0 a)} + \frac{\beta_0 c}{\pi d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m\beta_m} \frac{R_0'(\beta_m a)}{R_0(\beta_m a)} \sin \frac{m\pi d}{c} \right] \tag{15.169}$$

Наименьшая величина β_0, удовлетворяющая этому уравнению, определяет величину β_0, входящую в выражение (5.166). Амплитуду колебаний всегда можно выбрать такой, чтобы A_0 было равно единице.

Осуществление изложенного выше способа решения, очевидно, представляет собой основную трудность всей задачи. Таким образом, намеченный путь только теоретически дает точное решение, практически же он неприемлем, так как решение бесконечной системы уравнений требуют большой затраты времени. Однако для облегчения этой операции Хан

составил специальные таблицы. Если d много меньше, чем a, b и λ, то можно предложить другой метод, позволяющий найти λ с большей точностью, чем та, с которой обычно измеряются величины a, b и c. Кроме того, при помощи этого метода можно подсчитать и Q. В случае достаточно малых d тангенциальная составляющая электрического поля между M и N при $\rho = a$ не зависит от a и b, а определяется только размерами d и c и разностью потенциалов в зазоре. Взяв a и b бесконечно большими, мы придем к двухмерной задаче, решенной в § 14 гл. VI (в этом решении вместо d и c входят h и k). При $c \gg d$ задача еще более упрощается (на фиг. 63, *а* следует при этом убрать полосы при $x_1 = \pm 1$). Из § 14 гл. VI имеем

$$z = \frac{2d}{\pi}\left[(z_1^2 - 1)^{1/2} + \arcsin\frac{1}{z_1}\right] \tag{15.170}$$

$$E_x = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = \operatorname{Im}\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| = \operatorname{Im}\left|\frac{V_0}{d\,(z_1^2 - 1)^{1/2}}\right|, \tag{15.171}$$

где z и z_1 — комплексные переменные, а $2V_0$ — разность потенциалов на зазоре. Для определения E_x на оси x, как функции x, найдем такие комплексные значения величины z_1, которые соответствуют в выражении (15.170) значению $y = 0$. Подстановка этих значений в выражение (15.171) позволяет получить связь x и E_x. С точностью до $^1/_{5000}$ выражение для E_x будет иметь вид

$$E_x = V_0\, d^{-1}\left\{A + B\cos(\pi x\, d^{-1}) + C\,(x\, d^{-1})^2 + D\left[\sec\left(\frac{1}{2}\pi x\, d^{-1}\right)\right]^{0{,}355}\right\} \tag{15.172}$$

где $A = 0{,}34091$, $B = -0{,}00656$, $C = -0{,}07785$ и $D = 0{,}49910$. В результате интегрирования выражения (15.167) в пределах от $z = 0$ до $z = d$ при $\rho = a$ получим, что $V_0 = A_0$. Подставив эту величину V_0 в выражение (15.172) и заменив x на z, приравняем между собой выражения (15.172) и (15.163) при $-d < z < d$ и потребуем равенства нулю выражения (15.163) при $d < |z| < c$, а затем, умножив обе части равенства на $\cos(p\pi z/c)\,dz$, проинтегрируем в пределах от $z = -c$ до $z = c$. Решим теперь последнее уравнение относительно C_p и подставим найденные значения C_p в выражение (15.169), которое после этого методом подбора можно решить относительно β. Морено [1] приводит кривые для таких полостей. Очевидно, подстановка в выражения (15.164) и (15.168) значений A_n и C_m дает вектор магнитной индукции, и, следовательно, Q можно подсчитать по формуле (15.101).

Приближенное значение резонансной частоты можно найти, исходя из аналогии с линией передачи. При $d \ll c$ область полого резонатора M напоминает отрезок коаксиальной линии, коротко замкнутой в сечении $z = c$, входной импеданс которого, согласно соотношениям (10.112) и (15.51), равен $\frac{1}{2} j\beta\,(\pi\varepsilon\omega)^{-1} \operatorname{tg}\beta c$. Область N представляет собой конденсатор, шунтирующий линию и имеющий импеданс $(j\omega C_0)^{-1}$. При резонансе оба эти импеданса должны быть равны по величине и противоположны по знаку, поэтому приближенное значение β находится из соотношения

$$\beta \operatorname{tg}\beta c = \frac{2\pi\varepsilon}{C_0 \ln(b/a)}. \tag{15.173}$$

Мы можем только оценить C_0. Рассматривая область N как плоский конденсатор и пренебрегая краевым эффектом, мы определим нижнюю

[1] Moreno T., Microwave Transmission Design Data, McGraw-Hill, 1948.

границу величины емкости $C_0 \approx \varepsilon\pi a^2/d$. В частном случае, когда $d \ll a$, $d \ll c$ и $a \approx b$, величину C_0 можно найти довольно точно, как это, например, сделано в задаче 65.

§ 24. Возбуждение полого резонатора петлей с током. В наиболее общем случае колебания в полости представляют собой суперпозицию рассмотренных выше колебаний отдельных типов. При этом не только колебания каждого типа совершаются независимо, как в отдельных линейных контурах, но и отношение возбуждающего тока к эквивалентному току полости для колебаний какого-либо типа зависит только от геометрической конфигурации системы, как это имеет место и в случае линейных контуров с сосредоточенными параметрами. Кондон[1] для упрощения вычисления взаимной индукции предложил разбить вектор-потенциал, соответствующий i-му типу колебаний, на два множителя: C_i и $\mathbf{A}_i^0$. Первый, скалярный, множитель определяет зависимость от времени и интенсивность; величина его подбирается таким образом, чтобы интеграл по объему полости от квадрата второго, векторного, множителя был равен v. Векторы $\mathbf{A}_i^0$, зависящие только от геометрии системы, являются «нормированными» безразмерными вектор-потенциалами. Из § 13 следует, что они обладают свойством взаимной ортогональности, а из выражения (15.1), в котором нужно положить $\omega = \omega_i$, так что остается только член $\mathbf{A}_i^0$, видно, что они удовлетворяют следующему уравнению:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_i^0 = -\beta_i^2 \mathbf{A}_i^0. \tag{15.174}$$

Из соотношения (15.93) можно выразить C_i через эквивалентный ток резонатора I_i и, следовательно, записать A как функцию $\mathbf{A}_i^0$ и I_i:

$$\int_{\mathrm{v}} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i \, d\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v} I_i^2}{\omega_i^4 \varepsilon^2 S_c^2} = \frac{\mu^2 \mathrm{v} I_i^2}{\beta_i^4 S_c^2} = C_i^2 \int_{\mathrm{v}} \mathbf{A}_i^0 \cdot \mathbf{A}_i^0 \, d\mathrm{v} = \mathrm{v} C_i^2, \tag{15.175}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \mathbf{A}_i^0(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{S_c} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{I_i}{\beta_i^2} \mathbf{A}_i^0. \tag{15.176}$$

Задача заключается в определении входящих в это разложение коэффициентов через плотность возбуждающего тока $\mathbf{i}'(\mathbf{r}, t)$. При отсутствии зарядов дивергенция $\mathbf{i}'(\mathbf{r}, t)$ равна нулю, и поэтому плотность тока можно представить в виде ряда

$$\mathbf{i}'(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i(t) \mathbf{A}_i^0(\mathbf{r}). \tag{15.177}$$

Коэффициенты $D_i(t)$ находятся путем умножения соотношения (15.177) на $\mathbf{A}_p^0(\mathbf{r})\, d\mathrm{v}$ и интегрирования по объему v. Пусть полный возбуждающий ток I' течет по такому тонкому проводнику, что на его поперечном сечении вектор $\mathbf{A}_p$ можно считать постоянным. Тогда, обозначая через $\mathbf{ds}$ элемент длины провода, мы сведем интеграл, стоящий в левой части, к линейному интегралу вдоль s. В правой же части равенства все члены, кроме p-го, будут равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{v}} \mathbf{i}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}_p^0(\mathbf{r}) \, d\mathrm{v} &= I' \oint \mathbf{A}_p^0 \, \mathbf{ds} = \\ &= \frac{\beta_i^2 S_c I'}{\mu} \oint \frac{\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{ds}}{I_p} = \frac{\beta_i^2 S_c}{\mu} M_p I' = \mathrm{v} D_p. \end{aligned} \tag{15.178}$$

[1] Condon E. U., Rev. Mod. Phys., 14, No 4. [См. перевод: Усп. Физ. Наук, 27, 211 (1945).—*Прим. перев.*]

Заметим, что взаимная индукция M_p между колебанием p-го типа и проводом определяется совершенно так же, как в формуле (8.14), где $\mathbf{A}_p/I_p$ — вектор-потенциал, отнесенный к единичному току. Поскольку $\mathbf{A}$ и $\mathbf{i}'$ представлены в виде ряда по одной и той же полной системе ортогональных функций, то уравнения Максвелла (13.10), связывающие между собой выражения (15.176) и (15.177), можно применить к каждому из членов в отдельности. Таким образом, выражая $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ через $\mathbf{A}$ и учитывая, что $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, получим

$$\frac{\mu I_i}{S_{cp}^2}\nabla^2\mathbf{A}_i^0-\frac{\mu\varepsilon}{\beta_i^2 S_c}\frac{\partial^2 I_i}{dt^2}\mathbf{A}_i^0=-\mu D_i\mathbf{A}_i^0. \qquad (15.179)$$

Подстановка $\nabla^2\mathbf{A}_i^0$ и D_i из соотношений (15.174) и (15.178) и деление обеих частей на $\mathbf{A}_i^0$ приводят к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial t^2}+\omega_i^2 I_i=\frac{\beta_i^4 S_c^2 M_i}{\mu^2\varepsilon v}I'(t). \qquad (15.180)$$

Приведенное уравнение получено при предположении, что стенки резонатора являются идеально проводящими, и, следовательно, Q_i бесконечно велико. Чтобы учесть небольшое поглощение, которое обычно и имеет место на практике, необходимо добавить к левой части уравнения член вида $(\omega_i/Q_i)\,\partial I_i/\partial t$, заменить ω_i^{-2} на L_iC_i [значения L_iC_i определяются по формулам (15.96) и (15.97)] и ввести сопротивление R_i, определяемое соотношением (15.102). Таким образом, уравнение (15.180) примет вид

$$L_i\frac{\partial^2 I_i}{\partial t^2}+R_i\frac{\partial I_i}{\partial t}+\frac{I_i}{C_i}=\frac{M_i I'}{L_iC_i}=-\frac{M_i}{\omega^2 L_iC_i}\frac{\partial^2 I'}{\partial t^2} \qquad (15.181)$$

Поскольку I' является периодической функцией времени, меняющейся с круговой частотой ω, то колебание каждого типа будет подчиняться уравнению вынужденных колебаний осциллятора (10.3). Для определения амплитуды установившегося процесса нужно записать I_i в виде $|\check{I}_i|e^{j\omega t}$, а I'—в виде $|\check{I}'|e^{j\omega t}$, разделить уравнение на $e^{j\omega t}$ и решить его относительно $|\check{I}_i|$. Резонанс наступает приблизительно при $\omega=\omega_i$, так что

$$|\check{I}_i|=\frac{M_i|\check{I}'|}{L_i(1-\omega^2L_iC_i+j\omega R_iC_i)},\quad |\check{I}_i|_{\text{рез.}}=\frac{\omega_i M_i|I'|}{jR_i}=\frac{M_i|I'|Q_i}{jL_i}. \qquad (15.182)$$

При резонансе эквивалентный ток полости $|\check{I}_i|_{\text{рез.}}$ отстает от I' на фазовый угол 90°.

Суммарное магнитное поле в резонаторе определяется из векторного потенциала $\mathbf{A}$, равного сумме векторных потенциалов, описывающих колебания отдельных типов. Из соотношения (15.178) следует, что полное магнитное поле, пронизывающее петлю, равно $\sum M_iI_i$, т. е. члены, дающие отдельно самоиндукцию, здесь не выделены. Электродвижущая сила в петле, имеющей сопротивление R, равна

$$\check{\mathscr{E}}=RI'+\sum_{i=0}^{\infty}j\omega M_i\check{I}_i. \qquad (15.183)$$

Подставляя сюда из соотношения (15.182) выражение для $\check{I}_i$ через I', для импеданса петли получим

$$\check{Z}=\frac{\check{\mathscr{E}}}{I'}=R+\sum_i\frac{j\omega M_i^2}{L_i(1-\omega^2L_iC_i+j\omega R_iC_i)}=R+\sum_i\frac{j\omega\omega_i^2M_i^2}{L_i(\omega_i^2-\omega^2+j\omega\omega_i/Q_i)}. \qquad (15.184)$$

Так как Q_i обычно очень большая величина, то первые члены в знаменателе велики по сравнению с последними, за исключением значений $\omega \approx \omega_i$. Те колебания, для которых $\omega_i > \omega$, дают индуктивную часть реактивного сопротивления, а колебания, для которых $\omega_i < \omega$, — емкостную часть реактивного сопротивления. Эта формула позволяет качественно судить об изменениях реактивного сопротивления петли, возбуждающей резонатор. Если же несколько видоизменить выражение для M_i, то можно получить и количественные данные. Основная трудность определения M_i заключается в предположении о бесконечной тонкости провода, так как при этом вблизи него поле **B** бесконечно велико, а следовательно, и L также обращается в бесконечность. В действительности, если толщина провода значительно меньше длины волны, то поля в резонаторе будут такими же, как если бы возбуждающий ток был сконцентрирован на оси провода, а поверхность последнего совпадала бы с границей силовой трубки индукции. Правильное значение потока сцепления можно, следовательно, найти путем интегрирования **A** от одного конца петли до другого вдоль любой из кривых, лежащих на поверхности провода. Соответственно необходимо видоизменить и определение M_p, данное в соотношении (15.178). Заметим, что путь интегрирования в выражении (15.178) можно замкнуть, возвратившись в начальную точку на границе полости, что никак не скажется на величине M_p, так как вектор **A** перпендикулярен к границе. Этот интеграл будет равен, очевидно, поверхностному интегралу от **B** по площади петли.

§ 25. Возбуждение круглого цилиндрического резонатора петлей с током. Развитую теорию можно пояснить на примере полого резонатора, имеющего форму круглого цилиндра. Пусть возбуждение происходит на наинизшей собственной частоте, которая соответствует колебаниям типа TE_{11} (см. фиг. 135) и для которой $\beta_{11}a = 1{,}84$. Согласно соотношению (15.127),

$$\nu_{11} = \frac{v}{2}\left(\frac{\beta_{11}^2}{\pi^2} + \frac{1}{d^2}\right)^{1/2} = 1{,}5 \cdot 10^8 \left(\frac{0{,}343}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right)^{1/2} \qquad (15.185)$$

Из соотношения (15.129) находим, что амплитуда вектора магнитной индукции пропорциональна величине

$$\frac{\pi}{d}\left[\rho_1 \beta J_1'(\beta\rho)\cos\varphi - \varphi \frac{J_1(\beta\rho)}{\rho}\sin\varphi\right]\cos\frac{\pi z}{d} + k\beta^2 J_1(\beta\rho)\cos\varphi \sin\frac{\pi z}{d}, \qquad (15.186)$$

где заменили β_{11} на β. Для возбуждения этого типа колебаний необходимо ввести сквозь стенку внутрь резонатора маленькую петлю. Из выражения (15.186) с очевидностью следует, что поток индукции сквозь такую петлю в поле TE_{11} будет максимальным (а следовательно, будет максимальной и связь петли с резонатором), если петлю поместить вблизи плоских стенок резонатора в центре (перпендикулярно к линиям B_ρ), или на краю (перпендикулярно к линиям B_φ), или же если поместить петлю вблизи боковых цилиндрических поверхностей в центре (перпендикулярно к линиям B_z), или около основания (перпендикулярно к линиям B_φ). Отношение потоков в направлении z при $\rho \approx a$, $\varphi = 0$, $z \approx \frac{1}{2} d$ и в направлении ρ при $\rho \approx 0$, $\varphi = 0$, $z \approx 0$ равно

$$\frac{M_z}{M_\rho} = \frac{|B_z|_{\max}}{|B_\rho|_{\max}} = \frac{\beta d J_1(\beta a)}{\pi J_1'(0)} = \frac{0{,}682\, d}{a} \qquad (15.187)$$

Таким образом, при $0{,}682\, d > a$ максимальная связь петли, имеющей заданные размеры, с полостью осуществляется вблизи боковой поверхности

цилиндра на середине расстояния между его основаниями. Предположим, что маленькая петля площади S расположена в плоскости $z=\frac{1}{2}d$ ($\varphi=0$) настолько близко от стенки, что значение B_z на протяжении всей петли можно считать равным значению B_z на поверхности стенки. Чтобы убедиться в этом, заметим, что при $\rho=0{,}95a$, $J_1(\beta\rho)=0{,}997J_1(\beta a)$. Коэффициент взаимной индукции равен пронизывающему петлю потоку индукции, обусловленному единичным эквивалентным током полости, т. е., в соответствии с выражениями (15.129) и (15.132),

$$M=\frac{|B_z|S}{I_i}=\frac{2\beta_{11}^2 S}{\beta_{111}^2 d\left[\frac{1}{2}\pi(\beta_{11}^2 a-1)\right]^{1/2}}=\frac{1{,}3\cdot 10^{-6}Sd}{d^2+2{,}92a^2}. \qquad (15.188)$$

Из соотношений (15.134) и (15.184) для резонатора с медными стенками ($\gamma=5{,}7\cdot 10^7$) добротность Q и дополнительное сопротивление петли при резонансе определяются следующим образом:

$$Q=\frac{9{,}92\,(ad)^{1/2}(d^2+2{,}92a^2)^{5/4}}{4{,}11a^3+0{,}86a^2d+d^3}\cdot 10^4, \qquad R'=\frac{1253S^2Q}{a^3(d^2+2{,}92a^2)^{1/2}} \qquad (15.189)$$

Максимальная разность потенциалов в полости имеет место вдоль линии $z=\frac{1}{2}d$ и $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Поэтому из соотношения (15.128), полагая $m=p=1$ и используя формулу (5.314), имеем

$$V=2\omega C\int_0^a\frac{J_1(\beta\rho)}{\rho}d\rho=\omega C\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{4^r r!\,(r+1)!}\int_0^{1{,}84}v^{2r}\,dv=$$
$$=1{,}60\omega C=582aI_1(d^2+2{,}92a^2)^{-1/2}. \qquad (15.190)$$

Из соотношений (15.185), (15.188), (15.190) и (15.183) можно найти коэффициент усиления по напряжению, а из соотношений (15.188), (15.189) и (15.183) эквивалентный ток полого резонатора

$$\left|\frac{V}{\mathscr{E}}\right|=\frac{V}{\omega MI}=\frac{0{,}812a^2}{S}, \qquad |I|=\frac{|R'|\,|I'|}{\omega M_1}=\frac{1{,}748\,SQ}{a^2}|I'|. \qquad (15.191)$$

Входящая сюда величина $\mathscr{E}$ является той частью электродвижущей силы в петле, которая совпадает по фазе с I'

Представляет интерес привести некоторые числовые величины. Пусть площадь петли $S=1$ *см*^{2}, радиус цилиндрической полости $a=10$ *см*, а длина $d=20$ *см*. В качестве заполняющей полость среды возьмем вакуум. Тогда

$$\omega\approx 7{,}25\cdot 10^9\ \textit{радиан/сек.},\quad \nu\approx 1{,}15\cdot 10^9\ \textit{гц},\quad \lambda\approx 26{,}0\ \textit{см},$$
$$M\approx 3{,}76\cdot 10^{-10}\ \textit{гн},\quad Q\approx 36\,000,\quad R'=1\,715\ \textit{ом}.$$

Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции полости, согласно соотношениям (15.96) и (15.97), равны

$$L_{11}=2{,}15\cdot 10^{-8}\ \textit{гн},\quad C_{11}=8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{фарад}.$$

Если пиковое значение электродвижущей силы, совпадающей по фазе с I', равно 1 000 *в*, то $\mathscr{E}_0\approx 1\,000$ *в*, $I_0'=0{,}583$ *а*, $V_{\max}=81\,200$ *в*, $I_0=367$ *а* и $P=292$ *вт*. Расчеты некоторых других способов возбуждения отнесены в задачи, помещенные в конце главы.

§ 26. Возбуждение полого резонатора при помощи электрода. Если полый резонатор возбуждается неравномерно распределенным током, как

это имеет место в случае электрода, введенного в полость, то дивергенция плотности тока $\mathbf{i}$ отлична от нуля, и, следовательно, в резонаторе присутствует электрический заряд, плотность которого мы обозначим через σ. В таких случаях, как было показано в § 2 гл. XIV, поля можно описать при помощи суммы соленоидального вектор-потенциала и скалярного потенциала, удовлетворяющего уравнению Пуассона. Коэффициенты взаимной индукции для каждого типа колебаний попрежнему определяются формулой (15.178), потому что, как было доказано при помощи соотношения (15.92), наличие потенциальной части у $\mathbf{i}$ не вносит никаких изменений ни в объемный интеграл, ни в значение эквивалентного тока полости. Поле, описываемое скалярным потенциалом, приводит к появлению дополнительной электрической энергии, меняющейся в фазе с зарядом на электроде, т. е. к появлению дополнительного реактивного сопротивления чисто емкостного характера. Здесь возникает трудность, подобная той, которая имеет место в антенных задачах, а именно — каким образом определить распределение зарядов и токов на электроде. Если электрод очень тонкий, то емкость его ничтожна, а коэффициент самоиндукции почти полностью определяется его радиусом[1]), так что, следуя результатам § 4 гл. XIV, мы получим синусоидальное распределение, описываемое выражением (14.27). С увеличением радиуса реактивное сопротивление полости начинает сказываться относительно сильнее и распределение тока меняется. Почти точные результаты получаются в том случае, когда резонатор возбуждается при помощи тонкой проволоки, имеющей на конце металлический электрод. Тогда можно считать, что ток в тонком проводе распределен равномерно и что заряд полностью сосредоточен на электроде и его можно определить методами электростатики. При этом формулы (15.174) — (15.182) § 24 остаются без изменений, а к выражению (15.183) нужно будет только добавить q'/C_0, где $I' = j\omega q'$, а C_0 — емкость электрода:

$$\check{Z} = R - \frac{j}{\omega C_0} + \sum_i \frac{j\omega\omega_i^2 M_i^2}{L_i(\omega_i^2 - \omega^2 + j\omega\omega_i/Q_i)}. \qquad (15.192)$$

При $\omega = \omega_i$ из-за наличия C_0 импеданс $\check{Z}$ уже не будет действительной величиной, но если $\omega \approx \omega_i$, то существенное значение будет иметь только i-й член суммы, поэтому, приравнивая реактивное сопротивление нулю, получаем

$$Q_i^2 L_i(\omega_i^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_i^2 Q_i^2 M_i^2 C_0(\omega_i^2 - \omega^2) + \omega^2\omega_i^2 L_i = 0. \qquad (15.193)$$

Часто коэффициент при $\omega_i^2 - \omega^2$ значительно больше коэффициента при $(\omega_i^2 - \omega^2)^2$, поэтому, удерживая только два последних члена и считая $\omega + \omega_i = 2\omega_i$, получим

$$\frac{\omega_i - \omega}{\omega_i} = \frac{L_i}{2\omega_i^2 M_i^2 C_0 Q_i^2} = \frac{1}{2\omega_i R' C_0 Q_i}. \qquad (15.194)$$

В качестве примера рассмотрим шар радиуса r, центр которого находится на расстоянии l от стенки. Шар поддерживается при помощи тонкой проволоки. Пусть вся эта система предназначается для возбуждения колебания типа TE_{11}, рассмотренного в предыдущем параграфе. Как видно из соотношения (15.92), максимальная связь резонатора с проводом будет осуществляться при помещении последнего вдоль максимальной составляющей вектор-потенциала. Наилучшим таким положением будет

---

[1]) Коэффициент самоиндукции почти полностью определяется радиусом и длиной электрода.—*Прим. перев.*

$z=\frac{1}{2}d$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ [см. соотношение (15.128)]. Как и при вычислении выражения (15.188), для небольших расстояний от границы можно заменить $J_1(k\rho)$ на $J_1(ka)$. Таким образом, формулы (15.128), (15.132) и (15.178) приводят к следующему соотношению:

$$M_i=\int_{a-l}^{a}\frac{A_\rho\cdot ds}{I_i}=\frac{2\mu\int\rho^{-1}d\rho}{\beta_{11}^2 d\left[\frac{1}{2}\pi(\beta_{11}^2a^2-1)\right]^{1/2}}=\frac{3{,}84\cdot10^{-7}a^2d}{d^2+2{,}92a^2}\ln\frac{a}{a-l}. \quad (15.195)$$

Согласно выражению (15.184), дополнительное активное сопротивление контура связи равно

$$R'=109{,}2\,aQ(d^2+2{,}92a^2)^{-1/2}\{\ln[a(a-l)^{-1}]\}^2. \quad (15.196)$$

Если шар очень мал и находится вблизи стенки, то входящая в выражение (15.192) емкость C_0 приблизительно равна емкости между шаром и плоскостью, которую на основании соотношения (5.45) можно представить в виде

$$C_0=4\pi\varepsilon[r+r^2(2l)^{-1}+r^3(4l^2-r^2)^{-1}+\ldots]. \quad (15.197)$$

При любом разумном выборе соответствующих величин условия применимости уравнения (15.194) выполняются очень хорошо, так что ω очень близка к ω_1. Из соотношений (15.192), (15.190) и (15.182) отношение максимальной разности потенциалов в полости и разности потенциалов вдоль провода, обусловленной наличием R' и C_0, а также величина эквивалентного тока полости равны

$$\frac{V}{\mathscr{E}}=\frac{1{,}664\cdot10^{11}C_0Q}{d(1+\omega^2R'^2C_0^2)}\ln\frac{a}{a-l}, \qquad I=0{,}517\,QI'\ln\frac{a}{a-l}. \quad (15.198)$$

При подсчете $\mathscr{E}$ не учтено реактивное сопротивление, соответствующее колебаниям высших типов. Если же им пренебрегать нельзя, то его можно найти по формуле (15.192). Рассмотрим колебания того же типа, что и в предыдущем параграфе, предполагая значения ω, ν, λ, Q, L_i и C_i равными приведенным там, а l и r положим равными соответственно 1 *см* и 1 *мм*:

$$C_0\approx1{,}17\ \ 10^{-13}\ \textit{фарад}, \qquad M\approx3{,}08\cdot10^{-10}\ \textit{гн},$$

$$R'\approx16\,560\ \textit{ом}, \qquad \frac{\omega_i-\omega}{\omega_i}=0{,}99\cdot10^{-6}.$$

При пиковом напряжении на штыре, равном 1 000 *в*, пренебрегая влиянием высших типов колебаний, получаем

$$V_{\max}\approx27\,100\ \textit{в}, \qquad I_0'\approx0{,}0604\ \textit{а},$$

$$I_0\approx118{,}4\ \textit{а}, \qquad \overline{P}\approx30{,}2\ \textit{вт}.$$

§ 27. Возбуждение полого резонатора через отверстие. Если полый резонатор соединен через отверстие в его стенке с волноводом, то для получения строгого решения необходимо согласовать значения вектор-потенциала на отверстии. Поскольку выражение для вектор-потенциала с обеих сторон от отверстия имеет вид бесконечных рядов, то эта задача аналогична задаче, решенной в § 23 при помощи метода Хана. Часто, однако, можно получить хорошее приближение, задаваясь распределением поля на отверстии, подобным приведенному в § 10. Среди приводимых ниже задач можно найти примеры таких решений.

ЗАДАЧИ

1. При данной частоте движение электромагнитного возмущения вдоль волновода можно представить себе как перемещение серии одинаковых волновых ячеек со скоростью, равной фазовой скорости волны. Вследствие того, что $\Pi \cdot \nabla \times \Pi = 0$, каждая из этих ячеек содержит замкнутые волновые поверхности, обладающие тем свойством, что в любой точке E и B направлены по касательной к ним. Для волн TE можно при помощи таких поверхностей разбить каждую ячейку на трубки магнитной индукции одинаковой величины. Показать, что для волн TE_{m0}, описанных в § 3, уравнение волновых поверхностей в ячейке с центром в $z=0$ при $t=0$ имеет вид

$$C = \cos \beta'_{m0}\, z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right),$$

где C — часть полного потока магнитной индукции, приходящаяся на площадку, расположенную между силовой трубкой, проходящей через x, z, и стенкой ячейки. Показать, что эти поверхности являются гиперболическими вблизи углов ячейки и эллиптическими около центра ячейки.

2. Показать, что уравнение волновых поверхностей для волн TE в прямоугольном волноводе имеет вид

$$C = [E - K\cos^2(m\pi x a^{-1})\cos^2(n\pi y b^{-1})]\cos\beta'_{mn}\, z,$$

где C — часть полного потока магнитной индукции в волновой ячейке, приходящаяся на площадку, расположенную между волновой поверхностью, проходящей через точку x, y, z, и границей ячейки, а E и K — полные эллиптические интегралы модуля

$$[1 - \cos^2(m\pi x a^{-1})\cos^2(n\pi y b^{-1})]^{1/2}.$$

3. Показать, что уравнение волновой поверхности волны TM в прямоугольном волноводе имеет вид

$$C = [E - K\sin^2(m\pi x a^{-1})\sin^2(n\pi y b^{-1})]\sin\beta'_{mn}\, z,$$

где C — та часть полного потока вектора E, которая находится внутри волновой поверхности, проходящей через точку x, y, z, и E и K — полные эллиптические интегралы модуля

$$[1 - \sin^2(m\pi x a^{-1})\sin^2(n\pi y b^{-1})]^{1/2}.$$

4. Волновые ячейки для аксиально-симметричных волн в круглом цилиндрическом волноводе имеют, вообще говоря, форму колец. Для волн TE первая r-я ячейка ограничена поверхностями $\rho=\rho_r$, $\rho=\rho_{r+1}$ и $z=\pm\frac{1}{4}\lambda_n$, где r — целое число, $0 \leqslant r < n$; $J_1(\beta_{0n}\rho_r) = J_1(\beta_{0n}\rho_{r+1}) = 0$. Показать, что волновые поверхности в ячейке совпадают с вихревыми кольцами магнитного поля

$$C = \rho J_1(\beta_{0n}\rho)\,[\rho_M J_1(\beta_{0n}\rho_M)]^{-1}\cos\beta'_{0n}\, z,$$

где $J_0(\beta_{0n}\rho_M) = 0$, $\rho_r < \rho_M < \rho_{r+1}$ и C — часть потока магнитной индукции в r-м кольце, проходящем между ρ_r и ρ, z. Сделать эскиз.

5. В цилиндрическом круглом волноводе аксиально-симметричные волны TM образуют кольцеобразные ячейки, включая и половинную ячейку, граничащую со стенками волновода, причем для r-й ячейки $\rho_r < \rho < \rho_{r+1}$ и $0 < z < \frac{1}{2}\lambda$, где r — целое число. $0 \leqslant r < n$; $J_1(\beta_{0n}\rho_r) = J_1(\beta_{0n}\rho_{r+1}) = 0$. Показать, что волновые поверхности, за исключением ближайшей к стенке волновода, представляют собой вихревые кольца электрического поля

$$C = \rho J_1(\beta_{0n}\rho)\,[\rho_M J_1(\beta_{0n}\rho_M)]^{-1}\sin\beta'_{0n}\, z,$$

где $J_0(\beta_{0n}\rho_M) = 0$, $\rho_r < \rho_M < \rho_{r+1}$, а C — часть полного потока вектора E в r-й ячейке, приходящаяся на площадку между ρ и ρ_r. Для половинной ячейки, граничащей со стенками, $\rho_M = a$.

6. Исходя из выражения (15.7) и из результатов § 16 гл. XIII, показать, что если проводимость диэлектрической среды, заполняющей волновод, равна γ, то волновое число и коэффициент затуханий можно записать соответственно в виде

$$\beta' = 2^{-1/2}\{[(\beta^2 - \beta_m^2)^2 + \omega^2\mu^2\gamma^2]^{1/2} + \beta^2 - \beta_m^2\}^{1/2},$$

$$\alpha' = 2^{-1/2}\{[(\beta^2 - \beta_m^2)^2 + \omega^2\mu^2\gamma^2]^{1/2} - \beta^2 + \beta_m^2\}^{1/2}.$$

Эти формулы одинаково справедливы для частот ниже и выше критической.

7. Показать, что если в волноводе отношение проводимости к диэлектрической проницаемости мало по сравнению с разностью между частотой сигнала ν, распространяющегося в виде волны m-го типа, и критической частотой ν_m, то коэффициент затухания α' и фазовая скорость v_m' приближенно равны

$$\alpha' \approx \frac{1}{2}\mu\gamma\left[1-\left(\frac{\nu_m}{\nu}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad v_m' \approx v_m\left[1-\frac{1}{8}\left(\mu\gamma\frac{v_m^2}{\omega}\right)^2\right]$$

где v — скорость распространения волны в свободном пространстве, а v_m — фазовая скорость при равной нулю проводимости.

8. Между двумя параллельными идеально проводящими поверхностями расположен, перпендикулярно к их поверхности, идеально проводящий цилиндр $\rho = a$, вдоль которого течет равномерно распределенный по нему ток $I\cos\omega t$. Показать, что комплексная амплитуда вектор-потенциала, описывающего электромагнитное поле между плоскостями снаружи цилиндра, равна

$$\check{A}_z = \frac{\mu I\,[J_0(\beta\rho) - jY_0(\beta\rho)]}{2\pi a\beta\,[J_1(\beta a) - jY_1(\beta a)]},$$

где $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ и, согласно выражению (5.316), при βa, стремящемся к нулю, $Y_1(\beta a) \to$ $\to 2/(\pi\beta a)$. Заметим, что, согласно таблицам Янке и Эмде, при $a < 0{,}0181\,\lambda$

$$[J_1(\beta a)] < 0{,}01\,[Y_1(\beta a)].$$

9. Показать, что в предыдущей задаче активная и реактивная части входного импеданса цилиндрического провода соответственно равны

$$R_i = \frac{\mu^{1/2} l}{\pi^2\beta a^2 M\varepsilon^{1/2}}, \qquad X_i = \frac{\mu^{1/2} l\,[J_0(\beta a)\,J_1(\beta a) + Y_0(\beta a)\,Y_1(\beta a)]}{2\pi a M\varepsilon^{1/2}},$$

где $M = [J_1(\beta a)]^2 + [Y_1(\beta a)]^2$, а l — расстояние между плоскостями.

10. Пусть плоскости, рассмотренные в задаче 8, соединены между собой идеально проводящим цилиндром $\rho = b$. Показать, что комплексная амплитуда вектор-потенциала между плоскостями равна

$$\check{A}_z = \frac{\mu I\,[Y_0(\beta b)\,J_0(\beta\rho) - J_0(\beta b)\,Y_0(\beta\rho)]}{2\pi a\beta\,[J_0(\beta b)\,Y_1(\beta a) - Y_0(\beta b)\,J_1(\beta a)]}.$$

Вычислить входное реактивное сопротивление.

11. Электромагнитная волна распространяется в радиальном направлении между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными к оси z. Пользуясь выражениями (14.128), (14.130), (14.131), показать, что если электрическое поле этой волны имеет только z-составляющую и не зависит от координаты φ и если $\check{E}_z/\check{H}_\varphi = \check{Z}_a$ при $\rho = a$, то при $\rho = b$ это отношение равно

$$\left|\frac{\check{E}_z}{\check{H}_\varphi}\right|_b \equiv \check{Z}_b = \frac{\mu v\,[J_0(\beta a)\,Y_0(\beta b) - J_0(\beta b)\,Y_0(\beta a)] + j\check{Z}_a\,[J_1(\beta a)\,Y_0(\beta b) \quad J_0(\beta b)\,Y_1(\beta a)]}{\varepsilon v\check{Z}_a\,[J_1(\beta a)\,Y_1(\beta b) - J_1(\beta b)\,Y_1(\beta a)] + j\,[J_0(\beta a)\,Y_1(\beta b) \quad J_1(\beta b)\,Y_0(\beta a)]}$$

12. В круглом волноводе радиуса b при $\nu > \nu_{01}$ распространяется волна типа TM_{01} (см. фиг. 135). Чтобы электромагнитная волна могла пройти через участок волновода, имеющий кольцевой зазор (кольцевую щель) в боковой поверхности, необходимо, чтобы в зазоре существовало отличное от нуля электрическое поле. Исходя из результатов предыдущей задачи, показать, что на некоторой частоте $\nu_c > \nu_{01}$ можно добиться полного отражения волны от щели, если прикрыть щель сверху цилиндрической, коаксиальной с волноводом коробкой, плоские основания которой совпадают с краями щели, а радиус определяется из соотношения

$$J_1[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c b]\,Y_0[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c a] = J_0[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c a]\,Y_1[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c b].$$

13. Предположим, что два участка внешней оболочки коаксиального волновода радиуса b необходимо изолировать друг от друга по постоянному току. Исходя из задачи 11, показать, что это можно осуществить без нарушения условий распространения волны с частотой ν_c, если между этими участками оставить небольшой зазор, к каждому краю которого присоединить по коаксиальному с волноводом плоскому параллельному фланцу, имеющему радиус a, определяемый из соотношения

$$J_0[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c b]\,Y_1[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c a] = J_1[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c a]\,Y_0[2\pi(\mu\varepsilon)^{1/2}\nu_c b].$$

При решении считать, что на краях фланца имеется узел магнитного поля или тока.

14. Пусть в предыдущей задаче I — ток в коаксиальной линии, t — ширина зазора, а $(\mu\varepsilon)^{1/2}=v$. Показать, что разность потенциалов на внешних краях флянца равна

$$V_0=\frac{It}{\pi^2\omega\varepsilon ab\,[J_1(\omega a/v)\,Y_1(\omega b/v)-J_1(\omega b/v)\,Y_1(\omega a/v)]}.$$

15. Секториальный рупор, образованный плоскостями $z=0$, $z=b$ и $\varphi=0$, $\varphi=\alpha'$, возбуждается током $\mathbf{k}I\cos\omega t$, равномерно распределенным вдоль тонкого провода $\rho=c$, $\varphi=\alpha$. В бесконечности ($\rho=\infty$) волна полностью поглощается. Найти, пользуясь соотношениями (14.128) и (14.130), подходящий для этого случая вид записи вектор-потенциалов: A'_z при $\rho<c$ и A_z при $\rho>c$. Показать, приравнивая A'_z и A_z при $\rho=c$ и интегрируя разность $B_\varphi-B'_\varphi$ по поверхности $\rho=c$, а затем применяя закон о циркуляции вектора B [см. выражение (7.173)], что $\check{A}'_z$ и $\check{A}_z$ можно представить в виде следующих рядов Фурье:

при $0<\rho<c$

$$\check{A}'_z=\frac{\pi\mu I}{j\alpha'}\sum_{m=1}^{\infty}[J_{m\pi/\alpha'}(\beta c)-jY_{m\pi/\alpha'}(\beta c)]\,J_{m\pi/\alpha'}(\beta\rho)\sin\frac{m\pi\alpha}{\alpha'}\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha'},$$

при $c<\rho<\infty$

$$\check{A}_z=\frac{\pi\mu I}{j\alpha'}\sum_{m=1}^{\infty}[J_{m\pi/\alpha'}(\beta\rho)-jY_{m\pi/\alpha'}(\beta\rho)]\,J_{m\pi/\alpha'}(\beta c)\sin\frac{m\pi\alpha}{\alpha'}\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha'}.$$

16. Используя предыдущую формулу, проинтегрировать вектор Умова — Пойнтинга [см. выражение (13.146)] по сечению рупора при больших ρ и показать, что сопротивление излучения равно

$$R_r=\frac{\omega\mu\pi b}{\alpha'}\sum_{m=1}^{\infty}[J_{m\pi/\alpha'}(\beta c)]^2\sin^2\frac{m\pi\alpha}{\alpha'}.$$

17. Пусть угол раствора рупора, рассмотренного в задаче 15, $\alpha'=\pi/n$, где n — целое число, а радиус провода равен a. Считая $a\ll ac$ и $a\ll[(\pi/n)-\alpha]\,c$, показать, что граничные условия будут удовлетворены суперпозицией полей типа описанных в задаче 8, если воспользоваться методом изображения (см. фиг. 28). Показать также, что при полном поглощении волны на бесконечности ($\rho=\infty$) входной импеданс при $a\ll\lambda$ приблизительно равен

$$R+\frac{\omega\mu b}{4}\left\{1-\frac{2j}{\pi}\ln\beta a+\sum_{s=1}^{n-1}\left[J_0\left(2\beta c\sin\frac{s\pi}{n}\right)-jY_0\left(2\beta c\sin\frac{s\pi}{n}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=0}^{n-1}\left[J_0\left(2\beta c\sin\frac{(s+1)\pi-n\alpha}{n}\right)-jY_0\left(2\beta c\sin\frac{(s+1)\pi-n\alpha}{n}\right)\right]\right\},$$

где R — активное сопротивление провода. Обычно сумма членов, содержащих Y_0, ничтожно мала по сравнению с логарифмическим членом.

18. Показать, что электромагнитная волна, имеющая в z-направлении n максимумов электрического поля, может распространяться в радиальном направлении внутри рупора, ограниченного идеально проводящими плоскостями $z=0$, $z=b$, $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ при условии

$$\nu>\frac{1}{2}n\,(\mu\varepsilon)^{-1/2}b^{-1}.$$

19. В круглой проволочной петле $\rho=c$, лежащей в плоскости $z=d$ между двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями $z=0$ и $z=a$, течет равномерно распределенный по проводу ток $\varphi Ie^{j\omega t}$. Показать (см. § 18 гл. XIV), что при $\lambda>2a$ энергия между плоскостями не распространяется, а вектор-потенциал, описывающий поле в области $\rho>c$, в этом случае имеет вид

$$\check{A}_\varphi=\frac{2c\mu I}{a}\sum_{n=1}^{\infty}I_1(\beta_n c)\,K_1(\beta_n\rho)\sin\frac{n\pi d}{a}\sin\frac{n\pi z}{a},\quad\text{где}\quad\beta_n=\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2-1\right]^{1/2}.$$

20. Если в предыдущей задаче $a < \lambda < 2a$, то между плоскостями будет распространяться волна одного типа. Показать, что тогда в области $\rho > c$ комплексная амплитуда вектор-потенциала имеет вид

$$-\frac{jc\mu I}{a}\left\{\pi H_n^{(2)}(\beta_1\rho)\,J_1(\beta_1 c)\sin\frac{\pi d}{a}\sin\frac{\pi z}{a}+2j\sum_{n=2}^{\infty}K_1(\beta_n\rho)\,I_1(\beta_n c)\sin\frac{n\pi d}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}\right\},$$

где $H_n^{(2)}(\beta_1\rho)$ — функция Ханкеля [см. соотношение (5.321)],

$$\beta_1=(2\pi/\lambda)\left[1-\left(\frac{1}{2}\lambda/a\right)^2\right]^{1/2},\quad \beta_n=(2\pi/\lambda)\left[\left(\frac{1}{2}n\lambda/a\right)^2-1\right]^{1/2}.$$

21. Секториальный рупор, ограниченный плоскостями $z=0$, $z=a$ и $\varphi=0$, $\varphi=\alpha$, возбуждается при помощи тонкой изогнутой проволоки $\rho=c$, $z=d$, вдоль которой течет равномерно распределенный ток $\varphi I\cos\omega t$. Показать, что если $a<\lambda<2a$ и радиус провода r значительно меньше c, то из задачи 20 при условии полного поглощения излучения в бесконечности ($\rho=\infty$) следует

$$R_r=\frac{\pi\omega a c^2\mu}{a}\left[J_1(\beta_1 c)\sin\frac{\pi d}{a}\right]^2$$

$$X_r=\frac{2\omega a c^2\mu}{a}\left\{-\left[\frac{1}{2}\pi J_1(\beta_1 c)\,Y_1(\beta_1 c)+\frac{a}{2\pi c}\right]\sin^2\frac{\pi d}{a}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\left[K_1(\beta_n c)\,I_1(\beta_n c)-\frac{a}{2\pi n c}\right]\sin^2\frac{n\pi d}{a}+\frac{a}{4\pi c}\left[\ln\sin\frac{\pi d}{a}+\ln\frac{2a}{\pi r}\right]\right\}$$

Написанные выше ряды сходятся очень быстро.

22. Показать, что если в предыдущей задаче $\lambda=1{,}5a$, $c=a$, $\alpha=18°$, $d=a/2$, то реактивное сопротивление будет равно нулю при радиусе провода $0{,}0114\,a$, а сопротивление излучения при этом будет равно 274,5 *ом*.

23. Прямоугольный волновод возбуждается при помощи петли, находящейся в плоскости $x=d$. Показать, применяя метод изображений, что все компоненты вектор-потенциала параллельны этой плоскости, и, следовательно, волны, возбуждаемые петлей, можно найти, исходя из результатов § 1 гл. XV, т. е.

$$\check{W}=\check{C}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{-j\beta'_{mn}z},\qquad \check{\mathbf{A}}=\nabla\times\mathbf{i}\check{W},$$

$$\check{\mathbf{E}}=-\omega\check{C}_{mn}\left(\mathbf{j}\beta'_{mn}\cos\frac{n\pi y}{b}+\mathbf{k}j\frac{n\pi}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\,e^{-j\beta'_{mn}z},$$

$$\check{\mathbf{B}}=\check{C}_{mn}\left\{\mathbf{i}\left[\beta^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}-\frac{m\pi}{a}\left[\mathbf{j}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathbf{k}j\beta'_{mn}\cos\frac{n\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\}e^{-j\beta'_{mn}z},$$

где $(\beta'_{mn})^2=\beta^2-\beta_{mn}^2$. Заметим, что эти волны представляют собой комбинацию волн типа *TE* и *TM*.

24. Прямоугольный волновод возбуждается при помощи штыря, ток в котором направлен вдоль оси y. Показать, пользуясь методом изображений, что $\mathbf{B}\cdot\mathbf{j}=0$ и, следовательно, волны, возбуждаемые штырем, согласно § 1 гл. XV, должны описываться следующими выражениями:

$$\check{W}=-\check{C}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{-j\beta'_{mn}z},\qquad \check{\mathbf{A}}=\nabla\times(\mathbf{j}\times\nabla\check{W}),$$

$$\check{\mathbf{E}}=\omega\check{C}_{mn}\left[\mathbf{i}\frac{jmn\pi^2}{ab}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}-\mathbf{j}j\left(\beta^2-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\frac{\beta'_{mn}n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]e^{-j\beta'_{mn}z},$$

$$\check{\mathbf{B}}=\beta^2\check{C}_{mn}\left[\mathbf{i}j\beta'_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}+\mathbf{k}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{-j\beta'_{mn}z},$$

где $(\beta'_{mn})^2=\omega^2\mu\varepsilon-(m\pi/a)^2-(n\pi/b)^2=\beta^2-\beta_{mn}^2$.

25. Пользуясь методом, приведенным в § 8 гл. XV, показать, что вектор-потенциал, описывающий поле элемента тока $\mathbf{k}\check{I}\,dz_0 e^{j\omega t}$, расположенного в точке x_0, y_0, z_0 в прямоугольном волноводе, при $z > z_0$ имеет вид

$$\check{A}_{tm} = -\frac{2\check{I}\,dz_0}{\omega^2\varepsilon ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\left(\mathbf{i}\,\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{j}\,\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}+\mathbf{k}\,\frac{j\beta'^2_{mn}}{\beta'_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta'_{mn}(z-z_0)}$$

26. Исходя из задачи 24, показать, что вектор-потенциал, описывающий поле элемента тока $\mathbf{j}\check{I}\,dy_0 e^{j\omega t}$, находящегося в точке x_0, y_0, z_0 в прямоугольном волноводе, при $z > z_0$ имеет вид

$$\check{\mathbf{A}} = \frac{j\mu\check{I}\,dy_0}{\beta^2 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-\delta_n^0}{\beta'_{mn}}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi y_0}{b}\left[\mathbf{i}\,\frac{mn\pi^2}{ab}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{j}\left(\beta^2-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}-\mathbf{k}j\beta'_{mn}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]e^{-j\beta'_{mn}(z-z_0)}$$

27. Исходя из задач 25 и 26, показать, что при возбуждении прямоугольного волновода маленькой проволочной петлей, по которой течет ток $\check{I}e^{j\omega t}$ (площадь петли dS, петля лежит в плоскости x_0 в точке $y=y_0$, $z=z_0$, ее магнитный момент направлен вдоль оси x), вектор-потенциал, описывающий поле, при $z > z_0$ имеет вид

$$\check{\mathbf{A}} = -\frac{\mu I\,dS}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_n^0)\sin\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi y_0}{b}\left[\mathbf{j}\cos\frac{n\pi y}{b}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\,\frac{jn\pi}{\beta'_{mn}b}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\,e^{-j\beta'_{mn}(z-z_0)}$$

28. Исходя из задачи 26, показать, что при возбуждении прямоугольного волновода маленькой петлей, по которой течет ток $\check{I}e^{j\omega t}$ (площадь петли dS, петля лежит в плоскости z_0 в точке $x=x_0$, $y=y_0$, ее магнитный момент направлен вдоль оси z), вектор-потенциал, описывающий поле, при $z > z_0$ имеет вид

$$\check{\mathbf{A}} = \frac{j\mu I\,dS}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-\delta_m^0-\delta_n^0}{\beta'_{mn}}\cos\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi y_0}{b}\left[\mathbf{i}\,\frac{n\pi}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{j}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right]e^{-j\beta'_{mn}(z-z_0)}.$$

29. Прямоугольный волновод, коротко замкнутый в сечении $z=0$, возбуждается при помощи одной половины прямоугольной петли, два вертикальных провода которой перпендикулярны к оси y, а горизонтальный провод длины c протянут вдоль линии $x=x_0$, $z=z_0$. Предполагая, что в волноводе распространяются только волны TE_{10}, показать, что сопротивление излучения равно

$$R_r = \frac{2\omega\mu c^2}{\beta'_{10}ab}\sin^2\frac{\pi x_0}{a}\sin^2\beta'_{10}z_0, \quad \text{где} \quad \beta'_{10}=\frac{2\pi}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

30. Прямоугольный волновод, коротко замкнутый в сечении $z=0$, возбуждается полукруглой тонкой проволочной петлей радиуса c, ток вдоль которой распределен равномерно. Петля лежит в плоскости $x=d$, а ее центр и концы находятся в плоскости $z=0$. Предполагая, что при заданной частоте в волноводе может распространяться только волна TE_{10}, показать, пользуясь результатами задачи 26, что сопротивление излучения равно

$$R_r = \frac{2\mu\omega\pi^2c^2}{\beta'_{10}ab}[J_1(\beta'_{10}c)]^2\sin^2\frac{\pi d}{a}, \quad \text{где} \quad \beta'_{10}=\frac{2\pi}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

31. Применяя метод изображений и пользуясь результатом задачи 20, а также учитывая соотношение (5.451), показать, что в задаче 30 реактивное сопротив-

ление излучения равно

$$X_0+\frac{2\pi\rho\omega c^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\pi Y_0(\beta_1 nb)\left[J_1(\beta_1 c)\sin\frac{\pi d}{a}\right]^2+2\sum_{p=2}^{\infty}K_0(\beta_p nb)\left[I_1(\beta_p c)\sin\frac{p\pi d}{a}\right]^2\right\}$$

где X_0 — значение реактивного сопротивления, определенного в задаче 21, при $\alpha=\pi$ и

$$\beta_1=\frac{2\pi}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]^{1/2},\quad \beta_n=\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2-1\right]^{1/2}$$

За исключением случая больших размеров петли, первый член много больше суммы членов, обусловленных отражением.

32. Круглый бесконечный волновод радиуса a возбуждается элементом тока $\check{\varphi}\check{I}_0 f_0 d\varphi e^{j\omega t}$, находящимся в точке ρ_0, 0, z_0. Показать, что амплитуды волн TE в формулах (15.38) и (15.39) равны

$$[\check{C}_{mn}]_{te}=\frac{j(2-\delta_m^0)\mu I_0\, d\varphi\beta_{mn}f_0 J'_m(\beta_{mn}f_0)}{2\pi\beta'_{mn}(\beta_{mn}^2a^2-m^2)[J_m(\beta_{mn}a)]^2}e^{j\beta'_{mn}z_0},\quad [\check{D}_{mn}]_{te}=0,$$

где $J'_m(\beta_{mn}a)=0$, а амплитуды волн TM, входящие в формулы (15.41) и (15.42), равны

$$[\check{D}_{mn}]_{tm}=\frac{\mu I_0\, d\varphi_0 m J_m(\beta_{mn}f_0)}{\pi[\beta\beta_{mn}aJ'_m(\beta_{mn}a)]^2}e^{j\beta'_{mn}z_0},\quad [\check{C}_{mn}]_{tm}=0,$$

где $J_m(\beta_{mn}a)=0$.

33. Круглый бесконечный волновод радиуса a возбуждается маленькой петлей с током, имеющей магнитный момент $k\check{I}\,dSe^{j\omega t}$ и лежащей в плоскости $z=z_0$ в точке ρ_0, 0. Показать, что при этом в волноводе возникают только волны TE, амплитуды которых, входящие в формулы (15.38) и (15.39), равны

$$[\check{C}_{mn}]_{te}=-\frac{j(2-\delta_m^0)\mu I\, dS\beta_{mn}^2 J_m(\beta_{mn}f_0)}{2\pi\beta'_{mn}(\beta_{mn}^2a^2-m^2)[J_m(\beta_{mn}a)]^2}e^{j\beta'_{mn}z_0},\quad [\check{D}_{mn}]_{te}=0.$$

34. Круглый бесконечный волновод радиуса a возбуждается при помощи маленькой петли с током, имеющей магнитный момент $\varphi\check{I}\,dSe^{j\omega t}$ и лежащей в плоскости $\varphi=0$ в точке $z=z_0$, $\rho=f_0$. Показать, что в области $z>z_0$ амплитуды волн TE, входящие в формулы (15.38) и (15.39), и волн TM, входящие в формулы (15.41) и (15.42), соответственно равны

$$[\check{D}_{mn}]_{te}=-\frac{m\mu I\, dSJ_m(\beta_{mn}f_0)}{\pi\rho_0(\beta_{mn}^2a^2-m^2)[J_m(\beta_{mn}a)]^2}e^{j\beta'_{mn}z_0},\quad [\check{C}_{mn}]_{te}=0;$$

$$[\check{C}_{mn}]_{tm}=-\frac{j\mu I\, dS(2-\delta_m^0)J'_m(\beta_{mn}f_0)}{2\pi\beta_{mn}\beta'_{mn}[aJ'_m(\beta_{mn}a)]^2}e^{j\beta'_{mn}z_0},\quad [\check{D}_{mn}]_{tm}=0.$$

35. Коаксиальная линия, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно r_1 и r_2, соединена с прямоугольным волноводом через кольцевую щель в его широкой стенке. Центр щели находится в точке $x=d$, $y=0$, $z=c$. Прямоугольный волновод закорочен в сечении $z=0$. Показать, что если частота такова, что в волноводе может распространяться только волна TE_{10}, то сопротивление излучения, обусловленное этой волной, равно

$$R_r=\frac{\omega\mu ab\beta'\ln^2(r_2/r_1)}{8\pi^2\sin^2(\pi d/a)\sin^2\beta' c[J_0(2\pi r_2/\lambda)-J_0(2\pi r_1/\lambda)]^2},$$

где $\beta'=(2\pi/\lambda)\left[1-\left(\frac{1}{2}\lambda/a\right)^2\right]^{1/2}$. При расчете возбуждения волновода воспользоваться методом двойного слоя тока, описанным в § 20 гл. XIV, считая, что кольцо тока имеет прямоугольное сечение $(r_2-r_1)\eta$ и устремляя затем η к нулю при постоянном произведении η на плотность тока.

36. Прямоугольный волновод (см. § 3), замкнутый в сечении $z=0$ идеально проводящей плоскостью, возбуждается при помощи провода радиуса r, расположенного параллельно оси y вдоль $x=d$, $z=c$ и несущего равномерно распределенный ток $\mathbf{j}I\cos\omega t$. Считая $r\ll a$, $r\ll\lambda$, $r\ll c$ и $r\ll d$, показать, пользуясь суперпозицией решений,

типа приведенных в задаче 8, что реактивное сопротивление равно

$$-\frac{\omega\mu b}{4}\left\{\frac{2\ln(\beta r)}{\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}Y_0(2n\beta a)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y_0(2\beta|na-d|)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_n^0)\,Y_0[2\beta(n^2a^2+c^2)^{1/2}]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Y_0(2\beta[(na-d)^2+c^2]^{1/2})\right\}$$

37. Пусть в предыдущей задаче c имеет тот же порядок величины, что и r, но провод все же не касается торцовой стенки. Показать, что пренебрегая членами β^4c^4, β^6c^6 и т. д. и комбинируя оставшиеся члены попарно, для реактивного сопротивления можно получить следующее выражение:

$$X=\frac{\omega\mu b}{2\pi}\left\{\operatorname{ar\,ch}\frac{c}{r}-\pi\beta c^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_1(2\beta na)}{na}+\pi\beta c^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{Y_1(2\beta|na-d|)}{2|na-d|}\right\},$$

принимающее при $d=\frac{1}{2}a$ вид

$$X=\frac{\omega\mu b}{2\pi}\left\{\operatorname{ar\,ch}\frac{c}{r}+2\pi\beta c^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_1(n\beta a)}{na}\right\}$$

38. Прямоугольный волновод (см. § 3), замкнутый в сечении $z=0$ идеально проводящей плоскостью, возбуждается при помощи провода радиуса r, расположенного параллельно оси y вдоль $x=d$, $z=c$ и несущего ток $\mathbf{j}I\cos\omega t$. Показать, что при малом r поля в области $z>c$ можно записать в виде

$$\check{\mathbf{E}}=-\frac{2\omega\mu I}{a}\sum_{m-1}^{\infty}\mathbf{j}\frac{1}{\beta'_m}\sin\frac{m\pi d}{a}\operatorname{sh}j\beta'_mc\sin\frac{m\pi x}{a}e^{-j\beta'_mz}$$

$$\check{\mathbf{B}}=\frac{2\mu I}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi d}{a}\operatorname{sh}j\beta'_mc\left[\mathbf{i}\sin\frac{m\pi x}{a}-\mathbf{k}\frac{jm\pi}{\beta'_ma}\cos\frac{m\pi x}{a}\right]e^{-j\beta'_mz}$$

где $\beta'_m=(\omega^2\mu\varepsilon-\pi^2m^2a^{-2})^{1/2}$. Для получения полей в области $z<c$ следует поменять местами z и c.

39. Задаваясь в предыдущей задаче частотой ν, удовлетворяющей неравенству $nv<2a\nu<(n+1)v$, где v — скорость света в среде, заполняющей волновод, показать путем интегрирования вектора Умова—Пойнтинга по сечению трубы при больших z, что сопротивление излучения равно

$$R_r=\frac{2\omega\mu b}{a}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\beta'_m}\sin^2\beta'_mc\sin^2\frac{m\pi d}{a}$$

40. В прямоугольном волноводе ($a=10$ *см*, $b=2$ *см*), замкнутом в сечении $z=0$, распространяется волна; соответствующая ей длина волны в свободном пространстве равна 15 *см*. Волна возбуждается при помощи провода радиуса 0,5 *мм*, протянутого поперек волновода вдоль линии $z=c$, $x=5$ *см*. Показать, что для получения сопротивления излучения 100 *ом* нужно выбрать c равным 2,62 *см* или 14,0 *см* и т. д. Показать, что фазовая и групповая скорости волны соответственно равны $1{,}52\,v$ и $0{,}66\,v$, а реактивное сопротивление, имеющее индуктивный характер, равно 261 *ом*.

41. Пусть волновод, описанный в задачах 38 и 39, замкнут накоротко при помощи идеально проводящего провода, протянутого вдоль линии $x=d_2$, $z=c_2$. Импедансы $\check{Z}_1$ и $\check{Z}_2$, определяемые для каждого из проводов, помещаемых по отдельности в волновод, можно найти из задач 38 и 39. Показать, что при помещении в волновод одновременно обоих проводов импеданс $\check{Z}'_1$ первого провода окажется равным

$$\check{Z}'_1=\frac{(\check{Z}_1\check{Z}_2+\omega^2M^2)}{\check{Z}_2},$$

где

$$M \quad \frac{2\mu b}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta'_m}\sin\frac{m\pi d_1}{a}\sin\frac{m\pi d_2}{a}\sin\beta'_m c e^{-j\beta'_m c_2}$$

Для распространяющихся волн β'_m — действительная величина.

42. Пусть в системе, описанной в задаче 40, требуется уничтожить реактивное сопротивление. Показать, пользуясь результатами задачи 41, что это можно осуществить без изменения активного сопротивления путем замыкания волновода при помощи тонкой проволоки, расположенной вдоль центральной линии на расстоянии $c_2 = 11{,}39$ *см* от конца. Величина M будет действительной, если радиус провода равен 3,45 *мм* и если, конечно, предположить справедливость выведенных формул для проводов такого радиуса.

43. Прямоугольный волновод ($a=1$, $b=2$), замкнутый в сечении $z=0$, возбуждается при помощи расположенной в плоскости $x={}^1/_2$ прямоугольной петли, к концам которой приложены равные по величине и противоположные по знаку потенциалы. Вертикальные стороны петли расположены вдоль линий $y={}^1/_2$ и $y={}^3/_2$; длина этих сторон неизвестна. Петля возбуждается на частоте, соответствующей длине волны в свободном пространстве, равной 0,5 *см*. Показать, что в волноводе будут распространяться только волны следующих типов:

$$TM_{12},\ TM_{32},\ TM_{10},\ (TE_{10}),\ TE_{12},\ TE_{16},\ (TE_{30}),\ TE_{32}.$$

Пояснить, почему исключены волны других типов.

44. Поперечное сечение волновода представляет собой прямоугольный равнобедренный треугольник, длина каждой из одинаковых сторон которого равна a. Показать, что критическая частота ν_c, соответствующая первой распространяющейся волне TE, равна $\frac{1}{2}\,v/a$ и что

$$\alpha=\frac{1}{\mu\gamma v a\delta}\left[\left(1-\frac{\nu_c^2}{\nu^2}\right)(1+2^{1/2})+(3+2^{1/2}2)\frac{\nu_c^2}{\nu^2}\right]\left(1-\frac{\nu_c^2}{\nu^2}\right)^{-1/2}$$

где v — скорость распространения света в среде, заполняющей волновод.

45. Поперечное сечение волновода представляет собой прямоугольный равнобедренный треугольник, длина каждой из одинаковых сторон которого равна a. Показать, что критическая частота ν_c, соответствующая первой распространяющейся волне TM, равна $\frac{1}{2}5^{1/2}\,v/a$ и что

$$\alpha=\frac{(2+2^{1/2})\tau}{\mu v a\delta}\left[1-\left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^2\right]^{-1/2}$$

где v — скорость света в среде, заполняющей волновод.

46. В круглом цилиндрическом волноводе плоскость $\varphi=0$ представляет собой бесконечно тонкий проводящий лист. Показать, что наименьшая критическая частота, соответствующая волнам TE, определяется по формулам

$$\beta_{1/2}a=1{,}1656 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(2\pi\nu_c a v^{-1})=4\pi\nu_c a v^{-1}.$$

47. Показать, что наименьшая критическая частота, соответствующая волнам TM в задаче 46, равна $\frac{1}{2}\,v/a$.

48. В одном из сечений прямоугольного волновода (см. § 3) помещена тонкая проводящая диаграмма, в которой от $x=0$ до $x=a$ прорезана щель шириной d, с центром в точке $y=c$. Показать, что для волны TE_{10} нормированная шунтирующая проводимость [см. выражение (15.77)] равна

$$B^0=\omega C^0=\frac{\omega C}{\tilde{Y}_k}=-\frac{4b}{\lambda_g}\ln\left(\sin\frac{\pi c}{b}\sin\frac{\pi d}{2b}\right).$$

49. Пусть половина диафрагмы [см. выражение (15.82)], симметричной относительно начала координат, удалена так, что зазор между оставшейся половиной и стенкой волновода стал равен d. Показать, что поле в этом случае дается преобразованием

$$W=C\cos\frac{\pi z'}{2a}\left(\cos^2\frac{\pi d}{2a}-\sin^2\frac{\pi z'}{2a}\right)^{1/2}$$

где начало отсчета находится на пересечении диафрагмы со стенкой волновода. Показать далее, что нормированная реактивная проводимость диафрагмы будет определяться не выражением (15.85), а выражением

$$B^0 = -\frac{1}{\omega L^0} = -\frac{\lambda_g}{a}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi d}{2a}\left(1+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi d}{2a}\right)$$

50. Индуктивная диафрагма (см. § 11) представляет собой полоску шириной c, расположенную в центре. Из соображений симметрии следует, что одинаковые участки на верхней и нижней стенках волновода будут иметь одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды, так что вокруг окна не будут циркулировать токи, и, следовательно, функция потока будет принимать одинаковое значение ($V=0$) и на полоске и на стенках. Показать, что в плоскости полоски

$$B_x + jB_z = C\left(\cos^2\frac{\pi x}{a} - \frac{E}{K}\right)\left(\sin^2\frac{\pi c}{2a} - \cos^2\frac{\pi x}{a}\right)^{-1/2}$$

где E и K — полные эллиптические интегралы модуля $k=\cos\left(\frac{1}{2}\pi c/a\right)$. Показать также, что нормированная шунтирующая проводимость равна

$$B^0 = \frac{B}{Y_k} = \frac{\lambda_g}{a}\left[\frac{E-\frac{1}{2}(1-k^2)K}{E-\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)K}\right].$$

51. Волноводы, описанные в задачах 1—5, превращены в полые резонаторы путем введения в них проводящих плоскостей $z=0$ и $z=d$. Показать, что уравнения волновых поверхностей останутся прежними, если в них заменить для волн TE

$$\cos\beta' z \quad \text{на} \quad \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right),$$

а для волн TM —

$$\sin\beta' z \quad \text{на} \quad \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right).$$

52. Показать, что аксиально-симметричные волновые поверхности в сферической полости совпадают с вихревыми кольцами магнитного поля и что они находятся в ячейках, ограниченных сферами $r=r_s$, $r=r_{s+1}$ и конусами $\theta=\theta_p$, $\theta=\theta_{p+1}$; s и p- целые числа $0\leqslant s<t$, $0\leqslant p<n$, $j_n(\beta_{0n}r_s)=0$ и $\sin\theta_p P_n'^{1}(\cos\theta_M)=0$. Уравнение волновых поверхностей имеет вид

$$C=\frac{rj_n(\beta_{0n}r)\sin\theta P_n^1(\cos\theta)}{r_M j_n(\beta_{0n}r_M)\sin\theta_M P_n'^{1}(\cos\theta_M)},$$

где

$$r_s<r_M<r_{s+1}, \quad \frac{d}{dr_M}[r_M j_n(\beta_{0n}r_M)]=0, \quad \theta_p<\theta_M<\theta_{p+1} \quad \text{и} \quad P_n(\cos\theta_M)=0.$$

Часть потока магнитной индукции сквозь площадку, ограниченную границей ячейки и r, θ, равна C, а радиус полости r_t равен a.

53. Показать, что волновые поверхности аксиально-симметричных полей TM в сферической полости представляют собой вихревые кольца электрического поля, уравнения которых совпадают с уравнениями, полученными в предыдущей задаче, но только β_{10} имеет в этом случае другое значение и вблизи стенок полости появляются половинные ячейки.

54. Плоскости $x=0$, $y=0$, $x+y=a$, $z=0$ и $z=d$ являются границами полого резонатора. Показать, что собственная частота простейшего колебания TE равна

$$\nu=\frac{v(a^2+d^2)^{1/2}}{2ad}$$

и что

$$Q=\frac{\mu ad(a^2+d^2)}{\mu'\delta[2a^3+(1+2^{1/2})a^2d+(3+2^{1/2}2)d^3]},$$

где v — скорость света в среде, заполняющей резонатор.

55. Плоскости $x=0$, $y=0$, $x+y=a$, $z=0$ и $z=d$ являются границами полого резонатора. Показать, что собственная частота простейшего колебания TM равна

$$\nu=\frac{5^{1/2}v}{2a}$$

и что

$$Q=\frac{\mu ad}{\mu'\delta\,[(2+2^{1/2})\,d+a]},$$

где v — скорость света в среде, заполняющей полость.

56. Полость ограничена плоскостями $x=0$ и $x=a$ и поверхностью призмы $y=0$, $y=b$, $y=z$, $z-y=2b$. Предполагается, что напряженность электрического поля имеет только x-составляющую и что единственное периодическое решение, дающее значение $A_x=0$ при $y=0$ и $x=y$, имеет вид

$$\check{A}_x=\check{C}\,[\sin p\,(z-y)\sin q\,(z+y)-\sin q\,(z-y)\sin p\,(z+y)],$$

где p и b — неравные между собой произвольные постоянные. Показать, что наибольшая резонансная длина волны полости равна $2b/5^{1/2}$ и определяется значениями $p=\frac{3}{2}\pi/b$ и $q=\frac{1}{2}\pi/b$.

57. Исследование в последней задаче узловых линий наинизшего колебания типа TM показывает, что поле можно разбить на четыре ячейки, имеющие форму равнобедренных треугольников. Исходя из этого и пользуясь задачей 55, показать (путем суммирования потерь на четырех сторонах, двух диагоналях и восьми стенках), что

$$Q=\mu\delta\,(\mu')^{-1}\,bd\,[(2+2^{1/2})\,d+2b]^{-1}.$$

Это превышает добротность Q простейшего колебания типа TM в квадратной и круглой полости с плоскими основаниями.

58. Полый резонатор образован из коротко замкнутой биконической линии передачи и ограничен двумя конусами $\theta=\alpha$ и $\theta=\pi-\alpha$ и сферой $r=d$. Показать, что резонансная длина волны главного типа колебания равна

$$\frac{4d}{2p+1}$$

и что

$$Q=\frac{2\mu d\sin\alpha\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha}{\mu'\delta\left\{C+\ln[(2p+1)\pi]-\operatorname{Ci}[(2p+1)\pi]+2\sin\alpha\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha\right\}}$$

где C — постоянная Эйлера, равная 0,5772.

59. Определим эквивалентный ток полого резонатора, рассмотренного в предыдущей задаче, как ток, текущий по внешней оболочке, и выберем S_c таким образом, чтобы выполнялось соотношение (15.93). Показать, что для главного колебания коэффициент самоиндукции и емкость полости соответственно равны

$$L=\frac{\mu d}{4\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha,\qquad C=\frac{16\varepsilon d}{(2p+1)^2\,\pi\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha}.$$

60. Полый резонатор ограничен двумя плоскостями $z=0$, $z=d$ и двумя конфокальными эллиптическими цилиндрами, ортогональными к этим плоскостям, причем большие и малые оси эллипсов равны M_1, m_1 и M_2, m_2. Показать, воспользовавшись результатами § 23 гл. IV и § 19 гл. XV, что для p-го главного колебания такого полого резонатора

$$Q_p=\frac{\mu d}{2\mu'\delta_p}\left\{1+\frac{d\,(M_1K_2+M_2K_1)}{2\pi M_1M_2\,[\ln(M_2+m_2)-\ln(M_1+m_1)]}\right\}^{-1}$$

где $M_2>M_1$, а K_1 и K_2 — полные эллиптические интегралы, модули которых соответственно равны $(M_1^2-m_1^2)^{1/2}/M_1$ и $(M_2^2-m_2^2)^{1/2}/M_2$.

61. Полый резонатор ограничен двумя плоскостями $z=0$ и $z=d$ и двумя круглыми цилиндрами, оси которых перпендикулярны к плоскостям и находятся на

расстоянии c друг от друга, причем $a > b + c$, где a и b — радиусы цилиндров. Показать, используя результаты § 14 гл. IV и § 19 гл. XV, что для p-го главного типа колебания

$$Q = \frac{\mu d}{2\mu' \delta_p} \left\{ 1 + \frac{d(a-b)[(a+b)^2 - c^2]}{4ab[(a^2-b^2)^2 - 2(a^2+b^2)c^2 + c^4]^{1/2} \operatorname{ar\,ch}[(a^2+b^2-c^2)/(2ab)]} \right\}^{-1}$$

62. Прямоугольный резонатор (шириной a, высотой b, длиной $d > 2a$) частично перегорожен в центре от $y = a$ до $y = b$ при помощи тонкой проводящей диафрагмы. В резонаторе возбуждается колебание типа TE_{10}. Рассматривая его как Т-образное звено волновода, шунтированное на концах емкостью, подсчитанной в § 11, показать, что длину волны в свободном пространстве, соответствующую наименьшей резонансной частоте полости, можно найти из формулы

$$\lambda = \frac{2a\lambda_1}{(4a^2 + \lambda_1^2)^{1/2}}, \qquad 1 = \frac{8b}{\lambda_1} \left(\ln \operatorname{cosec} \frac{\pi c}{2b} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda_1} \right)$$

63. Пусть в предыдущей задаче $a = 2$, $b = 1$, $c = 1/2$ и $d = 4$. Показать, что $\lambda = 4{,}692$.

64. Пусть в задаче 62 плоскость $z = 0$ является стенкой резонатора. Показать, используя результаты задачи 23 и формулу (4.106) и применяя интеграл Мелера—Дирихле для функций Лежандра, что вектор-потенциал, описывающий поле в области $0 < z < d$, имеет вид

$$\mathbf{A} = A_0 \sin \frac{\pi x}{a} \left[\mathbf{j} \frac{\sin \beta_0 z}{\sin \beta_0 d} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\mathbf{j} \cos \frac{n\pi y}{b} + \mathbf{k} \frac{jn\pi}{|\beta_n| b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\operatorname{sh}(|\beta_n| z)}{\operatorname{sh}(|\beta_n| d)} \right],$$

если длина волны в свободном пространстве, входящая в задачу 62, удовлетворяет неравенству

$$a^2\lambda^2 > 4a^2b^2 - \lambda^2 b^2 > 0$$

и

$$C_n = \beta_0 \left[P_n\left(\cos \frac{\pi c}{b}\right) - P_{n-1}\left(\cos \frac{\pi c}{b}\right) \right], \qquad \beta_0 = \frac{\pi (4a^2 - \lambda^2)^{1/2}}{a\lambda},$$

$$|\beta_n| = \frac{(n^2\pi^2 - \beta_0^2 b^2)^{1/2}}{b}.$$

65. Используя результаты задачи 60 гл. IV, показать, что если в полом резонаторе, описанном в § 23, $d \ll a$, $d \ll c$ и $a \approx b$, то емкость C_0, входящая в формулу (15.173), приблизительно равна

$$C_0 = \varepsilon \left[\pi a^2 + 2a \ln \frac{d^2 + k^2}{4kd} + \frac{2ak}{d} \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{k} + \frac{2ad}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{d} \quad \frac{2\pi ad}{k} \right],$$

где $k = b - h$. При $a = 0{,}1$; $b = 0{,}015$; $d = 0{,}001$; $c = 0{,}02$; величина $\beta = 42{,}7$. Графики Морено дают в этом случае $\beta = 41{,}0$. Точность увеличивается с уменьшением разности $b - a$.

66. Прямоугольный полый резонатор имеет в направлениях x, y, z размеры a, b, d. В резонаторе при помощи тонкого провода, протянутого параллельно оси z вдоль линии $x = a_1$, $y = b_1$, возбуждается колебание TM_{110}. Провод подключен к источнику таким образом, что ток вдоль участка провода, находящегося внутри полости и имеющего сопротивление R, распределен равномерно. Считая, что размер d значительно меньше, чем a или b, показать, что входное сопротивление равно

$$R' = R + \frac{2\gamma\delta\mu^2 v^2 d^2 (a^2 + b^2)}{ab(a^2 + b^2) + 2d(a^3 + b^3)} \sin^2 \frac{\pi a_1}{a} \sin^2 \frac{\pi b_1}{b}.$$

Показать также, что усиление по напряжению в такой системе будет равно

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi a_1}{a} \operatorname{cosec} \frac{\pi b_1}{b}.$$

67. Пользуясь методом изображений и результатами задачи 8, показать, что если в предыдущей задаче провод имеет радиус c, то входное реактивное сопротивление провода равно

$$-\frac{\omega\mu d}{2\pi} \ln c + \frac{\omega\mu d}{4} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left((1 - \delta_n^0 \delta_m^0) Y_0 [2\beta (n^2a^2 + m^2b^2)^{1/2}] - \right.$$

$$- Y_0 \{2\beta [(na - a_1)^2 + m^2b^2]^{1/2}\} - Y_0 \{2\beta [n^2a^2 + (mb - b_1)^2]^{1/2}\} +$$

$$\left. + Y_0 \{2\beta [(na - a_1)^2 + (mb - b_1)^2]^{1/2}\} \right).$$

Заметим, что при малых c первый член написанного выше выражения значительно превосходит остальные, из которых наиболее существенными являются $m=n=0$.

68. Пусть стенки полого резонатора, рассмотренного в задаче 66, сделаны из меди ($\gamma=5{,}8\cdot10^7$) и пусть полость имеет размеры $a=10$ *см*, $b=20$ *см*, $d=2$ *см*. Показать, что резонансная частота, соответствующая колебанию TM_{110}, равна $1{,}676\cdot10^9$ *гц*, а добротность Q приближенно равна 9100. Показать, что активное входное сопротивление будет равняться 100 *ом*, если возбуждающий провод имеет координаты $x=0{,}0512$ *см*, $y=10$ *см* или $x=5$ *см*, $y=0{,}1024$ *см* или если он расположен где-либо на кривой $\sin(\pi a_1/10)\sin(\pi b_1/20)=0{,}0160$. Показать также, что при мощности на входе 1 *вт* эффективное значение напряжения в центре равно 625 *в*.

69 Прямоугольный резонатор возбуждается полукруглой петлей радиуса r, лежащей в плоскости $y=b_1$ и имеющей центр в точке $z=d_1$, $x=0$. Показать, что коэффициент взаимной индукции между петлей и полем типа TE_{mnp} равен

$$M=\frac{8\pi^3\mu pnrJ_1(\beta_{mp}r)}{\zeta_{mnp}^2\beta_{mn}\zeta_{mp}bd^2(ab)^{1/2}}\sin\frac{n\pi b_1}{b}\cos\frac{p\pi d_1}{d}$$

70. Прямоугольный резонатор возбуждается полукруглой петлей радиуса r, лежащей в плоскости $y=b_1$ и имеющей центр в точке $z=d_1$, $x=0$. Показать, что коэффициент взаимной индукции между этой петлей и полем типа TM_{mnp} равен

$$M=\frac{2\pi^2\mu mr\,[2(2-\delta_p^0)]^{1/2}}{\beta_{mnp}\zeta_{mn}\beta_{mp}a^2b}J_1(\beta_{mp}r)\sin\frac{n\pi b_1}{b}\cos\frac{p\pi d_1}{d}.$$

71. Сферическая полость с медными стенками радиуса a возбуждается при помощи маленькой плоской петли площади S, расположенной настолько близко к стенке полости, что значение магнитной индукции B на протяжении всей петли можно считать равным значению B на стенке полости. Показать, что при возбуждении этого полого резонатора на резонансной частоте, соответствующей колебанию TM_{01}, входное сопротивление будет равно

$$R_i=R+\frac{3\omega^2\mu^2\gamma\delta\,(4\beta_{01}^2a^2-9)\,S^2}{4\pi a^2\,(4\beta_{01}^2a^2-1)}=R+\frac{1{,}854\cdot10^5\gamma\delta S^2}{a^4}$$

и что если $\beta_{01}a=2{,}744$, а R — активное сопротивление петли, то коэффициент усиления по напряжению будет равен

$$\frac{V}{\mathscr{E}}=\frac{2}{\beta_{01}^2S}\left[\frac{\mathrm{Si}(\beta_{01}a)}{J_1(\beta_{01}a)}-1\right]=\frac{7{,}42}{\beta_{01}^2S}.$$

72. Пусть полый резонатор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет радиус 10 *см*, а стенки его сделаны из меди. Показать, что для получения входного активного сопротивления в 100 *ом* площадь петли должна быть приближенно равна 0,225 $см^2$ и что при этом получится усиление по напряжению в 436 раз.

ЛИТЕРАТУРА

King R. W. P., Mimno H. R., Wing A. H., Transmission Lines, Antennas and Wave Guides, McGraw-Hill, 1945. (См. перевод: Кинг Р., Мимно Г., Уинг А., Передающие линии, антенны и волноводы, М., 1947.)

Marcuvitz N., Waveguide Handbook, McGraw-Hill, 1950. (См. перевод: Справочник по волноводам, М., 1952.)

Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M., Principles of Microwave Circuits, McGraw-Hill, 1948.

Moreno T., Microwave Transmission Design *Data*, McGraw-Hill, 1948.

Radio Research Laboratory Staff, Very High Frequency Techniques, McGraw-Hill, 1947.

Ragan G. L., Microwave Transmission Circuits, McGraw-Hill, 1948.

Ramo S., Whinnery J. R., Fields and Waves in Modern Radio, Wiley, 1944. (См. перевод: Ромо С., Винери Дж., Поля и волны в современной радиотехнике, изд. 2, М.—Л., 1950.)

Sarbacher R. I., Edson W. A., Hyper and Ultrahigh Frequency Engineering, Wiley, 1943. (См. перевод: Сарбахер Р., Эдсон В., Техника сверхвысоких частот, М., 1947.)

Schelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943.

Slater J. C., Microwave Electronics, Van Nostrand, 1950.

Slater J. C., Microwave Transmission, McGraw-Hill, 1942. (См. перевод: Слэтер Дж. К., Передача ультракоротких радиоволн, М.—Л., 1946.)

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Watson W. H., Wave Guide Transmission and Antenna System, Oxford, 1947.

Глава XVI

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. Постулаты специальной теории относительности. В предыдущих главах при рассмотрении электрического и магнитного взаимодействия зарядов и токов предполагалось, что величины последних могут меняться со временем, но их взаимное расположение, а также положение относительно некоторого наблюдателя остается неизменным. При трактовке вопросов, связанных со взаимодействием систем, прямолинейно перемещающихся в пространстве относительно друг друга или относительно наблюдателя, специальная теория относительности опирается, повидимому, на наиболее твердо установленную экспериментальную базу.

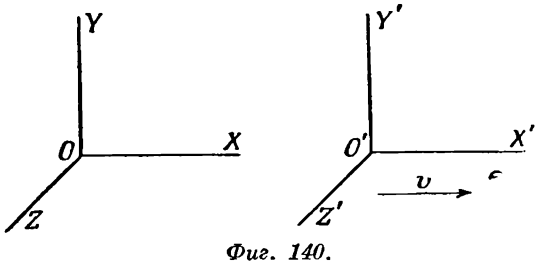
В основу специальной теории относительности положены два постулата.

1. Все физические законы, или описывающие их уравнения, имеют одинаковый вид в пустоте во всех декартовых системах координат, совершающих относительно друг друга равномерное поступательное движение.

2. Скорость света в пустоте одинакова для любого наблюдателя, независимо от относительной скорости источника света и наблюдателя.

Исследование большого количества доступных наблюдению явлений механического, оптического и электрического характера, существование которых было предсказано на основе этих постулатов, показало, что во всех случаях результаты опытов, проводимых на земле, подтверждают эти постулаты.

§ 2. Преобразование Лоренца. Рассмотрим две системы координат (см. фиг. 140), оси x и x' которых совпадают. Пусть система S' движется относительно системы S вдоль направления x с постоянной скоростью v. Для нахождения соотношений, связывающих x, y, z и t с x', y', z' и t' и удовлетворяющих двум постулатам специальной теории относительности, проделаем мысленно следующий простой опыт. Предположим, что в момент времени $t = t' = 0$ оба начала координат O и O' совпадали и что в этот момент из общего для обеих систем начала координат был послан световой импульс. Согласно постулатам § 1, в каждой системе S и S' должна наблюдаться сферическая волна, расходящаяся из начала координат со скоростью c. Поэтому в любой последующий момент времени уравнение, описывающее фронт волны в системе S, будет иметь вид



Фиг. 140.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{16.1}$$

а в системе S'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{16.2}$$

В силу симметрии фронта волны при наблюдении в системах S и S' можно положить $z = z'$ и $y = y'$ Тогда для удовлетворения уравнений (16.1) и (16.2) должно выполняться следующее равенство:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \tag{16.3}$$

В системе S в момент времени t точка O' будет иметь координату vt, а в системе S' в момент времени t' точка O имеет координату $-vt'$. Наиболее простыми соотношениями [1], приводящими к этому результату, будут

$$x' = \varkappa (x - vt), \qquad x = \varkappa' (x' + vt'). \tag{16.4}$$

Исключение x' даст

$$t' = \varkappa \left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{\varkappa\varkappa'}\right) \right] \tag{16.5}$$

Подставляя значения x' и t' из выражений (16.4) и (16.5) в (16.3) получаем соотношение, содержащее переменные x^2, xt и t^2, но поскольку оно должно выполняться при любых положительных значениях t и любых значениях x, то коэффициенты при x^2, xt и t^2 должны порознь равняться нулю. Приравнивая их к нулю и решая относительно $\varkappa$ и $\varkappa'$, находим

$$\varkappa = \varkappa' = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \tag{16.6}$$

Таким образом, из выражений (16.4) и (16.5) получаем искомые формулы преобразования

$$\begin{aligned} &x' = \varkappa (x - vt), && x = \varkappa (x' + vt'); \\ &y' = y, \ z' = z, && y = y', \ z = z'; \\ &t' = \varkappa\left(t - \frac{xv}{c^2}\right), && t = \varkappa\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{16.7}$$

§ 3. Преобразование скорости и ускорения. Будем определять скорости движения относительно системы координат S следующим образом:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}, \tag{16.8}$$

а относительно системы S'

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \tag{16.9}$$

Дифференцируя первые три уравнения первой группы (16.7) по t', а второй группы по t и исключая из правых частей соответственно dt/dt' и dt'/dt путем дифференцирования четвертого уравнения противоположной группы, получим

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}}, \tag{16.10}$$

$$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\varkappa\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)}, \qquad u_{y,z} = \frac{u'_{y,z}}{\varkappa\left(1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}\right)}. \tag{16.11}$$

[1] Простота не является, очевидно, достаточно убедительным аргументом. Автор не вводит понятие интервала, хотя фактически постулирует инвариантность последнего. — *Прим. перев.*

Это — уравнения преобразования скорости. Интересно отметить, что если даже системы движутся с относительной скоростью $v = c$ и некоторая точка в системе S' имеет скорость $u' = c$, то величина u, определяемая формулой (16.10), равна c. Таким образом, скорость света можно рассматривать как верхний предел возможной скорости.

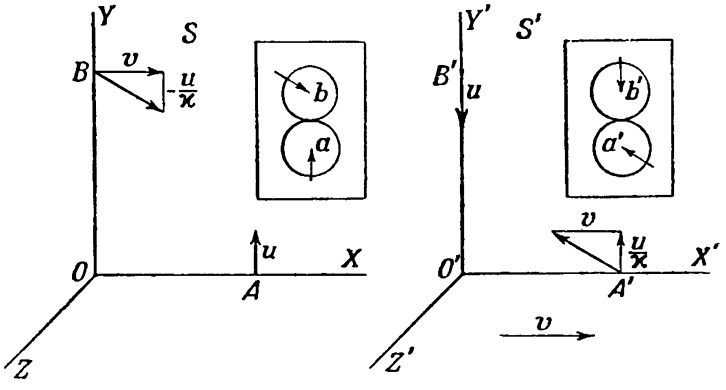
При помощи аналогичных операций, дифференцируя выражения (16.9) и (16.10), получим для ускорений следующие соотношения:

$$\frac{du_x}{dt} = \left[\varkappa\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)\right]^{-3}\frac{du'_x}{dt'}, \tag{16.12}$$

$$\frac{du_{y,z}}{dt} = \left[\varkappa\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)\right]^{-2}\frac{du'_{\eta,z}}{dt'} - \frac{u'_{\eta,z}\,v}{\varkappa^2 c^2}\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-3}\frac{du'_x}{dt'} \tag{16.13}$$

Соответствующие уравнения для du'_x/dt' и $du'_{y,z}/dt'$ можно получить из выражений (16.12) и (16.13) путем перестановки величин, отмеченных штрихами, и величин, не отмеченных штрихами, и замены $+v$ на $-v$. Заметим, что постоянное ускорение в системе S' в общем случае не обусловливает постоянного ускорения в системе S.

§ 4. Зависимость массы от скорости. По первому постулату закон сохранения энергии и импульса должен выполняться для всех наблюдателей.



Фиг. 141.

Чтобы выяснить результат, к которому приводит это требование, рассмотрим простой эксперимент, предложенный Толманом и проиллюстрированный на фиг. 141. Пусть в тот момент, когда оба начала координат совпадают, из точки B' в системе S' по направлению к точке O' начинает двигаться шар со скоростью u, а из точки A в системе S — другой шар, перемещающийся параллельно y также со скоростью u.

Выберем отрезки OA и OB такими, чтобы в момент соударения центры шаров располагались вдоль направления Y. На фиг. 141 показано, как это соударение будет наблюдаться из систем S и S'. Будем считать, что в состоянии покоя по отношению к любому наблюдателю масса каждого из шаров равна m_0, и предположим, что масса является функцией величины скорости

$$m = f(u^2) \quad \text{и} \quad m_0 = f(0). \tag{16.14}$$

По формулам предыдущего параграфа начальные скорости равны

Для системы S	Для системы S'
$u_{ax} = 0, \quad u_{ay} = u,$	$u'_{ax} = -v, \quad u'_{ay} = \frac{u}{\varkappa},$
$u_{bx} = v, \quad u_{by} = -\frac{u}{\varkappa}.$	$u'_{bx} = 0, \quad u'_{by} = -u.$

(16.15)

Будем отличать скорости после удара при помощи черточек сверху. По законам соударения двух гладких шаров их импульс по оси x должен сохраняться относительно любого наблюдателя. Таким образом, в системе S для составляющей в направлении x имеем $m_b v = \bar{m}_b v$, или

$$vf\left(v^2 + \frac{u^2}{\varkappa^2}\right) = vf\left(v^2 + \frac{\bar{u}_b^2}{\varkappa^2}\right)$$

Это приводит к требованию

$$\bar{u}_b = -u \text{ и, следовательно, } \bar{m}_b = m_b. \tag{16.16}$$

Знак минус выбран из предельного случая малых скоростей, когда $\varkappa = 1$

В системе S для составляющей в направлении y получим

$$uf(u^2) - \frac{m_b u}{\varkappa} = \bar{u}_a f(\bar{u}_a^2) - \frac{\bar{m}_b \bar{u}_b}{\varkappa}$$

Принимая во внимание соотношение (16.16) и учитывая известный результат при $v = 0$, мы видим, что это уравнение удовлетворяется только, если $\bar{u}_a = -u$. Разделив его на u, найдем

$$f(u^2) = m_a = \frac{m_b}{\varkappa} \tag{16.17}$$

Если скорость u мала, то

$$m_b = f\left(v^2 + \frac{u^2}{\varkappa^2}\right) \to f(v^2)$$

и

$$m_a = f(u^2) \to f(0) = m_0. \tag{16.18}$$

Итак, масса тела, движущегося со скоростью v относительно данного наблюдателя, кажется последнему увеличившейся в $\varkappa$ раз по сравнению с массой покоя, где

$$\varkappa = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{16.19}$$

Для дальнейшего удобно ввести величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_1'$, определяемые следующим образом:

$$\varkappa_1 = \left(1 - \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{16.20}$$

$$\varkappa_1' = \left(1 - \frac{u_x'^2 + u_y'^2 \quad u_z'^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{16.21}$$

где u_x, u_y и u_z — компоненты скорости частицы в системе S, а u_x', u_y', u_z' — компоненты скорости той же частицы в системе S'. Используя выражения (16.10) и (16.11), можно получить такие соотношения:

$$\varkappa_1 = \varkappa\varkappa_1'\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right), \tag{16.22}$$

$$\varkappa_1' = \varkappa\varkappa_1\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \tag{16.23}$$

§ 5. Преобразование сил. Характер уравнений, связывающих силы в системах S и S', зависит от того, определяется ли сила как произведение массы на ускорение или как производная импульса по времени. Мы будем придерживаться последнего определения; поэтому, учитывая выражение (16.18), запишем

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = m_0 \frac{d(\varkappa_1 \mathbf{u})}{dt} \tag{16.24}$$

Записывая это уравнение в компонентах, можно видеть, что при таком определении в общем случае сила и ускорение не совпадают по направлению. Выполняя дифференцирование, получим

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt} = m_0\varkappa_1\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m_0\varkappa_1^3\mathbf{u}\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt} =$$
$$= m_0\varkappa_1^3\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{u\mathbf{u}}{c^2}\frac{du}{dt}\right] \qquad (16.25)$$

Пусть сила приложена в направлении $\mathbf{u}_1$, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 u$ и

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{u}_1 du}{dt},$$

тогда

$$\mathbf{F}_l = m_0\varkappa_1^3\frac{d\mathbf{u}}{dt} = m_l\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \qquad (16.26)$$

Если $du/dt = 0$, т. е. если скорость меняется только по направлению, а не по величине, то из соотношения (16.25) следует, что сила снова будет совпадать по направлению с ускорением, перпендикулярным к скорости $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{F}_t = m_0\varkappa_1\frac{d\mathbf{u}}{dt} = m_t\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \qquad (16.27)$$

Величины $m_l = m_0\varkappa_1^3$ и $m_t = m_0\varkappa_1$ принято называть соответственно продольной и поперечной массой частицы.

Силы, наблюдаемые в системе S', должны записываться в той же форме, что и в системе S,

$$\mathbf{F}' = m_0\frac{d(\varkappa_1'\mathbf{u}')}{dt'}.$$

Подставим в уравнение (16.24) для x-компоненты силы вместо $\varkappa_1 u_x$ соответствующие выражения из соотношений (16.10) и (16.22) и вместо dt'/dt выражение, получаемое путем дифференцирования формулы (16.7); тогда

$$F_x = m_0\frac{d(\varkappa_1 u_x)}{dt} = m_0\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)^{-1}\frac{d[\varkappa_1'(u_x'+v)]}{dt'} =$$
$$= F_x' + m_0 v\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)^{-1}\left[-\frac{u_x'}{c^2}\frac{d(\varkappa_1'u_x')}{dt'} + \frac{d\varkappa_1'}{dt'}\right] =$$
$$= F_x' + m_0 v\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{u_x'^2}{c^2}\right)\frac{d\varkappa_1'}{dt'} - \frac{\varkappa_1'u_x'}{c^2}\frac{du_x'}{dt'}\right]$$

Но

$$1-\frac{u_x'^2}{c^2} = \frac{u_y'^2+u_z'^2}{c^2} + \frac{1}{\varkappa_1'^2} \quad \text{и} \quad -\frac{\varkappa_1'u_x'du_x'}{c^2dt'} = \frac{\varkappa_1'u_y'du_y'}{c^2dt'} + \frac{\varkappa_1'u_z'du_z'}{c^2dt'} - \frac{1}{\varkappa_1'^2}\frac{d\varkappa_1'}{dt'},$$

так что, производя подстановку, получим

$$F_x = F_x' + \frac{m_0 v}{c^2+u_x'v}\left[u_y'\left(\varkappa_1'\frac{du_y'}{dt'} + u_y'\frac{d\varkappa_1'}{dt'}\right) + u_z'\left(\varkappa_1'\frac{du_z'}{dt'} + u_z'\frac{d\varkappa_1'}{dt'}\right)\right] =$$
$$= F_x' + \frac{u_y'v}{c^2+u_x'v}F_y' + \frac{u_z'v}{c^2+u_x'v}F_z'. \qquad (16.28)$$

Аналогичные операции для F_y и F_z дают

$$F_{y,z} = \frac{c^2}{\varkappa(c^2+u_x'v)}F_{y,z}'. \qquad (16.29)$$

Это и есть уравнение преобразования сил.

§ 6. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле. Первый постулат специальной теории относительности требует, чтобы законы электростатики были одинаковыми для любого наблюдателя. Если предположить дополнительно к этому неизменность величины заряда, то отсюда будет следовать, что в системе S силы взаимодействия движущихся в ней зарядов отличаются от электростатических. Как будет ясно из дальнейшего (см. § 14), инвариантность заряда является следствием инвариантности уравнений Максвелла. Эти дополнительные силы можно было бы назвать электрокинетическими, но вскоре мы увидим, что они совпадают с силами, которые мы назвали магнитными.

Предположим, что в системе S' имеется два точечных заряда q и q_1, расположенные на плоскости $x'y'$ соответственно в точках $x'=0$, $y'=y_1'$ и $x'=x'$, $y'=0$. По закону Кулона, компоненты силы, действующей на заряд q в системе S', будут равны

$$F_x'=\frac{-qq_1x'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y_1'^2)^{3/2}},\quad F_y'=\frac{qq_1y_1'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y_1'^2)^{3/2}},\quad F_z'=0. \tag{16.30}$$

В системе S эти заряды будут двигаться в положительном направлении оси x со скоростью v, поэтому силы, наблюдаемые в системе S, можно получить путем подстановки соотношений (16.7) и (16.30) в выражение (16.28). Для обоих наблюдателей в системах S и S' сила не будет зависеть от времени, и, следовательно, ее можно рассматривать в момент $t=0$, $t'=-x'vc^{-2}$. Поскольку $u_x'=u_y'=u_z'=0$, $x'=\varkappa x$ и т. д., это дает

$$F_x=\frac{-qq_1\varkappa x}{4\pi\varepsilon_0(\varkappa^2x^2+y_1^2)^{3/2}},\quad F_y=\frac{qq_1y_1}{4\pi\varepsilon_0\varkappa(\varkappa^2x^2+y_1^2)^{3/2}},\quad F_z=0. \tag{16.31}$$

Теперь посмотрим, какие силы наблюдаются в системе S, если вместо заряда q_1 имеется бесконечная линия зарядов, равномерно распределенных вдоль x и движущихся со скоростью v. Заряд любого элемента оси, согласно принятой гипотезе, одинаков для любого наблюдателя, так что сила, обусловленная этим элементом, получается при помощи подстановки в выражение (16.31) величины

$$q_1=\sigma\,dx=\sigma'dx'. \tag{16.32}$$

Заметим, кстати, что так как в силу соотношения (16.7) $dx'=\varkappa\,dx$, то из утверждения об одинаковости заряда q_1 для обоих наблюдателей с необходимостью вытекает, что

$$\sigma=\varkappa\sigma', \tag{16.33}$$

т. е. плотность заряда для систем S и S' оказывается разной. Подставляя соотношение (16.32) в формулу (16.31) и интегрируя в пределах от $x=-\infty$ до $x=+\infty$, мы получим для силы, с которой действует движущаяся заряженная лента на заряд q, следующие выражения (см. Двайт, 200.03 и 201.03):

$$F_x=0,\quad F_z=0,\qquad F_y=\frac{q(1-\beta^2)\sigma}{2\pi\varepsilon_0y_1}, \tag{16.34}$$

где $\beta=v/c$. Полагая $\beta=0$, можно определить наблюдаемую в системе S электростатическую силу, равную $q\sigma/(2\pi\varepsilon_0y)$, так что дополнительная сила, обусловленная движением, будет

$$\Delta F_y=-\frac{qv^2\sigma}{2\pi\varepsilon_0c^2y_1}=-\frac{\mu_0\sigma v}{2\pi y_1}qv, \tag{16.35}$$

а измеренный в системе S ток $i=\sigma v$. Как вытекает из формулы (7.79), в системе S с этим током связано магнитное поле, направленное по оси z

и имеющее в точке $x=0$, $y=y_1$ значение $B_z=\mu_r i/(2\pi y_1)$. Подставляя это значение в формулу (16.35), мы видим, что обусловленная движением дополнительная сила, действующая на q, равна

$$\Delta F_y = -B_z q v. \tag{16.36}$$

Таким образом, на точечный заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$, действует сила, направленная перпендикулярно к $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ и равная

$$\mathbf{F}_m = q\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{16.37}$$

В прямоугольных координатах это можно записать в виде

$$\mathbf{F}_m = q\,[\mathbf{i}\,(v_y B_z - v_z B_y) + \mathbf{j}\,(v_z B_x - v_x B_z) + \mathbf{k}\,(v_x B_y - v_y B_x)]. \tag{16.38}$$

В § 14 будет показано, что соотношение (16.37) также является следствием инвариантности уравнения Максвелла. Если положить $\mathbf{v}q = I\,\mathbf{ds}$, то получится в точности закон, определяющий силу, действующую на помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$ элемент $\mathbf{ds}$, по которому течет ток I. Из опытов Ампера, описанных в § 19 гл. VII, этот закон можно было вывести только как интегральный закон для замкнутых контуров. Теперь мы распространим его и на случай изолированных движущихся зарядов. Следует заметить, что формула (16.37) остается совершенно точной и для полей $\mathbf{B}$, меняющихся во времени и в пространстве, при условии, что эти изменения настолько медленны, что индукцию $\mathbf{B}$ на протяжении области, занимаемой зарядом, можно считать однородной и постоянной. Можно ожидать, что выражение (16.37) окажется неверным для каких-нибудь действительных заряженных частиц, если применять его для субатомных расстояний и частот.

§ 7. Движение зарядов в однородном магнитном поле. Предположим, что частица, имеющая заряд q и массу m, движется в магнитном поле $\mathbf{B}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Пусть единичный вектор $\mathbf{s}_1$, направленный вдоль $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}=v\mathbf{s}_1$), составляет с полем $\mathbf{B}$ угол α. Тогда из соотношения (16.37) имеем

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{s}_1\frac{d(mv)}{dt} + mv\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = qv\,[\mathbf{s}_1\times\mathbf{B}]. \tag{16.39}$$

Или, записывая это уравнение в компонентах, получим

$$\mathbf{s}_1\frac{d(mv)}{dt} = 0, \tag{16.40}$$

т. е. v — постоянная величина и

$$m\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = q\,[\mathbf{s}_1\times\mathbf{B}], \tag{16.41}$$

т. е. вектор $d\mathbf{s}_1$ перпендикулярен к $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{B}$ и, согласно выражению (16.27), массу m нужно брать равной поперечной массе. Обозначим через $d\varphi$ — угол между векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_1+d\mathbf{s}_1$, измеряемый в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{B}$, а через ρ — радиус кривизны траектории на участке $d\varphi$. Тогда, раскрывая векторное произведение в выражении (16.41) и разделив обе части этого уравнения на $s_1\sin\alpha$, мы придем к следующему соотношению:

$$\frac{m_t ds_1}{s_1\sin\alpha\,dt} = \frac{m_t d\varphi}{dt} = \frac{m_t v\sin\alpha}{\rho} = qB. \tag{16.42}$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой спираль с угловым

шагом, равным $\frac{1}{2}\pi - \alpha$; эта спираль охватывает круглый цилиндр, радиус которого равен

$$\rho = \left| \frac{m_0 v \sin \alpha}{qB\,[1-(v/c)^2]^{1/2}} \right|, \tag{16.43}$$

а ось параллельна **B**. В частном случае, если вектор **v** перпендикулярен к **B**, то угол $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, и заряд движется по круговой орбите.

§ 8. Энергия движущейся заряженной частицы. Энергию, сообщаемую частице под действием силы, мы определим как работу, совершаемую этой силой. В течение бесконечно малого промежутка времени dt частица пройдет расстояние $\mathbf{dr} = \mathbf{u}\,dt$. Тогда, согласно выражению (16.16), совершаемая работа будет равна

$$dW = \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = F_l dr = m_0 \varkappa_1^3 \frac{du}{dt} dr = m_0 \varkappa_1^3 u\,du. \tag{16.44}$$

Подставляя значение $\varkappa_1$ из выражения (16.16) и интегрируя от 0 до u, получим

$$W = (m_l - m_0)\,c^2 = (\varkappa_1 - 1)\,m_0 c^2. \tag{16.45}$$

Отсюда вытекает, что увеличение энергии связано с увеличением массы. Этот закон представляет собой теперь один из наиболее точных и полностью подтвержденных законов физики. Он был подтвержден главным образом большим количеством данных о ядерных распадах. Таким образом, мы имеем достаточные экспериментальные основания, чтобы утверждать, что

$$\Delta W = c^2 \Delta m. \tag{16.46}$$

Согласно выражениям (16.44) и (16.37), заряженная частица не получает энергии от магнитостатической части статического электромагнитного поля. Поэтому она не может попасть в область, электростатический потенциал которой превышает сумму потенциала точки вылета частицы и потенциала, необходимого для сообщения частице ее начальной скорости.

§ 9. Критическое магнитное поле в магнетроне. В качестве примера расчета движения заряда при наличии электрического и магнитного полей рассмотрим устройство, известное под названием магнетрона. В пространстве между двумя концентрическими круговыми проводящими цилиндрами создан вакуум. С поверхности внутреннего цилиндра вылетают заряженные частицы, обычно электроны, причем начальная скорость их ничтожно мала. Между цилиндрами поддерживается разность потенциалов такого знака, что заряженные частицы приобретают ускорение в направлении от внутреннего цилиндра радиуса a к внешнему цилиндру b. Магнитное поле ориентировано вдоль оси цилиндров, а индукция **B** является функцией только расстояние от оси ρ. Найдем, при каком значении **B** частицы перестают достигать внешнего цилиндра, если принять потенциал последнего равным V. Если через φ обозначить азимутальный угол, то частицы еще достигают анода, но уже перестают попадать на него в том случае, когда на аноде $d\rho/dt = \dot{\rho} = 0$, так что

$$b\frac{d\varphi}{dt} = b\dot{\varphi} = v_m.$$

Приравнивая производную момента импульса частицы моменту действующих на нее сил, получим

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = -q\rho B\dot{\rho}. \tag{16.47}$$

В начале пути $\dot{\varphi}=0$, а в конце $\rho=b$, $\rho\dot{\varphi}=v$, и $m=\varkappa_1 m_0$, поэтому в результате интегрирования уравнения (16.47) вдоль пути получим

$$\varkappa_1 m_0 bv = -q\int_a^b \rho B\, d\rho. \tag{16.48}$$

Обозначим через N полный поток магнитной индукции между цилиндрами $N=2\pi\int_a^b \rho B\, d\rho$, тогда

$$\varkappa_1 m_0 bv = -\frac{Nq}{2\pi}. \tag{16.49}$$

Поскольку энергия заряда определяется только потенциалом V в точке, где этот заряд находится, то, согласно выражению (16.45), имеем

$$Vq = (\varkappa_1 - 1)\, m_0 c^2. \tag{16.50}$$

Исключая при помощи соотношения (16.50) $\varkappa_1$ и v из формулы (16.49), полу им

$$N = -2\pi bc\left[\frac{V}{c^2}\left(\frac{2m_0}{q}+\frac{V}{c^2}\right)\right]^{1/2} \tag{16.51}$$

Если потенциал достаточно мал, то вторым членом в правой части можно пренебречь. Решая выражение (16.51) относительно V, получаем

$$V = \frac{m_0c^2}{q}\left[\left(1+\frac{N^2q^2}{4\pi^2c^2b^2m_0^2}\right)^{1/2}-1\right] \tag{16.52}$$

§ 10. Траектория космической частицы в однородном поле. В качестве примера вычисления траектории заряженной частицы, на которую действуют электрические и механические силы, рассмотрим частицу, движущуюся в плоскости, перпендикулярной к однородному полю $\mathbf{B}$, считая, что сила торможения частицы в среде пропорциональна скорости. Эксперимент показывает, что заряженные частицы космического происхождения, обладающие большими скоростями, рассеивают свою энергию почти равномерно вдоль всего пути, так что предположение о характере тормозящих сил соответствует действительности. Пользуясь выражениями (16.24) и (16.37), напишем уравнения движения в проекциях на оси x и y:

$$\frac{d}{dt}(m_0\varkappa_1\dot{y}) = -qB\dot{x} - K\dot{y}, \tag{16.53}$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\varkappa_1\dot{x}) = qB\dot{y} - K\dot{x}. \tag{16.54}$$

Проинтегрируем теперь эти два уравнения в пределах от некоторой точки на траектории до начала координат, где $x=y=0$ и $\dot{x}=\dot{y}=0$, и возьмем отношение полученных результатов:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-qBx - Ky}{qBy - Kx}. \tag{16.55}$$

Полагая $y=r\sin\theta$ и $x=r\cos\theta$, имеем

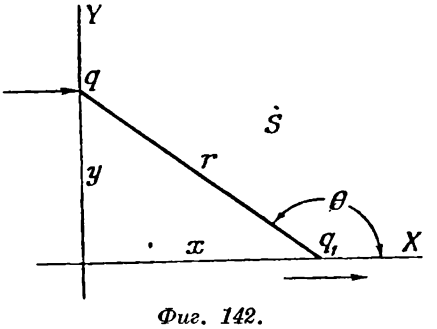
$$\frac{dr}{r} = \frac{K}{qB}d\theta. \tag{16.56}$$

Выбрав $\theta = 0$ при $r = 1$ и проинтегрировав от этой точки до некоторой точки на траектории, получим

$$\ln r = \frac{K}{qB}\theta, \quad \text{или} \quad r = e^{K\theta/qB}. \tag{16.57}$$

Таким образом, траектория представляет собой спираль с постоянным шагом. Для космических электронов, движущихся с большими скоростями, K примерно равно $3qP \cdot 10^{-4}$, где P – давление воздуха в атмосфере.

§ 11. Магнитное поле движущегося заряда. Вернемся снова к силе взаимодействия двух движущихся зарядов, определяемой формулами (16.31). В соответствии с выводами § 6 можно считать, что наблюдатель в системе S, рассматривая силы, действующие на заряд, пересекающий ось y, со стороны другого заряда, движущегося вдоль оси x, приписывает их комбинированному действию электрического и магнитного полей второго заряда. Составляющая силы по оси x, т. е. вдоль направления движения заряда q, должна быть чисто электростатического характера, тогда как составляющая силы по оси y содержит и электрическую и магнитную части. Таким образом, имеем



Фиг. 142.

$$F_x = +F_e \cos\theta, \quad F_y = F_e \sin\theta - F_m, \tag{16.58}$$

$$F_m = +F_x \operatorname{tg}\theta - F_y = -F_x \frac{y}{x} - F_y. \tag{16.59}$$

Здесь мы ввели угол θ (фиг. 142), учитывая, что, как будет показано в § 17, аберрация сигнала, посланного из q_1 в q, равна нулю. Подставляя значения сил из соотношения (16.31), получим

$$F_m = \frac{qq_1v(\varkappa^2 - 1)}{4\pi\varepsilon_0 x(\varkappa^2x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{qq_1\varkappa v^2 y}{4\pi\varepsilon_0 c^2(\varkappa^2x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{16.60}$$

В системе S эта сила не меняется со временем, и поскольку q представляет собой точечный заряд, то наблюдатель, находящийся в системе S, может считать, что заряд движется в однородном магнитном поле, индукцию которого вполне законно вычислять по формулам (16.37) и (16.38). Таким образом, магнитное поле, создаваемое зарядом q_1, оказывается равным

$$B_z = \frac{\mu_0 q_1 v\varkappa y}{4\pi(\varkappa^2x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{16.61}$$

Радиальная составляющая напряженности электрического поля по определению и в силу соотношения (16.58) равна

$$E = \frac{F_e}{q} = \frac{F_x r}{qx} = \frac{q_1\varkappa r}{4\pi\varepsilon_0(\varkappa^2x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{16.62}$$

Используя формулы § 2 гл. XIII, находим

$$\mathbf{B}_z = (\nabla \times \mathbf{A}_x)_z = -\mathbf{k}\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

$$E = \left[\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$$

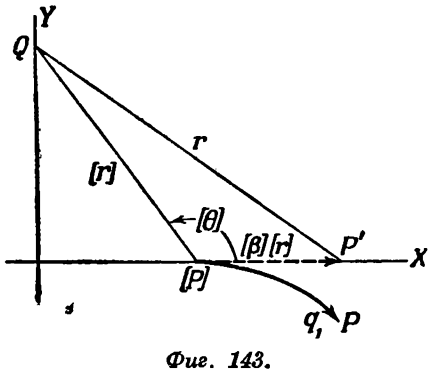
Легко убедиться в том, что векторный и скалярный потенциалы, соответствующие выражениям (16.61) и (16.62), определятся следующим образом:

$$A_x = \frac{\mu_v q_1 \varkappa v_x}{4\pi (\varkappa^2 x^2 + y^2)^{1/2}}, \tag{16.63}$$

$$\varphi = \frac{q_1 \varkappa}{4\pi\varepsilon_v (\varkappa^2 x^2 + y^2)^{1/2}}. \tag{16.64}$$

Следует заметить, что формулы (16.61)—(16.64) применимы к случаю точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Входящие в них пространственные величины определяют действительное положение заряда в момент измерения.

§ 12. Запаздывающие поля и потенциалы движущегося заряда. Поскольку электромагнитные поля распространяются с конечной скоростью c, то сигнал, полученный в точке Q в момент времени t, когда пославший его заряд q_1 находится уже в точке P, будет в действительности представлять собой сигнал, посланный зарядом q_1 из некоторой предшествующей точки $[P]$ на траектории заряда. Если даже после прохождения через точку $[P]$ заряд изменил свое движение, то поле в точке Q в момент времени t останется все же прежним. Таким образом, в случае неравномерного движения поле в момент времени t целесообразнее описывать как функцию движения заряда в момент $t-([r]/c)$, где $([r]/c)$ — время запаздывания, а $[r]$ — радиус-вектор, проведенный из точки $[P]$ в точку наблюдения Q. Но так как поле в точке Q не зависит от пути заряда q_1 после прохождения им точки $[P]$, то мы будем предполагать, что движение заряда q_1 после прохождения точки $[P]$ остается неизменным, т. е. он движется прямолинейно с постоянной скоростью $[v]$ по направлению к некоторому фиктивному положению P'. Тогда поле в точке Q можно вычислить методом, описанным в предыдущем параграфе. Напишем необходимые соотношения между фиктивными и запаздывающими величинами (см. фиг. 143)



Фиг. 143.

$$r^2 = [r]^2 (1 + [\beta]^2 - 2[\beta]\cos[\theta]), \tag{16.65}$$

$$y^2 = [y]^2 = [r]^2 \sin^2[\theta], \tag{16.66}$$

где через $[\beta]$ обозначено $[v]/c$. Член, входящий в знаменатель выражения (16.60), можно теперь переписать в виде

$$\varkappa^2 x^2 + y^2 = [\varkappa]^2 (r^2 - [\beta]^2 y^2) = [\varkappa]^2 [r]^2 (1 - [\beta]\cos[\theta])^2. \tag{16.67}$$

Подставляя соотношения (16.66) и (16.67) в формулу (16.61), получаем выражение для магнитной индукции движущегося заряда через запаздывающие величины

$$B_z = \frac{\mu_v q_1 [v][y]}{4\pi [\varkappa]^2 [r]^3 (1 - [\beta]\cos[\theta])^3}. \tag{16.68}$$

Это выражение, очевидно, можно применять для медленно меняющихся скоростей при условии, что значения $[\beta]$ и $[v]$ берутся в точке $[P]$. В век-

торных обозначениях соотношение (16.68) будет иметь вид

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_v q_1(1-[\beta]^2)([\mathbf{v}]\times[\mathbf{r}])}{4\pi[r]^3(1-[\beta]\cos[\theta])^3}. \tag{16.69}$$

Электрическое поле, определенное в § 11, направлено вдоль **r**. Как видно из фиг. 142,

$$\mathbf{r}=[\mathbf{r}]-\frac{[r][\mathbf{v}]}{c}=[r]\left([\mathbf{r}_1]-\frac{[\mathbf{v}]}{c}\right),$$

где $[\mathbf{r}_1]$ — единичный вектор, направленный вдоль $[\mathbf{r}]$. Таким образом, вводя в выражение (16.62) запаздывающие величины $[\beta]$ и $[\mathbf{v}]$, для электрического поля найдем

$$\mathbf{E}=\frac{q_1(1-[\beta]^2)\left([\mathbf{r}_1]-\frac{[\mathbf{v}]}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_v[r]^2(1-[\beta]\cos[\theta])^3} \tag{16.70}$$

Подстановка соотношений (16.65) и (16.66) в выражения (16.63) и (16.64) позволяет определить запаздывающие потенциалы поля, создаваемого движущимся точечным зарядом

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_v q_1[\mathbf{v}]}{4\pi[r](1-[\beta]\cos[\theta])}, \tag{16.71}$$

$$\varphi=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_v[r](1-[\beta]\cos[\theta])}. \tag{16.72}$$

Для малых $[\beta]$ эти выражения, очевидно, совпадают с выражениями (14.21) и (14.22), если в последних считать размеры заряда малыми. При больших $[\beta]$ можно из выражений (14.21) и (14.22) получить соотношения (16.71) и (16.72), если принять во внимание изменения времени запаздывания в пределах бесконечного малого объема заряда. Этим изменением нельзя пренебрегать, даже если заряд сжимается в точку. Более полная дискуссия этих вопросов дана Мэзоном и Уивером.

§ 13. Излучение равномерно ускоренного, прямолинейно движущегося электрона. Результаты предыдущего параграфа можно применить к случаю ускоренного движения реального заряда, например электрона, при условии, что ускорение достаточно мало́ и, следовательно, можно пренебречь изменением времени запаздывания на протяжении размеров электрона. В противном случае для нахождения поля необходимо было бы знать конфигурацию электрона, что при современном уровне знаний неосуществимо. Предполагая ускорение достаточно малым, чтобы можно было воспользоваться формулами (16.71) и (16.72), подсчитаем поле излучения прямолинейно движущегося электрона на больших расстояниях от него, если электрон испытывает постоянное торможение (постоянное отрицательное ускорение). Такая ситуация имеет место, например, внутри антикатода в рентгеновской трубке.

Для нахождения **B** проще оперировать с вектор-потенциалом **A**. Согласно выражению (16.71), вектор-потенциал **A** имеет только x-составляющую, а следовательно, **B** имеет только φ-составляющую, где φ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг оси движения. Мы знаем зависимость $[v]$ от $[t]$ и хотим найти зависимость **A** от ρ в некоторой удаленной точке. Так как **B** равен ротору **A**, то

$$B_\varphi=-\frac{\partial A_x}{\partial\rho}=-\frac{\partial A_x}{\partial[v]}\left[\frac{dv}{dt}\right]\frac{[\partial t]}{\partial\rho}-\frac{\partial A_x}{\partial[x]}\frac{\partial[x]}{\partial\rho}-\frac{\partial A_x}{\partial[\rho]}\frac{\partial[\rho]}{\partial\rho}. \tag{16.73}$$

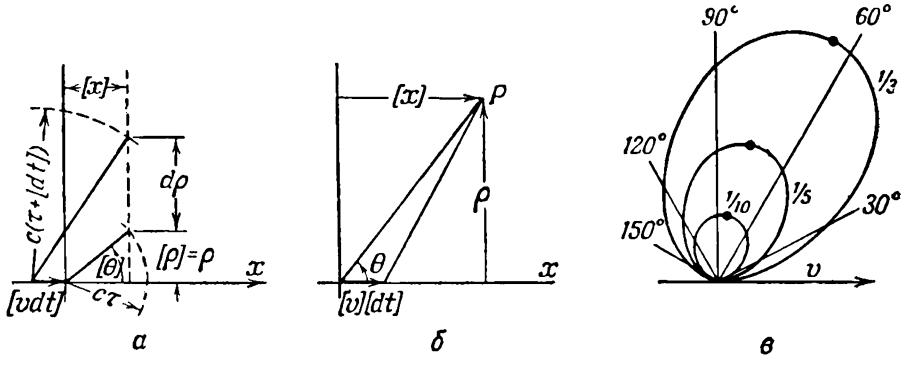
Поскольку $\cos[\theta]$ можно записать в виде $[x]([x]^2+[\rho]^2)^{-1/2}$, то все члены, кроме первого, имеют в знаменателе величину $[r]^2$, поэтому на больших расстояниях можно сохранить только первый член, в котором неизвестным

является множитель $[\partial t]/\partial\rho$. Для его вычисления воспользуемся диаграммой, показывающей, что возмущение, произведенное электроном в момент времени $[t]$ в точке $-[v][dt]$, достигнет точки $[x]$, $\rho+d\rho$ в тот же момент времени, в какой и возмущение, вышедшее из точки O в момент $[t]+[dt]$, придет в точку $[x]$, ρ. Если принять, что это последнее возмущение проходит путь $c\tau$, то, пользуясь фиг. 144, *а*, можно написать следующие соотношения:

$$c^2\tau^2=[x]^2+[\rho]^2, \tag{16.74}$$

$$c^2(\tau+[dt])^2=([x]+[v][dt])^2+([\rho]+d\rho)^2. \tag{16.75}$$

Учитывая, что $[\rho]=\rho$, и предполагая, что $[v]$ несущественно меняется в интервале $[dt]$, исключим при помощи выражения (16.74) $[x]^2$, $[\rho]^2$ и τ^2 из



Фиг. 144.

соотношения (16.75) и пренебрежем членами $[dt]^2$ и $d\rho^2$ по сравнению с $[dt]$ и $d\rho$. Тогда, введя $[r]=c\tau$, получим

$$\frac{[dt]}{d\rho}=\frac{[\rho]}{c[r]-[x][v]}=\frac{\sin[\theta]}{c(1-[\beta]\cos[\theta])}. \tag{16.76}$$

Подставляя в первый член выражения (16.73) соотношения (16.71) и (16.76) и помня, что при вычислении $\partial A/\partial[v]$ надо дифференцировать и β, найдем

$$B_\varphi=\frac{\mu_v q_1[\dot v]\sin[\theta]}{4\pi c[r](1-[\beta]\cos[\theta])^3}. \tag{16.77}$$

Если расстояние до точки наблюдения значительно превышает расстояние, на котором происходит торможение электрона до полной его остановки, то это возмущение представляет собой сферическую волну, в которой в силу соотношения (13.32) $cB_\varphi=E_\theta$. В этом можно было бы убедиться, вычислив E_θ непосредственно из выражений (16.71) и (16.72).

Воспользуемся теперь формулой (16.77), чтобы определить распределение в пространстве полной энергии, излучаемой при остановке электрона. В любой момент времени интенсивность излучения дается вектором Умова — Пойнтинга (13.23)

$$\Pi=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_v}=\frac{\mu_v q^2[\dot v]^2\sin^2[\theta]}{16\pi^2c[r]^2(1-[\beta]\cos[\theta])^6}\mathbf{n}. \tag{16.78}$$

Полное излучение, проходящее через данную точку, равно интегралу от вектора Умова — Пойнтинга в этой точке по времени, в течение которого длится импульс. Но скорость является функцией времени запаздывания у электрона, поэтому нужно найти соотношение между этим временем и временем в точке наблюдения. Из фиг. 144, *б* видно, что если импульс, возникший от электрона в момент времени $[t]=0$, достигает точки P в момент

τ, а импульс, возникший от электрона в момент $[dt]$, попадает в P в момент $\tau+dt$, то справедливы следующие соотношения:

$$\rho^2+[x]^2=c^2\tau^2, \tag{16.79}$$

$$\rho^2+([x]-[v][dt])^2=c^2(\tau-[dt]+dt)^2. \tag{16.80}$$

Исключая при помощи соотношения (16.79) ρ^2, $[x]^2$ и τ^2 из выражения (16.80), опуская члены с $[dt]^2$ и dt^2, малые по сравнению с $[dt]$ и dt, и введя $\cos[\theta]$ вместо $[x]/c\tau$, получим

$$dt=(1-[\beta]\cos[\theta])[dt]. \tag{16.81}$$

Таким образом, для полной энергии, излученной в направлении θ, найдем

$$T_\theta=\int \Pi\,dt=\int_{v=v}^{v=0}\Pi(1-[\beta]\cos[\theta])[dt].$$

Или учитывая, что $[\dot v][dt]=-[dv]$, получаем (см. Двайт, 90)

$$T_\theta=\frac{\mu_v q^2[\dot v]\sin^2[\theta]}{16\pi^2c[r]^2}\int_0^{[v]}\frac{d[v]}{(1-[\beta]\cos[\theta])^5}=\frac{\mu_v q^2\dot v\sin^2\theta}{64\pi^2r^2\cos\theta}\left[1-\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4}\right]. \tag{16.82}$$

В последнем члене опущены обозначения запаздывания, так как, по предположению, расстояние, на котором возникает возмущение, мало́ по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Формула (16.82), полученная Зоммерфельдом, дает хорошее совпадение с измеренным распределением интенсивности «белых» рентгеновских лучей, если принять во внимание поглощение излучения антикатодом. На фиг. 144, *в* изображены соответствующие кривые при разных β.

§ 14. Преобразование уравнений Максвелла. По первому постулату специальной теории относительности уравнения Максвелла должны иметь одинаковую форму в системах S и S'. Запишем их теперь в несколько более общем виде, проведя обобщение на случай движущихся изолированных зарядов. Введем $\rho\mathbf{u}$ вместо $\mathbf{i}$ в соотношениях (13.1). Тогда для свободного пространства будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu_v}=\rho\mathbf{u}+\varepsilon_v\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, && \nabla\times\frac{\mathbf{B}'}{\mu_v}=\rho'\mathbf{u}'+\varepsilon_v\frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t'},\\
&\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, && \nabla\times\mathbf{E}'=-\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t'},\\
&\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_v}, && \nabla\cdot\mathbf{E}'=\frac{\rho'}{\varepsilon_v},\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}=0, && \nabla\cdot\mathbf{B}'=0.
\end{aligned} \tag{16.83}$$

Из формулы (16.7) получаем следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\varkappa,\quad \frac{\partial t'}{\partial x}=-\varkappa\frac{v}{c^2},\quad \frac{\partial x'}{\partial t}=-\varkappa v,\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\varkappa. \tag{16.84}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'}.
\end{aligned} \tag{16.85}$$

Меняя теперь при помощи соотношений (16.85) независимые переменные в первой группе уравнений (16.83), т. е. переходя от системы S к S',

и используя соотношение между скоростями, полученное в § 3, мы находим искомые уравнения преобразования для **E**, **B** и ρ, которые, как можно убедиться, приводят ко второй группе уравнений (16.83),

$$E_x = E'_x, \quad E_{y,z} = \varkappa (E'_{y,z} \pm vB'_{z,y}), \tag{16.86}$$

$$B_x = B'_x, \quad B_{y,z} = \varkappa (B'_{y,z} \mp c^{-1}\beta E'_{z,y}), \tag{16.87}$$

$$\rho = \rho' \varkappa \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right), \tag{16.88}$$

где нижний знак соответствует второму индексу. Эти уравнения показывают, что разделение электромагнитного поля на электрическую и магнитную части зависит от характера движения наблюдателя. Чтобы получить выражения для **E**′, **B**′ и ρ′ через **E**, **B** и ρ, необходимо только поменять местами величины со штрихами и величины без штрихов и изменить знак перед β и v.

Мы можем теперь показать, что предполагавшаяся в § 6 инвариантность электрического заряда непосредственно следует из соотношения (16.88). Исключая последний множитель в соотношении (16.88) при помощи выражения (16.22), получаем $\rho\varkappa'_1 = \rho'\varkappa_1$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa'_1$ определяются по формулам (16.20), (16.21). Таким образом, в системе S_0, неподвижной относительно заряда, имеем

$$\rho_0 = \rho \left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{1/2} = \rho' \left[1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{16.89}$$

Но, согласно выражению (16.84), элементы объема в системах S и S' сжимаются, так что

$$ds_0 = \left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1/2} ds = \left[1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2\right]^{-1/2} ds'. \tag{16.90}$$

Объединяя выражения (16.89) и (16.90), мы видим, что в системах S и S' величина заряда будет одинакова, поскольку

$$\rho_0\, ds_0 = \rho\, ds = \rho'\, ds' = q. \tag{16.91}$$

Можно показать также, что уравнения (16.86) и (16.87) приводят к уже полученному нами выражению для силы, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле [см. выражение (16.37)]. Предположим, что в системе S' заряд покоится и поле имеет электростатический характер. Тогда

$$F'_{x,y,z} = q' E'_{x,y,z}. \tag{16.92}$$

Используя уравнения преобразования для сил (16.28) и полагая $u_x = v$, $u_y = 0$ и $u_z = 0$, из соотношений (16.86) и (16.87) получим, учитывая, что $q = q'$,

$$F_x = qE_x, \quad F_{y,z} = q(E_{y,z} \mp u_x B_{z,y}). \tag{16.93}$$

Или в векторной форме

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})], \tag{16.94}$$

что совпадает с выражением (16.37).

§ 15. Определение скорости самолета относительно земли. Одной из наиболее трудных экспериментальных проблем в авиации является определение скорости самолета относительно земли в условиях плохой видимости. Поскольку при горизонтальном полете самолет пересекает вертикальную составляющую земного магнитного поля, то на его горизонтальных проводниках должна возникать электродвижущая сила, величина которой пропорциональна скорости движения. Идея определения скорости

самолета относительно земли при помощи измерений величины этой э. д. с. была предложена и даже запатентована. Можно привести несколько способов осуществления этой идеи, из которых наиболее очевидным является вращение вытянутого проводника в горизонтальной плоскости. Если самолет неподвижен, то при равномерной скорости вращения индуцированные заряды постоянны. При движении самолета э. д. с. индукции в северном полушарии всегда направлена справа налево, что приводит к перемещению зарядов с одного конца проводника на другой, т. е. к появлению переменного тока, частота которого равна частоте вращения проводника, а амплитуда пропорциональна скорости самолета относительно земли.

Величина этого тока очень мала, но все же в хорошо экранированной лаборатории его можно измерить достаточно чувствительными приборами. Возникает вопрос, исчезнет ли этот эффект в случае применения на самолете электрически экранированной аппаратуры. Известно, что магнитное поле проникает сквозь немагнитные металлические проводники, но известно также и то, что индуцированная в экране э. д. с. создает такие электрические поля, которые противодействуют полям, проникающим внутрь экрана. До сих пор мы рассматривали эту задачу с точки зрения неподвижного наблюдателя в системе S, связанной с землей, и пришли к выводу, что эта задача довольно сложная. Посмотрим теперь на нее с точки зрения наблюдателя в системе S', находящегося на самолете и производящего измерения. Обозначим вертикальное направление через z, направление движения через x, а компоненты магнитного поля земли через B_x, B_y и B_z. Обычно существует также и вертикальное электрическое поле, напряженность которого мы будем считать равной $\bar{E}_z$. Это поле определим в системе S, а затем при помощи соотношений (16.87) определим магнитное поле, наблюдаемое в системе S',

$$B'_x = B_x, \qquad B'_{y,z} = \varkappa (B_{y,z} \pm c^{-1} \beta \bar{E}_{z,y}) \approx B_{y,z}. \tag{16.95}$$

Так как скорость самолета значительно меньше скорости света, то $\beta \approx 0$ и $\varkappa \approx 1$ и, следовательно, магнитное поле в системе S' равно магнитному полю в системе S. Что же касается электрического поля, то

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -\varkappa v B_z \approx -v B_z, \quad E'_z = \varkappa \bar{E}_z + \varkappa v B_y \approx \bar{E}_z. \tag{16.96}$$

Таким образом, наблюдатель в системе S' обнаружит, что самолет находится в поперечном электрическом поле vB_z, поэтому он не может применить металлическое экранирование своей аппаратуры. Кроме того, это поле значительно меньше нормального атмосферного электрического поля $\bar{E}_z$, и при малейшем крене самолета результаты измерений окажутся совершенно неверными.

§ 16. Движение заряженной частицы в перекрещивающихся электрическом и магнитном полях. В предыдущем параграфе был приведен пример, показывающий, насколько упрощается задача, если при помощи уравнений преобразования (16.86) — (16.88) ввести в рассмотрение новое поле, появляющееся в движущейся системе координат. Теперь мы применим эти уравнения для исключения одной из компонент поля путем перехода к новой системе отсчета. Рассмотрим заряженную частицу, вылетающую из начала координат с компонентами начальной скорости v_x, v_y и v_z и находящуюся под действием однородного электрического поля, направленного вдоль оси y, и однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z. Для наблюдателя, движущегося вдоль оси x с

постоянной скоростью v, эти поля, согласно соотношениям (16.86) и (16.87), будут равны

$$E'_x = 0, \quad E'_y = \varkappa E_y - \varkappa v B_z, \quad E'_z = 0; \tag{16.97}$$

$$B'_x = 0, \quad B'_y = 0, \quad B'_z = \varkappa (B_z - c^{-1}\beta E_y). \tag{16.98}$$

Если $E_y < cB_z$ и если выбрать скорость движения S' такой, что

$$E_y = vB_z, \tag{16.99}$$

то наблюдатель в системе S' обнаружит только однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z и определяемое выражением (16.98). Пусть заряд вылетел в тот момент, когда начала координат систем S и S' совпадали, тогда начальными условиями будут $t = t' = x = x' = y = y' = z = z' = 0$. В системе S' компоненты начальной скорости заряда равны v'_x, v'_y и v'_z. Как видно из соотношения (16.43), в системе S' заряд будет двигаться с угловой скоростью ω' по траектории, имеющей вид спирали с угловым шагом γ', закручивающейся вокруг круглого цилиндра радиуса a, где

$$a = \left| \frac{\varkappa'_1 m_0 (v'^2_x + v'^2_y)^{1/2}}{qB'_z} \right| \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\gamma' = \frac{v'_z}{(v'^2_x + v'^2_y)^{1/2}}. \tag{16.100}$$

Воспользовавшись соотношениями (16.20), (16.21) и (16.23) для можно написать

$$\varkappa'_1 = \left(1 - \frac{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}{c^2}\right)^{-1/2} = (1-\beta^2)^{-1/2}\left(1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \beta\frac{v_x}{c}\right) =$$

$$= \varkappa\varkappa_1\left(1 - \beta\frac{v_x}{c}\right) = \frac{\varkappa\varkappa_1 (c^2 B - v_x E)}{c^2 B} \tag{16.101}$$

Подставляя выражения (16.98) и (16.101) в формулу (16.100), получим

$$a = \frac{\varkappa_1 m_0 c\,[c^2 (v_x B - E)^2 + (c^2 B^2 - E^2) v_y^2]^{1/2}}{q (c^2 B^2 - E^2)} \tag{16.102}$$

Угловая скорость вращения вокруг оси цилиндра будет равна

$$\omega' = \frac{(v'^2_x + v'^2_y)^{1/2}}{a} = \frac{q (c^2 B^2 - E^2)}{\varkappa_1 m_0 (c^2 B - v_x E)}, \tag{16.103}$$

где, если смотреть в положительном направлении оси z, угловая скорость вращения ω' для положительного заряда q направлена против часовой стрелки.

В большинстве случаев $E > v_x B$, так что величина v'_x отрицательна. Тогда линия, перпендикулярная к оси z и тангенциальная к поверхности цилиндра, образует в начале координат с отрицательным направлением оси x' острый угол ψ_0, тангенс которого на основании формул (16.10) и (16.11) равен

$$\operatorname{tg}\psi_0 = -\frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{\varkappa (v - v_x)} = \frac{v_y (c^2 B^2 - E^2)^{1/2}}{c (E - v_x B)} \tag{16.104}$$

Мы можем написать теперь координаты заряда в системе S' в зависимости от времени

$$x' = a\,[-\sin\omega' t' \cos\psi_0 + (1 - \cos\omega' t')\sin\psi_0] = a\,[\sin\psi_0 - \sin(\omega' t' + \psi_0)],$$

$$y' = a\,[\sin\omega' t' \sin\psi_0 + (1 - \cos\omega' t')\cos\psi_0] = a\,[\cos\psi_0 - \cos(\omega' t' + \psi_0)].$$

Введем величины ψ и b, определив их следующим образом:

$$\psi = \omega' t' + \psi_0 = \omega' \varkappa \left(t - \frac{vE}{c^2 B}\right) + \psi_0, \tag{16.105}$$

$$b = \frac{v}{\omega'} = \frac{\varkappa_1 m_0 E (c^2 B - v_x E)}{qB (c^2 B^2 - E^2)}. \tag{16.106}$$

Выразив x и y через x', y' и t' [см. формулы (16.7)] и t' через ψ и b, получим

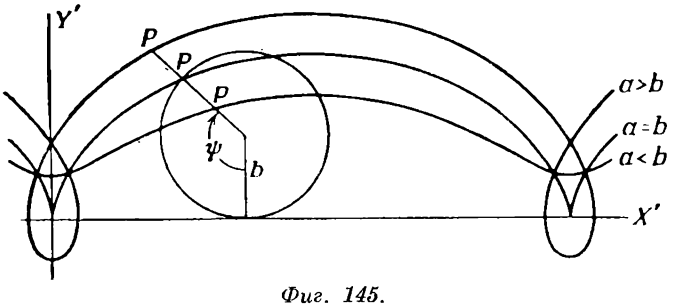
$$x\left(1-\frac{E^2}{c^2B^2}\right)^{1/2}=b\psi-b\psi_0+a\sin\psi_0-a\sin\psi, \tag{16.107}$$

$$y=a\cos\psi_0-a\cos\psi. \tag{16.108}$$

Мы получили точные уравнения траектории частицы в параметрическом виде. Заметим, что при значении $\psi=2n\pi+\psi_0$ частица находится в точке

$$x_n=2n\pi b\left(1-\frac{E^2}{c^2B^2}\right)^{-1/2} \qquad y_n=0.$$

Таким образом, траектории всех частиц, вылетающих из начала координат и характеризуемых одним и тем же значением b, будут периодически в одних и тех же точках пересекать ось z. Из соотношения (16.106) видно далее, что если начальные скорости значительно меньше скорости света,



Фиг. 145.

то расстояние между точками пересечения зависит только от напряженностей полей и от отношения заряда частицы к ее массе. Это обстоятельство использовано в одном из типов масс-спектрографа.

Пусть, например, напряженность электрического поля равна 100 000 *в/м*, а магнитная индукция составляет 0,1 *вебер/м*^{2}, тогда входящая в выражение (16.107) величина $E^2/(cB)^2$ будет равна 1/90 000. В этом случае формулы (16.107) и (16.108) превращаются в параметрическое уравнение трохоиды (циклоиды), описываемой точкой, лежащей на радиусе круга, катящегося без скольжения по прямой линии. Выберем начало координат так, чтобы этот круг катился вдоль оси x' в плоскости $y'x'$, тогда

$$x'=x+b\psi_0-a\sin\psi_0 \quad \text{и} \quad y'=y-a\cos\psi_0+b.$$

Найденные нами траектории изображены на фиг. 145, где b — радиус катящегося круга, а a — расстояние вдоль радиуса от центра круга до точки P, описывающей искомую кривую. Циклоидальные траектории при $a=b$ были использованы Дж. Дж. Томсоном в 1899 г. для определения отношения e/m_0 у фотоэлектронов.

§ 17. Аберрация и эффект Допплера. Как было показано в § 2 гл. XIII, все свойства электромагнитных волн можно описать при помощи вектора Герца **Z**, удовлетворяющего в свободном пространстве волновому уравнению (13.20),

$$\nabla^2\mathbf{Z}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2}. \tag{16.109}$$

Общее решение этого уравнения для случая плоской волны дается выражением (13.25). Для монохроматической волны с частотой ν это решение,

учитывая выражение (13.84), а также то, что $v = c$, можно записать в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\cos\frac{2\pi\nu}{c}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct). \tag{16.110}$$

Такая волна будет наблюдаться в системе S. Но эта же волна из системы S' будет наблюдаться распространяющейся вдоль направления $\mathbf{n}'$, а частота ее будет равна ν'

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{A}'\cos\frac{2\pi\nu'}{c}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}' - ct'). \tag{16.111}$$

По второму постулату § 1 скорости распространения в обеих системах S и S' должны быть одинаковыми. Уравнения преобразования (16.7) должны преобразовывать формулу (16.111) в (16.110), а это, как можно видеть, приводит к требованию равенства аргументов, стоящих под знаком косинусов в формулах (16.110) и (16.111), если выразить их через ν, $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}$ и t. Чтобы полученные соотношения были справедливы при всех значениях величин x, y, z и t, коэффициенты при каждом из них должны быть соответственно равны для обоих аргументов. Мы можем написать

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct = lx + my + nz - ct. \tag{16.112}$$

Используя преобразование (16.7) и производя группировку членов, получим

$$\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}' - ct' = l'x' + m'y' + n'z' - ct' =$$
$$= \varkappa\left(l' + \frac{v}{c}\right)x + m'y + n'z - \varkappa(c + l'v)t. \tag{16.113}$$

Приравнивая коэффициенты, найдем

$$\frac{\varkappa\left(l' + \frac{v}{c}\right)}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{\varkappa(c + l'v)}{c} = \frac{\nu}{\nu'}. \tag{16.114}$$

Эти соотношения позволяют обнаружить движение источника электромагнитного излучения относительно наблюдателя путем измерения излучения в точке наблюдения. Эффект изменения направления называется аберрацией, а эффект изменения частоты — эффектом Допплера. Предположим, что источник неподвижен относительно системы S', а наблюдатель неподвижен относительно системы S. Тогда наблюдателю, находящемуся в системе S, будет казаться, что свет распространяется в направлении l, m, n, а для наблюдателя, находящегося в системе S', направление распространения света будет l', m', n'; причем связь между l, m, n и l', m', n' дается соотношением (16.114). Приравнивая в соотношении (16.114) первый и четвертый члены и полагая $l = \cos\theta$ и $l' = \cos\theta'$, будем иметь

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}, \tag{16.115}$$

где $\beta = v/c$. Это—строгая формула аберрации. Приравнивая в соотношении (16.114) два последних члена, получим

$$\nu = \frac{1 + \beta\cos\theta'}{(1 - \beta^2)^{1/2}}\nu' \tag{16.116}$$

Это — строгое выражение для изменения наблюдаемой частоты электромагнитного излучения при движении источника относительно наблюдателя. Если источник приближается к наблюдателю, то $\cos\theta'$ положителен, если же источник удаляется, то $\cos\theta'$ отрицателен и, следовательно, в первом случае частота увеличивается, а во втором случае уменьшается. Согласно основным постулатам, аберрация и эффект Допплера появляются только

при относительном движении наблюдателя и источника. Таким образом, формулы (16.115) и (16.116) остаются справедливыми и в случае, когда источник покоится, а наблюдатель перемещается. Можно было бы ожидать отклонений от этих формул для астрономических расстояний, так как специальная теория относительности полностью подтверждена только на опытах, производившихся на земле, однако, повидимому, эти формулы являются точными и в астрономии.

ЗАДАЧИ

1. Длинный прямой катод радиуса a, по которому течет ток I, испускает электроны с ничтожной начальной скоростью. Под действием потенциала V эти электроны приобретают ускорение по направлению к длинному концентрическому цилиндрическому аноду радиуса b. Пренебрегая зависимостью массы от скорости, показать, что напряжение, при котором электроны перестают попадать на анод, равно

$$V=\frac{\mu^2 I^2 q}{8\pi^2 m}\ln^2\frac{b}{a}$$

2. Решить предыдущую задачу строго для случая, когда $E_\rho > cB_\varphi$, путем перехода к системе координат, движущейся параллельно оси цилиндра с такой скоростью, что в этой системе магнитное поле исчезает. Показать таким же образом, что вылетевший из катода электрон не может вернуться на него обратно.

3. Решить задачу 1 строго при $E_\rho < cB_\varphi$ путем перехода к системе координат, движущейся параллельно оси цилиндра со скоростью, при которой электрическое поле в этой системе исчезает. Показать, что электроны перестают попадать на анод при условии

$$2\pi m_0 c\,(A^{1/2}-v_1')=\mu I q\,(c^2-A)^{1/2}(1-\beta_1^2)^{1/2}\ln\frac{b}{a},$$

где $A=v_1'^2+v_2'^2$, а v_1', v_2' выражаются через начальные скорости v_1 и v_2 в направлениях x и ρ следующим образом:

$$v_1'=\frac{v_1-c\beta_1}{1-(v_1\beta_1/c)},\qquad v_2'=\frac{v_2(1-\beta_1^2)^{1/2}}{1-(v_1\beta_1/c)},$$

где $v_1=E_\rho/B_\varphi$. Начальная скорость v_φ пренебрежимо мала.

4. В вакуумной лампе имеется цилиндрический катод радиуса r_0, окруженный коаксиальным с ним анодом радиуса r_1. Лампа расположена таким образом, что ее ось совпадает с осью вращения конфокальных гиперболических поверхностей полюсов электромагнита. Показать, что если магнитное поле в плоскости симметрии равно $B_0 b\,(r^2+b^2)^{-1/2}$, то для того, чтобы электроны могли в этой плоскости достичь анода, необходимо приложить напряжение, точное значение которого равно

$$\frac{m_0c^2}{q}\left(\left\{1+\frac{B^2q^2b^2}{m_0^2c^2r_1^2}[(r_1^2+b^2)^{1/2}-(r_0^2+b^2)^{1/2}]^2\right\}^{1/2}-1\right).$$

5. Параллельный пучок электронов, ускоряемый напряжением V, создает ток, равный I. Сечение пучка представляет собой круг радиуса a. Показать, что величина нормального к пучку ускорения, приобретенного электроном на поверхности пучка под действием электрических и магнитных сил, выражается следующим образом:

$$\dot{v}_n=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2q}{mV}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{Vq}{2mc^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{Vq}{mc^2}\right)^2\right]^{-1}$$

6. Точечный заряд q двигается в поле другого неподвижного точечного заряда Q. Применяя закон сохранения момента количества движения p и закон сохранения энергии и используя выражение (16.45) для кинетической энергии, показать, что уравнение траекторий будет иметь вид

$$r^{-1}=A+B\cos\gamma\varphi,$$

где

$$\gamma^2=1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 cp}\right)^2.$$

7. В каждом из двух плоских листов, находящихся в вакууме на расстоянии a друг от друга, имеется отверстие диаметра b. Отверстия расположены таким образом, что линия, соединяющая их центры, перпендикулярна обеим плоскостям. Сквозь первое отверстие пускается внутрь поток заряженных частиц, имеющих одинаковую энергию, причем максимальный угол расхождения частиц в пучке, отсчитываемый от нормали, равен α. Пренебрегая величиной α по сравнению с единицей, найти значения магнитного поля, приложенного перпендикулярно листам, при которых пучок частиц пройдет и через второе отверстие. Показать, что максимальный диаметр пучка между отверстиями равен

$$\frac{2a}{n\pi}\sin\alpha + b,$$

где n — целое число.

8. Показать, что если пучок, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид конуса, т. е. все частицы исходят из одной и той же точки оси, и если эта точка также находится в магнитном поле, то минимальное значение последнего, необходимое для сведения пучка частиц в фокус, расположенный за вторым отверстием в точке, представляющей собой зеркальное изображение источника, равно

$$2\pi mv\alpha\,[q\,(a\alpha+b)]^{-1},$$

где α — угол, под которым виден радиус первого отверстия из точки, где находится источник. Показать также, что это поле увеличивает число ионов, проходящих через первое отверстие, в число раз, равное

$$\left[\frac{\pi b}{2\,(a\alpha+b)}\right]^2\left[\sin\frac{\frac{1}{2}\pi b}{a\alpha+b}\right]^{-2}$$

9. Две одинаковые параллельные круглые цилиндрические проводящие оболочки имеют заряд на единицу длины, равный соответственно $+Q$ и $-Q$. Внутри каждой из них протянут провод, расположенный так, что если ток I течет в проводах в противоположных направлениях, то поверхности оболочек совпадают с силовыми линиями магнитного поля. Найти, в какой движущейся системе координат при $cQ < I$ будет существовать только магнитное поле.

10. Показать, что если заряженные частицы вылетают с поверхности одного из цилиндров (см. предыдущую задачу), где до этого они покоились, то составляющая их скорости, параллельная цилиндру, в точке r_1, r_2, равна

$$v_x = I\ln\frac{r_1r_{20}}{r_2r_{10}}\left(Q\ln\frac{r_1r_{20}}{r_2r_{10}}+\frac{2\pi m_0}{pq}\right)^{-1}$$

где r_{10} и r_{20} — расстояния от точки вылета до каждого из проводов.

11. Вектор-потенциал двухмерного магнитостатического поля имеет только z-составляющую. Пусть ион с зарядом q и массой покоя m_0 имеет скорость v. В точке, где вектор-потенциал равен A_1, составляющая этой скорости по оси z равна v_z. Показать, что в точке, где вектор-потенциал равен A_2, составляющая скорости по оси z определяется выражением

$$v_z - q\,(m_0c)^{-1}\,(c^2-v^2)^{1/2}\,(A_2-A_1).$$

12. Показать, что в случае любых двухмерных электрических и магнитных полей, пересекающихся ортогонально, всегда можно перейти к такой движущейся системе координат, в которой E или cB (в зависимости от того, которое из них меньше) будут исключены.

13. Положение заряда q задано уравнением $s = a\cos\omega t$. Показать, пользуясь выражениями (16.71) и (16.77), что при $\omega ac^{-1} \ll 1$ и $a \ll r$ периодическая составляющая полей E и B, создаваемых зарядом q, описывается соотношениями (14.13) — (14.15), где r — расстояние от среднего положения заряда до точки наблюдения, θ — угол между r и s, а $\mathrm{m} = qa$.

14. Положения s_1 и s_2 двух одинаковых зарядов q заданы уравнениями $s_1 = -s_2 = 2a\cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$. Следуя предыдущей задаче и считая $ar^{-1} \ll \omega ac^{-1} \ll 1$, $Q_0 = qa^2$, показать, что на больших расстояниях периодическая составляющая поля равна

$$cB_\varphi \quad E_\theta = -\frac{\omega^3 Q_0\sin 2\theta}{8\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Сравнить с полем линейного квадруполя, рассмотренного в задаче 1 гл. XIV.

15. Электрон движется в аксиально симметричном магнитостатическом поле, для которого

$$A_\varphi(\rho, z) \neq 0, \qquad A_\rho = 0, \qquad A_z = 0.$$

Показать, что если угловая скорость вращения электрона вокруг оси в точке $\rho = \rho_1$, $z = z_1$ равна ω_1, а в точке $\rho = \rho_2$, $z = z_2$ равна ω_2, то

$$m\rho_1^2\omega_1 - m\rho_2^2\omega_2 = e\,[\rho_1 A_\varphi(\rho_1, z_1) - \rho_2 A_\varphi(\rho_2, z_2)].$$

16. Частица, летящая в направлении оси x со скоростью v_0 и имеющая заряд q и массу покоя m_0, в момент времени $t = t_0$ входит в точке $x = 0$, $y = \frac{1}{2}b$, $z = 0$ внутрь эвакуированного прямоугольного волновода, вдоль которого распространяется волна TE_{01}. Показать, что уравнение движения частицы в системе, движущейся со скоростью, равной групповой скорости волны, имеет вид

$$\frac{d(mv')}{dt'} = -qE_0 \sin(c\beta_{01}t'),$$

где E_0—максимальное значение напряженности электрического поля в покоящейся системе координат. Показать, что при $v_x \ll c$ положение частицы в произвольный момент времени t в этой системе будет описываться уравнением

$$x = qE_0(\omega^2 m_0)^{-1}[\omega(t - t_0)\cos\omega t_0 - \sin\omega t + \sin\omega t_0] + v_0(t - t_0), \qquad y = \frac{1}{2}b, \qquad z = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

Biggs H. F., The Electromagnetic Field, Oxford, 1934.

Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII, Berlin, 1927.

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1925.

Livens G. H., Theory of Electricity, Cambridge, 1926.

Lorentz H. A., Theory of Electrons, Leipzig, 1916. (См. перевод: Лоренц, Теория электронов, М. 1934.)

Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, 1929.

Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941. (См. перевод: Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)

Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934.

Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI, 1932.

Zworykin V. K., Morton G. A., Ramberg E. G., Hillier J., Vance A. W., Electron Optics and the Electron Microscope, Wiley, 1945.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

Существует три способа классификации абсолютных систем электрических единиц. В соответствии с употребляемыми механическими единицами системы электрических единиц могут принадлежать к системе сантиметр — грамм — секунда (CGS) или к системе метр — килограмм — секунда (MKS). В зависимости от принятых величин основных единиц измерений система называется классической или практической. И, наконец, по способу введения множителя 4π различают рационализированные и нерационализированные системы единиц. Применяемая в этой книге система MKS принадлежит к группе практических рационализированных систем MKS. Приведенные в приложении таблицы содержат соотношения между этими единицами, практическими нерационализированными CGS единицами и классическими нерационализированными CGS единицами.

Во всех рационализированных системах эквивалентные формулы имеют очень сходный вид. Однако способ введения множителя 4π в определение единиц в системе Джорджи MKS отличается от того способа, который принят в соответствующей классической системе, а именно, система строится таким образом, чтобы рационализация не влияла на наиболее распространенные практические единицы кулон и вольт. Это осуществляется путем введения множителя 4π в диэлектрическую и магнитную проницаемость. Поскольку во всех таблицах, в которых приводятся числовые значения электрических и магнитных свойств материалов, принято употреблять относительную диэлектрическую проницаемость $K=\varepsilon/\varepsilon_v$ и относительную магнитную проницаемость $K_m=\mu/\mu_v$, то часто в практических системах единиц предпочитают применять величины $K\varepsilon_v$ и $K_m\mu_v$, где ε_v и μ_v диэлектрическая и магнитная проницаемости для вакуума.

Если формула дана в одной какой-либо системе единиц, то ее всегда можно написать и в любой другой системе, выражая входящие в нее величины в требуемых единицах и подставляя их в формулу. Чтобы пояснить это, для примера выразим закон Кулона о силе взаимодействия двух зарядов в классической нерационализированной системе CGS электростатических единиц. Физические величины, выраженные в единицах CGSE, мы будем обозначать буквами без индексов, а аналогичным величинам, выраженным в единицах Джорджи MKS, будем приписывать индекс 1. В соответствии с табл. 2

$$q_1=3^{-1}\cdot 10^{-9}q \quad \text{и} \quad \varepsilon_1=(36\pi)^{-1}\cdot 10^{-11}\varepsilon. \tag{1}$$

Из табл. 1 для механических единиц мы видим, что

$$F_1=10^{-5}F \quad \text{и} \quad r_1=10^{-2}r. \tag{2}$$

Формула (1.1) для закона Кулона в системе MKS имеет вид

$$F_1=\frac{q\cdot q_1'}{4\pi\varepsilon_1 r_1^2}=\frac{q_1 q_1'}{4\pi K\varepsilon_v r_1^2}. \tag{3}$$

Подставляя сюда значения F_1, q_1, ε_1 и r_1 из формул (1) и (2) и упрощая, получаем

$$F=\frac{qq'}{\varepsilon r^2}. \tag{4}$$

Аналогичную процедуру, разумеется, можно произвести и при преобразовании формул, содержащих магнитные величины. Подробное рассмотрение этого вопроса содержится в статье Кеннелли [1]). Заметим, что если в формулах (3) и (4) ε положить равной единице, то формулы все же будут отличаться одна от другой. Таким образом, даже в тех случаях, когда результат относится к процессам в вакууме, формула, которую нужно выразить в системе CGSE или CGSM, должна быть написана для среды с отличными от единицы μ или ε.

---

[1]) Kennelly, Amer. Phil. Soc. Proc., 76, 343 (1936).

Таблица 1

А. Чтобы формулу, написанную в системе единиц CGS, выразить в единицах MKS, нужно заменить входящие в эту формулу символы на соответствующие значения в крайнем правом столбце таблицы.

Длина .	l *м*	10^2 l *см*
Масса .	m *кг*	10^3 m *г*
Мощность .	P *вт*	10^7 P *эрг/сек*
Сила .	F *ньютонов*	10^5 F *дин*
Энергия . .	W *джоулей*	10^7 W *эрг*

Б. Чтобы формулу, написанную в рационализированной системе единиц MKS, выразить в единицах CGS, нужно заменить входящие в эту формулу символы на соответствующие значения в крайнем правом столбце таблицы.

Длина .	l *см*	10^{-2} l *м*
Масса .	m *г*	10^{-3} m *кг*
Мощность .	P *эрг/сек*	10^{-7} P *вт*
Сила .	F *дин*	10^{-5} F *ньютонов*
Энергия . .	W *эрг*	10^{-7} W *джоулей*

Таблица 2

Для того чтобы формулу, написанную в рационализированной системе MKS, выразить в единицах системы CGSE или в единицах гауссовой системы, нужно заменить входящие в эту формулу символы на соответствующие значения в крайнем правом столбце таблицы. $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ При очень точных вычислениях множитель 3 надо каждый раз заменять на 2,9978.

Физическая величина	CGSE	CGSM	Практическая система
Диэлектрическая проницаемость	ε	$c^{-2}\varepsilon$	$9^{-1}10^{-11}\varepsilon 4\pi$ *фарад/см* $(36\pi)^{-1}\cdot 10^{-9}\varepsilon$ *фарад/м*
Емкость .	C	$c^{-2}C$	$9^{-1}\cdot 10^{-11}C$ *фарад*
Заряд, величина	q	$c^{-1}q$	$3^{-1}\cdot 10^{-9}q$ *кулон*
Импеданс	Z	c^2Z	$9\cdot 10^{11}Z$ *ом*
Напряженность электрического поля .	E	cE	$300E$ *в/см* $30\,000E$ *в/м*
Потенциал электрический скалярный . .	V	cV	$300V$ *в*
Потенциальный коэффициент .	S	c^2S	$9\cdot 10^{11}S$ *1/фарад*
Проводимость .	G	$c^{-2}G$	$9^{-1}10^{-11}G$ *1/ом*
Проводимость удельная объемная	γ	$c^{-2}\gamma$	$9^{-1}10^{-11}\gamma$ *1/(ом·см)* $9^{-1}\cdot 10^{-9}\gamma$ *1/(ом·м)*
Проводимость удельная поверхностная . .	γ'	$c^{-2}\gamma'$	$9^{-1}\cdot 10^{-11}\gamma'$ *1/ом*
Реактивное сопротивление	X	c^2X	$9\cdot 10^{11}X$ *ом*
Самоиндукция .	L	c^2L	$9\cdot 10^{11}L$ *гн*
Сопротивление	R	c^2R	$9\cdot 10^{11}R$ *ом*
Сопротивление удельное объемное .		$c^2\tau$	$9\cdot 10^{11}\tau$ *ом·см* $9\cdot 10^{9}\tau$ *ом·м*
Сопротивление удельное поверхностное	ς	$c^2\varsigma$	$9\cdot 10^{11}\varsigma$ *ом*
Ток, объемная плотность		$c^{-1}i$	$3^{-1}\cdot 10^{-9}i$ *а/см²* $3^{-1}\cdot 10^{-5}i$ *а/м²*
Ток, поверхностная плотность	i'	$c^{-1}i'$	$3^{-1}\cdot 10^{-9}i'$ *а/см* $3^{-1}\cdot 10^{-7}i'$ *а/м*
Ток	I	$c^{-1}I$	$3^{-1}10^{-9}I$ *а*
Электрическая индукция . .	D	$c^{-1}D$	$3^{-1}\cdot 10^{-9}D4\pi$ *кулон/см²* $(12\pi)^{-1}10^{-5}D$ *кулон/м²*
Электродвижущая сила	$\mathscr{E}$	$c\mathscr{E}$	$300\mathscr{E}$ *в*

Таблица 3

Для того чтобы формулу, написанную в рационализированной системе, выразить в единицах системы CGSM или в единицах гауссовой системы (отмеченных звездой), нужно заменить входящие в эту формулу символы на соответствующие значения в крайнем правом столбце таблицы.

$c = 2{,}9978 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$

Физическая величина	CGSM	CGSE	Практические единицы	
Емкость	C	c^2C^*	10^9 *C фарад*	
Заряд, величина	q	cq^*	$10q$ *кулон*	
Импеданс	Z	$c^{-2}Z^*$	10^{-9}Z *ом*	
Магнитная индукция	B^*	$c^{-1}B$	B *гаусс*	$10^{-4}B$ *вебер/м²*
Магнитная проницаемость	μ^*	$c^{-2}\mu$	μ *гаусс/эрстед*	$4\pi \cdot 10^{-7}\mu$ *гн/м*
Магнитное сопротивление	R'	c^2R'	R' *гильберт/максвелл*	$(10^9/4\pi)\,R'$ *ампер-витков/вебер*
Магнитный заряд (полюс)	m^*	^{-1}m	$4\pi m$ *максвелл*	$4\pi 10^{-8}\,m$ *вебер*
Магнитный момент (диполь)	$\mathfrak{m}'$	$^{-1}\mathfrak{n}'$	$4\pi\mathfrak{m}'$ *максвелл · см*	$4\pi 10^{-10}\,\mathfrak{m}'$ *вебер · м*
Магнитный момент (петля)	$\mathfrak{m}^*$	$c\mathfrak{m}$	$10\mathfrak{m}$ *а · см²*	$10^{-3}\,\mathfrak{m}$ *а·м²*
Магнитный поток	N^*	^{-1}N	N *максвелл*	10^{-8}N *вебер*
Магнитодвижущая сила	Ω^*	$c\Omega$	Ω *гильберт*	$(10/4\pi)\,\Omega$ *ампер-витков*
Намагниченность (диполь)	M'	$c^{-1}M'$	$4\pi M'$ *максвелл/см²*	$4\pi \cdot 10^{-4}\,M'$ *вебер/м²*
Намагниченность (петля)	M^*	cM	$10M$ *а/см*	$1000\,M$ *а/м*
Напряженность магнитного поля	H^*	cH	H *эрстед*	$(10^3/4\pi)H$ *ампер-витков/м*
Напряженность электрического поля	E	$c^{-1}E^*$	$10^{-8}E$ *в/см*	$10^{-6}\,E$ *в/м*

Потенциал магнитный векторный	A^*	$c^{-1}A$	1 гаусс	$10^{-6}A$ вебер/м
Потенциал электрический скалярный	V	$c^{-1}V^*$		$10^{-8}V$ в
Потенциальный коэффициент	S	$c^{-2}S^*$		$10^{9}S$ 1/фарад
Проводимость	G	c^2G^*		$10^{9}G$ 1/
Проводимость удельная объемная	γ	$c^2\gamma^*$	$10^{9}\gamma$ 1/(ом см)	$10^{11}\gamma$ 1/(ом м)
Проводимость удельная поверхностная	γ'	$c^2\gamma'$		$10^{9}\gamma'$ 1/ом
Реактивное сопротивление	X	$c^{-2}X^*$		$10^{-9}X$ ом
Самоиндукция	L	$c^{-2}L^*$		$10^{-9}L$ гн
Сопротивление	R	$c^{-2}R^*$		$10^{-9}R$ ом
Сопротивление удельное объемное		$c^{-2}\tau^*$	$10^{-9}\tau$ ом · см	$10^{-11}\tau$ ом м
Сопротивление удельное поверхностное	ς	$c^{-2}\varsigma^*$		$10^{-9}\varsigma$ ом
Ток, объемная плотность		ci^*	$10i$ а/см^2	$10^{5}i$ а/м^2
Ток, поверхностная плотность		ci'	$10i'$ а/см	$10^{3}i'$ а/м
Ток	I	cI^*		$10I$ а
Электродвижущая сила	$\mathscr{E}$	$c^{-1}\mathscr{E}^*$		$10^{-8}\mathscr{E}$ в

Таблица 4

Для того чтобы формулу, написанную в единицах CGSM, CGSE или в единицах гауссовой системы, выразить а) в практических единицах нерационализированной системы CGS или б) в рационализированных единицах системы MKS, нужно заменить входящие в эту формулу символы соответственно на значения, помещенные в столбце CGSM, CGSE, или на значения, отмеченные звездочкой.

Физическая величина	а) Практическая система CGS б) Рационализированная система MKS	CGSM	CGSE
Диэлектрическая проницаемость	а) ε 4π *фарад/см*	$10^{-9}\varepsilon$	$9\ 10^{11}\varepsilon^*$
	б) ε *фарад/м*	$4\pi \cdot 10^{-11}\varepsilon$	$36\ 10^{9}\varepsilon^*$
Емкость	C *фарад*	$10^{-9}C$	$9\ 10^{11}C^*$
Заряд, величина	q *кулон*	$10^{-1}q$	$3 \cdot 10^{9}q^*$
Импеданс	Z *ом*	$10^{9}Z$	$9^{-1} \cdot 10^{-11}Z^*$
Магнитная индукция	а) B *гаусс*	B^*	$10^{-10}B$
	б) B *вебер/м*^{2}	$10^{4}B^*$	$3^{-1} \cdot 10^{-6}B$
Магнитная проницаемость	а) μ *гаусс/эрстед*	μ^*	$9^{-1} \cdot 10^{-20}\mu$
	б) μ *гн/м*	$(4\pi)^{-1} \cdot 10^{7}\mu^*$	$(36\pi)^{-1} \cdot 10^{-13}\mu$
Магнитное сопротивление	а) R' *гильберт/. велл*	R'^*	$9 \cdot 10^{20}R'$
	б) R' *ампер-витки/вебер*	$4\pi \cdot 10^{-9}R'^*$	$36\pi \cdot 10^{11}R'$
Магнитный заряд (полюс)	а) m *макс*	$(4\pi)^{-1}m^*$	$(12\pi)^{-1} \cdot 10^{-10}m$
	б) m *вебер*	$(4\pi)^{-1} \cdot 10^{9}m^*$	$(1200\pi)^{-1}m$
Магнитный момент (диполь)	а) $\mathfrak{m}'$ *максв*	$(4\pi)^{-1}\mathfrak{m}'^*$	$(12\pi)^{-1}\ 10^{-10}\mathfrak{m}'$
	б) $\mathfrak{m}'$ *вебер м*	$(4\pi)^{-1} \cdot 10^{10}\mathfrak{m}'^*$	$(12\pi)^{-1}\mathfrak{m}'$
Магнитный момент (петля)	а) $\mathfrak{m}$ *а*	$10^{-1}\mathfrak{m}^*$	$3 \cdot 10^{9}\mathfrak{m}$
	б) $\mathfrak{m}$ *а*	$10^{3}\mathfrak{m}^*$	$3 \cdot 10^{13}\mathfrak{m}$
Магнитный поток	а) N *максвелл*	N^*	$3^{-1} \cdot 10^{-10}N$
	б) N *вебер*	$10^{8}N^*$	$(300)^{-1}N$
Магнитодвижущая сила	а) Ω *гильберт*	Ω^*	$3 \cdot 10^{10}\Omega$
	б) Ω *ампер-витко*	$4\pi \cdot 10^{-1}\Omega^*$	$12\pi \cdot 10^{9}\Omega$
Намагниченность (диполь)	а) M *максвелл'*	$(4\pi)^{-1}M^*$	$(12\pi)^{-1}\ 10^{-10}M$
	б) M *вебер/.*	$(4\pi)^{-1}\ 10^{1}M^*$	$(12\pi)^{-1} \cdot 10^{-6}M$
Намагниченность (петля)	а) M *а/см*	$10^{-1}M^*$	$10^{9}M$
	б) M *а м*	$10^{-3}M^*$	$3\ 10^{7}M$

Таблица 4 (продолжение)

Физическая велич	а) Практическая система CGS б) Рационализированная система MKS	CGSM	CGSE
Напряженность магнитного поля .	а) H *эрстед*	H^*	$3 \cdot 10^{10} H$
	б) H *ампер-витков/м*	$4\pi \cdot 10^{-3} H^*$	$12\pi \cdot 10^{7} H$
Напряженность электрического поля .	а) E *в/см*	$10^{8} E$	$(300)^{-1} E$
	б) E *в/м*	$10^{6} E$	$3^{-1} \cdot 10^{-4} E$
Потенциал магнитный векторный .	а) A *гаусс* ·	A^*	$3^{-1} \cdot 10^{-10} A$
	б) A *вебер/м*	$10^{6} A^*$	$3^{-1} \cdot 10^{-4} A$
Потенциал электрический скалярный .	V *в*	$10^{8} V$	$(300)^{-1} V^*$
Потенциальный коэффициент	S 1/*фарад*	$10^{9} S$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} S^*$
Проводимость	G 1/*ом*	$10^{-9} G$	$9 \cdot 10^{11} G^*$
Проводимость удельная объемная	а) γ 1/(*ом·см*)	$10^{-9} \gamma$	$9 \cdot 10^{11} \gamma^*$
	б) γ 1/(*ом·м*)	$10^{-11} \gamma$	$9 \cdot 10^{9} \gamma^*$
Проводимость удельная поверхностная . .	γ' 1/*ом*	$10^{-9} \gamma'$	$9 \cdot 10^{11} \gamma'^*$
Реактивное сопротивление .	X *ом*	$10^{9} X$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} X^*$
Самоиндукция	L *гн*	$10^{9} L$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} L^*$
Сопротивление .	R *ом*	$10^{9} R$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} R^*$
Сопротивление удельное объемное .	а) τ *ом · см*	$10^{9} \tau$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} \tau^*$
	б) τ *ом · .*	$10^{11} \tau$	$9^{-1} \cdot 10^{-9} \tau^*$
Сопротивление удельное поверхностное .	ς *ом*	$10^{9} \varsigma$	$9^{-1} \cdot 10^{-11} \varsigma^*$
Ток .	I *а*	$10^{-1} I$	$3 \cdot 10^{9} I^*$
Ток, объемная плотность	а) i *а/см²*	$10^{-1} i$	$3 \cdot 10^{9} i^*$
	б) i *а/м²*	$10^{-5} i$	$3 \cdot 10^{5} i^*$
Ток, поверхностная плотность .	а) i' *а/см*	$10^{-1} i'$	$3 \cdot 10^{9} i'^*$
	б) i' *а/м*	$10^{-3} i'$	$3 \cdot 10^{7} i'^*$
Электрическая индукция (смещение)	а) D 4π *кулон/см²*	$10^{-1} D$	$3 \cdot 10^{9} D^*$
	б) D *кулон/м²*	$4\pi \cdot 10^{-5} D$	$12\pi \cdot 10^{5} D^*$
Электродвижущая сила	$\mathscr{E}$ *в*	$10^{8} \mathscr{E}$	$(300)^{-1} \mathscr{E}^*$

Таблица 5

В этой таблице приведены физические размерности электрических единиц: l — длина, m — масса, t — время, q — заряд, ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость. Для определения размерности в любой системе единиц можно пользоваться любым столбцом таблицы, но проще всего в системе CGSE пользоваться значениями, помещенными в первом столбце, положив $\varepsilon = 1$, в системе CGSM — значениями во втором столбце ($\mu = 1$) и, наконец, в системе MKS — значениями, помещенными в третьем столбце.

Физическая величина	Символ	CGSE ($\varepsilon=1$)	CGSM ($\mu=1$)	MKS
Диэлектрическая проницаемость		ε	$\mu^{-1}l^{-2}t^2$	$m^{-1}l^{-3}t^2q^2$
Емкость	C	εl	$\mu^{-1}l^{-1}t^2$	$m^{-1}l^{-2}t^2q^2$
Заряд, величина	q, Q	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}$	q
Импеданс	Z	$\varepsilon^{-1}l^{-1}t$	μlt^{-1}	$ml^2t^{-1}q^{-2}$
Магнитная индукция	B	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{-3/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$mt^{-1}q^{-1}$
Магнитная проницаемость	μ	$\varepsilon^{-1}l^{-2}t^2$	μ	ml^{-2}
Магнитное сопротивление	R'	εlt^{-2}	$\mu^{-1}l^{-1}$	$m^{-1}l^{-2}q^2$
Магнитный заряд	m	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$	$ml^2t^{-1}q^{-1}$
Магнитный момент (диполь)	m'	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{3/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{5/2}t^{-1}$	$ml^3t^{-1}q^{-1}$
Магнитный момент (петля)	m	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{7/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{5/2}t^{-1}$	$l^2t^{-1}q$
Магнитный поток	N	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$	$ml^2t^{-1}q^{-1}$
Магнитодвижущая сила	Ω	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$t^{-1}q$
Намагниченность (диполь)	M'	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{-3/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$mt^{-1}q^{-1}$
Намагниченность (петля)	M	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$l^{-1}t^{-1}q$
Напряженность магнитного поля	H	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$l^{-1}t^{-1}q$
Напряженность электрического поля	E	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-2}$	$mlt^{-2}q^{-1}$
Потенциал магнитный векторный	A	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{-1/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$mlt^{-1}q^{-1}$
Потенциал электрический скалярный	V	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$ml^2t^{-2}q^{-1}$
Потенциальный коэффициент	S	$\varepsilon^{-1}l^{-1}$	μlt^{-2}	$ml^2t^{-2}q^{-2}$
Проводимость	G	εlt^{-1}	$\mu^{-1}l^{-1}t$	$m^{-1}l^{-2}tq^2$
Проводимость удельная объемная	γ	εt^{-1}	$\mu^{-1}l^{-2}t$	$m^{-1}l^{-3}tq^2$
Проводимость удельная поверхностная	γ'	εlt^{-1}	$\mu^{-1}l^{-1}t$	$m^{-1}l^{-2}tq^2$
Реактивное сопротивление	X	$\varepsilon^{-1}l^{-1}t$	μlt^{-1}	$ml^2t^{-1}q^{-2}$
Самоиндукция	L	$\varepsilon^{-1}l^{-1}t^2$	μl	ml^2q^{-2}
Сопротивление	R	$\varepsilon^{-1}l^{-1}t$	μlt^{-1}	$ml^2t^{-1}q^{-2}$
Сопротивление удельное объемное	τ	$\varepsilon^{-1}t$	μl^2t^{-1}	ml^3tq^{-2}
Сопротивление удельное поверхностное	ς	$\varepsilon^{-1}l^{-1}t$	μlt^{-1}	$ml^2t^{-1}q^{-2}$
Ток	I	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$t^{-1}q$
Ток, объемная плотность		$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{-3/2}t^{-1}$	$l^{-2}t^{-1}q$
Ток, поверхностная плотность		$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$l^{-1}t^{-1}q$
Электрическая индукция (смещение)	D	$\varepsilon^{1/2}m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{-3/2}$	$l^{-2}q$
Электродвижущая сила	$\mathscr{E}$	$\varepsilon^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$ml^2t^{-2}q^{-1}$

Таблица 6

Числовые величины, характеризующие вакуум в рационализированной системе MKS

Скорость света	c	$(\mu_v\varepsilon_v)^{-1/2} = 2{,}99776 \cdot 10^8$ *м/сек*
Диэлектрическая проницаемость	ε_v	$8{,}85525 \cdot 10^{-12} \approx (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ *фарад/м*
Магнитная проницаемость	μ_v	$4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}25664 \cdot 10^{-6}$ *ен/м*
Характеристический импеданс	$(\mu_v/\varepsilon_v)^{1/2}$	376,707 *ом*
Характеристическая проводимость	$(\varepsilon_v/\mu_v)^{1/2}$	$2{,}65458 \cdot 10^{-3}$ *1/ом*

Таблица 7

Значения атомных констант в рационализированной системе MKS*

Постоянная Фарадея ($O^{16} = 16$) .	$F = 96\,522 \pm 7$ *кулон/граммэквивалент*
Число Авогадро ($O^{16} = 16$)	$N = (6{,}0251 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{23}$ *1/моль*
Постоянная Планка .	$h = (6{,}6234 \pm 0{,}0011) \cdot 10^{-34}$ *джоуль·сек*
Заряд электрона	$e = (1{,}60199 \pm 0{,}00016) \cdot 10^{-19}$ *кулон*
Удельный заряд электрона	$/m = (1{,}75936 \pm 0{,}00018) \cdot 10^{11}$ *кулон/кг*

* DuMond J. W. M., Cohen E. R., Rev. Mod. Phys., **20**, 82 (1948). (В табл. 6 и 7 приведенные данные относятся к 1948 г. Данные на декабрь 1950 г. см. Du Mond J. W. M., Cohen E. R., Phys. Rev., **82**, 855 (1951), а также Усп. Физ. Наук, **45**, 458 (1951). Специально относительно скорости света см. Усп. Физ. Наук, **42**, 485 (1950) и **48**, 599 (1952).—*Прим. перев.*)

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА[1])

а) *По общим вопросам электродинамики*

Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, М.—Л., 1936.
Беккер Р., Электронная теория, М.—Л., 1936.
Вульф А. А., Сборник упражнений по теории электромагнитного поля, М., 1939.
Говорков В. А., Электрические и магнитные поля, М., 1951.
Гольдштейн Л. Д., Электромагнитные колебания и волны, Л., 1951.
Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В., Электромагнитные колебания и волны, ч. II, Л., 1953.
Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М.—Л., 1948.
Иваненко Д. Д. и Соколов А. А., Классическая теория поля, М.—Л., 1951.
Калантаров П. Л. и Нейман Л. Р., Теоретические основы электротехники, ч. III, М.—Л., 1948.
Ландау Л. и Лившиц Е., Теория поля, М.—Л., 1948.
Лоренц Г. А., Теория электромагнитного поля, М.—Л., 1933.
Максвелл Д. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, М., 1952.
Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. V, М., 1950.
Миткевич В. Ф., Магнитный поток и его преобразования, М.—Л., 1946.
Папалекси Н. Д. (под редакцией), Курс физики, т. II, М.—Л., 1947.
Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.
Тамм И. Е., Основы теории электричества, М.—Л., 1949.
Френкель Я. И., Электродинамика, т. I и II, М.—Л., 1934.
Эйхенвальд А. А., Теоретическая физика, ч. VI, М.—Л., 1931.

б) *По теории быстропеременных полей и ее приложениям*

Вайнштейн Л. А., Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., 1953.
Введенский Б. А. и Аренберг А. Г., Радиоволноводы, ч. I, М.—Л., 1946.
Гуревич А. Г., Полые резонаторы и волноводы, М., 1952.
Де Бройль Луи, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М., 1948.
Кисунько Г. В., Электродинамика полых систем, Л., 1949.
Купрадзе В., Основные задачи математической теории дифракции, М.—Л., 1953.
Леонтович М. А., О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел (статья в сборнике «Исследование по распространению радиоволн», под ред. Введенского Б. А., М.—Л., 1948).
Леонтович М. и Левин М., О возбуждении вибраторов в антеннах, Изв. АН СССР, серия физич., 8, 3, 156 (1944).
Малов Н. Н., О расчете контуров, эквивалентных полому резонатору, ЖТФ, 18, 4, 421 (1948.)
Нейман Н. С., Выпуклые эндовибраторы, ИЭСТ, 9, 1 (1939).
Потехин А. И., Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, М., 1948.
Пистолькорс А. А., Антенны, М., 1947.
Рамо С. и Виннери Дж., Поля и волны в современной радиотехнике, М.—Л., 1948.
Рытов С. М., К расчету поглощения электромагнитных волн в трубах, ЖТФ, 10, 176 (1940).
Самарский А. А. и Тихонов А. Н., О возбуждении радиоволноводов, ЖТФ, 17, 11, 1283, (1947); 17, 12, 1431 (1947); 18, 8, 971 (1948).
Слэтер Дж. К., Передача ультракоротких волн, М.—Л., 1946.
Фельд Я. Н., Основы теории щелевых антенн, М., 1948.
Фок В. А., Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, М.—Л., 1946.
Антенны, Сов. радио, М., 1951.
Линии передачи сантиметровых волн, т. I, Сов. радио, М., 1951.
Справочник по волноводам, Сов. радио, М., 1952.
Теория линий передачи сверхвысоких частот, т. I и II, Сов. радио, М., 1951.
Техника сверхвысоких частот, т. I, Сов. радио, М., 1952.

---

[1]) Дополнительная литература составлена переводчиками.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

НОМЕРА ЗАДАЧ НАПЕЧАТАНЫ КУРСИВОМ И ЗАКЛЮЧЕНЫ В СКОБКИ ПОСЛЕ НОМЕРА СТРАНИЦЫ, НА КОТОРОЙ ОНИ НАХОДЯТСЯ

А

Абберация электромагнитных волн 569, 570
Ампер, единица силы тока 222, 260
Ампера опыт 260, 279
Андерсона мостик 359
Анизотропная среда, диэлектрическая проницаемость 33, 436
— — магнитная проницаемость 286, 414, 436
— — плотность энергии 42
— — уравнение Лапласа 60
— — электрические оси 33
— — электромагнитные волны 435—437
Антенна 464—476
— биконическая 471—473, 493 (*18*), 494 (*19*)
— в полом резонаторе 537—539
— влияние земли 476
— входной импеданс 473
— выигрыш 475
— кольцевая (петля) 479—480, 492 (*11*)
— коэффициент направленного действия 475
— линейная 464—469
— — возбуждаемая в центре 467
— — диаграмма направленности 467, 475, 492 (*7*, *9*, *10*)
— — излучаемая мощность 468, 476
— — излучение бегущей волны 469
— — нагрузка на конце 466
— — плотность зарядов 465
— — поля вблизи 464, 46—
— — — вдали 467, 468
— — потенциалы поля 464
— — потери на излучение 467
— — сопротивление излучения 467
— системы 474—476, 492 (*7*, *10*)
— сопротивление излучения 468, 472, 473, 480
—щелевая 500 (*59*, *60*)
Аргумент комплексного числа 81

Б

Баркгаузена эффект 416
Барнетта опыт 15
— эффект 418
ber и *bei* функции 387—389, 410 (*20*, *21*)
Бесселевы функции 175—192
— — бесконечного аргумента 179
— — векторные поверхностные 181, 266, 512, 513, 526
Бесселевы функции второго рода 176—179 185, 186, 191—193
— интегралы 178, 179—182, 187, 188
— — нулевого порядка 185—190
— — — — график 186
— — — — — корни и численные значения 186
— — — — обратное расстояние 183
— — — — производные и интегралы 186 187
— — первого рода 176
— — — — нецелого порядка 191
— — — — отрицательного порядка 191
— — — — полуцелого порядка 191, 388—394, 407 (*2*), 408 (*3*)
— — — — представление в виде определенного интеграла 187, 198
— — применения 183—185, 187—190, 215 (*91—93*), 216 (*94—98*), 242, 258(*58*), 266, 302 (*27*, *30*, *31*, *32*), 392—393, 405, 406, 408 (*3*), 478—485, 492 (*11*), 493 (*14—17*), 494 (*20—22*), 495 (*23*), 496 (*35*, *36*), 497 (*42—45*), 500 (*59*), 508—510, 512—515, 532, 535, 540 (*4*, *5*, *8*, *9*), 541 (*10—16*), 542 (*17*, *20*, *21*), 544 (*30—32*), 545 (*33—37*), 550 (*67*), 551 (*69*, *70*).
— — разложение в ряды 182
— — рекуррентные формулы 178
— — сферические 191, 192, 203, 478—484, 490, 493 (*18*, *19*), 497 (*39*, *40*), 530, 537 548 (*52*) 551 (*71*)
— — теорема сложения 184
Бесселя модифицированное уравнение 176, 192
— — — решение 192
— модифицированные функции 192, 203
— — — *ber* и *bei* функции 386—388, 410 (*20*, *21*)
— — — бесконечного аргумента 194
— — — второго рода 192—194
— — — интегралы 193, 194—199
— — — комплексного аргумента 194
— — — — — — интегралы 194, 386—388
— — — мнимого порядка 204
— — — нецелого порядка 202
— — — нулевого порядка 197—202
— — — — — интегралы 197, 199
— — — — — представления в виде определенных интегралов 197, 199
— — — обратное расстояние 199
— — — полуцелого порядка 202, 203, 388—398, 477, 478 (см. также Бесселевы функции сферические)

Бесселя модифицированные функции применения 194—196, 199—202, 215 (*92, 93*), 216 (*99, 100*), 217 (*101*), 242, 243, 292—294, 301 (*28, 29*), 321 (*14—16*), 386—390, 407 (*2*), 410 (*19, 22, 23*), 411 (*26, 28, 30, 31*), 478, 479, 485, 494 (*22*), 495 (*27, 32*), 542 (*19—21*), 544 (*31*)
— — — рекуррентные формулы 193
— — — сферические 203, 477—480, 482, 490, 491, 493 (*18, 19*) (см. также Бесселевы функции сферические; Ханкеля, функции)
— — — теоремы сложения 199
— уравнение 175
— решение 176, 177
Био и Саварра закон 275
Биполярные координаты 71 (*2*), 220 (*122—124*)
Брюстера угол 442

В

Вебер, единица магнитного потока 291
Векторные поверхностные гармоники 157, 181
— — — Бесселя 181, 266, 267, 513, 526
— — — Лежандра 157, 267, 529
Векторный аналог теоремы Грина 63
Вектор-потенциал 262
Взаимная емкость 47—49, 126—129, 240
Взаимный потенциальный коэффициент 46—49, 240
Взаимоиндукция 309, 534, 535
Вихревые токи 382—412
— в плоских пластинках 395—400
— — — — — метод изображений 395—399
— — — — — момент, действующий на вращающийся диполь 396, 397
— — — полом цилиндрическом проводнике 386, 387, 405—407
— — полубесконечной среде с плоской границей 384, 385
— — — сплошном цилиндре 386—388
— — — шаре 388—394
— — — толстой цилиндрической лочке 385, 386, 405—407
— — — тонкой сферической пленке 399—403
— — — — цилиндрической пленке 403—405
— — вектор-потенциал поля 382—384, 388—396, 400—407
— — мощность рассеиваемая 382, 385, 403, 405
— — распределение в проводнике 383
Вихрь 59, 61 (см. Ротор)
Воздушный зазор в магнитной цепи 291, 296—298
— — — кольцевом магните 423, 424
Волна, определение 433
Волновод 501—519
— возбуждение 511—516, 543 (*23*), 547 (*13*)
— — через отверстие 512, 515, 516
— волновые поверхности 540 (*1, 2*), 540 (*3—5*)
— волны, скорость сигнала 503
— — — фазовая 503
Волновод затухание 503—505, 507, 540 (*6, 7*)
— коаксиальный 509, 510
— — излучение из открытого конца 489—491
— — — внутрь круглого волновода 515, 516
— — — — прямоугольного волновода 545 (*35*)
— критическая длина волны 502
— круглый цилиндрический 507—509
— — — возбуждение диполем 512—514, 545 (*32—34*)
— — — — коаксиальной линией 514
— — — затухание 503
— — — с продольной перегородкой 547 (*46, 47*)
— нормированный (относительный) импеданс 516
— поля в общем виде 503
— — в частных случаях 505, 507—509
— поперечно-магнитные волны 478, 501
— поперечно-электрические волны 477, 501
— прямоугольный 505, 506
— — возбуждение диполем 543 (*24, 26*), 544 (*25*)
— — — коаксиальной линией 545 (*35*)
— — — маленькой петлей 543 (*23, 27*), 544 (*28*)
— — — поперечным проводом 545 (*36, 37, 38*)
— — затухание 503—505
— — плоские неоднородности 516—519, 547 (*48, 49, 50*)
— — — — емкостные 517, 518, 547 (*48*)
— — — — индуктивные 518, 519, 549 (*49, 50*)
— связь с волноводом 511—516, 543—551 (*23—43*)
— треугольного поперечного сечения 506, 547 (*44, 45*)
— характеристический импеданс 502
Волномер 361
Волны, форма несинусоидальная периодическая 371—373
— — пилообразная, разложение в ряд Фурье 372
— — — — метод повторяющегося переходного режима 372, 373
— — прямоугольная 378 (*15—18*)
— — синусоидальная 351—382
— электромагнитные (см. Электромагнитные волны)

Г

Гальванометр баллистический 345
Гармоники биаксиальные 160, 161
— зональные 139 (см. также Поверхностные гармоники)
круговые 72—80
— — для двухпроводной линии с магнитным цилиндрическим экраном 287, 288
— — — линейного заряда 74
— — — токов в цилиндрической пленке 278
— поверхностные 138, 152, 164

Гармоники пространственные 133—204
— сфероидальные 164—175
— цилиндрические 72, 133 (см. также Бесселевы функции)
— — векторные поверхностные 182, 266, 267
Гаусса теорема о потоке электрической индукции 22—24, 28, 83, 137, 184, 195
Гауссова система единиц 575, 579
Герца вектор 432, 461, 463
— — аберрация 569, 570
— — волновое уравнение 431, 432
— — для сферической волны 460, 461
— — Допплер-эффект 569—571
— — запаздывающий 463
Гиромагнитные эффекты 417, 418
Гистерезис 417
Градиент в криволинейных координатах 61
Грина теорема 45, 62—65, 137
— — векторный аналог 63
— — взаимности 45, 64
— — — при наличии неоднородного диэлектрика 64
— функция 64, 65
— — для диска 214
— — — кольца полого цилиндрического 195—196
— — — конуса 161, 162
— — — полости конической 163
— — — — прямоугольной 219 (*114*)
— — — — цилиндрической 185, 195
— — — призмы прямоугольной 218 (*113*)
— — — сферы 124
— — — цилиндра 183—185
— эквивалентный слой 67, 68

Д

Давление гидростатическое в диэлектрике 43
— плоской электромагнитной волны 438
Двойной лист тока 486
— слой магнитный 261, 289
— — электрический 25, 26, 67
Декремент логарифмический 327
Детерминант характеристический 335
Джорджи система единиц 574—580
Джоуля закон 225
Диамагнетизм 413
Диамагнитная восприимчивость 414
Дивергенция 58—61
— в криволинейных координатах 61
Диполь магнитный (см. Магнитный диполь)
— — вектор-потенциал поля 270, 425, 426
— — взаимодействие диполей 425
— — вращающийся 396—399
— — колеблющийся, излучение 479
— — момент, определение 424, 425
— — — петли, определение 424, 425
— электрический 17—21, 460
— — взаимодействие диполей 18
— — колеблющийся, излучение 460
— — линейный 95, 96
— — момент, действующий на диполь, 18
— — потенциал поля 17
— — силы, действующие на диполь, 18
Диск круглый в однородном поле 168, 169
— — емкость 122
Диск круглый и кольцевой заряд 214 (*87*)
— — — точечный заряд 214 (*85*)
— — поверхностная плотность заряда 122
— — потенциал 122
— — — в выражении через бесселевы функции 217 (*102*)
— эллиптический, емкость 122
— — поверхностная плотность заряда 122
Диэлектрик, граничные условия 29—31, 102, 103
Диэлектрическая проницаемость 14, 16, 23, 26, 32, 33, 68, 69
Добротность полого резонатора 522—529, 530, 537, 548 (*54, 55, 57, 58, 60, 61*)
Дополнительная функция 325, 336
Допплер-эффект 569—571

Е

Единицы взаимоиндукции 309
— гауссовы 575—579
— емкости 37
— заряда 14
— магнитного сопротивления 289—291
— магнитной индукции 260
— — проницаемости 260
— магнитодвижущей силы 289—291
— мощности 225
— напряженности поля магнитного 289
— — — электрического 16
— плотности магнитного потока 261
— потенциала 16
— потока магнитного 291
— размерности 580
— самоиндукции 314
— сопротивления 224
— CGSE 14
— таблицы перехода 575—579
— тока 222, 261
— электродвижущей силы 223, 224
— электромагнитные 574—579
Единственности теорема для распределения токов 235
— — — электромагнитных волн 477
— — магнитостатики 263
— — электростатики 36, 66, 67
Емкостные коэффициенты 47—49
Емкостный мост 357
Емкость в электрических цепях 327
— взаимная 47—49, 126, 128, 129, 240
— выражение через сопряженные функции 84
— двух полосок копланарных 117 (*59*)
— диафрагмы в волноводе 516, 547 (*48, 49*)
— диска круглого и эллиптического 122
— кольца 207 (*26*), 220 (*119*)
— определение 36
— переменного воздушного конденсатора, поправка на краевой эффект 112 (*26*), 113 (*35*)
— плоского конденсатора с кристаллическим диэлектриком 42
— — — — прямоугольным изгибом 117 (*60*)
— полого резонатора 522
— полоски и конфокального цилиндра 110 (*16*)

Емкость последовательное и параллельное соединения 36, 37
— при инверсии 132
— распределенная 37
— собственная 47—49, 126, 128, 129, 240
— сфер 37, 111 (*23*), 126—128, 131, 207 (*27*), 209 (*43*, *45*)
— сферического конденсатора 37, 126, 127, 128, 147
— сферы и плоскости 127
— — и плоского диэлектрика 208 (*39*)
— — — двух плоскостей 207 (*29*)
— схема для измерения 345, 356, 357, 359
— цилиндра и плоскости 86
— цилиндрического конденсатора 39, 84—88
— цилиндров 84—86, 113 (*33*)
— эллипсоида 121

З

Заряд 13, 14
— в проводнике 15, 445
— движущийся в магнитном поле 555—560
— — — магнитном и цилиндрическом электрическом полях 557, 558
— — в перекрестных электрическом и магнитном полях 567—569
— единица 13
— коллинеарный 24
— конденсатора 36
— линейный вблизи диэлектрического клина 79—81
— — — плоскости со щелью 100
— — законы изображений 76, 79
— — между плоскостями 93, 94
— — потенциал 72, 74, 82
— на проводнике (индуцированный) 14, 46, 65
— — — плоском 46
— — — сферическом 46
— — — цилиндрическом 46
— потенциал поля 16
— пространственный 250—251
— распределение, единственность 36, 66
— сохранение (инвариантность) при преобразовании Лоренца 557, 558, 566
— точечный 16
— элементарный 15
Заряда плотность 17
— — в двойном слое 25, 67, 68
— — — эквивалентном слое 67, 68
— — единственность распределения 36
— — задачи 110 (*13*, *14*), 112 (*30*), 114 (*45*), 205 (*6*, *12*, *14*), 206 (*16*), 208 (*39*), 209 (*42*, *47*), 211 (*62*), 212 (*68*, *69*, *72*).
— — инверсия 129
— — на антенне 464
— — — диске заряженном 122
— — — — в продольном поле 168
— — — конденсаторе плоском 39
— — — — сферическом эксцентрическом 147
— — — плоскости в присутствии точечного заряда 123
— — — проводнике 29
— — — сфере в присутствии точечного заряда 124
Заряда плотность на экране с круглым отверстием 167
— — — — с циклоидальной поверхностью 88
— — — — со щелью 100
— — — эллипсоиде 121
Затухание в электрическом контуре 327—331
— вихревых токов 392—394, 405—407
— критическое 327, 337, 338
Затухания коэффициент (постоянная) 362—370, 450
— — в полых трубах 503, 508
— — — производном М-звене 368, 369
— — — простом фильтре 362, 366
— — линии передачи 370
Защитные кольца 40
Земля, влияние на антенну 476
Зональные гармоники 136, 148

И

Излучение электромагнитное 430
— — реактивное сопротивление 472
— — сопротивление 462, 468, 472, 480, 491
Изображения в волноводах 511, 514, 542 (*17*), 543 (*23*, *24*), 544 (*31*), 545 (*36*, *37*)
— — диэлектрической пластинке 189
— — плоскостях пересекающихся 78, 96
— — сферах касающихся 131
— — — пересекающихся 132
— — — разделенных 125—128
— в сфере проводящей 122
— — цилиндре круглом проводящем 77, 78
— — — — диэлектрическом 76, 77
— — — — пересекающимся с другим цилиндром 96
— вихревых токов в плоском листе 395, 398
— зарядов линейных в проводниках 76—78, 96, 97
— — — — диэлектриках 76—78
— — точечных в проводниках 121—128, 130, 131, 185
— — — — диэлектриках 123, 124
— контурных токов 285, 288
— при инверсии 77, 131, 132
Изолятор 13
Импеданс 352—371
— взаимный 357
— волновой 363—370, 502, 503
— входной 365, 371, 450
— — антенны биконической 473, 494 (*19*)
— — — щелевой 499 (*55*)
— — волновода, присоединенного к коаксиальной линии 515
— — нормированный 516
— — радиальной линии 541 (*9*)
— — секториального рупора 542 (*15*, *16*), 542 (*17*, *18*, *21*, *22*)
— — электрода в прямоугольном волноводе 545 (*30*, *31*), 545 (*36*, *37*)
— выходной 365, 369, 371, 450
— мост импедансный 356, 357
— последовательные и параллельные соединения 355
— сложение импедансов как векторов 355
— характеристический среды 449, 450

Импульс плоской волны 437, 438
— электрокинетический 332
Инверсия 96—97, 129—132
— в пространстве двух измерений 96, 97, 98
— — — трех измерений 129—131
— плоскостей пересекающихся 132
— поверхностей проводящих заряженных 131, 132
— сфер пересекающихся 132
Индуктивная связь 329—331, 337—343, 359—363, 536, 537
Индуктивное реактивное сопротивление 352
Индуктивность 309—318
— взаимная в электрических цепях в общем случае 332—336, 357
— — коаксиальных катушек 311, 312, 322 (*21*), 323 (*26*)
— — контуров 309—313, 329—331, 333—344, 357, 359, 362
— — — измерение 345
— — круглых колец коаксиальных 311, 312
— — — — копланарных 320 (*4*)
— — — — некоаксиальных 311, 312, 322 (*23*), 323 (*25*)
— — — — — расположенных вокруг цилиндра из магнетика 321 (*14*)
— — определение и единицы 309, 310
— — переменная 312, 313
— — соленоида бесконечного и петли 311
— — тороидальной катушки и охватывающего ее кольца 311
— — электрода и резонатора 535—539
— собственная (самоиндукция) 314
— — в цепях общего вида 332—334, 357
— — выражение через вектор-потенциал 314, 317
— — двухпроводной линии 316, 317
— собственная двухпроводной линии экранированной 321 (*10*)
— — контура переменного тока 353—375
— — контур с самоиндукцией 326—381
— — круглой петли 315, 316
— — — — вокруг цилиндра из магнетика 321 (*15*)
— — на векторной диаграмме 354, 355
— — определение и единицы 314
— — соленоида 316
— — тонкого провода 314, 315
— — цилиндра сплошного на высоких частотах 387
Индукция магнитная 261, 262
— Фарадея закон 306, 314, 351
— электрическая 15, 26, 27, 29, 31, 430
— электромагнитная в линейных цепях 306—324
— — — объемных проводниках 382—412
Индуцированный заряд 14
Интеграл частный 325, 328, 336, 351—372
Ирншоу теорема 25

K

Квадруполь электрический 17, 461, 491 (*1—3*), 492 (*4*)
Кельвина мост 232, 233
Ker и *kei* функции 387
— — — — в теории дифракции 499 (*56—60*)
Кирхгофа законы 225—227, 230, 326—333, 352, 355, 363, 365, 369
Клаузиуса—Мозотти формула 44
Клин диэлектрический 78, 79
— ортогональный к поверхности вращения 134, 135
— проводящий 92
Комплексные амплитуды 352—372
— числа 81, 82
Конденсатор, емкость 36
— зарядка 327—329
— защитные кольца 40
— определение 36
— переменный воздушный, поправка на краевой эффект 112 (*26*), 113 (*35*)
— плоский 39
— — с кристаллическим диэлектриком 42
— — — прямоугольным изгибом 117 (*60*)
— — энергия 41
— последовательное и параллельное соединения 37, 38
— разрядка 327—329
— сферический 38
— — неконцентрический 125—129, 147, 148
— цилиндрический 39, 86, 87
— — некоаксиальный 86, 87
— энергия 41
Коническая полость, функция Грина 163, 164
Конические границы 148, 161—164
— координаты 70 (*4*)
Контур магнитный 289—292
— воздушный зазор 291, 292
— магнитное сопротивление 291
— — магнитодвижущая сила 289
— — поток в магнитных контурах 291
— — тороидальный 290, 291
— электрический 329—331, 337—343
— — колебания 340, 341
— — нестационарный ток 325—350
— — — — энергетические соотношения 325, 326
— — переменного тока 351—363
— электрический переменного тока, коэффициент полезного действия 354
— — — — мощность передаваемая 356
— — — — мощность потребляемая 353, 354
— — — — несинусондальная э.д.с. 371—373, 378 (*15—18*)
— — — — отрицательное сопротивление 374—376
— — — — установившийся режим 351—356
— — последовательный 326—329
— — зарядка конденсатора 327, 328
— — затухание 327
— — постоянная времени 329
— — — разрядка конденсатора 327, 328
— — частота колебаний 327
— — постоянного тока
— — — — изображение 285, 288
— — — — магнитное поле 260—305
— — — — сила взаимодействия магнитная 278—281, 308, 310, 318
— — — — — действующая на контур в магнитном поле 278—281
— — — — энергия взаимная двух контуров 308, 310, 318

Конус, функция Грина 162—164
Конфокальные координаты 104, 164—174 (см. также Эллиптические координаты)
— сфероиды сплюснутые 164—173
— — вытянутые 172—174
— цилиндры гиперболические 98, 99
— — параболические 92
— — эллиптические 98, 99
— эллипсоиды 120, 121, 164—174
Конформные преобразования 87—109
— — гипербол конфокальных 98, 99
— — — равнобочных 92
— — границы в параметрической форме 88
— — двух цилиндров 85—87, 89, 90
— — крыла самолета 102
— — многоугольника с закругленным углом 106
— — парабол конфокальных 92
— — плоскости в плоскость со щелью 100
— — — с круглым цилиндрическим выступом или выемкой 115 (*49*)
— — полоски в биполярные ортогональные окружности 89
— — применения, двухмерный диполь 94
— — — инверсия 96, 97
— — — к клину 92
— — — магнитным полям 296—298, 303, 304 (*35—38*)
— — — — токам 235—239, 246—247
— — — — электрическим полям 88, 92—109
— — — — электромагнитным волнам 453, 518
— — на римановой поверхности 101
— решетки 94, 99, 106—108, 111 (*22*)
— — сопряженных функций 88—90
— — циклоидальной волнистой поверхности 88
— — цилиндра круглого в эллиптический—102
— — Шварца 90—109
— — — двухмерный диполь 94, 95
— — — двух углов 97—99
— — — инверсия 94, 97
— — — клина 92
— — — крыла самолета 102
— — — на римановой поверхности 101
— — — полуплоскости в полоску 98—100
— — — угла нецелократного $\pi/2$ 109
— — — — отрицательного 94, 95
— — — — положительного 92
— — — — равного нулю 92
— — электрических токов 235—239, 246—247
— — эллипсов конфокальных 98, 99, 102
Коэрцитивная сила 416
Криволинейные координаты 60—62
Кристалл, электрические свойства 31, 32
Круглые петли с током, вектор-потенциал поля 270, 271, 273, 274
— — — — взаимоиндукция 311, 312
— — — — коаксиальные, сила взаимодействия при постоянных токах 280, 281
— — — — магнитное поле постоянных токов 270, 271, 273, 274
— — — — переменный ток, излучение 479—481
— — — — самоиндукция 315, 316
Круглые петли с током экранирование при помощи плоского листа 399, 400
Круговые гармоники 72—78
Кулона закон 13, 27, 28
— — ограничения 14
Кюри закон 414

Л

Лапласа оператор (лапласиан) 60—63
— — применительно к векторам 262, 265—267, 382—384, 387, 388, 393, 431, 455, 501, 510
— уравнение 60—62, 69, 82, 133, 137, 166, 175, 176, 233, 510
— — в анизотропном диэлектрике 61
— — — неоднородном диэлектрике 60—62
— — — ортогональных криволинейных координатах 61
— — — прямоугольных координатах 60
— — — сферических координатах 62, 134, 136
— — — сфероидальных координатах 134, 164, 172
— — — цилиндрических координатах 62, 175
— — при вращении сопряженных функций 133
— — применительно к токам 233
— — решения в двух измерениях 72—117
— — — трех измерениях 133—221
Лежандра коэффициенты 141
— полиномы 140
— — график 144
— — интегралы 142, 143
— — мнимого аргумента 145
— — — и бесконечного 145
— — применения 145—148, 210—213 (*57—79*), 240, 241, 267, 273, 274, 280, 281, 312, 313
— — производные 140
— — разложение 141
— — рекуррентные формулы 142
— — Родрига формула 140
— — таблица 144
— уравнение 139
— — решение в виде рядов 139
— — — рекуррентные формулы 139, 140
— функции 148—174
— — второго рода 148—153
— — — — выражение через полиномы 150, 151
— — — — мнимого аргумента 151, 152
— — — — применение к теории потенциала 152
— — — — рекуррентные формулы 149, 158, 159
— — — — ряды 149, 151
— — — — численные значения 151
— — дробного порядка 153
— — комплексного порядка 162
— — первого рода 153
— — — — гипергеометрические ряды 153
— — присоединенные (см. Присоединенные функции Лежандра)
Линзы электростатические 203, 204
Линия передачи переменных токов, двухпроводная 452—454

Линия передачи переменных токов, двухпроводная неидеальные проводники 452—454
— — — — — диэлектрическая 494 (*20*, *21*), 495 (*26—29*)
— — — коаксиальная 509, 510, 515
— — — — — — излучение открытого конца 489, 490
— — — — — — не отражающие уступы 541 (*12*, *13*)
— — — — — плоская неоднородность 510, 511
— — — — коническая 469—471
— — — — — конфокальная эллиптическая 457 (*14*)
— — — — — отражение от неоднородности 450, 451
— — — — — переход от сосредоточенных параметров к распределенным 370, 371
— — — — — полые трубы 501—519
— — — — — рупор секториальный 549 (*15*, *16*), 542, 543 (*17*, *18*, *21*, *22*)
— — — — — с диэлектрическим покрытием 496 (*30—32*)
— — — — — цилиндрическая 447—450, 457 (*13*, *16*)
Логарифмический декремент затухания 327
— потенциал 72—74, 84
Лоренца преобразование 552, 553

M

Магнетрон 559, 560
— критическая частота 559, 560
Магнит, игла 420, 424, 425
— кольцевой с воздушным зазором 422, 424
— подковообразный 421—423
— постоянный 417—426
— — граничные условия 420
— сферический 420, 421
— — в среде из магнетика 421
— цилиндрический 419, 423, 424
— эквивалентная пленка тока 418, 419
Магнитная восприимчивость 414, 415
— игла 419, 420, 424, 425
— индукция 260—262
— — антенны 465 (см. также Антенна)
— — Био и Савара закон 274
— — в анизотропной среде 286, 435, 436
— — — двухмерных полях 286—288
— — — полых резонаторах 519
— — — — шаре 390—394
— — — — электромагнитных волнах 434
— — вихревых токов в плоском листе 394
— — внутри цилиндрической полости в цилиндрическом стержне 277, 278
— — выражение через вектор Герца 432
— — — — вектор-потенциал 383, 384
— — — — — две скалярные функции 383, 384
— — граничные условия 283—284
— — движущегося заряда 561, 563, 564
— — двухпроводной линии 269
— — — — экранированной 287, 288
— — дивергенция 262
— — диполя колеблющегося магнитного 479
Магнитная индукция диполя колеблющегося электрического 460, 461
— — единственность 263, 264
— — интеграл по замкнутому контуру 262, 279, 282
— — контура линейного 275
— — определение 260, 261
— — остаточная 417
— — переменного тока при экранировании 399
— — — — в проводниках 386—394, 403—407
— — петли круглой 270, 271, 273, 274
— — распространение 383, 431, 432
— — — в проводнике 382, 445, 446
— — ротор 262, 382
— — сила, действующая на движущийся заряд 557—559
— — соленоида с произвольным шагом обмотки 275—277
— — токов в сферической пленке 271—273
— — — — цилиндрической пленке 278
— — электрона, движущегося прямолинейно ускоренно 563—565
— проницаемость 261, 413, 414
— — анизотропной среды 286, 414
— — в цепи магнитной 289, 290
— — выражение через намагничение 281
— — граничные условия 281—284
— — зависимость от температуры 414
— — и энергия поля 309, 319
— — относительная 261
— — переменная 282
— — ферромагнитных сред 415—418
Магнитное взаимодействие токов 260—304
— поле, вектор-потенциал 262
— — действие на контуры 310, 318, 378—381
— — напряженность 289—291, 415—417
— — — — граничные условия 290
— — — единица, эрстед 289
— — натяжения 318, 319
— — плотность энергии 309
— — потенциал скалярный 289—291 (см. также Магнитодвижущая сила)
— сопротивление 289—292, 296—298, 422
Магнитный гистерезис 417
— диполь 260, 261, 270, 424, 425, 426
— — в волноводе 544 (*28*), 545 (*33*, *34*)
— контур 289—292
— лист 261
— момент 260, 419, 425
— полюс 420
— потенциал векторный 262
— — скалярный 289, 290
— поток трубки 268
Магнитодвижущая сила 289—291, 421, 422
— — граничные условия 290
Максвелла гиромагнитные эффекты 418
— метод изображений для вихревых токов 395—399
— ток смещения 382, 430
— уравнения 430
— — инвариантность при преобразовании Лоренца 557, 565, 566
Масса, изменение со скоростью 554, 556
— продольная и поперечная 556
Мезон 15

Милликсна опыт 15
Модуль комплексного числа 81
Момент, действующий на диамагнитные тела 319, 413
— — — диполь магнитный 424, 425
— — — — — — вращающийся над проводящим листом 398—400
— — — — — электрический 17
— — — — — — вблизи диэлектрического шара 219 (*116*)
— — — диск в электрическом поле 168—170
— — — диэлектрический сфероид 214 (*84*)
— — — — эллиптический цилиндр 103—106
— — — диэлектрическое тело 68
— — — заряженные проводники 49, 111 (*20*), 168, 169
— — — кристаллический шар магнитный 415
— — — магнитные иглы 425
— — — парамагнитные тела 318, 319, 413
— — — петлю с током 260
— — — полоску в однородном электрическом поле 111 (*20*)
— — — сферический магнит (шар) в однородном магнитном поле 420, 421
— — — — — — неоднородном магнитном поле 420
— — — сферическую оболочку, вращающуюся в магнитном поле 409 (*12*)
— — — цилиндрическую пленку, вращающуюся в магнитном поле 409 (*16*)
Мощности коэффициент 354
Мощность 353
— векторная диаграмма 355
— излучаемая антенной 467—469
— минимальная 235
— проходящая через отверстие 491
— рассеиваемая в волноводе 503—505
— — — полости 522—523
— — — полупространстве с плоской границей 385
— — — сопротивлении 225, 235
— — — сплошном цилиндре 387
— — — тонкой сферической пленке 403
— — — — цилиндрической пленке 405
— — — шаре 392
— — вихревыми токами 383, 385, 387, 392, 403, 405, 503—505, 522, 523
— — при скин-эффекте 385, 387, 392
— эффективная 353, 354
Мультиполь 17, 461
— излучение 461, 479, 480, 491 (*1—3*)

Н

Намагниченность 281—283, 413, 414, 418, 419
— в кристалле 415
— иглы 419, 420, 424, 425
— интенсивность 281—283, 413, 418, 419
— кольцевого магнита 423, 424
— кривая намагничивания ферромагнетика 416
— подковообразного магнита 421, 422
— при вращении 418
— равномерная 418, 419
Намагничивающее поле 415
— — в подковообразном магните 421, 422
Напряженность магнитного поля 289, 290
— — — граничные условия 290
— — — единица 289
— электрического поля 16, 30, 83
— — — в анизотропной среде 31—33, 40, 435—437
— — — — диэлектрике 30
— — — — плоской волне 433—437
— — — — поле излучения 431—433
— — — выражение через вектор Герца 432
— — — — — вектор-потенциал 307, 382
— — — — — электродинамические потенциалы 431
— — — граничные условия 29, 31, 102, 103
— — — ротор 306, 382
Натяжения в диэлектрике жидком 43, 44
— — — сжимаемом 43
— — магнитном поле 318, 319
— — электрическом поле 27, 28
— на границе диэлектрика 30, 43
— — — с проводником 29, 30, 42, 43
— силовых трубок 27, 28
Непрерывности уравнение 223, 225, 245, 249, 430, 464
— — в анизотропной среде 249
— — — двух измерениях 235—239
— — — тонкой пленке 244
— — — трех измерениях 223, 233, 249
Обратное расстояние 141

О

Однородная намагниченность 417, 418
Однородное поле магнитостатическое, вектор-потенциал 263
— — — в цилиндрической полости 277
— — — внесение в поле тел различной формы 290, 300 (*17*, *20*), 415, 418, 419, 425
— — — движение заряда 558, 559, 567—569
— — — релятивистское преобразование 565—569
— — — экранирование оболочкой из магнетика 290
— — — энергия 309
— — релятивистское преобразование 567—569
— — электрическое, внесение в поле тел различной формы 76—78, 103, 105, 111 (*18*, *20*), 125 (*123*, *124*), 168—170, 172, 174, 175, 209 (*44*), 212—214 (*69*, *74*, *80—84*), 216 (*97*), 220 (*120*, *121*)
— — — движение заряда 567—569
— — — ограниченное 88, 94, 99—101, 106—108, 111 (*22*, *23*), 115 (*48*, *49*), 167, 168, 174, 175
Ома закон 224, 225, 352, 432
Операторы в общей теории цепей 333—335
Оптические оси кристалла 436
Ортогональность сопряженных функций 83
Ортогональные и эквипотенциальные поверхности 120
Ортогональные координаты 60—62
— — градиент 61

Ортогональные координаты дивергенция 61
— — Лапласа уравнение 61
— — при вращении сопряженных функций 133, 134
— — Пуассона уравнение 61
— — ротор 61
Остаточная магнитная индукция 416
Остроградского—Гаусса теорема 58, 59, 64, 222, 281, 309
Относительности специальная теория 552—571
— — инвариантность заряда 557, 558, 566
— — — — уравнений Максвелла 557, 565, 566
— — — Лоренца преобразование 552, 553
— — — масса зависимость от скорости 554, 555
— — — — поперечная и продольная 556
— — — постулаты 552
— — — применение 561—563

П

Параболические цилиндрические координаты 70 (*6*)
Парамагнетизм 414
Переходные процессы в линейных цепях 325—350
— — вихревые токи 392—394, 400, 401, 405—407
Плоская решетка 94, 99, 106—108
Плоские волны 430—458
Плоско-параллельные проводящие пластины 39, 40, 93, 94, 112 (*26*, *31*), 113, 207 (*31*, *35*, *36*)
— — — бесконечный набор 111 (*24*)
— — — для создания однородного поля 111 (*25*)
Плоскость диэлектрическая, изображение линейного заряда 78
— — — точечного заряда 122, 123
— проводящая 39, 40, 78, 79, 94, 97, 115 (*49*)
— — изображения линейного заряда 78, 79
— — — точечного заряда 122, 123
— — и сфера 129
— — — цилиндр 85, 86
— — полубесконечная со щелью 100
— — преобразование 93
— — с отверстием 167, 168
Поверхностная плотность заряда 17
Поверхностные гармоники 137, 138, 152
— — векторные, сферические 157, 267
— — — цилиндрические 182, 266, 267
— — дифференциальное уравнение 136
— — зональные 139, 148 (см. также Лежандра полиномы)
— — — второго рода 148—152
— — — — — выражение через полиномы Лежандра 150, 151, 152
— — — — — мнимого аргумента 151, 152
— — — — — рекуррентные формулы 149
— — — — — ряды 148, 149
— — — — — численные значения 151
Поверхностные гармоники зональные комплексного порядка 161
— — — нецелого порядка 152, 153
— — ортогональность 137
Позитрон 15
Пойнтинга—Умова вектор 433
— — в волноводе 504, 515
— — — кристалле 436
— — — проводнике 446
— — диффрагированного поля 498 (*46*, *47*), 499 (*50*, *52*)
— — для линейной антенны 467
— — комплексный 451
— — определение 433
— — отраженный и преломленный 440—442
— — — от проводника 446—447
— — угол с фронтом волны 434
— — энергии плотность 437, 438
Показатель преломления 439
Полый резонатор 519—539
— — биконический 549 (*58*, *59*)
— — возбуждение 534—539, 550, 551 (*66—70*)
— — волновые поверхности 548 (*51—53*)
— — длина волны резонансная 519
— — добротность Q 522—530, 537, 548, 549 (*54*, *55*, *57*, *58*, *60*, *61*)
— — емкость 521
— — поля 523—526, 529, 532
— — призматический 549 (*56*, *57*)
— — прямоугольный 524
— — — с диафрагмой 550 (*62—64*)
— — резонансная частота 520, 523, 524, 526, 527, 530—534, 536—538, 548, 549 (*54—56*, *60*)
— — с отверстиями 530
— — — — влияние затухания 522
— — самоиндукция 521, 522, 527—529
— — сложной формы, метод Хана 531—533
— — собственные колебания 519—531
— — сопротивление активное 523
— — сферический 529, 551 (*71*, *72*)
— — ток эквивалентный 521, 523, 525—530, 534—539
— — треугольный 548, 549 (*54*, *55*)
— — цилиндрический 519—521, 523, 524
— — — многосвязный 526—528
— — — — коаксиальный 528
— — — — конфокальный эллиптический 549 (*60*)
— — — — некоцентрический круглый 549 (*61*)
Поляризации угол 442
Поляризация электромагнитной волны 435, 440—443, 447
— — — в анизотропной среде 436, 437
— — — — волноводе 501—519
— — — — поле антенны 465—469
— — — диполя 462, 479
— — — круговая 443
— — — при диффракции 481—484
— — — — отражении от проводника 446, 447
— — — — — полном 444
— — — эллиптическая 442
Потенциал векторный аксиально-симметричного поля 268

Потенциал векторный вихревых токов, метод изображений 394—399
— — волновое уравнение в проводнике 383
— — выражение для электрического поля через потенциалы 307
— — — через две скалярные функции 383, 384
— — граничные условия 282—284
— — единственность 264
— — неустановившийся режим в сферической пленке 402
— — — — — — толстой цилиндрической оболочке 405—407
— — — — — — шаре 392—394
— — поля диполя 270
— — — — двухмерного 286—288, 296—298
— — — иглы магнитной 425
— — — линии двухпроводной 269
— — — — экранированной 287, 288
— — — магнита кольцевого 423, 424
— — — однородного 263
— — — переменного тока в проводниках 383—385, 388—390
— — — — — — — сферической пленке 400—403
— — — — — — — шаре 390—394
— — — петли круглой 270, 271, 273
— — — — — — выражения 300 (*22*), 301 (*24*, *26*, *27*)
— — — — пленки сферической с током 271—274
— — — тока линейного 285
— — — — — — перпендикулярного границе раздела 285
— — — — токов в цилиндрической оболочке (пленке) 278
— — — трансформатора броневого типа 423, 424
— — — трехмерного 262—288, 292—295
— — экранирование тонким плоским листом 395, 398—400
— — — тонкой сферической пленкой 400, 401
— — — — цилиндрической пленкой 403—405
— — электродинамический 431, 432
— — — в резонансной полости 519—539
— — — волн в трубах 501—519
— — — плоских 440—466
— — — сферических 460—500
— — — волновое уравнение 431
— — — выражение через вектор Герца 432
— — — дивергенция 432
— — — единственность 477
— — — запаздывающий 462, 563
— — — — движущегося заряда 561, 562
— — — — поля антенны 464
— — — конической линии передачи 469
— — — нормированный в полости 534, 535
— — — перпендикулярный B 384
— — — петли с током 479, 480
— — — решение в сферических координатах 477
— — — — — цилиндрических координатах 484
— — — свойство ортогональности 534
Потенциал векторный электродинамический, связь со скалярным потенциалом 432, 460
— квазивектор 284, 285, 310
— — граничные условия 284, 310
— — линейного тока, перпендикулярного границе раздела 285
— распределения тока 224
— — — в проводящих средах 234—244
— — — — слоистой земле 243, 244
— — — — сплошном цилиндре 242, 243
— — — — сферической пленке 245, 246
— — — — тонкой пленке 244
— — — граничные условия 234
— — — двухмерный 235—239
— — — на поверхности вращения 246, 247
— скалярный магнитостатический 289—291
— — электродинамический 431, 432, 462
— — — волновое уравнение 432
— — выражение через вектор Герца 432, 457 (*12*)
— — — движущегося заряда 561—563
— — — диполя 460, 461
— — запаздывающий 462
— — — связь с векторным потенциалом 432
— — электростатический 16—221
— — — аксиально-симметричного поля 69
— — — в кольце полом цилиндрическом 190, 218 (*105*)
— — — — системе с коническими границами 148, 152, 160—162, 213 (*78*, *79*)
— — — — сферической оболочке 146, 147
— — — вблизи нейтральных (равновесных) точек 160
— — — гармоническое распределение заряда 138, 171, 172, 214, (*89*)
— — — градиент 16, 61
— — — граничные условия 30—32, 102, 103
— — — двойного слоя 25, 26, 67
— — — двухмерного поля 72—118
— — — диполя 17, 219 (*115*)
— — — диска проводящего 122, 167—170, 211 (*63*), 214 (*85—87*), 217 (*102*)
— — — дифференциальное уравнение 61, 62 (см. также Лапласа уравнение)
— — — единственность 36, 66
— — — заряда линейного 72, 74, 84 (см. также Круговые гармоники)
— — — — — — и диэлектрического клина 78—81
— — — — объемного 17, 65, 66
— — — — поверхностного 17, 64
— — — и функция потока 83, 84, 102
— — — квадруполя 17
— — — клина с выпуклостью 134, 135
— — — кольцевого заряда 145, 214 (*86*), 216 (*99*), 217 (*101*)
— — — логарифмический 72, 74, 84
— — — максимумы и минимумы 25
— — — многоугольника 90 (см. также Конформные преобразования)
— — — нуль 16
— — — при изображениях 78, 79, 122—128, 130, 131
— — — — инверсии 96, 97, 130, 131

Потенциал скалярный электростатический проводника в однородном поле 76—78, 167—169, 174, 175, 220 (*120*, *121*, *123*)
— — — суперпозиция 17, 45, 46, 78, 79, 96, 100, 103—105, 108, 123, 145, 146, 169, 185, 188, 200
— — — тора заряженного 219 (*118*)
— — — — незаряженного между плоскостями 217 (*101*)
— — — точечного заряда 16, 172, 183, 199
— — — — — в цилиндрической полости внутри диэлектрика 200—202
— — — — — вблизи диэлектрической пластины 188, 189
— — — — — выражение 136, 138, 145—148, 158, 163, 164, 166—172, 183, 199, 215 (*90*)
— — — трехмерного поля 119—132
— — — функция потенциальная 82—84
— — — эквипотенциальные линии 20, 21, 22, 90, 100, 104
— — — электростатической линзы 203
Потенциальная энергия диполей магнитных 425
— — — электрических 18
— — конденсатора заряженного 41
Потенциальный коэффициент 47—49
— — взаимный 47—49, 240
— — собственный 47—49, 240
Поток магнитной индукции в воздушном зазоре 291, 296—298
— — — — торе 290, 291
— — — единица, вебер 291
— — — переменный 306, 351
— — — рассеяния в трансформаторе 292—296
Потока плотность магнитного 261 (см. также Магнитная индукция)
Постоянная времени контура 329
— распространения 363—371
Преломление магнитных силовых линий 290
— оптическое 438—442
— электрических силовых линий 31
Преобразование Лоренца 552, 553 (см. также Относительности специальная теория)
Присоединенные функции Лежандра 153—164, 167—174
— — — биаксиальные гармоники 160, 161
— — — большого аргумента 155, 167, 174
— — — выражение через функции Лежандра 153
— — — действительного аргумента 153—174
— — — дифференциальное уравнение 153
— — — интеграл Лапласа 155
— — — — от произведения 155, 157
— — — мнимого аргумента 155, 157, 166—173, 263, 300 (*21*, *22*)
— — — нецелого порядка 161, 162, 219 (*18*), 220 (*119—121*), 257 (*57*)
— — — поверхностные векторные гармоники 157
Присоединенные функции Лежандра, применения 159, 163, 164, 168—175, 214 (*89*), 215 (*90*), 263, 267, 272—274, 300 (*21—24*), 301 (*25*), 312, 321 (*12*, *13*), 389, 392, 402, 403, 408 (*2*, *5*), 409 (*11*, *18*), 411 (*29*), 478, 479, 482—484, 491, 493 (*18*, *19*), 497 (*39*, *40*), 529
— — — рекуррентные формулы 158, 159
— — — специальные значения 159
— — — таблицы 154, 155
Проводимость 224
Проводник, граничные условия для токов 234
— — — в электростатике 29, 30, 44
— емкость 36
— заряды внутри 15
— — на поверхности 29 (см. также Заряд; Заряда плотность)
— линейный, токи 225—233
— момент, действующий на заряженный проводник 49, 50
— натяжения на границе с диэлектриком 43
— — — поверхности проводника 29, 43
— объемный (массивный), распределение токов 233
— определение 13
— сила, действующая на заряженный проводник 30, 44, 49, 50
— электромагнитные волны в проводнике 445, 446
— энергия системы заряженных проводников 49
Пуассона уравнение 61, 65—67, 250, 251, 460
— — в ортогональных криволинейных координатах 61
— — решение 65, 66

Р

Равномерная намагниченность 418, 419
Разностные уравнения 127, 227, 228
Распространения постоянная 363—371
— — в линии передачи 370, 371
— — — свободном пространстве 450
— — — фильтре простом 363—370
— — — — типа М 368—369
Реактивная проводимость 355
Реактивное сопротивление 352
Резонатор полый (см. Полый резонатор)
Релаксации время 445
Релятивистские преобразования для силы 555, 556
— — — скорости 553, 554
— — — ускорения 554
Рентгеновское излучение ускоренного электрона 563—565
Решетка заряженная 94, 98, 99, 106—108
Риманова поверхность 101
Родрига формула 140, 141
Ротор 61, 62
— в ортогональных координатах 61, 62
— — сферических координатах 70 (*2*)
— — цилиндрических координатах 70 (*1*)
— Грина векторная теорема 63
Рупор секториальный 542 (*15*, *16*), 542 (*17*, *18*, *21*, *22*)

С

Самоиндукция 314—317, 329—331 337—344, 359—363
Связанные контуры 329—331, 337—344, 359—363
Сила, выражение через функцию Грина 65
— действующая на диамагнитные тела 319, 413
— — — диполь магнитный со стороны вихревых токов 398, 399
— — — — электрический 18
— — — диэлектрические тела 68
— — — заряды, движущиеся 557—559, 566
— — — контуры электрические 278—281, 298 (*5*), 299 (*6*, *7*, *10—13*), 300 (*15*), 308, 310, 318, 323 (*8*)
— — — парамагнитные тела 413
— — — постоянные магниты 421—425
— — — проводники заряженные 49, 127
— — — сферы 127, 131, 220 (*125*)
— коэрцитивная 417
— между магнитными иглами 425
— — сферой и плоскостью 129
— преобразования сил 555, 556
Силовые линии магнитного поля 295, 433 (см. также Магнитная индукция)
— — электрического поля 20, 21, 22, 76, 77, 86, 94, 97, 98, 99, 100, 104, 108, 201
— — — — диполя 19, 21
— — — — дифференциальное уравнение 19, 20
— — — — — зарядов 19
— — — — — — коллинеарных 24
— — — — — на бесконечности 25
— — — — — — границе диэлектрика 30
— — — — — — — проводника 29
— — — — натяжения 27, 28
Синусоидальная э.д.с. 351—376
Скин-слой, толщина 384, 504, 521
Скин-эффект 384—388
— в цилиндре полом круглом 386
— — — сплошном 386—388
— — шаре 390—394 (см. также Вихревые токи)
— на плоской поверхности 384
Смещение электрическое 22, 26, 29, 30 (см. также Электрическая индукция)
Собственная емкость 47—49, 126, 127, 240
Соленоид 275—277 (см. также Индуктивность; Магнитная индукция)
Сопротивление биконической антенны 473
— в цепях переменного тока 352 (см. также Импеданс)
— выражение через емкость 236, 239
— высокочастотное цилиндра 386, 387
— земной коры 243, 244
— излучения 462, 468, 473, 480, 491
— коаксиальной линии, соединенной с прямоугольным волноводом 516
— ленты переменной ширины 237—239, 259 (*63*)
— линии передачи 370
— магнитное 291, 292, 296—298, 422, 424
— — воздушного зазора 292, 296—298
— — тора 291, 292
— между электродами удаленными 236, 240
Сопротивление на векторной диаграмме 354, 355
— определение 224
— отрицательное 374—376
— петли в полости 537
— полого резонатора 523
— предельные значения 247, 248
— при неустановившихся процессах 325—350
— резонансной щели 499 (*55*)
— удельное 224
— — анизотропной среды 249, 250
— штыря в полости 538
Сопряженные ветви в цепях переменного тока 357—359
— — — — постоянного тока 232
— функции для двухмерного диполя 94
— — — инверсии 94—96
— — — клина 92
— — — линейного заряда 84
— — — — вблизи плоскости со щелью 100, 101
— — — — — между плоскостями 86
— — — магнитного поля 296, 297
— — — плоскости со щелью 100, 101
— — — полоски заряженной 99
— — — проводников в линии передачи 452
— — — решетки из круглых цилиндров 106—108
— — — — — плоских полосок 99
— — — — — тонких проводов 94
— — — цилиндра 85, 86, 98, 102—106
— — на римановой поверхности 101, 102
— — нахождение 88, 89
— — ортогональность 83
— — применение в задачах 110—117 (*17—60*), 256—257 (*43—50*), 257 (*55*), 303 (*35—38*), 457 (*13*, *14*, *16*), 547 (*48—55*)
— — — теории токов 236—239
— — — к полоске переменной ширины 237—239
Статические машины 14, 222, 223
Стационарный процесс в контуре переменного тока 351—381
— — после переходного 328, 330, 331
Стереографическая проекция 245, 246
Стокса теорема 59, 308
Сферические гармоники 136—164 (см. также Поверхностные гармоники)
— — вихревых токов 388—391, 400—403, 407 (*2*, *5*), 409 (*11*)
— — в линейных контурах 273, 274, 280, 312, 313
— — — теории электромагнитных волн 477—479, 480, 493, 500, 504 (*18*, *19*), 506 (*39*, *40*), 538
— — — — электростатике 138, 145—147, 160, 162—164, 212 (*70*), 213 (*79*)
— — разложение вектор-потенциала 268
— — распределение токов 341
— координаты дивергенция 61
— — оператор Лапласа 62
— — ротор 70 (*2*)
Сфероидальные гармоники вытянутого сфероида 172—174
— — — — выражение для взаимной индукции 321 (*13*)
— — — — диэлектрический сфероид 214 (*82*, *83*, *84*)

Сфероидальные гармоники вытянутого сфероида, обратное расстояние 215 (*90*)
— — — — потенциал векторный поля петли с током 301 (*24*)
— — — — — — гармонического распределения зарядов 214 (*89*)
— — — — применения в электростатике 214 (*82—84, 89*), 215 (*90*)
— — — — — к линейным цепям 301 (*24, 25*), 321 (*12, 13*)
— — — — самоиндукция 321 (*12*)
— — — — сфероид в однородном поле 174
— — сплюснутого сфероида 133, 134, 164—172
— — — — векторные поля петли с током 300 (*22*)
— — — — диска потенциал 168—171
— — — — диэлектрический сфероид 213 (*80, 81*), 214 (*84*)
— — — — обратное расстояние 172
— — — — плоскости с круглым отверстием 167
— — — — применения в линейных цепях 300 (*22*)
— — — — — электростатике 167—172, 213 (*80, 81*), 214 (*84—88*)
— координаты 164, 165, 172, 173

T

Тевенина теорема 358
— — для постоянного тока 231
Тензор диэлектрической проницаемости 33
Ток в земной коре 249, 250
— вихревой 382—412
— неустановившийся 325—331, 341—343, 345—347
— — в цепях общего вида 332—336
— переменный 351—381
— — безваттная составляющая 354
— — в антенне 464—476
— — — ветвях цепи 356, 357
— — — контурах, индуктивно связанных 359—363
— — — полом резонаторе 521
— — — проводниках объемных (массивных) 385—412
— — графическое представление 354
— — комплексные обозначения 352
— — мощность 353—356, 383
— — на векторной диаграмме 354
— — резонанс 353
— пленка, эквивалентная магниту 418, 419
— постоянный 222—259
— — в анизотропных средах 249, 250
— — — ветвях цепи 231
— — — пространстве двухмерном 235—239, 286—288
— — — — трехмерном 233—235, 239—244, 249, 250
— — вектор-потенциал 262, 263
— — граничные условия 234, 239, 244
— единица 222, 260
— — изображения в поверхности магнетика 285, 288
— — Кирхгофа законы 225, 226, 227, 230, 326—333, 352, 360, 367
Ток постоянный, магнитное поле 260—305 (см. также Магнитная индукция)
— — непрерывность 223, 225, 245
— — плотность 222, 225, 233—236
— — пространственного заряда 250, 251
— — распределение в ленте переменной ширины 237—239
— — — — объемных проводниках 233—247
— — — — поверхности вращения 246, 247
— — слоистой земле 249, 250
— — — — сплошном цилиндре 242, 243
— — — — — шаре 240—242
— — — — сферической пленке 245—246
— — — общие теоремы 235
— — тепловой эффект 225, 235
— смещения 430
Тока функция для вихревых токов 394, 398, 399
— — — установившихся процессов 236, 246
Тор в однородном поле 220 (*120, 121*)
— емкость 220 (*119*)
— незаряженный между плоскостями 217 (*101*)
— свободно заряженный 219 (*118*)
Тороидальные координаты 70 (*8*), 214 (*117*)
Трансформатор 359, 363
— броневого типа, утечка 292—296
Трубки магнитной индукции 268, 269
— тока 233, 234, 241

У

Уитстона мостик 226
Умова—Пойнтинга вектор (см. Пойнтинга—Умова вектор)

Ф

Фаза переменного тока 352—354
Фазовая постоянная в линии передачи 370, 371
— — — М-производном звене фильтра 368
— — — фильтрах 363—368
— — — электромагнитных волнах 450, 451
Фарадея закон индукции 306, 314, 351
— — — в линейных цепях 306, 314, 351
— — — — объемных проводниках 382, 430
— — — — поверхностях 401, 403
— — — — уравнениях Максвелла 430
Фильтры, импеданс 363—370
— полосовые 366—368
— постоянная затухания 363—368
— — распространения 363—368
— производное М-звено 368, 369
— простые Т- и П-звенья 363—368
— серединно-параллельное звено 363
— серединно-последовательное звено 363
— сложные 368, 369
— — выходное устройство 369, 370
— условие на конце 365, 366, 369
— частотные характеристики 366—369

Френеля уравнение 435, 436
Фуко токи (см. также Вихревые токи)
Фурье—Бесселя интеграл 188
Фурье ряды 73, 74, 201, 371, 372
— — в теории волноводов 505, 506
— — для полей в полости 520, 523—527
— — переменная э.д.с. синусоидальная 371, 372
— — — — пилообразная 372
— — — — прямоугольная 378 (*16*, *18*) (см. также Бесселя модифицированные функции)

Х

Ханкеля функции, значения на бесконечности 180
— — определение 178, 193
— — представления через определенные интегралы 197
— — применения 494 (*21*), 495 (*26*, *30*, *31*), 541 (*8*), 542 (*15*, *17*, *20*) (см. также Бесселевы функции)
— — сферические 203
Холла эффект 234

Ц

Цепь магнитная (см. также Контур магнитный)
Цепь электрическая, нестационарный ток 325—350
— — — — в контуре 325—350
— — — — интегральный эффект 345
— — — — общая теория цепей, амплитуды 335
— — — — параметры 333
— — — — при постоянной э.д.с. 336
— — — — процессы колебательные 334—336
— — — — решение 334—336
— — — — типы собственных колебаний 336
— — переменного тока 351—381
— — — — общая теория 357—359
— — — — параметры 357
— — — — соотношение взаимности 358
— — — — сопряженные ветви 359
— — — — Тевенина теорема 358
— — — — установившийся режим 351—381
— — — — фильтры 363—370
— — — — эквивалентная 379 (*23*, *24*)
— — постоянного тока, общая теория 230—232
— — — — параллельное соединение 226
— — — — последовательное соединение 226
— — — — сопряженные ветви 227—229, 232, 233
— — — — Тевенина теорема 231
— — — — Уитстона мостик 226, 227
— — — — энергия 235, 326
— — составленная из одинаковых звеньев 343, 344
Цилиндрическая пленка, поле токов 278
— полость, Грина функция 184
Цилиндрические гармоники 72—77
— координаты, Лапласа уравнение 62, 175
— — — — решение 175, 176 (см. также Бесселевы функции)
— — ротор 70 (*1*)
Цилиндрическое кольцо, потенциал внутри 190, 200—202

Ч

Чайлда уравнение 250, 251
Частный интеграл 325, 328, 336, 351—372
Частота, Допплер-эффект 569—571
— переменного тока 351—381
— полосы пропускания в фильтрах 366—369
— собственная контуров, индуктивно связанных 360—363
— — индуктивно связанных контуров 359—363
— — полости 520 (см также Полый резонатор)
— — резонансная 353, 354
— — сферы проводящей 480, 481
— — цепей общего вида 334—336
— — — составленных из одинаковых звеньев 343, 344
— электромагнитных волн 442
Частотные характеристики волноводов 502—509 (см. также Волновод)
— — оконечного звена фильтра 369, 370
— — фильтров с производными звеньями типа М 368, 369
— — — — простыми звеньями 366

Э

Эйнштейна и де Гааза эффект 418
Эквивалентный слой Грина 67, 68
Эквипотенциальные поверхности 20—22, 98—100, 120, 201
Экранирование квазимагнитостатическое вихревыми токами 396, 399, 400—403, 405
— магнитостатическое 287, 288, 290
— электрическое 48
Электрический диполь 17—21
— заряд 13, 14
— — в проводнике 445, 446
Электрическая индукция 22, 23, 28, 30, 31, 430
— — в кристаллах 31, 32, 435—437
— — — плоской волне 434
— — граничные условия 29, 30
Электрический мультиполь 17
Электрическое поле аксиально-симметричное 69
— — в волноводах 503—509, 517
— — — полом резонаторе 520, 532
— — двухмерное 72—119
— — заряда движущегося 561—563
— — нейтральные (равновесные) точки и линии 160
— — однородное 18, 40, 75, 99, 100, 106, 107
— — плотность энергии 42

Электрическое поле при внесении диэлектрика 66, 68
— — суперпозиция 46, 78, 94, 99, 103—105, 107—109, 125, 145, 146, 169, 185, 200
— — функция потока 83, 84, 102, 103
Электродвижущая сила переменного тока 351—381
— — взаимоиндукции 310
— — гармоническая (синусоидальная) 351—371
— — градиент 306, 430
— — комплексная 351—371
— — определение 223, 224
— — переходный процесс в контуре 345—347
— — периодическая, несинусоидальная 371—373, 378 (*15*, *17*, *18*)
— — постоянного тока 223, 224
— — самоиндукции 314
Электромагнитная индукция 306—323, 382—412
Электромагнитные волны 430
— — аберрация 569, 570
— — в анизотропной среде 435—437
— — — волноводе 502—503
— — — линиях передачи 370, 371, 447—454, 456 (*10*—*16*)
— — — в полых резонаторах 519—539
— — — проводнике 445, 446
— — — трубах 501—519
— — волновое уравнение 431, 432
— — — — решение 477, 478, 484
— — число 450
— — групповая скорость 454
— — давление 438
— — дифракция, Кирхгофа формулы 499—500 (*56*—*60*)
— — — на отверстии 485—489, 496—499 (*34*—*36*, *39*—*53*), 500 (*59*, *60*)
— — — — сфере 481—484, 493 (*13*)
— — — — цилиндре 493 (*14*—*17*)
— — длина волны 442
— — Допплер-эффект 569—571
— — излучаемые из конца коаксиальной линии 489—491
— — импульс 437
— — интенсивность 433
— — между плоскостями 540 (*6*—*8*), 541 (*10*, *11*)
— — отражение 438—442, 444, 446, 447, 450, 451, 455 (*3*)
Электромагнитные волны плоские 447—450, 452, 453, 456 (*7*, *8*), 485, 494 (*20*—*25*), 496 (*29*—*32*)
— — поляризация 435, 442, 443
— — постоянная распространения 450, 451
— — преломление 438—442
— — скорость 454, 503
— — сферические 457 (*12*), 460, 461, 464—477, 479, 480, 562
— — теорема единственности 477
— — фазовая постоянная 442, 450
— — характеристический импеданс 449, 450
— — частота 442
— — эллиптическая поляризация 442, 443
— — энергия, плотность 437, 438
— — — направление распространения 433, 434, 437
Электрон 15
— спин 418
Электростатическая линза 203, 204
Электрострикция 43
Эллипсоид заряженный 121, 122
Эллипсоидальные координаты 120
Эллиптические координаты 99
— цилиндрические координаты 70 (*5*)
Энергия в цепях тока 326
— взаимная двух контуров 307—311
— — магнитных игл 425
— — n-контуров 318
— — электрических диполей 17
— диссипация 225, 235
— диэлектрического тела в поле 68
— заряда движущегося 559
и диэлектрическая проницаемость 69
— излучаемая линейно ускоренным электроном 563—565
— — осциллятором 461
— кинетическая, в контуре 326, 332
— конденсатора заряженного 41, 326
— магнетика в поле 319
— плотность в магнитном поле 309, 310
— — — электрическом поле 41, 42
— полого резонатора 520, 521
— потенциальная в контуре 41, 326, 332
— проводников заряженных 41, 49
— распространение 363—371
— — в волноводах 501—519
— — — линиях передачи 363—370
— — — фильтрах 363—370
— сохранение 332, 440, 554, 559

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчиков 3

Предисловие автора ко второму изданию . 5

Предисловие автора к первому изданию 6

Обозначения 9

Глава I. **Основные положения электростатики** 13

§ 1. Электризация. Проводники и изоляторы (13). § 2. Положительное и отрицательное электричество (13). § 3а. Закон Кулона, единица заряда, диэлектрики (13). § 3б. Пределы применимости закона Кулона (14). § 4. Электростатическая индукция (14). § 5. Элементарные электрические заряды (15). § 6. Напряженность электрического поля (15). § 7. Электростатический потенциал (16). § 8а. Электрические диполи и мультиполи (17). § 8б. Взаимодействие диполей (18). § 9. Силовые линии (19). § 10. Эквипотенциальные поверхности (21). § 11а. Теорема Гаусса о потоке электрической индукции (22). § 11б. Силовые линии системы коллинеарных зарядов (24). § 11в. Силовые линии на бесконечности (25). § 12. Максимумы и минимумы потенциала. Теорема Ирншоу (25). § 13. Потенциал двойного электрического слоя (25). § 14. Вектор электрической индукции и силовые трубки (26). § 15. Натяжения в электрическом поле (27). § 16. Теорема Гаусса о потоке электрической индукции для неоднородных сред (28). § 17. Граничные условия и натяжения на поверхности проводников (29) § 18. Граничные условия и натяжения на поверхности диэлектрика (30). § 19. Электрическая индукция и напряженность поля в твердых диэлектриках (31). § 20. Кристаллические диэлектрики (32).

Задачи 33

Литература 35

Глава II. **Конденсаторы, диэлектрики, системы проводников** . . 36

§ 1. Теорема единственности (36). § 2. Емкость (36). § 3. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов (37). § 4. Сферический конденсатор (38). § 5. Цилиндрический конденсатор (39). § 6. Плоский конденсатор (39). § 7. Защитные кольца (40). § 8. Энергия заряженного конденсатора (41). § 9а. Энергия электрического поля (41). § 9б. Плоский конденсатор с кристаллическим диэлектриком (42). § 10. Натяжения в случае зависимости диэлектрической проницаемости от плотности среды (42). § 11. Электрострикция в жидких диэлектриках (43). § 12. Силы, действующие на проводник в диэлектрике (44). § 13. Теорема взаимности Грина (45). § 14. Суперпозиция полей (45). § 15. Индуцированные заряды на заземленных проводниках (46). § 16. Потенциальные коэффициенты (47). § 17. Собственная и взаимная емкости (47). § 18. Электростатическая экранировка (48). § 19. Потенциальные и емкостные коэффициенты в случае двух отдаленных проводников (48). § 20. Энергия системы зарядов (49). § 21. Силы и моменты сил, действующие на заряженные проводники (49).

Задачи . 51

Литература 57

Глава III. **Общие теоремы** . 58

§ 1. Теорема Остроградского—Гаусса (58). § 2. Теорема Стокса (59). § 3. Уравнения Пуассона и Лапласа (59). § 4. Ортогональные криволинейные координаты (60). § 5. Представление ротора в ортогональных криволинейных координатах (61). § 6. Представление оператора $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla)$ в различных системах координат (62). § 7. Теорема Грина (62). § 8. Теорема взаимности Грина для диэлектрических сред (64). § 9. Функция Грина (64). § 10. Решение уравнения Пуассона (65). § 11. Теорема единственности при наличии диэлектрических сред (66). § 12. Внесение нового проводника (66). § 13. Эквивалентный слой Грива (67). § 14. Энергия диэлектрического тела в электрическом поле (68). § 15. Изменение электрической энергии системы при увеличении диэлектрической проницаемости (68). § 16. Потенциал аксиально-симметричного поля (69).

Задачи 70

Литература 71

Глава IV. **Двухмерное распределение потенциала** . . 72

§ 1. Двухмерные поля и потенциалы (72). § 2. Круговые гармоники (72). § 3. Представление потенциала поля линейного заряда в виде ряда по гармоникам (74). § 4. Проводящий или диэлектрический цилиндр в однородном поле (74). § 5. Диэлектрический цилиндр. Метод изображений (76). § 6. Изображение в проводящем цилиндре (78). § 7. Изображение в плоской поверхности проводника или диэлектрика. Пересекающиеся проводящие плоскости (78). § 8. Задача о диэлектрическом клине (79). § 9. Комплексные величины (81). § 10. Сопряженные функции (82). § 11. Функции потока (83). § 12. Напряженность электрического поля. Поток электрической индукции (83). § 13. Функции U и V для поля линейного заряда (84). § 14. Емкость между двумя круглыми цилиндрами (85). § 15. Емкость между цилиндром и плоскостью. Емкость между двумя одинаковыми цилиндрами (86). § 16. Конформные преобразования (87). § 17. Уравнение границы в параметрической форме (87). § 18. Нахождение сопряженных функций (88). § 19. Преобразование Шварца (90). § 20. Многоугольники с одним положительным углом (92). § 21. Многоугольник с углом, равным нулю (92). § 22а. Многоугольники с одним отрицательным углом. Двухмерный диполь. Инверсия (94). § 22б. Изображения при двухмерной инверсии (96). § 23. Многоугольник с двумя углами (97). § 24. Щель, прорезанная в бесконечной плоскости (100). § 25. Римановы поверхности (101). § 26. Задача о круглом цилиндре, расположенном внутри эллиптического (102). § 27а. Условия на границе раздела двух диэлектриков (102). § 27б. Эллиптический диэлектрический цилиндр (103). § 27в. Момент, действующий на диэлектрический цилиндр (105). § 28. Многоугольник с закругленным углом (106). § 29. Плоская решетка из цилиндрических проводов большого диаметра (106). § 30. Случай углов, нецелократных $\pi/2$ (109).

Задачи 109

Литература 118

Глава V **Трехмерное распределение потенциала** 119

§ 1. При каких условиях поверхности некоторого семейства могут быть эквипотенциальными? (119). § 2. Потенциал поверхностей второго порядка, определяемых уравнением $x^2/(a^2+\theta) + y^2/(b^2+\theta) + z^2/(c^2+\theta) = 1$ (120). § 3. Заряженный проводящий эллипсоид (121). § 4. Эллиптический и круглый диски (122) § 5. Метод изображений. Проводящие плоскости (122). § 6. Плоская граница двух диэлектриков (123). § 7. Изображение в сферическом проводнике (124). § 8. Пример применения метода изображений для нахождения поля точечного заряда (125). § 9а. Бесконечная система изображений. Задача о двух сферах (125). § 9б. Уравнения в конечных разностях. Задача о двух сферах (127). § 9в. Сфера над плоскостью и две одинаковые сферы (129). § 10. Инверсия в пространстве трех измерений. Геометрические свойства (129). § 11а. Инверсия потенциала и зарядов-изображений (130). § 11б. Пример инверсии изображений (131). § 11в. Инверсия заряженной проводящей поверхности (131). § 11г. Преобразование емкости при инверсии (132). § 12а. Пространственные гармоники (133). § 12б. Задача о клине, ортогонально пересекающемся с поверхностью вращения (134). § 13. Сферические гармоники (136). § 14а. Общие свойства поверхностных гармоник (137). § 14б. Потенциал гармонического распре-

деления заряда (138). § 15. Дифференциальные уравнения поверхностных гармоник (138). § 16а. Зональные гармоники. Уравнение Лежандра (139). § 16б. Решение уравнения Лежандра при помощи рядов (139). § 16в. Полиномы Лежандра. Формула Родрига (140). § 16г. Коэффициенты Лежандра. Обратное расстояние (141). § 16д. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра (142). § 16е. Интеграл от произведения полиномов Лежандра (142). § 16ж. Разложение функций по полиномам Лежандра (143). § 16з. Таблица полиномов Лежандра (144). § 16и. Полиномы Лежандра мнимого аргумента (145) § 17. Потенциал заряженного кольца (145). § 18. Заряженное кольцо в проводящей сфере (146). § 19. Сферическая диэлектрическая оболочка в однородном поле (146). § 20. Сферический конденсатор с малым расстоянием между центрами внутренней и внешней обкладок (147). § 21. Задачи с простой конической границей (148). § 22а. Зональные гармоники второго рода (148). § 22б. Рекуррентные формулы для функций Лежандра второго рода (149). § 22в. Выражение функций Лежандра второго рода через полиномы Лежандра (150). § 22г. Некоторые значения функций Лежандра второго рода (151). § 22д. Функции Лежандра второго рода мнимого аргумента (151). § 22е. Применение функций Лежандра второго рода в теории потенциала (152). § 23. Зональные гармоники нецелого порядка (152). § 24а. Присоединенные функции Лежандра (153). § 24б. Интегралы от произведений присоединенных функций (155). § 24в. Присоединенные функции от мнимого аргумента (157). § 24г. Рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра (158). § 24д. Некоторые значения присоединенных функций Лежандра (159). § 24е. Равновесные (нейтральные) точки и линии (160). § 25. Биаксиальные гармоники (160). § 26. Конические границы (161). § 27а. Присоединенные функции Лежандра нецелого порядка (162). § 27б. Функция Грина для конуса (163). § 27в. Функция Грина для конической полости (164). § 28а. «Сплюснутые» сфероидальные координаты (164). § 28б. Гармоники сплюснутого сфероида (166). § 28в. Проводящий лист с круглым отверстием (167). § 28г. Момент, действующий на диск в однородном поле (168). § 28д. Потенциал заряда, распределенного по поверхности сфероида (170). § 28е. Представление потенциала точечного заряда через гармоники сплюснутого сфероида (172). § 29а. Гармоники вытянутого сфероида (172). § 29б. Вытянутый сфероид в однородном поле (174). § 30а. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (175). § 30б. Уравнение Бесселя и функции Бесселя (175). § 30в. Модифицированное уравнение Бесселя и модифицированные функции Бесселя (176). § 30г. Решение уравнения Бесселя (176). § 30д. Рекуррентные формулы для функций Бесселя (178). § 30е. Значения функций Бесселя на бесконечности (179). § 30ж. Интегралы от бесселевых функций (180). § 30з. Разложение в ряд по функциям Бесселя (182). § 30и. Функция Грина для цилиндра. Обратное расстояние (183). § 30к. Функция Грина для цилиндрической полости (185). § 31а. Функции Бесселя нулевого порядка (185). § 31б. Корни и численные значения бесселевых функций нулевого порядка (186). § 31в. Производные и интегралы от бесселевых функций нулевого порядка (186). § 31г. Поле точечного заряда, расположенного над диэлектрической пластинкой (188). § 31д. Потенциал внутри полого цилиндрического кольца (190) § 32. Функция Бесселя нецелого порядка. Сферические функции Бесселя (191). § 33а. Модифицированные бесселевы функции (192). § 33б. Рекуррентные формулы для модифицированных бесселевых функций (193). § 33в. Значения модифицированных бесселевых функций на бесконечности (194). § 33г. Интеграл от произведения модифицированных бесселевых функций комплексного аргумента (194). § 33д. Функция Грина для кольцевой цилиндрической полости (195). § 34а. Модифицированные бесселевы функции нулевого порядка (197). § 34б. Интегральное представление модифицированных бесселевых функций второго рода. Значение на бесконечности (197). § 35. Интегральное представление бесселевых функций нулевого порядка (198). § 36а. Представление обратного расстояния через модифицированные бесселевы функции (199). § 36б. Цилиндрические границы раздела двух диэлектрических сред (200). § 37. Потенциал внутри кольцевой цилиндрической полости (200). § 38. Модифицированные бесселевы функции нецелого порядка (202). § 39. Приближенные решения. Электростатические ливзы (203). § 40. Функции клина (204).

Задачи 205

Литература 221

Глава VI. **Электрический ток** . 222

§ 1. Плотность электрического тока. Уравнение непрерывности (222) § 2. Электродвижущая сила (223). § 3. Закон Ома. Удельное сопротивление (224). § 4. Тепловое действие электрического тока (225). § 5. Линейные проводники. Законы Кирхгофа. Последовательные и параллельные соединения проводников (225). § 6. Расчет электрических цепей. Контурные токи. Мост Уитстона (226). § 7. Цепи из одинаковых звеньев (227). § 8. Линия с непрерывно распределенной утечкой (229). § 9. Общая теория цепей (230). § 10. Сопряженные проводники. Двойной мост Кельвина (232). § 11. Постоянные токи в проводящих средах (233). § 12. Общие теоремы (235). § 13. Двухмерный ток (235). § 14. Длинная лента со скачкообразно меняющейся шириной (237). § 15. Трехмерное распределение тока (239). § 16. Системы электродов. Две сферы. Удаленные электроды (240). § 17. Задача о проводящем шаре (240). § 18. Задача о сплошном проводящем цилиндре (242). § 19. Сопротивление земли (243). § 20. Токи в тонких изогнутых пленках (244). § 21. Распределение тока в сферической пленке (245). § 22. Поверхность вращения (246). § 23. Предельные значения сопротивления (247). § 24. Токи в анизотропных средах. Слои в земной коре (249). § 25. Ток, обусловленный движением пространственного заряда. Уравнение Чайльда (250).

Задачи 252

Литература 259

Глава VII. **Магнитное взаимодействие токов** 260

§ 1. Определение единицы силы тока (ампера) через величину магнитного момента (260). § 2. Магнитная индукция и магнитная проницаемость (260). § 3. Магнитный вектор-потенциал. Однородное поле (262). § 4. Теоремы единственности в магнитостатике (263). § 5. Разложение вектор-потенциала по ортогональным функциям (264). § 6. Вектор-потенциал в цилиндрических координатах (266). § 7. Вектор-потенциал в сферических координатах (267). § 8. Выражение для вектор-потенциала через значение магнитной индукции на оси (267). § 9. Уравнение аксиально симметричных трубок магнитной индукции (268). § 10. Вектор-потенциал и поле двухпроводной линии (269). § 11. Вектор-потенциал и поле круглой петли (270). § 12. Поле токов, текущих по сферической пленке (271). § 13. Зональные токи в сферической пленке (272). § 14. Представление поля круглой петли через сферические гармоники (273). § 15. Закон Био и Савара. Поле прямолинейного провода (275). § 16. Поле соленоида с произвольным шагом намотки (275). § 17. Поле в цилиндрической полости внутри проводящего круглого стержня (277). § 18. Поле токов, текущих вдоль цилиндрической проводящей пленки (278). § 19. Сила, действующая на электрический контур в магнитном поле (278). § 20. Примеры на вычисление сил взаимодействия между электрическими контурами (280). § 21. Вектор-потенциал и вектор намагниченности (281). § 22. Граничные условия для магнитных полей и для вектор-потенциалов (282). § 23. Пример использования векторов a и A (284). § 24. Метод изображений для токов в случае плоской границы (285). § 25. Магнитная индукция и магнитная проницаемость в кристаллах (286). § 26. Двухмерные магнитные поля (286). § 27. Магнитное экранирование двухпроводной линии (287). § 28. Метод изображений для токов в двухмерных системах (288). § 29. Магнитодвижущая сила и напряженность магнитного поля (289). § 30. Магнитный контур. Тор (290). § 31. Магнитный контур с воздушным зазором (291). § 32. Поле в трансформаторе броневого типа (292). § 33. Полюс с расщепленным наконечником. Эффективный воздушный зазор (296).

Задачи 298

Литература 304

Глава VIII. **Электромагнитная индукция** 306

§ 1. Закон индукции Фарадея (306). § 2. Взаимная энергия двух контуров (307). § 3. Энергия магнитного поля (308). § 4. Коэффициент взаимной индукции (309). § 5. Граничные условия для a (310). § 6. Коэффициент взаимной индукции простейших контуров (311). § 7. Коэффициент взаимной индукции двух колец (311). § 8. Переменная взаимная индукция (312). § 9. Самоиндукция (314). § 10. Вычисление самоиндукции. Тонкий провод (314). § 11. Самоиндукция круглой петли (315). § 12. Самоиндукция соленоида (316). § 13. Самоиндукция двухпроводной линии (316). § 14. Энергия

n контуров (318). § 15. Натяжения в магнитном поле (318). § 16. Энергия магнетика в статическом магнитном поле (319).

Задачи 319

Литература 324

Глава IX. **Переходные явления в электрических цепях** . 325

§ 1. Неустановившиеся электрические процессы (325). § 2. Энергетические соотношения в электрической цепи (325). § 3 Контур, состоящий из емкости, индуктивности и сопротивления (326). § 4. Зарядка и разряд конденсатора (327). § 5а. Нарастание и спадание тока в катушке индуктивности (329). § 5б. Индуктивно связанные контуры (329). § 6. Кинетическая энергия и электрокинетический импульс (332). § 7. Общий вид уравнений переходных процессов в цепях (332). § 8. Решение для цепей общего вида (334). § 9. Типы собственных колебаний (336). § 10. Цепь, содержащая постоянную э.д.с. (336). § 11. Собственные частоты двух индуктивно связанных контуров (337). § 12. Амплитуды колебаний в двух связанных контурах (339). § 13. Колебательный режим (340). § 14. Индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением (341). § 15. Настроенные индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением (343). § 16. Цепи из одинаковых звеньев (343). § 17. Интегральный эффект переходного процесса (345). § 18. Переходные явления при импульсах конечной продолжительности (345).

Задачи

Литература 350

Глава X. **Переменные токи** 351

§ 1. Гармонические электродвижущие силы. Частное решение (351). § 2. Контур, содержащий сопротивление, емкость и индуктивность (351). § 3. Мощность, эффективные значения, резонанс (353). § 4. Графическое представление. Векторная диаграмма (354). § 5. Последовательное и параллельное соединение импедансов (355). § 6. Передача мощности (356). § 7. Мостик импедансов (356). § 8. Цепь переменного тока в общем случае (357). § 9. Сопряженные ветви в электрической цепи. Мостик Андерсона (359). § 10. Вынужденные колебания в индуктивно связанных контурах (359). § 11. Индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением (362). § 12. Настроенные индуктивно связанные контуры, обладающие малым активным сопротивлением (362). § 13. Фильтры (363). § 14. Условия на концах в частотных фильтрах (365). § 15. Частотные характеристики фильтров (366). § 16. Полосовой фильтр (366). § 17. Производные звенья типа M (368). § 18. Выходное устройство фильтра (369). § 19. Линии передачи (370). § 20. Электродвижущие силы несинусоидальной формы. Метод рядов Фурье (371). § 21. Электродвижущие силы несинусоидальной формы. Метод повторяющегося переходного режима (372). § 22. Контур с отрицательным активным сопротивлением (374).

Задачи 376

Литература 381

Глава XI. **Вихревые токи** 382

§ 1. Индуцированные токи в объемных проводниках (382). § 2. Решение уравнения для вектор-потенциала вихревых токов (383). § 3. Скин-эффект в стационарном случае (384). § 4. Скин-эффект в случае полого цилиндрического проводника (386). § 5. Скин-эффект в сплошном цилиндрическом проводнике (386). § 6. Решение в сферических координатах при аксиальной симметрии (388). § 7. Проводящий шар в переменном поле (390). § 8. Мощность, поглощаемая шаром в переменном магнитном поле (392). § 9. Переходные явления в проводящем шаре (392). § 10. Вихревые токи в плоских пластинках (394). § 11. Решение задачи о вихревых токах в плоской бесконечной пластинке методом изображений (395). § 12. Момент, действующий на вращающуюся петлю с током или магнитный диполь (396). § 13. Вихревые токи, возбуждаемые вращающимся диполем (398). § 14. Экранирование круглой петли посредством тонкой проводящей пластинки (399). § 15. Зональные вихревые токи в сферической пленке (400). § 16. Вихревые токи в тонкой цилиндрической пленке (403). § 17. Переходные

явления при экранировании с помощью толстой цилиндрической оболочки (405).

Задачи 407

Литература 412

Глава XII. **Магнетизм** 413

§ 1. Парамагнетизм и диамагнетизм (413). § 2. Магнитная восприимчивость (414). § 3. Магнитные свойства кристаллов (414). § 4. Кристаллический шар в однородном магнитном поле (415). § 5. Ферромагнетизм (415). § 6. Гистерезис. Постоянный магнетизм (417). § 7. Природа постоянного магнетизма (417). § 8. Равномерное намагничивание. Эквивалентный поверхностный ток (418). § 9. Намагниченный шар и цилиндр. Магнитные полюсы (419). § 10. Условия на границе с постоянным магнитом (420). § 11. Сферический постоянный магнит в однородном поле (420). § 12а. Подъемная сила подковообразного магнита (421). § 12б. Поле цилиндрического магнита (423). § 13. Магнитные иглы (424).

Задачи 426

Литература 429

Глава XIII. **Плоские электромагнитные волны** 430

§ 1. Уравнения Максвелла (430). § 2. Волновое уравнение. Электромагнитные потенциалы. Вектор Герца (431). § 3. Вектор Умова—Пойнтинга (433). § 4. Плоские волны в однородном незаряженном диэлектрике (433). § 5. Скорость распространения волны в анизотропных средах (435). § 6. Поверхность, образованная лучом, и поляризация в анизотропных средах (436). § 7. Энергия, давление и импульс плоской волны (437). § 8. Отражение и преломление плоских волн (438). § 9. Интенсивности отраженной и преломленной волн (440). § 10. Частота. Длина волны. Эллиптическая поляризация (442). § 11. Полное отражение (444). § 12. Электромагнитные волны в однородных проводниках (445). § 13. Плоские волны в однородных изотропных проводниках (445). § 14. Отражение от проводящей поверхности (446). § 15. Плоские волны вдоль идеально проводящих цилиндрических проводников (447). § 16. Характеристический импеданс среды (449). § 17. Отражения от неоднородностей. Согласующие секции (450). § 18. Комплексный вектор Умова—Пойнтинга (451). § 19. Квазиплоские волны вдоль неидеальных проводников. Двухпроводная линия Лехера (452). § 20. Групповая скорость (454)

Задачи 455

Литература 457

Глава XIV. **Излучение электромагнитных волн** 459

§ 1. Постановка задачи (459). § 2. Два типа вектор-потенциалов (460). § 3. Сферические электромагнитные волны. Диполь (460). § 4. Запаздывающие потенциалы (462). § 5. Излучение линейной антенны (464). § 6. Поля на больших расстояниях от линейной антенны (467). § 7. Излучение бегущей волны (469). § 8. Коническая линия передачи (469). § 9. Биконическая антенна (471). § 10. Сложные антенны (474). § 11. Влияние земли (476). § 12. Единственность решения (477). § 13. Решения волнового уравнения в сферических координатах (477). § 14. Разложение плоской волны по полиномам Лежандра (478). § 15. Излучение кольцевого тока. Магнитный диполь (479). § 16. Свободные колебания проводящей сферы (480). § 17. Вынужденные колебания диэлектрического или проводящего шара (481). § 18. Решения волнового уравнения в цилиндрических координатах (484). § 19. Разложение плоской волны по цилиндрическим гармоникам (485). § 20. Излучение из отверстий в плоском проводящем экране (485). § 21. Дифракция на прямоугольном отверстии в проводящем плоском экране (488). § 22. Ортогональные функции в задаче о дифракции. Излучение открытого конца коаксиальной линии (489).

Задачи 491

Литература 500

Глава XV. **Волноводы и полые резонаторы** . . 504

§ 1. Волны в полых цилиндрических трубах (501). § 2. Учет затухания в волноводах (503). § 3. Прямоугольный волновод (505). § 4. Круглый вол-

новод (507). § 5. Коаксиальный волновод (509). § 6. Плоские неоднородности в коаксиальной линии (510). § 7. Возбуждение волноводов (511). § 8. Возбуждение круглого волновода элементом тока (512). § 9. Возбуждение круглого волновода петлей с током (514). § 10. Возбуждение круглого волновода через отверстие (515). § 11. Плоские неоднородности в прямоугольных волноводах (516). § 12. Полые резонаторы. Собственные колебания (519). § 13 Типы независимых собственных колебаний полости (520). § 14. Емкость и индуктивность цилиндрической полости (521). § 15. Затухание собственных колебаний. Активное сопротивление полости (522). § 16. Собственные колебания цилиндрической полости (523). § 17. Свойства прямоугольного резонатора (524). § 18. Свойства резонатора, имеющего форму круглого цилиндра (526). § 19. Многосвязные цилиндрические полые резонаторы (526). § 20. Отрезок коаксиального кабеля как резонатор (528). § 21. Собственные колебания в сферической полости (529). § 22. Собственные колебания реальных полых резонаторов (530). § 23. Полые резонаторы сложной формы (531). § 24. Возбуждение полого резонатора петлей с током (534). § 25. Возбуждение круглого цилиндрического резонатора петлей с током (536). § 26. Возбуждение полого резонатора при помощи электрода (537). § 27. Возбуждение полого резонатора через отверстие (539).

Задачи 540

Литература 551

Глава XVI. **Специальная теория относительности и движение заряженных частиц** 552

§ 1. Постулаты специальной теории относительности (552). § 2. Преобразование Лоренца (552). § 3. Преобразование скорости и ускорения (553). § 4. Зависимость массы от скорости (554). § 5. Преобразование сил (555). § 6. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле (557). § 7. Движение заряда в однородном магнитном поле (558). § 8. Энергия движущейся заряженной частицы (559). § 9. Критическое магнитное поле в магнетроне (559). § 10. Траектория космической частицы в однородном поле (560). § 11 Магнитное поле движущегося заряда (561). § 12. Запаздывающие поля и потенциалы движущегося заряда (562). § 13. Излучение равномерно ускоренного, прямолинейно движущегося электрона (563). § 14. Преобразование уравнений Максвелла (565). § 15. Определение скорости самолета относительно земли (566). § 16. Движение заряженной частицы в перекрещивающихся электрическом и магнитном полях (567). § 17. Аберрация и эффект Допплера (569).

Задачи 571

Литература 573

Приложение. **Системы электрических единиц** 574

Дополнительная литература 582

Предметный указатель 583

В. Смайт, Электростатика и электродинамика

Редактор Е. И. МАЙКОВА. Художник *Н. А. Липин.* Технический редактор *Б. М. Ильин*
Корректоры *К. И. Иванова* и *А. Н. Окорокова*

Сдано в производство 2/IX 1953 г. Подписано к печати 28/XII 1953 г. Т-09087. Бумага 70×108¹/₁₆=19.0 бум. л. 52.1 печ. л. Уч.-изд. л. 55,1. Изд. № 2/1642. Цена 40 р. 55 к. Зак. 1216.

Издательство иностранной литературы. Москва, Ново-Алексеевская, 52.

16-я типография Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9

ОПЕЧАТКИ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
391	Формула (11.65)	$=\frac{1}{r\sin 0}\frac{\partial}{\partial 0}(\sin 0 A_0)$	$=\frac{1}{r\sin 0}\frac{\partial}{\partial 0}(\sin 0 \check{A}_0)$
445	Формула (13.102)	$\hat{B}_0$	$\check{B}_0$
483	10 св.	, как $\check{W}_{te}$ — выражение	, как $\check{W}_{te}$ — в выражение
496	1 сн.	$\check{A}_0=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\theta}\check{A}_\theta$	$\check{A}_\theta=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\theta}\check{A}'_\theta$
525	Формула (15.121)	$-\mathrm{i}\frac{m}{a}$	$-\mathrm{j}\frac{m}{a}$

В. Смайт